



**Università degli Studi di Padova**

---

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

# **Teoremi di Struttura degli Ideali Bilateri di una Leavitt path algebra**

Candidato:

**Luca Buoso**

Matricola 1180211

Relatore:

**Prof. Alberto Tonolo**

---

Padova, 27 Settembre 2019



# Indice

<b>Lista dei simboli</b>	<b>5</b>
<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>1 Definizioni ed esempi</b>	<b>11</b>
1.1 Definizioni preliminari . . . . .	11
1.2 Leavitt path algebre . . . . .	20
1.3 Cohn path algebre . . . . .	29
1.4 Leavitt path algebre di grafi infiniti . . . . .	41
<b>2 Ideali graduati</b>	<b>55</b>
2.1 Definizioni preliminari . . . . .	55
2.2 Algebre $\mathbb{Z}$ -graduate . . . . .	59
2.3 Il Teorema di Riduzione e i Teoremi di Unicit� . . . . .	66
2.4 Propriet� degli Ideali graduati . . . . .	91
2.5 Il Teorema di Struttura degli Ideali Graduati . . . . .	110
2.6 Lo zoccolo di una Leavitt path algebra . . . . .	134
<b>3 Ideali bilateri</b>	<b>149</b>
3.1 Propriet� degli ideali bilateri . . . . .	149
3.2 Il Teorema di Struttura degli Ideali bilateri . . . . .	163
3.3 Leavitt path algebre semplici, artiniane e noetheriane . . . . .	171
3.4 Principi di Dicotomia e Tricotomia . . . . .	180
<b>Bibliografia</b>	<b>189</b>



# Lista dei simboli

Simbolo	Significato
$K$	Campo
$K^\times$	Elementi invertibili di $K$
$R$	Anello associativo
$A$	$K$ -algebra associativa
$K\langle X \rangle$	$K$ -algebra associativa libera generata dall'insieme $X$
$M_R$	$R$ -modulo destro
${}_R M$	$R$ -modulo sinistro
$I(X)$	Ideale bilatero generato dall'insieme $X$
$xR$	Ideale destro generato dall'elemento $x$
$Rx$	Ideale sinistro generato dall'elemento $x$
$\text{span}_K(X)$	Sottospazio generato dall'insieme $X$
${}_R \text{ann}(x)$	$\{ r \in R \mid rx = 0 \}$
$\text{ann}_R(x)$	$\{ r \in R \mid xr = 0 \}$
$\ker(f)$	Nucleo di $f$
$\mathcal{L}(A)$	Insieme degli ideali bilateri di $A$
$\mathcal{L}_{gr}(A)$	Insieme degli ideali graduati di $A$
$\text{End}(V)$	Insieme degli endomorfismi di $V$
$\text{Hom}(R, S)$	Insieme degli omomorfismi tra $R$ ed $S$
$\mathcal{P}(X)$	Insieme della parti di $X$
$\text{Soc}(R)$	Zoccolo di $R$
$J(R)$	Radicale di Jacobson di $R$
$\mathbb{N}$	$\{ 1, 2, 3, \dots \}$
$\mathbb{Z}$	$\{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$
$\mathbb{Z}^+$	$\{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$
$E$	Grafo
$E^0$	Insieme dei vertici di $E$
$E^1$	Insieme dei lati di $E$
$(E^1)^*$	$\{ e^* \mid e \in E^1 \}$
$s(e)$	Vertice iniziale del lato $e$
$r(e)$	Vertice finale del lato $e$
$\widehat{E}$	Grafo esteso
$\ell(\mu)$	Lunghezza di $\mu$

$E/H$	Grafo quoziente rispetto all'insieme $H$
$E/(H, S)$	Grafo quoziente rispetto alla coppia $(H, S)$
$\text{Path}(E)$	Insieme dei cammini di $E$
$\text{Reg}(E)$	Insieme dei vertici regolari di $E$
$\text{Sink}(E)$	Insieme dei vertici sink di $E$
$\text{Inf}(E)$	Insieme dei vertici infinite emitter di $E$
$\overline{H}$	Chiusura satura ereditari dell'insieme $H$
$\overline{H}^S$	Chiusura satura ereditaria dell'insieme $H$ rispetto all'insieme $S$
$\mathcal{H}_E$	Insieme degli insiemi di vertici saturi ed ereditari
$B_H$	Insieme dei vertici di rottura di un insieme ereditario $H$
$KE$	Path algebra di $E$
$L_K(E)$	Leavitt path algebra di $E$ a coefficienti $K$
$C_K(E)$	Cohn path algebra di $E$ a coefficienti in $K$
$C_K^X(E)$	Cohn path algebra di $E$ a coefficienti in $K$ relativa all'insieme $X$
$\text{deg}(x)$	Grado di $x$
$\text{gdeg}(x)$	Grado fantasma di $x$

---

# Introduzione

Le Leavitt path algebre sono strutture algebriche introdotte nel 2004 da Ara, Moreno e Pardo, e contemporaneamente da Gene Abrams e Aranda Pino. Esse sono delle algebre costruite a partire da un campo  $K$  e un grafo orientato.

La loro storia si collega ai lavori di G. W. Leavitt degli anni '60, dove tentava di capire il fallimento della proprietà IBN (Invariant Basis Number) in un anello arbitrario. Un anello  $R$  possiede la proprietà IBN se per ogni coppia di interi positivi  $m \neq m'$ , gli  $R$ -moduli sinistri liberi  ${}_R R^m$  ed  ${}_R R^{m'}$  non sono isomorfi. L'anello  $\mathbb{Z}$  dei numeri interi, campi, anelli di divisione, anelli di polinomi a coefficienti in un campo sono tutti esempi di anelli con la proprietà IBN. Un esempio classico di anello senza proprietà IBN è l'anello degli endomorfismi di uno spazio vettoriale su un campo  $K$  e di dimensione infinita.

Leavitt pose la seguente domanda: dati due interi positivi  $m < n$ , esiste un anello  $R$  tale che gli  $R$ -moduli sinistri liberi  ${}_R R^m$  ed  ${}_R R^n$  sono isomorfi, dove l'intero  $m$  è il più piccolo intero positivo per cui  ${}_R R^m \cong {}_R R^j$  per un qualche  $j \neq m$ , e l'intero  $n$  è il più piccolo intero positivo per cui  ${}_R R^m \cong {}_R R^n$ ? La risposta che diede Leavitt è affermativa. In particolare, per ogni coppia di interi positivi  $(m, n)$  e campo  $K$  egli costruì una  $K$ -algebra, detta algebra di Leavitt di tipo  $(m, n)$  e indicata con  $L_K(m, n)$ , con le proprietà richieste.

Le Leavitt path algebre costituiscono una generalizzazione delle algebre di Leavitt di tipo  $(1, n)$ , con  $n \geq 2$ .

In questa tesi ci concentriamo sullo studio degli ideali bilateri di una Leavitt path algebra. In particolare, nel Capitolo 1 introduciamo la nozione di Leavitt path algebra e studiamo le sue proprietà. Nella Sezione 2.1 richiamiamo alcune nozioni basilari e la terminologia sui grafi orientati, la proprietà IBN e le Path algebre, delle strutture algebriche, che come le Leavitt path algebre vengono associate a un grafo e a un campo. Nella Sezione 1.2 definiamo la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  di un grafo  $E$  a coefficienti in un campo  $K$ , diamo una descrizione dei suoi generatori come  $K$ -spazio vettoriale, e verifichiamo come in generale le Leavitt path algebre non siano algebre unitarie, ma algebre con unità locali. Inoltre, riportiamo alcuni esempi osservando come le Leavitt path algebre costruite a partire da certi

grafi siano algebre già incontrate come le algebre di matrici, l'algebra dei polinomi di Laurent e le algebre di Leavitt di tipo  $(1, n)$ . Nella Sezione 1.3 introduciamo la Cohn path algebra  $C_K^X(E)$  di un grafo  $E$  a coefficienti in un campo  $K$  rispetto ad un insieme di vertici  $X$ , che si ottiene con una modifica naturale della definizione di Leavitt path algebra. In realtà, queste algebre risultano delle Leavitt path algebre associate a un grafo costruito a partire da  $E$ . Il capitolo si conclude con la Sezione 1.4, in cui ci proponiamo di studiare le Leavitt path algebre costruite a partire da grafi infiniti. A tale scopo facciamo uso del linguaggio della Teoria delle Categorie, con il vantaggio di poter scrivere una Leavitt path algebra di un grafo infinito come limite diretto di Leavitt path algebre di grafi finiti.

Nel Capitolo 2 inizia lo studio degli ideali di una Leavitt path algebra, in particolare ci soffermiamo sugli ideali graduati. Nella Sezione 2.1 dato un grafo  $E$  diamo la definizione di ciclo, e introduciamo gli insiemi di vertici di  $E$  saturi ed ereditari. Queste nozioni risultano fondamentali per la descrizione dei generatori di ideali graduati e non. Nella Sezione 2.2 introduciamo la struttura di algebra  $\mathbb{Z}$ -graduata di una Leavitt path algebra e indaghiamo alcune proprietà generali sugli ideali graduati. Nella Sezione 2.3 trattiamo un risultato che torna molto utile in vari contesti: il Teorema di Riduzione 2.3.7. Le conseguenze principali di questo teorema sono i Teoremi di Unicità 2.3.11 e 2.3.12, ogni Leavitt path algebra è un anello semiprimo, il radicale di Jacobson di una Leavitt path algebra è nullo, e algebre di matrici a coefficienti in una Leavitt path algebra sono ancora Leavitt path algebre di opportuni grafi. Nella Sezione 2.4 descriviamo i generatori di un ideale graduato e l'algebra quoziente di una Leavitt path algebra con un ideale graduato, che risulta essere ancora una Leavitt path algebra. Nella Sezione 2.5 dimostriamo il Teorema di Struttura degli Ideali Graduati 2.5.9, che ci permette di descrivere completamente il reticolo degli ideali graduati di una Leavitt path algebra  $L_K(E)$  in termini di insiemi di vertici del grafo  $E$ . A seguito di questo teorema possiamo classificare le Leavitt path algebre graduate semplici, graduate noetheriane e graduate artiniane in base alle caratteristiche del grafo. Nella Sezione 2.6 diamo una descrizione dello zoccolo di una Leavitt path algebra  $L_K(E)$  come ideale bilatero generato da degli opportuni vertici di  $E$ . In particolare, lo zoccolo risulta un ideale graduato. La sezione si conclude con il Teorema della Dimensione Finita 2.6.19, che classifica le Leavitt path algebre di dimensione finita in base alla geometria del grafo di partenza.

Nel Capitolo 3 proseguiamo lo studio degli ideali bilateri di una Leavitt path algebra. L'obiettivo della Sezione 3.1 è quello di descrivere i generatori di un ideale bilatero. Nella Sezione 3.2 dimostriamo il Teorema di Struttura degli Ideali Bilateri 3.2.5, che fornisce una descrizione completa del reticolo degli ideali bilateri di una Leavitt path algebra  $L_K(E)$  in termini di insiemi di vertici e di cicli di  $E$ . Nella Sezione 3.3 classifichiamo le Leavitt path algebre semplici, artiniane e noetheriane in base alle proprietà del grafo di



partenza. Il capitolo si conclude con la Sezione 3.4 dove presentiamo il Principio di Dicotomia 3.4.13 il Principio di Tricotomia 3.4.15, che specificano come si suddividono le Leavitt path algebre semplici e le Leavitt path algebre graduate semplici.

## **Ringraziamenti**

Un sentito ringraziamento va al mio relatore, il Prof. Alberto Tonolo, per la disponibilità, la pazienza e la gentilezza che ha avuto nei miei confronti. Inoltre, a lui va il merito di aver scelto come oggetto di studio di questa tesi le Leavitt path algebre, le quali mi hanno entusiasmato per tutto il periodo di preparazione di questo lavoro.

I'm grateful to Prof. Gene Abrams for his help in the resolution of some doubts.

Un ringraziamento speciale va ai miei genitori, che per tutta la mia carriera universitaria mi hanno sostenuto e aiutato, soprattutto nei momenti più difficili.

Tra le tante persone che ho conosciuto a Padova ringrazio Benedetta Turato, Luigi Martinelli e Giovanna Dainese perché la loro amicizia e il tempo trascorso con loro saranno i ricordi più belli che porterò con me.

Ringrazio anche la Comunità Monastica di Santa Giustina per la sua ospitalità che ho ricevuto durante la permanenza nel collegio universitario. In particolare, ringrazio il Padre Abate Innocenzo Negrato per aver creduto sempre in me.

Infine, ringrazio tutti i familiari, gli amici, i colleghi e i collegiali che mi sono stati vicini in questo percorso.



# Capitolo 1

## Definizioni ed esempi

In questo capitolo introdurremo la nozione di Leavitt path algebra associata a un grafo e a un campo. Ne studieremo le principali proprietà e mostreremo alcuni esempi significativi.

### 1.1 Definizioni preliminari

**Grafi.** Per poter parlare di Leavitt path algebre abbiamo bisogno della nozione di grafo. I grafi che consideriamo sono grafi orientati, ovvero i lati che congiungono i vertici sono orientati. Più precisamente:

**Definizione 1.1.1.** Un *grafo*  $E$  è una quaterna  $(E^0, E^1, s, r)$ , dove  $E^0$  ed  $E^1$  sono due insiemi qualsiasi,  $r$  e  $s$  sono due funzioni da  $E^1$  in  $E^0$ . Gli elementi di  $E^0$  vengono chiamati *vertici* del grafo, mentre gli elementi di  $E^1$  vengono chiamati *lati* del grafo. Dato un lato  $e \in E^1$ , i vertici  $s(e), r(e)$ , rappresentano rispettivamente il vertice di partenza e di arrivo del lato  $e$ . Se le cardinalità degli insiemi  $E^0$  ed  $E^1$  sono finite allora grafo è detto *finito*.

Un grafo  $E$  è detto *row-finite* se l'insieme  $s^{-1}(v)$  dei lati che partono dal vertice  $v$  è finito per ogni vertice  $v \in E^0$ . Un vertice  $v$  è detto *sink*, se  $s^{-1}(v) = \emptyset$ , mentre è detto *source*, se  $r^{-1}(v) = \emptyset$ , ovvero se  $v$  non è il vertice finale di alcun lato. Un vertice che è sink e source è detto *isolato*. Un vertice  $v$  è detto *infinite emitter*, se  $s^{-1}(v)$  è infinito. Se un vertice è sink oppure infinite emitter, diremo che il vertice è *singolare*, altrimenti diremo che è *regolare*. In altre parole  $v \in E^0$  è un vertice regolare se il numero di lati che parte da  $v$  è finito e strettamente positivo:

$$0 < |s^{-1}(v)| < \infty.$$

Indicheremo con  $\text{Reg}(E)$  l'insieme dei vertici regolari di un grafo  $E$ ; con  $\text{Inf}(E)$  l'insieme dei vertici infinite emitter; con  $\text{Sink}(E)$  l'insieme dei vertici sink.

Un *cammino*  $\mu$  in  $E$  è una sequenza finita di lati  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , tali che  $r(e_i) = s(e_{i+1})$  per  $i = 1, \dots, n-1$ . Definiamo  $s(\mu) := s(e_1)$  il vertice iniziale del cammino e  $r(\mu) := r(e_n)$  il vertice finale. I vertici

$$V_\mu := \{ s(e_i), r(e_n) \mid i = 1, \dots, n \} = \{ s(e_1), r(e_i) \mid i = 1, \dots, n \}$$

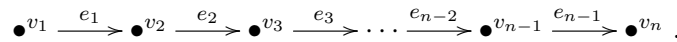
sono detti vertici del cammino. Inoltre diremo che un vertice  $v$  appartiene al cammino  $\mu$  se  $v$  appartiene all'insieme  $V_\mu$ .

Per *lunghezza* di un cammino intendiamo il numero di lati da cui è formato, e verrà indicata con  $\ell(\mu)$ . I vertici possono essere pensati come cammini di lunghezza 0, dove  $s(v) = r(v) = v$  per ogni vertice  $v \in E^0$ . Denoteremo con  $E^n$  l'insieme dei cammini di lunghezza  $n$ . Di conseguenza l'insieme di tutti i cammini nel grafo  $E$  è l'insieme:

$$\text{Path}(E) = \bigcup_{n \geq 0} E^n.$$

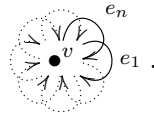
Diamo alcuni esempi di grafi che utilizzeremo in seguito.

**Esempio 1.1.2.** Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Indichiamo con  $A_n$  il grafo:



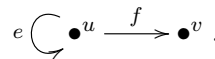
Il grafo  $A_n$  ha  $n$  vertici e  $n - 1$  lati.

**Esempio 1.1.3.** Sia  $n \in \mathbb{N}$ . Indichiamo con  $R_n$  la *rosa con n petali*:

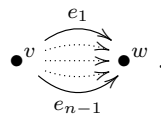


Il grafo  $R_n$  ha un solo vertice e  $n$  loops.

**Esempio 1.1.4.** Indichiamo con  $E_T$  il *grafo di Toeplitz*:

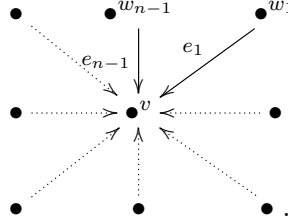


**Esempio 1.1.5.** Sia  $n \in \mathbb{N}$ . Indichiamo con  $D_n$  il grafo:



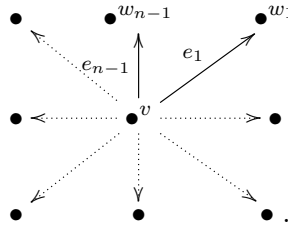
Il grafo  $D_n$  ha 2 vertici e  $n - 1$  lati.

**Esempio 1.1.6.** Sia  $n \in \mathbb{N}$ . Indichiamo con  $B_n$  il grafo:



Il grafo  $B_n$  ha  $n$  vertici e  $n - 1$  lati.

**Esempio 1.1.7.** Sia  $n \in \mathbb{N}$ . Indichiamo con  $C_n$  il *grafo a orologio*:



Il grafo  $C_n$  ha  $n$  vertici e  $n - 1$  lati.

I grafi appena visti sono tutti finiti, ma per alcuni di essi si può definire una versione infinita. Di seguito vediamo alcuni esempi specificando esattamente i vertici, i lati e le funzioni  $s$  e  $r$  della Definizione 1.1.1.

**Esempio 1.1.8.** Indichiamo con  $A_{\mathbb{N}}$  il rispettivo grafo infinito di  $A_n$ , dove l'insieme dei vertici e dei lati sono rispettivamente

$$A_{\mathbb{N}}^0 = \{ v_i \}_{i \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad A_{\mathbb{N}}^1 = \{ e_i \}_{i \in \mathbb{N}},$$

tali che  $s(e_i) = v_i$  e  $r(e_i) = v_{i+1}$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ .

Indichiamo la *rosa con infiniti petali* con  $R_{\mathbb{N}}$ , avente un solo vertice e un numero infinito numerabile di loops.

Indichiamo con  $D_{\mathbb{N}}$  il rispettivo grafo infinito di  $D_n$ , avente due vertici e un numero infinito numerabile di lati:

$$D_{\mathbb{N}}^0 = \{ v, w \} \quad \text{e} \quad D_{\mathbb{N}}^1 = \{ e_i \}_{i \in \mathbb{N}},$$

tali che  $s(e_i) = v$  e  $r(e_i) = w$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ .

Indichiamo con  $B_{\mathbb{N}}$  il rispettivo grafo infinito di  $B_n$ , avente un numero infinito numerabile di vertici e lati:

$$B_{\mathbb{N}}^0 = \{ v, w_i \mid i \in \mathbb{N} \} \quad \text{e} \quad B_{\mathbb{N}}^1 = \{ e_i \}_{i \in \mathbb{N}},$$

tali che  $s(e_i) = w_i$  e  $r(e_i) = v$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ .

Indichiamo *il grafo a orologio infinito* con  $C_{\mathbb{N}}$ , avente un numero infinito numerabile di vertici e lati:

$$C_{\mathbb{N}}^0 = \{ v, w_i \mid i \in \mathbb{N} \} \quad \text{e} \quad C_{\mathbb{N}}^1 = \{ e_i \}_{i \in \mathbb{N}},$$

tali che  $s(e_i) = v$  e  $r(e_i) = w_i$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ .

Dato un grafo  $E$ , invertendo l'orientazione dei suoi lati otteniamo un nuovo grafo che indichiamo con  $E^*$ .

**Definizione 1.1.9.** Sia  $E = (E^0, E^1, s, r)$  un grafo. Definiamo il grafo  $E^* = (E^0, (E^1)^*, s^*, r^*)$  dove l'insieme  $(E^1)^*$  è l'insieme di simboli  $\{ e^* \mid e \in E^1 \}$ , e le funzioni  $s^*, r^*$  sono così definite:  $s^*(e^*) = r(e)$ ,  $r^*(e^*) = s(e)$  per ogni  $e \in E^1$ .

Notiamo che dato un grafo  $E$ , il grafo  $(E^*)^*$  coincide con il grafo  $E$  di partenza.

Vediamo ora come a partire da un certo grafo possiamo estenderlo.

**Definizione 1.1.10.** Sia  $E = (E^0, E^1, s, r)$  un grafo. Il *grafo esteso* di  $E$  è il grafo  $\widehat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, s', r')$ , dove l'insieme  $(E^1)^*$  è l'insieme di simboli  $\{ e^* \mid e \in E^1 \}$ , e le funzioni  $r', s'$  sono così definite:

$$\begin{aligned} s'(e) &= s(e) \\ s'(e^*) &= r(e) \\ r'(e) &= r(e) \\ r'(e^*) &= s(e) \end{aligned}$$

per ogni  $e \in E^1$ .

I lati del grafo  $\widehat{E}$  che appartengono all'insieme  $E^1$  vengono detti lati *reali*, mentre i lati che appartengono all'insieme  $(E^1)^*$  vengono detti lati *fantasma*.

Sia  $E = (E^0, E^1, s, r)$  un grafo. Il grafo esteso  $\widehat{E}$  si ottiene aggiungendo al grafo  $E$  l'insieme dei lati  $(E^1)^*$ , che hanno orientazione opposta dei lati di  $E$ .

Notiamo che il grafo esteso di  $E$  coincide con il grafo esteso di  $E^*$ ; precisiamo che nel grafo esteso  $\widehat{E}^*$  i lati reali sono i lati del grafo  $E^*$ , mentre i lati fantasma sono i lati del grafo  $E$ . Dunque  $\widehat{E} = \widehat{E}^*$ , ma nei due grafi i ruoli dei lati reali e fantasma sono invertiti.

Nel grafo esteso  $\widehat{E}$  possiamo definire la funzione  $*$  :  $\text{Path}(\widehat{E}) \rightarrow \text{Path}(\widehat{E})$  come segue:

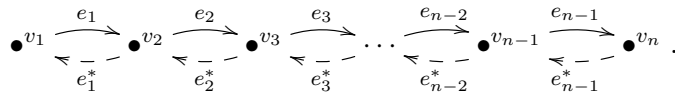
$$\begin{aligned} (v)^* &= v && \text{per ogni } v \in E^0 \\ (e)^* &= e^* && \text{per ogni } e \in E^1 \\ (e^*)^* &= e && \text{per ogni } e \in E^1 \\ (e_1 \cdots e_n)^* &= e_n^* \cdots e_1^* && \text{dove } e_1, \dots, e_n \in E^1, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

È immediato verificare che la funzione  $*$  composta con se stessa è l'identità dell'insieme  $\text{Path}(\widehat{E})$ . In particolare  $*$  è biettiva.

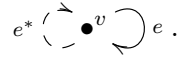
Dato  $\mu$  un cammino formato da lati reali, osserviamo che l'immagine  $\mu^*$  è un cammino formato da lati fantasma. Dunque l'immagine  $\text{Path}(E)^*$  è uguale a  $\text{Path}(E^*)$ .

Vediamo alcuni esempi di costruzione del grafo esteso. Quando rappresentiamo il grafo esteso  $\widehat{E}$  di un grafo  $E$  indichiamo i suoi lati fantasma con una freccia tratteggiata.

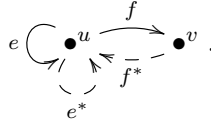
**Esempio 1.1.11.** Il grafo esteso  $\widehat{A}_n$  di  $A_n$ , definito nell'Esempio 1.1.2, è:



**Esempio 1.1.12.** Il grafo esteso  $\widehat{R}_1$  della rosa con un petalo, definita nell'Esempio 1.1.3 per  $n = 1$ , è:



**Esempio 1.1.13.** Il grafo esteso  $\widehat{E}_T$  del grafo di Toeplitz, definito nell'Esempio 1.1.4, è:



Per semplicità d'ora in poi indicheremo con  $E$  e  $\widehat{E}$  un grafo  $E = (E^0, E^1, s, r)$  e il suo grafo esteso  $\widehat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, s', r')$  rispettivamente. Inoltre, per un grafo  $E$  indicheremo rispettivamente con  $s_E$  e  $r_E$  le funzioni  $s$  ed  $r$  della Definizione 1.1.1 nelle situazioni in cui ci siano più grafi coinvolti. Il pedice viene aggiunto per indicare a quale grafo si riferiscono le funzioni.

Introduciamo ora altre nozioni riguardanti i grafi che ci torneranno utili in seguito.

**Definizione 1.1.14.** Un *omomorfismo di grafi*

$$\varphi : (F^0, F^1, s_F, r_F) \rightarrow (E^0, E^1, s_E, r_E)$$

è una coppia di funzioni  $\varphi^0 : F^0 \rightarrow E^0$  e  $\varphi^1 : F^1 \rightarrow E^1$  tali che

$$r_E(\varphi^1(e)) = \varphi^0(r_F(e)) \quad \text{e} \quad s_E(\varphi^1(e)) = \varphi^0(s_F(e)),$$

per ogni  $e \in F^1$ .

Un omomorfismo di grafi  $\varphi : (F^0, F^1, s_F, r_F) \rightarrow (E^0, E^1, s_E, r_E)$  è un *isomorfismo* se esiste un omomorfismo  $\psi : (E^0, E^1, s_E, r_E) \rightarrow (F^0, F^1, s_F, r_F)$  tale che

$$\begin{aligned}\varphi \circ \psi &= \iota_F : (F^0, F^1, s_F, r_F) \rightarrow (F^0, F^1, s_F, r_F) \\ \psi \circ \varphi &= \iota_E : (E^0, E^1, s_E, r_E) \rightarrow (E^0, E^1, s_E, r_E)\end{aligned}$$

dove le rispettive componenti degli omomorfismi  $\iota_F$  e  $\iota_E$  sono così definite:

$$\begin{aligned}\iota_F^0(w) &= w && \text{per ogni } w \in F^0 \\ \iota_F^1(f) &= f && \text{per ogni } f \in F^1 \\ \iota_E^0(v) &= v && \text{per ogni } v \in E^0 \\ \iota_E^1(e) &= e && \text{per ogni } e \in E^1.\end{aligned}$$

**Definizione 1.1.15.** Un grafo  $E = (E^0, E^1, s, r)$  si dice *connesso* se dati due vertici  $u, v \in E^0$ , esiste un cammino  $\lambda \in \text{Path}(E)$ , tale che  $s(\lambda) = u$  e  $r(\lambda) = v$ .

Ogni grafo  $E$  può essere scritto come unione disgiunta di grafi connessi, detti le componenti connesse di  $E$ .

In seguito ci riferiremo a un grafo connesso come a un grafo  $E$  per cui  $\widehat{E}$  è connesso secondo la Definizione 1.1.15.

**Path algebre.** Vogliamo introdurre ora la nozione di path algebra associata a un grafo e a un certo campo.

**Definizione 1.1.16.** Siano  $E = (E^0, E^1, s, r)$  un grafo e  $K$  un campo. La *path algebra*  $KE$  di  $E$  è la  $K$ -algebra associativa libera generata dall'insieme  $E^0 \cup E^1$ , soggetta alle seguenti relazioni:

$$vv' = \delta_{v,v'} v \quad \text{per ogni } v \in E^0 \tag{1.1}$$

$$s(e)e = er(e) = e \quad \text{per ogni } e \in E^1. \tag{1.2}$$

Nella Definizione 1.1.16 si definisce una path algebra a partire da una  $K$ -algebra associativa libera. Quando non viene richiesto che un'algebra libera sia unitaria, i suoi elementi sono  $K$ -combinazioni lineari di parole diverse dalla parola vuota. In altre parole, possiamo pensare a un loro elemento come un polinomio con termine noto nullo. In particolare, gli elementi dell'algebra  $KE$  possono essere visti come polinomi a coefficienti in  $K$  le cui variabili sono gli elementi dell'insieme  $E^0 \cup E^1$ . Grazie alle relazioni imposte nella Definizione 1.1.16, si vede che i monomi di  $KE$  sono esattamente gli elementi di  $\text{Path}(E)$  moltiplicati per uno scalare  $k$  in  $K$ . Dunque  $\text{Path}(E)$  forma una base di  $KE$  come spazio vettoriale.

Vediamo come la funzione  $*$  :  $\text{Path}(\widehat{E}) \rightarrow \text{Path}(\widehat{E})$  induce un'involuzione nella path algebra di un grafo esteso.



**Proposizione 1.1.17.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora esiste  $*$  :  $K\widehat{E} \rightarrow K\widehat{E}$  un anti-isomorfismo di  $K$ -algebre involutorio.*

*Dimostrazione.* Sia  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  la  $K$ -algebra associativa libera generata dall'insieme  $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ . Definiamo  $\rho : K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle \rightarrow K\widehat{E}$  un anti-omomorfismo di  $K$ -algebre come segue:

$$\begin{aligned}\rho(v) &= v \\ \rho(e) &= e^* \\ \rho(e^*) &= e\end{aligned}$$

per ogni  $v \in E^0$  e ogni  $e \in E^1$ . Verifichiamo che i generatori delle relazioni della Definizione 1.1.16 appartengono al nucleo di  $\rho$ :

$$\begin{aligned}\rho(vv' - \delta_{v,v'}v) &= \rho(v')\rho(v) - \delta_{v,v'}\rho(v) = v'v - \delta_{v,v'}v = 0; \\ \rho(s(e)e - e) &= \rho(e)\rho(s(e)) - \rho(e) = e^*s(e) - e^* = e^*r(e^*) - e^* = 0; \\ \rho(er(e) - e) &= \rho(r(e))\rho(e) - \rho(e) = r(e)e^* - e^* = s(e^*)e^* - e^* = 0; \\ \rho(e^*r(e^*) - e^*) &= \rho(r(e^*))\rho(e^*) - \rho(e^*) = r(e^*)e - e = s(e)e - e = 0; \\ \rho(s(e^*)e^* - e^*) &= \rho(e^*)\rho(s(e^*)) - \rho(e^*) = es(e^*) - e = er(e) - e = 0;\end{aligned}$$

per ogni  $v \in E^0$  e ogni  $e \in E^1$ . Dunque, possiamo definire un anti-omomorfismo  $*$  sull'algebra quoziente  $K\widehat{E} = K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle / I$ , dove  $I$  è l'ideale generato dalle relazioni della Definizione 1.1.16:

$$\begin{aligned}*: K\widehat{E} &\rightarrow K\widehat{E} \\ v &\mapsto v \\ e &\mapsto e^* \\ e^* &\mapsto e.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Per come è definito, l'anti-omomorfismo  $*$  applicato due volte a un qualsiasi elemento di  $K\widehat{E}$  è l'identità. In particolare  $*$  è l'inverso di se stesso, dunque è un anti-isomorfismo.  $\square$

**Corollario 1.1.18.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora la path algebra  $K\widehat{E}$  del grafo esteso di  $E$  è isomorfa alla sua algebra opposta  $(K\widehat{E})^{op}$ .*

*Dimostrazione.* La tesi segue immediatamente considerando l'anti-isomorfismo  $*$  introdotto nella Proposizione 1.1.17 come un isomorfismo tra  $K\widehat{E}$  e  $(K\widehat{E})^{op}$ .  $\square$

**Invariant Basis Number.** Sia  $K$  un campo. Sappiamo che se due  $K$ -spazi vettoriali standard  $K^n, K^m$ , con  $n, m \in \mathbb{N}$ , sono isomorfi, allora deve essere  $n = m$ . In questo paragrafo studieremo quando questo è vero per un anello unitario.

**Definizione 1.1.19.** Sia  $R$  un anello con unità. Diremo che  $R$  è IBN (*Invariant Basis Number*) se soddisfa la proprietà *Invariant Basis Number*: per ogni  $n, m \in \mathbb{N}$ , se  $R_R^n \cong R_R^m$ , allora  $n = m$ .

Esempi classici di anelli non IBN sono: i campi, l'anello dei numeri interi  $\mathbb{Z}$ , l'anello dei polinomi a coefficienti in un campo  $K[x]$ , l'anello dei polinomi di Laurent  $K[x^{-1}, x]$  e l'anello delle matrici a coefficienti in un campo  $M_n(K)$ .

Nella Definizione 1.1.19 abbiamo usato la struttura di  $R$ -modulo destro di  $R$ , ma è equivalente dare la definizione di anello IBN utilizzando la struttura di  $R$ -modulo sinistro. Questo è vero perché dato un omomorfismo di  $R$ -moduli destri  $f : R_R^n \rightarrow R_R^m$  può essere rappresentato da una matrice  $A \in M_{m \times n}(R)$ . Se  $f$  è un isomorfismo, allora la matrice  $A^T$  definisce un isomorfismo di moduli sinistri  $g : {}_R R^n \rightarrow {}_R R^m$ . In altre parole  $R_R^n \cong R_R^m$  se, e solo se,  ${}_R R^n \cong {}_R R^m$ .

Vediamo ora una caratterizzazione utile degli anelli IBN.

**Proposizione 1.1.20.** *Sia  $R$  un anello con unità. Allora  $R$  è IBN se, e solo se, per ogni  $n, m \in \mathbb{N}$  e ogni matrice  $A \in M_{n \times m}(R)$  e  $B \in M_{m \times n}(R)$  tali che  $AB = 1_n$  e  $BA = 1_m$ , allora  $n = m$ .*

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $m$  ed  $n$  due numeri interi positivi.

Dimostriamo la prima implicazione ( $\Rightarrow$ ). Supponiamo esistano due matrici  $A \in M_{m \times n}(R)$  e  $B \in M_{n \times m}(R)$ , tali che  $AB = 1_n$  e  $BA = 1_m$ . Tali matrici rappresentano due omomorfismi, uno l'inverso dell'altro, tra gli  $R$ -moduli destri  $R_R^n$  e  $R_R^m$ . Dunque per ipotesi deve essere  $n = m$ .

Dimostriamo la seconda implicazione ( $\Leftarrow$ ). Supponiamo esista un isomorfismo di moduli destri  $f : R_R^n \rightarrow R_R^m$ . Denotiamo con  $f^{-1}$  l'isomorfismo inverso di  $f$ . Tali isomorfismi sono rappresentati da due matrici  $A \in M_{m \times n}(R)$  e  $B \in M_{n \times m}(R)$ , rispettivamente. Siccome  $f$  e  $f^{-1}$  sono uno l'inverso dell'altro abbiamo che  $AB = 1_m$  e  $BA = 1_n$ . Dunque per ipotesi deve essere  $n = m$ .  $\square$

**Osservazione 1.1.21.** Consideriamo un anello unitario  $R$  tale che  $R_R \cong R_R^n$ , per un opportuno intero  $n > 1$ . Allora esistono due isomorfismi  $\varphi_1 : R_R \rightarrow R_R^n$  e  $\varphi_2 : R_R^n \rightarrow R_R$  uno l'inverso dell'altro. Tali isomorfismi possono essere rappresentati rispettivamente da due matrici  $A_1 \in M_{n \times 1}(R)$  e  $A_2 \in M_{1 \times n}(R)$  tali che  $A_1 A_2 = 1_n$  e  $A_2 A_1 = 1$ . Indichiamo con  $x_1, \dots, x_n$  le componenti in  $R$  della colonna  $A_1$ , e con  $y_1, \dots, y_n$  le componenti in  $R$  della riga  $A_2$ . Per quanto appena visto devono essere soddisfatte le seguenti relazioni:

$$x_i y_j = \delta_{i,j} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n y_i x_i = 1. \quad (1.4)$$

Vediamo ora alcuni esempi di anelli che non sono IBN.

Sia  $K$  un campo. Definiamo la  $K$ -algebra  $\text{RFM}_{\mathbb{N}}(K)$  delle matrici  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , dove in ogni riga solo un numero finito di entrate è diverso da zero. Analogamente definiamo la  $K$ -algebra  $\text{CFM}_{\mathbb{N}}(K)$ , dove in ogni colonna solo un numero finito di entrate è diverso da zero. La  $K$ -algebra  $\text{RFM}_{\mathbb{N}}(K)$ , che indichiamo per semplicità con  $R$ , non è un anello IBN: la mappa

$$\begin{aligned} f : R_R &\rightarrow R_R^2 \\ M &\mapsto (M_1, M_2), \end{aligned}$$

dove  $M_1$  è la matrice formata dalle colonne di indice pari e  $M_2$  è la matrice formata dalle colonne di indice dispari, è un isomorfismo. Analogamente possiamo definire un isomorfismo per  $\text{CFM}_{\mathbb{N}}(K)$  e  $\text{CFM}_{\mathbb{N}}(K)^2$ .

Sia  $V_K$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  con una base numerabile. La  $K$ -algebra degli endomorfismi  $\text{End}(V_K)$  è isomorfa alla  $K$ -algebra  $\text{CFM}_{\mathbb{N}}(K)$ . Quindi  $\text{End}(V_K)$  è un altro esempio di anello che non è IBN.

Sia  $R$  un anello unitario non IBN. Allora esiste una coppia  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tali che  $i \neq j$  e  $R_R^i \cong R_R^j$ . Per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , si ha che  $R_R^{i+k} \cong R_R^{j+k}$ . Dunque la coppia  $(i, j)$  non è unica.

**Definizione 1.1.22.** Sia  $R$  un anello unitario che non ha IBN. Sia  $m$  il minor intero positivo con la proprietà che  $R_R^m \cong R_R^{m'}$ , per un qualche  $m' \in \mathbb{N}$  diverso da  $m$ . Per tale  $m$ , consideriamo  $n$  il minimo tra gli  $m'$  diversi da  $m$ . In questo caso diremo che  $R$  è di *tipo*  $(m, n)$ .

Le algebre  $\text{RFM}_{\mathbb{N}}(K)$  e  $\text{End}(V_K)$  appena viste sono anelli di tipo  $(1, 2)$ .

Dato un campo  $K$ . Vediamo come costruire una  $K$ -algebra di tipo  $(1, n)$ , per  $n > 1$ . Tale algebra la chiameremo algebra di Leavitt di tipo  $(1, n)$  e la indicheremo con  $L_K(1, n)$ . Precisiamo che la costruzione proposta di seguito si può generalizzare in modo da costruire una  $K$ -algebra di tipo  $(m, n)$ , come fatto in [6]. Consideriamo la  $K$ -algebra unitaria libera non commutativa  $S := K\langle X \rangle$  generata dall'insieme  $X := \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ . Ogni elemento di  $S$  è una  $K$ -combinazione lineare di parole nell'alfabeto  $X$ . Siccome la  $K$ -algebra deve essere unitaria dobbiamo considerare tra le parole nell'alfabeto  $X$  anche la parola vuota. Con  $I$  denotiamo l'ideale bilatero di  $S$  generato dall'insieme

$$\left\{ x_i y_j - \delta_{i,j}, \sum_{i=1}^n y_i x_i - 1 \mid i, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Nell'anello quoziente  $R := S/I$ , per quanto visto nella Proposizione 1.1.20, gli elementi  $x_i + I, y_j + I$  di  $R$  soddisfano le relazioni (1.4). Dunque  $R_R$  è isomorfo a  $R_R^n$ .

Mostriamo che l'ideale  $I$  è proprio. Denotiamo con  $T$  la  $K$ -algebra degli endomorfismi di un  $K$ -spazio vettoriale con base numerabile. Sappiamo che

vale  $T_T \cong T_T^n$ . Per l'Osservazione 1.1.21 possiamo scegliere degli elementi  $t_i, t'_j$  di  $T$ , con  $i, j = 1, \dots, n$ , per cui valgono le relazioni analoghe a (1.4):

$$t_i t'_j = \delta_{i,j} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n t'_i t_j = 1.$$

Definiamo l'omomorfismo di  $K$ -algebre  $\varphi : S \rightarrow T$  tale che

$$\begin{aligned} \varphi(1_S) &= 1_T \\ \varphi(x_i) &= t_i \\ \varphi(y_j) &= t'_j \end{aligned}$$

per  $i, j = 1, \dots, n$ . L'omomorfismo  $\varphi$  è ben definito e l'ideale  $I$  è contenuto nel nucleo di  $\varphi$ . Siccome  $\varphi(1_S) = 1_T$ , il nucleo di  $\varphi$  è un ideale proprio di  $R$  e di conseguenza lo stesso vale per  $I$ .

## 1.2 Leavitt path algebre

**Definizione e proprietà.** Una Leavitt path algebra è un'algebra che viene costruita a partire da un grafo e un campo. In questa sezione ne vedremo la definizione e studieremo le principali proprietà.

**Definizione 1.2.1.** Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo il grafo esteso  $\widehat{E}$  di  $E$ . La *Leavitt path algebra di  $E$  a coefficienti in  $K$*  è la  $K$ -algebra associativa libera generata dall'insieme  $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ , soggetta alle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \text{(V)} \quad & vv' = \delta_{v,v'} v && \text{per ogni } v, v' \in E^0; \\ \text{(E1)} \quad & s(e)e = er(e) = e && \text{per ogni } e \in E^1; \\ \text{(E2)} \quad & r(e)e^* = e^*s(e) = e^* && \text{per ogni } e \in E^1; \\ \text{(CK1)} \quad & e^*e' = \delta_{e,e'} r(e) && \text{per ogni } e, e' \in E^1; \\ \text{(CK2)} \quad & v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* && \text{per ogni } v \in \text{Reg}(E). \end{aligned}$$

La Leavitt path algebra di  $E$  a coefficienti in  $K$  verrà indicata con  $L_K(E)$ .

Possiamo osservare che la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  di un grafo  $E$  può essere vista come il quoziente della path algebra  $\widehat{E}$  del grafo esteso, con l'ideale generato dalle relazioni (CK1) e (CK2) della Definizione 1.2.1.

In seguito dovremmo definire degli omomorfismi di  $K$ -algebre con dominio una Leavitt path algebra. Ci tornerà utile la seguente proposizione.

**Proposizione 1.2.2** (Proprietà Universale di  $L_K(E)$ ). *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo una  $K$ -algebra  $A$  che contiene un insieme  $\{a_v \mid v \in E^0\}$  di elementi idempotenti e ortogonali tra loro, e due insiemi  $\{a_e \mid e \in E^1\}$ ,  $\{b_e \mid e \in E^1\}$  tali che*

(i)  $a_{s(e)}a_e = a_e a_{r(e)} = a_e$ ,  $a_{r(e)}b_e = b_e a_{s(e)} = b_e$  per ogni  $e \in E^1$ ;

(ii)  $b_f a_e = \delta_{e,f} a_{r(e)}$  per ogni  $e, f \in E^1$ ;

(iii)  $a_v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} a_e b_e$  per ogni  $v \in \text{Reg}(E)$ .

Allora esiste un unico omomorfismo di  $K$ -algebre  $\varphi : L_K(E) \rightarrow A$  tale che  $\varphi(v) = a_v$ ,  $\varphi(e) = a_e$ ,  $\varphi(e^*) = b_e$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo per prima l'esistenza. Indichiamo con  $L$  la  $K$ -algebra associativa libera generata dall'insieme dei vertici e dei lati del grafo  $\widehat{E}$ , e con  $I$  l'ideale di  $L$  generato dalle relazioni della Definizione 1.2.1. Definiamo una funzione  $f : E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rightarrow A$ , tale che

$$\begin{aligned} f(v) &= a_v \\ f(e) &= a_e \\ f(e^*) &= b_e \end{aligned}$$

per ogni  $v \in E^0$  e per ogni  $e \in E^1$ . Per la Proprietà Universale delle algebre libere, esiste un omomorfismo di  $K$ -algebre  $\varphi : L \rightarrow A$  tale che  $\varphi \circ \varepsilon = f$ , dove  $\varepsilon$  è la mappa di inclusione dell'insieme  $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$  in  $L$ .

Possiamo notare grazie alle relazioni (i), (ii), (iii), che  $I$  è contenuto nel nucleo di  $\varphi$ . Dunque  $\varphi$  è un omomorfismo ben definito sul quoziente  $L/I$ , che è la Leavitt path algebra  $L_K(E)$ .

Passiamo a dimostrare l'unicità. Supponiamo esista un omomorfismo  $\psi : L_K(E) \rightarrow A$  tale che  $\psi(v) = a_v$ ,  $\psi(e) = a_e$ ,  $\psi(e^*) = b_e$ , per ogni  $v \in E^0$  ed  $e \in E^1$ . Siccome gli omomorfismi  $\varphi$  e  $\psi$  coincidono sugli elementi dell'insieme  $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$  che è un insieme di generatori dell'algebra  $L_K(E)$ , allora devono coincidere.  $\square$

Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Sappiamo che  $E$  può essere scritto come l'unione disgiunta delle sue componenti connesse:

$$E = \bigsqcup_{j \in J} E_j.$$

Ora vogliamo capire la relazione tra le  $K$ -algebre  $L_K(E)$  e  $L_K(E_j)$ .

**Proposizione 1.2.3.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $\{E_j\}_{j \in J}$  le componenti connesse di  $E$ . Allora la Leavitt path algebra di  $E$  è isomorfa alla somma diretta  $\bigoplus_{j \in J} L_K(E_j)$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo le Leavitt path algebre  $L_K(E_i)$  delle componenti connesse. Indichiamo con  $\varepsilon_i : L_K(E_i) \rightarrow \bigoplus_{j \in J} L_K(E_j)$  l'immersione canonica dell' $i$ -esima componente della somma diretta. Le mappe  $\iota_1 : E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rightarrow L_K(E)$  e  $\gamma_i : L_K(E_i) \rightarrow L_K(E)$  rappresentano le inclusioni canoniche dei rispettivi domini. Mentre per ogni elemento  $x$

in  $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$  definiamo  $\sigma(x) = \varepsilon_i(x) \in \bigoplus_{j \in J} L_K(E_j)$ , dove  $E_i$  è la componente connessa che contiene  $x$ .

Per la Proprietà Universale 1.2.2 di  $L_K(E)$ , esiste un omomorfismo di  $K$ -algebre  $\varphi$  che fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* & \xrightarrow{\iota_1} & L_K(E) \\ & \searrow \sigma & \downarrow \varphi \\ & & \bigoplus_{j \in J} L_K(E_j). \end{array}$$

Per la Proprietà Universale della somma diretta, esiste un omomorfismo di  $K$ -algebre  $\psi$  che fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} L_K(E_i) & & \\ \varepsilon_i \downarrow & \searrow \gamma_i & \\ \bigoplus_{j \in J} L_K(E_j) & \xrightarrow{\psi} & L_K(E). \end{array}$$

Gli omomorfismi  $\psi \circ \varphi$  e  $\varphi \circ \psi$  fanno commutare rispettivamente i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* & \xrightarrow{\iota_1} & L_K(E) \\ & \searrow \iota_1 & \downarrow \psi \circ \varphi \\ & & L_K(E), \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} L_K(E_i) & & \\ \varepsilon_i \downarrow & \searrow \varepsilon_i & \\ \bigoplus_{j \in J} L_K(E_j) & \xrightarrow{\varphi \circ \psi} & \bigoplus_{j \in J} L_K(E_j). \end{array}$$

Per le rispettive proprietà universali  $\psi \circ \varphi$  coincide con l'identità di  $L_K(E)$  e  $\varphi \circ \psi$  con l'identità di  $\bigoplus_{j \in J} L_K(E_j)$ . Dunque possiamo concludere che

$$L_K(E) \cong \bigoplus_{j \in J} L_K(E_j). \quad \square$$

Prima di proseguire con le proprietà delle Leavitt path algebre richiamiamo la seguente definizione.

**Definizione 1.2.4.** Un sottoinsieme  $F$  di elementi idempotenti di un anello associativo  $R$  è un *insieme di unità locali*, se per ogni insieme finito di elementi  $r_1, \dots, r_n$  di  $R$ , esiste un elemento  $f$  in  $F$  tale che

$$fr_i f = fr_i = r_i f = r_i,$$

per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

Un anello associativo  $R$  è *abbastanza idempotente* se esiste un insieme  $E$  di elementi idempotenti e ortogonali tra loro, tali che l'insieme  $F$  delle somme finite di elementi distinti di  $E$  è un insieme di unità locali.

In una  $K$ -algebra  $A$  con un insieme di unità locali  $F$ , ogni ideale sinistro (destra, bilatero)  $I$  rispetto alla struttura di anello è anche un ideale sinistro (risp. destra, bilatero) rispetto la struttura di algebra. Infatti, se  $x \in I$  per la Definizione 1.2.4 esiste  $f \in F$  tale che  $fx = x$ . Sia  $k \in K$ , allora

$$kx = k(fx) = (kf)x \in I,$$

per la proprietà di assorbimento di  $I$ . Se l'ideale  $I$  è destra, si utilizza l'uguaglianza  $x = xf$  e si procede in modo analogo.

**Lemma 1.2.5.** *Sia  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $\gamma, \lambda, \mu, \rho$  elementi di  $\text{Path}(E)$ .*

(i) *Se  $r(\gamma) = r(\lambda)$  e  $r(\mu) = r(\rho)$ , allora in  $L_K(E)$  abbiamo:*

$$(\gamma\lambda^*)(\mu\rho^*) = \begin{cases} \gamma\kappa\rho^* & \text{se } \mu = \lambda\kappa \text{ per qualche } \kappa \in \text{Path}(E) \\ \gamma\sigma^*\rho^* & \text{se } \lambda = \mu\sigma \text{ per qualche } \sigma \in \text{Path}(E) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(ii) *L'algebra  $L_K(E)$  è generata come  $K$ -spazio vettoriale dai monomi della forma*

$$\{ \gamma\lambda^* \mid \gamma, \lambda \in \text{Path}(E) \text{ e } r(\gamma) = r(\lambda) \}.$$

*Dunque un generico elemento di  $L_K(E)$  si può scrivere come*

$$\sum_{i=1}^n k_i \gamma_i \lambda_i^*,$$

*dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, \dots, k_n \in K^\times$ ,  $r(\gamma_i) = r(\lambda_i)$  per  $i = 1, \dots, n$ .*

(iii) *L'algebra  $L_K(E)$  ha unità se, e solo se, l'insieme  $E^0$  dei vertici del grafo è finito. In tal caso l'unità è la somma degli elementi di  $E^0$ :*

$$1_{L_K(E)} = \sum_{v \in E^0} v.$$

(iv) *L'algebra  $L_K(E)$  è un anello abbastanza idempotente.*

*Dimostrazione.* Cominciamo dimostrando il punto (i). I primi due casi si dimostrano usando la relazione (CK1) della Definizione 1.2.1: dato un cammino  $\alpha$  formato da lati reali, allora  $\alpha^*\alpha = r(\alpha)$ . Mentre il terzo caso si verifica quando i punti di arrivo  $r(\lambda^*)$  e di partenza  $s(\mu)$  sono diversi, oppure quando un lato di  $\lambda^*$  non è il lato fantasma del lato corrispondente in  $\mu$ . Nella prima situazione si può concludere usando le relazioni (V) ed (E1). Nella seconda situazione si può concludere grazie alla relazione (CK1).

Per dimostrare il punto (ii) osserviamo che se si vuole costruire un monomio non nullo di  $L_K(E)$ , tenendo presente le relazioni imposte nella Definizione 1.2.1, o si sceglie un singolo vertice, oppure bisogna formare un cammino di  $\widehat{E}$  dove i primi lati sono tutti lati reali, mentre l'ultima parte del cammino è formata solo da lati fantasma.

Se l'insieme dei vertici  $E^0$  è finito, allora tramite un calcolo esplicito si vede che l'elemento  $\sum_{v \in E^0} v$  di  $L_K(E)$  agisce come l'identità su tutti i monomi che generano la Leavitt path algebra descritti nel punto (ii). Se il grafo ha un insieme infinito di vertici, allora nessun elemento agisce come l'identità sull'insieme  $E^0$ .

Consideriamo  $E^0$  l'insieme dei vertici di  $E$ . Per la relazione (V) della Definizione 1.2.1 gli elementi di  $E^0$  sono idempotenti e ortogonali tra loro. Per dimostrare che  $L_K(E)$  è abbastanza idempotente è sufficiente mostrare che l'insieme  $F$  delle somme finite di elementi distinti in  $E^0$  è un insieme di unità locali. Consideriamo  $\alpha = \sum_i^n k_i \gamma_i \lambda_i^*$  un generico elemento di  $L_K(E)$ . Per tale elemento definiamo l'insieme

$$V(\alpha) = \{ s(\gamma_i), s(\lambda_i) \mid i = 1, \dots, n \} \cup \{ r(\gamma_i), r(\lambda_i) \mid i = 1, \dots, n \}.$$

Ponendo  $f = \sum_{v \in V(\alpha)} v$ , otteniamo con un calcolo esplicito che  $f\alpha f = \alpha$ . Nel caso di un sottoinsieme finito  $\{ \alpha_1, \dots, \alpha_m \}$  di  $L_K(E)$ , l'elemento  $f$  è la somma dei vertici che appartengono all'unione degli insiemi  $V(\alpha_i)$ , per  $i = 1, \dots, m$ .  $\square$

**Esempi.** Vediamo alcuni esempi di Leavitt path algebre relative a grafi noti. Da questi esempi si può vedere come alcune Leavitt path algebre siano in realtà algebre già conosciute e come alcune forniscano esempi di anelli non IBN.

In seguito indicheremo con  $E_{i,j}$  la matrice in  $M_n(K)$  in cui tutte le entrate sono nulle eccetto quella di indici  $(i, j)$  che vale 1.

**Esempio 1.2.6.** Siano  $K$  un campo e  $R_1$  la rosa con un petalo. La Leavitt path algebra  $L_K(R_1)$  è isomorfa alla  $K$ -algebra  $K[x^{-1}, x]$  dei polinomi di Laurent.

Utilizziamo la Proprietà Universale 1.2.2 di  $L_K(R_1)$  per definire  $\varphi : L_K(R_1) \rightarrow K[x^{-1}, x]$  un omomorfismo di  $K$ -algebre. Consideriamo i seguenti elementi di  $K[x^{-1}, x]$ :

$$\begin{aligned} a_e &= x \\ b_e &= x^{-1} \\ a_v &= 1. \end{aligned}$$

Con un calcolo diretto è immediato verificare che tali elementi soddisfano le richieste della Proprietà Universale 1.2.2. Quindi esiste  $\varphi : L_K(R_1) \rightarrow$



$K[x^{-1}, x]$  un omomorfismo di  $K$ -algebre tale che

$$\begin{aligned}\varphi(e) &= x \\ \varphi(e^*) &= x^{-1} \\ \varphi(v) &= 1.\end{aligned}$$

Sia  $K\langle x^{-1}, x \rangle$  la  $K$ -algebra associativa unitaria libera generata dall'insieme  $\{x^{-1}, x\}$ . Definiamo l'omomorfismo  $\psi : K\langle x^{-1}, x \rangle \rightarrow L_K(R_1)$  come segue:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= e \\ \psi(x^{-1}) &= e^* \\ \psi(1) &= v.\end{aligned}$$

Per le relazioni (CK1) e (CK2) della Definizione 1.2.1 abbiamo

$$\begin{aligned}\psi(x^{-1}x - 1) &= \psi(x^{-1})\psi(x) - \psi(1) = e^*e - v = 0 \\ \psi(xx^{-1} - 1) &= \psi(x)\psi(x^{-1}) - \psi(1) = ee^* - v = 0.\end{aligned}$$

Dunque  $\psi$  può essere definito sulla  $K$ -algebra  $K[x^{-1}, x]$ . Gli omomorfismi  $\varphi$  e  $\psi$  sono uno l'inverso dell'altro, quindi possiamo concludere

$$L_K(R_1) \cong K[x^{-1}, x].$$

**Esempio 1.2.7.** Siano  $K$  un campo e  $R_n$  la rosa con  $n$  petali come nell'Esempio 1.1.3, dove  $n \geq 2$  è un intero positivo. La Leavitt path algebra  $L_K(R_n)$  è isomorfa all'algebra di Leavitt  $L_K(1, n)$  di tipo  $(1, n)$ .

Indichiamo con  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  i generatori della  $K$ -algebra  $L_K(1, n)$ . Ricordiamo che tali generatori soddisfano le relazioni viste in (1.4). Utilizziamo la Proprietà Universale 1.2.2 di  $L_K(1, n)$  per definire  $\varphi : L_K(R_n) \rightarrow L_K(1, n)$  un omomorfismo di  $K$ -algebre. Consideriamo i seguenti elementi di  $L_K(1, n)$ :

$$\begin{aligned}a_{e_i} &= y_i \\ b_{e_j} &= x_j \\ a_v &= 1\end{aligned}$$

per  $i, j = 1, \dots, n$ . Con un calcolo immediato si verifica che tali elementi soddisfano le richieste della Proprietà Universale 1.2.2. Quindi esiste un omomorfismo  $\varphi : L_K(R_n) \rightarrow L_K(1, n)$  tale che

$$\begin{aligned}\varphi(e_i) &= y_i \\ \varphi(e_j^*) &= x_j \\ \varphi(v) &= 1\end{aligned}$$

per  $i, j = 1, \dots, n$ .

Sia  $K\langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \rangle$  la  $K$ -algebra associativa unitaria libera generata dall'insieme  $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ . Definiamo

$$\psi : K\langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \rangle \rightarrow L_K(R_n)$$

come segue:

$$\begin{aligned}\psi(x_j) &= e_j^* \\ \psi(y_i) &= e_i \\ \psi(1) &= v\end{aligned}$$

per  $i, j = 1, \dots, n$ . Grazie alle relazioni di  $L_K(R_n)$ , gli elementi

$$x_i y_j - \delta_{i,j} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n y_i x_i - 1,$$

appartengono al nucleo di  $\psi$  per ogni  $i, j = 1, \dots, n$ . Quindi  $\psi$  è ben definito come omomorfismo da  $L_K(1, n)$  in  $L_K(R_n)$ .

Gli omomorfismi  $\varphi$  e  $\psi$  sono uno l'inverso dell'altro, quindi possiamo concludere che

$$L_K(R_n) \cong L_K(1, n).$$

**Esempio 1.2.8.** Siano  $K$  un campo e  $A_n$  il grafo della Definizione 1.1.2. La Leavitt path algebra  $L_K(A_n)$  è isomorfa alla  $K$ -algebra  $M_n(K)$  delle matrici  $n \times n$  a coefficienti in  $K$ .

Osserviamo che nella Leavitt path algebra  $L_K(A_n)$ , per la relazione (CK2) della Definizione 1.2.1, si ha

$$v_i = e_i e_i^* \quad \text{per } i = 1, \dots, n-1.$$

Dunque, una base di  $L_K(A_n)$  è data dai cammini

$$v_i, e_{j_1} e_{j_1+1} \cdots e_{j_2}, e_{k_1}^* e_{k_1-1}^* \cdots e_{k_2}^*,$$

dove  $i = 1, \dots, n$ ,  $j_1, j_2, k_1, k_2 = 1, \dots, n-1$  tali che  $j_1 \leq j_2$  e  $k_1 \geq k_2$ .

Utilizzando la Proprietà Universale 1.2.2 di  $L_K(A_n)$  definiamo  $\varphi : L_K(A_n) \rightarrow M_n(K)$  un omomorfismo di  $K$ -algebre. Consideriamo i seguenti elementi di  $M_n(K)$ :

$$\begin{aligned}a_{v_i} &= E_{i,i} \\ a_{e_j} &= E_{j,j+1} \\ b_{e_j} &= E_{j+1,j}\end{aligned}$$

dove  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ . Tali elementi soddisfano le richieste della Proprietà Universale 1.2.2, quindi esiste  $\varphi : L_K(A_n) \rightarrow M_n(K)$  un

omomorfismo tale che

$$\begin{aligned}\varphi(v_i) &= E_{i,i} \\ \varphi(e_j) &= E_{j,j+1} \\ \varphi(e_j^*) &= E_{j+1,j}\end{aligned}$$

dove  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ . L'immagine tramite  $\varphi$  di un cammino  $e_{j_1} e_{j_1+1} \cdots e_{j_2}$  è

$$\varphi(e_{j_1} e_{j_1+1} \cdots e_{j_2}) = E_{j_1, j_2+1}.$$

L'immagine tramite  $\varphi$  di un cammino  $e_{k_1}^* e_{k_1-1}^* \cdots e_{k_2}^*$  è

$$\varphi(e_{k_1}^* e_{k_1-1}^* \cdots e_{k_2}^*) = E_{k_1+1, k_2}.$$

In altre parole l'immagine dei vertici sono le matrici diagonali  $E_{i,i}$ , l'immagine dei cammini reali sono le matrici  $E_{i,j}$  con  $j > i$ , mentre l'immagine dei cammini fantasma sono le matrici  $E_{i,j}$  con  $i < j$ .

L'immagine tramite  $\varphi$  di una base di  $L_K(A_n)$  è una base di  $M_n(K)$ , dunque  $\varphi$  è un isomorfismo.

**Esempio 1.2.9.** Siano  $K$  un campo e  $B_n$  il grafo della Definizione 1.1.6. La Leavitt path algebra  $L_K(B_n)$  è isomorfa alla  $K$ -algebra  $M_n(K)$  delle matrici  $n \times n$  a coefficienti in  $K$ .

Utilizzando la Proprietà Universale 1.2.2 di  $L_K(B_n)$  definiamo  $\varphi : L_K(B_n) \rightarrow M_n(K)$  un omomorfismo di  $K$ -algebre. Consideriamo i seguenti elementi di  $M_n(K)$ :

$$\begin{aligned}a_v &= E_{1,1} \\ a_{w_i} &= E_{i+1, i+1} \\ a_{e_i} &= E_{i+1, 1} \\ b_{e_i} &= E_{1, i+1}\end{aligned}$$

per  $i = 1, \dots, n-1$ . Tali elementi soddisfano le richieste della Proprietà Universale 1.2.2, quindi esiste  $\varphi : L_K(B_n) \rightarrow M_n(K)$  un omomorfismo tale che

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= E_{1,1} \\ \varphi(w_i) &= E_{i+1, i+1} \\ \varphi(e_i) &= E_{i+1, 1} \\ \varphi(e_i^*) &= E_{1, i+1}\end{aligned}$$

per  $i = 1, \dots, n-1$ .

Possiamo osservare che una base di  $L_K(B_n)$  è data dall'insieme

$$\{ v, w_i, e_i, e_i^*, e_i e_j^* \mid i, j = 1, \dots, n-1 \text{ e } i \neq j \}. \quad (1.5)$$

L'immagine dei monomi  $e_i e_j^*$  è

$$\varphi(e_i e_j^*) = E_{i+1,1} E_{1,j+1} = E_{i+1,j+1}.$$

L'immagine tramite  $\varphi$  della base di  $L_K(D_n)$  fissata in (1.5) è uguale alla base canonica di  $M_n(K)$ , quindi  $\varphi$  è un isomorfismo.

**Esempio 1.2.10.** Siano  $K$  un campo e  $D_n$  il grafo della Definizione 1.1.5. La Leavitt path algebra  $L_K(D_n)$  è isomorfa alla  $K$ -algebra  $M_n(K)$  delle matrici  $n \times n$  a coefficienti in  $K$ .

Utilizzando la Proprietà Universale 1.2.2 di  $L_K(D_n)$  definiamo  $\varphi : L_K(D_n) \rightarrow M_n(K)$  un omomorfismo di  $K$ -algebre. Consideriamo i seguenti elementi di  $M_n(K)$ :

$$\begin{aligned} a_v &= \sum_{i=2}^n E_{i,i} \\ a_w &= E_{1,1} \\ a_{e_i} &= E_{i+1,1} \\ b_{e_i} &= E_{1,i+1} \end{aligned}$$

per  $i = 1, \dots, n-1$ . Tali elementi soddisfano le richieste della Proprietà Universale 1.2.2, quindi esiste  $\varphi : L_K(D_n) \rightarrow M_n(K)$  omomorfismo tale che

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \sum_{i=2}^n E_{i,i} \\ \varphi(w) &= E_{1,1} \\ \varphi(e_i) &= E_{i+1,1} \\ \varphi(e_i^*) &= E_{1,i+1} \end{aligned}$$

per  $i = 1, \dots, n-1$ .

Possiamo osservare che una base di  $L_K(D_n)$  è data dall'insieme

$$\{ w, e_i, e_i^*, e_i e_j^* \mid i, j = 1, \dots, n-1 \}. \quad (1.6)$$

L'immagine dei monomi  $e_i e_j^*$  è

$$\varphi(e_i e_j^*) = E_{i+1,1} E_{1,j+1} = E_{i+1,j+1}.$$

L'immagine tramite  $\varphi$  della base di  $L_K(D_n)$  fissata in (1.6) è uguale alla base canonica di  $M_n(K)$ , quindi  $\varphi$  è un isomorfismo.

Grazie agli Esempi 1.2.8, 1.2.9 e 1.2.10 possiamo notare che da grafi diversi si può ottenere la stessa Leavitt path algebra.

### 1.3 Cohn path algebre

**Definizione.** Le Cohn path algebre sono delle ulteriori  $K$ -algebre associate a grafi. In questa sezione vedremo come è possibile dare una descrizione della loro struttura di  $K$ -spazio vettoriale e come queste algebre sono collegate con le Leavitt path algebre.

**Definizione 1.3.1.** Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $\widehat{E}$  il grafo esteso di  $E$ . La *Cohn path algebra di  $E$  a coefficienti in  $K$* , indicata con  $C_K(E)$ , è la  $K$ -algebra associativa libera generata dall'insieme  $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$  soggetta alle relazioni (V), (E1), (E2), (CK1) della Definizione 1.2.1.

Possiamo vedere una Cohn path algebra, analogamente a quanto visto per le Leavitt path algebre, come il quoziente della  $K$ -algebra  $K\widehat{E}$  con l'ideale generato dalla relazione (CK1).

Le Cohn path algebre soddisfano le stesse relazioni delle Leavitt path algebre eccetto la relazione (CK2). Questo ci porta a un primo collegamento tra le due algebre:

**Proposizione 1.3.2.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo l'ideale bilatero  $J$  di  $C_K(E)$  generato dall'insieme*

$$\left\{ v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \mid v \in \text{Reg}(E) \right\}.$$

Allora la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è isomorfa alla  $K$ -algebra quoziente  $C_K(E)/J$ .

*Dimostrazione.* Premettiamo che faremo uso delle relazioni della Definizione 1.2.1.

Sia  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  l'algebra associativa libera generata dall'insieme  $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ . Definiamo l'omomorfismo di  $K$ -algebre  $\varphi : K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle \rightarrow L_K(E)$  nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= v \\ \varphi(e) &= e \\ \varphi(e^*) &= e^* \end{aligned}$$

per ogni  $v \in E^0$  e ogni  $e \in E^1$ . È immediato verificare che l'ideale di  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  generato dalle relazioni (V), (E1), (E2) e (CK1) è contenuto nel nucleo dell'omomorfismo  $\varphi$ . Quindi  $\varphi$  è ben definito come omomorfismo di  $K$ -algebre da  $C_K(E)$  in  $L_K(E)$ .

Per la relazione (CK2) di  $L_K(E)$  l'ideale  $J$  è contenuto nel nucleo di  $\varphi : C_K(E) \rightarrow L_K(E)$ , quindi di nuovo l'omomorfismo  $\varphi$  è ben definito come

omomorfismo di  $K$ -algebre da  $C_K(E)/J$  in  $L_K(E)$ :

$$\begin{aligned}\varphi : C_K(E)/J &\rightarrow L_K(E) \\ v + J &\mapsto v \\ e + J &\mapsto e \\ e^* + J &\mapsto e^*,\end{aligned}$$

per ogni  $v \in E^0$  e ogni  $e \in E^1$ .

Utilizziamo la Proprietà Universale 1.2.2 di  $L_K(E)$  per definire un omomorfismo di  $K$ -algebre  $\psi : L_K(E) \rightarrow C_K(E)/J$ . Definiamo i seguenti elementi di  $C_K(E)/J$ :

$$\begin{aligned}a_v &= v + J \\ a_e &= e + J \\ b_e &= e^* + J\end{aligned}$$

per ogni  $v \in E^0$  e ogni  $e \in E^1$ . Sicuramente tali elementi soddisfano le richieste (i) e (ii) della Proprietà Universale 1.2.2 e l'insieme  $\{a_v \mid v \in E^0\}$  è formato da elementi idempotenti e ortogonali tra loro.

Sia  $v$  un vertice regolare di  $E$ , allora vale

$$a_v = v + J = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* + J = \sum_{e \in s^{-1}(v)} (e + J)(e^* + J) = \sum_{e \in s^{-1}(v)} a_e b_e.$$

Quindi tutte le richieste della Proprietà Universale 1.2.2 sono rispettate. Concludiamo dicendo che esiste  $\psi : L_K(E) \rightarrow C_K(E)/J$  tale che

$$\begin{aligned}\psi(v) &= v + J \\ \psi(e) &= e + J \\ \psi(e^*) &= e^* + J\end{aligned}$$

per ogni  $v \in E^0$  e ogni  $e \in E^1$ ; tale omomorfismo è l'inverso di  $\varphi$ .  $\square$

**Struttura di  $K$ -spazio vettoriale.** Nel Lemma 1.2.5 abbiamo visto come in una Leavitt path algebra  $L_K(E)$  di un grafo  $E$  possiamo scrivere gli elementi come combinazioni  $K$ -lineari di cammini del tipo  $\lambda\mu^*$ , dove  $\lambda$  e  $\mu$  sono elementi di  $\text{Path}(E)$  tali che  $r(\lambda) = r(\mu)$ . Tale affermazione è dovuta alla validità delle prime quattro relazioni della Definizione 1.2.1, dunque vale anche per le Cohn path algebre. Tale scrittura non è unica nel caso delle Leavitt path algebre perché se considero un vertice regolare  $v$  di  $E$ , allora per la relazione (CK2) della Definizione 1.2.1 si ha

$$v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* = 0.$$

Ovvero tali cammini non sono linearmente indipendenti. Vediamo ora come questi cammini costituiscano una base per la Cohn path algebra  $C_K(E)$  di  $E$ .

**Proposizione 1.3.3.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora*

$$\mathcal{B} = \{ \lambda\mu^* \mid \lambda, \mu \in \text{Path}(E) \quad e \quad r(\lambda) = r(\mu) \}$$

*è una base di  $C_K(E)$  come  $K$ -spazio vettoriale.*

*Dimostrazione.* Consideriamo  $A$  il  $K$ -spazio vettoriale che ha come base gli elementi di  $\mathcal{B}$ . Dati due elementi  $\lambda_1\mu_1^*$  e  $\lambda_2\mu_2^*$  di  $\mathcal{B}$  definiamo il loro prodotto:

$$(\lambda_1\mu_1^*)(\lambda_2\mu_2^*) = \begin{cases} \lambda_1\lambda_2'\mu_2^* & \text{se } \lambda_2 = \mu_1\lambda_2' \text{ per qualche } \lambda_2' \in \text{Path}(E) \\ \lambda_1(\mu_1')^*\mu_2^* & \text{se } \mu_1 = \lambda_2\mu_1' \text{ per qualche } \mu_1' \in \text{Path}(E) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Se estendiamo per bilinearità il prodotto definito in (1.7) a tutti gli elementi di  $A$  otteniamo una  $K$ -algebra. Utilizzando la formula (1.7) si può verificare che tale prodotto è associativo. A questo punto possiamo osservare che la  $K$ -algebra ottenuta coincide con  $C_K(E)$ .  $\square$

**Quozienti di Cohn path algebre.** Cominciamo a costruire certe algebre quoziente a partire da una Cohn path algebra di un grafo  $E$ . A tale scopo consideriamo i seguenti elementi di  $C_K(E)$ :

$$q_v := v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \quad \text{dove } v \in \text{Reg}(E).$$

**Proposizione 1.3.4.** *Sia  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Gli elementi*

$$\{ q_v \mid v \in \text{Reg}(E) \}$$

*di  $C_K(E)$  sono idempotenti e ortogonali tra loro. Inoltre,  $q_v C_K(E) q_w = \delta_{v,w} q_v K$  per ogni coppia  $v, w$  di vertici regolari.*

*Dimostrazione.* La prima affermazione si dimostra applicando le relazioni imposte nella Definizione 1.3.1:

$$\begin{aligned} q_v q_w &= \left( v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \right) \left( w - \sum_{f \in s^{-1}(w)} ff^* \right) \\ &= vw - \sum_{f \in s^{-1}(w)} vff^* - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*w + \sum_{e \in s^{-1}(v)} \sum_{f \in s^{-1}(w)} ee^*ff^*. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Se  $v$  e  $w$  sono diversi allora gli addendi nella somma dell'espressione 1.8 sono nulli. Se  $v = w$ , allora

$$\begin{aligned} vw &= v \\ \sum_{f \in s^{-1}(w)} vff^* &= \sum_{f \in s^{-1}(w)} ff^* \\ \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*w &= \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \\ \sum_{e \in s^{-1}(v)} \sum_{f \in s^{-1}(w)} ee^*ff^* &= \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*. \end{aligned}$$

Dunque l'espressione (1.8) è uguale a  $q_v$ .

Dimostriamo ora la seconda parte della proposizione. Siano  $v \in E^0$  un vertice e  $f \in E^1$  un lato di  $E$ . Calcoliamo il prodotto  $q_v f$ . Se  $f$  non appartiene a  $s^{-1}(v)$ , allora  $vf = 0$  e  $ee^*f = 0$  per ogni  $e$  in  $s^{-1}(v)$ . Quindi

$$q_v f = \left( v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \right) f = vf - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* f = 0.$$

Se  $f$  appartiene a  $s^{-1}(v)$ , allora  $vf = f$  e  $ee^*f = f$  quando  $e = f$ , altrimenti  $ee^*f = 0$ . Quindi

$$q_v f = \left( v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \right) f = vf - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* f = f - f = 0.$$

Calcoliamo ora il prodotto  $f^* q_v$ . Se  $f$  non appartiene a  $s^{-1}(v)$ , allora  $f^*v = 0$  e  $f^*ee^* = 0$  per ogni  $e \in s^{-1}(v)$ . Quindi

$$f^* q_v = f^* \left( v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \right) = f^*v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} f^*ee^* = 0.$$

Se  $f$  appartiene a  $s^{-1}(v)$ , allora  $f^*v = f^*$  e  $f^*ee^* = f^*$  quando  $e = f$ , altrimenti  $f^*ee^* = 0$ . Quindi

$$f^* q_v = f^* \left( v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \right) = f^*v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} f^*ee^* = f^* - f^* = 0.$$

Grazie a ciò possiamo concludere che se  $\alpha$  è un elemento di  $C_K(E)$ , il prodotto  $q_v \alpha q_w$  è nullo, oppure è un multiplo non nullo di  $q_v$ .  $\square$

**Definizione 1.3.5.** Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $X$  un sottoinsieme di vertici regolari di  $E$ . Indichiamo con  $I^X$  l'ideale bilatero di  $C_K(E)$  generato dall'insieme  $\{q_v \mid v \in X\}$ . La *Cohn path algebra di  $E$  a coefficienti in  $K$  relativa a  $X$* , indicata con  $C_K^X(E)$ , è definita come l'algebra quoziente

$$C_K(E)/I^X.$$



**Osservazione 1.3.6.** La Cohn path algebra  $C_K^X(E)$  di un grafo relativa a un insieme  $X$  può essere vista come l'algebra quoziente della path algebra del grafo esteso, con l'ideale generato dalle relazioni (CK1) e (CK2) della Definizione 1.2.1, al variare del vertice  $v$  in  $X$ . Oppure, possiamo vedere  $C_K^X(E)$  come l'algebra quoziente della  $K$ -algebra associativa libera generata dall'insieme  $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$  con l'ideale generato dalle relazioni della Definizione 1.2.1 (V), (E1), (E2), (CK1) e dalla relazione (CK2) riferita ai vertici in  $X$ .

In altre parole, nella  $K$ -algebra  $C_K^X(E)$  la relazione (CK2) vale solo per i vertici regolari nell'insieme  $X$ . Se scegliamo come insieme  $X = \emptyset$  allora otteniamo la Cohn path algebra di  $E$ . Mentre se scegliamo come insieme  $X = \text{Reg}(E)$  otteniamo la Leavitt path algebra di  $E$ .

**Proposizione 1.3.7** (Proprietà Universale di  $C_K^X(E)$ ). *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Fissiamo  $X$  un sottoinsieme di vertici regolari di  $E$ . Consideriamo una  $K$ -algebra  $A$  che contiene un insieme  $\{a_v \mid v \in E^0\}$  di elementi idempotenti e ortogonali tra loro, e due insiemi  $\{a_e \mid e \in E^1\}$ ,  $\{b_e \mid e \in E^1\}$  tali che*

- (i)  $a_{s(e)}a_e = a_e a_{r(e)} = a_e$ ,  $a_{r(e)}b_e = b_e a_{s(e)} = b_e$  per ogni  $e \in E^1$ ;
- (ii)  $b_f a_e = \delta_{e,f} a_{r(e)}$  per ogni  $e, f \in E^1$ ;
- (iii)  $a_v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} a_e b_e$  per ogni  $v \in X$ .

Allora esiste un unico omomorfismo di  $K$ -algebre  $\varphi : C_K^X(E) \rightarrow A$  tale che  $\varphi(v) = a_v$ ,  $\varphi(e) = a_e$ ,  $\varphi(e^*) = b_e$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga alla Proprietà Universale 1.2.2 delle Leavitt path algebre 1.2.2.  $\square$

Ora vogliamo descrivere la struttura di di  $K$ -spazio vettoriale di una Cohn path algebra relativa a un sottoinsieme di vertici regolari esplicitando una base. Questo ci permetterà anche di esplicitare una base per le Leavitt path algebre.

**Proposizione 1.3.8.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $X$  un sottoinsieme di vertici regolari di  $E$ . Allora una base dell'ideale  $I^X$  è data dalla famiglia*

$$\mathcal{B}' = \{ \lambda q_v \mu^* \mid v \in X, \lambda, \mu \in \text{Path}(E), r(\lambda) = r(\mu) = v \}.$$

Per ogni vertice  $v$  di  $X$ , sia  $\{e_1^v, \dots, e_{n_v}^v\}$  una numerazione dell'insieme  $s^{-1}(v)$ . Allora una base di  $C_K^X(E)$  è data dalla famiglia

$$\mathcal{B}'' = \mathcal{B} \setminus \{ \lambda e_{n_v}^v (e_{n_v}^v)^* \mu^* \mid v \in X, \lambda, \mu \in \text{Path}(E), r(\lambda) = r(\mu) = v \},$$

dove  $\mathcal{B}$  è la base di  $C_K(E)$  presentata nella Proposizione 1.3.3.

*Dimostrazione.* Gli elementi dell'insieme  $\mathcal{B}'$  sono generatori dell'ideale  $I^X$  perché per quanto visto nella dimostrazione della Proposizione 1.3.4 abbiamo

$$f^*q_v = 0 = q_v f,$$

per ogni  $v \in E^0$  e  $f \in E^1$ . Dimostriamo che tali elementi sono linearmente indipendenti. Supponiamo che una  $K$ -combinazione lineare di elementi distinti di  $\mathcal{B}$  sia nulla:

$$\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i q_{v_i} \mu_i^* = 0.$$

Esplicitando il termine  $q_v$  otteniamo:

$$\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i \mu_i^* - \sum_{i=1}^n \sum_{e \in s^{-1}(v_i)} k_i \lambda_i e e^* \mu_i^* = 0,$$

che è un  $K$ -combinazione lineare di elementi della base  $\mathcal{B}$  di  $C_K(E)$ . Per la Proposizione 1.3.3 possiamo concludere che i coefficienti  $k_i$  devono essere nulli per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

Per dimostrare che  $\mathcal{B}''$  è una base di  $C_K^X(E)$  è sufficiente mostrare che l'insieme  $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$  è una base di  $C_K(E)$ . Mostriamo che ogni elemento di  $\mathcal{B}$  è combinazione lineare di elementi in  $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ . Sia  $\lambda \mu^*$  in  $\mathcal{B}$ , se  $\lambda \mu^*$  appartiene a  $\mathcal{B}''$  abbiamo già concluso, altrimenti  $\lambda \mu^* = \lambda' e_{n_v}^v (e_{n_v}^v)^* (\mu')^*$  per un certo  $v \in X$  e  $\lambda' (\mu')^*$  in  $\mathcal{B}''$  tali che  $r(\lambda') = r(\mu') = v$ . Possiamo scrivere:

$$\lambda' e_{n_v}^v (e_{n_v}^v)^* (\mu')^* = \lambda' (\mu')^* - \lambda' q_v (\mu')^* - \sum_{i=1}^{n_v-1} \lambda' e_i^v (e_i^v)^* (\mu')^*.$$

Dunque ogni  $\lambda \mu^*$  in  $\mathcal{B}$  è una  $K$ -combinazione lineare di elementi di  $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ .

Infine gli elementi di  $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$  sono linearmente indipendenti perché una  $K$ -combinazione lineare di elementi in  $\mathcal{B}'$  coinvolge un monomio  $\lambda e_{n_v}^v (e_{n_v}^v)^* \mu^*$  con coefficiente non nullo, che non può essere scritto come combinazione lineare di elementi di  $\mathcal{B}''$ .  $\square$

**Corollario 1.3.9.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Per ogni vertice regolare  $v$ , sia  $\{e_1^v, \dots, e_{n_v}^v\}$  una numerazione dell'insieme  $s^{-1}(v)$ . Una base di  $L_K(E)$  è data dalla famiglia*

$$\mathcal{B}'' = \mathcal{B} \setminus \{ \lambda e_{n_v}^v (e_{n_v}^v)^* \mu^* \mid v \in \text{Reg}(E), \lambda, \mu \in \text{Path}(E), r(\lambda) = r(\mu) = v \}.$$

*Dimostrazione.* Segue immediatamente dalla Proposizione 1.3.8 scegliendo  $X = \text{Reg}(E)$ .  $\square$

Dato  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Grazie alla Proposizione 1.3.8 e al Corollario 1.3.9 possiamo pensare le path algebre  $KE$  e  $KE^*$  come sottoalgebre di  $L_K(E)$  e  $C_K(E)$ .

**Corollario 1.3.10.** *Sia  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo il grafo esteso  $\widehat{E}$  di  $E$  ed  $E^*$  il grafo della Definizione 1.1.9. Allora le restrizioni delle proiezioni canoniche  $K\widehat{E} \rightarrow L_K(E)$  e  $K\widehat{E} \rightarrow C_K(E)$  rispetto alle sottoalgebre  $KE$  e  $KE^*$  sono iniettive. In particolare, gli elementi di  $\text{Path}(E)$  e  $\text{Path}(E^*)$  sono linearmente indipendenti nelle  $K$ -algebre  $L_K(E)$  e  $C_K(E)$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo gli insiemi  $\text{Path}(E)$  e  $\text{Path}(E^*)$  che sono rispettivamente le basi di  $KE$  e  $KE^*$  come  $K$ -spazi vettoriali. La loro immagine tramite la proiezione canonica  $K\widehat{E} \rightarrow L_K(E)$  è contenuta nella base  $\mathcal{B}''$  di  $L_K(E)$  descritta nel Corollario 1.3.9. Dunque la proiezione canonica è un'applicazione iniettiva ristretta ai sottospazi  $KE$  o  $KE^*$ .

Utilizzando la Proposizione 1.3.8 si procede in modo analogo per dimostrare l'iniettività nel caso della proiezione canonica  $K\widehat{E} \rightarrow C_K(E)$ .  $\square$

Determiniamo esplicitamente la Cohn path algebra della rosa con un petalo.

**Esempio 1.3.11.** Siano  $K$  un campo e  $R_1$  la rosa con un petalo come nell'Esempio 1.1.3 per  $n = 1$ . La Cohn path algebra  $C_K(R_1)$  è isomorfa alla  $K$ -algebra associativa unitaria libera  $A$  generata dall'insieme  $\{x, y\}$ , soggetta alla relazione  $xy = 1$ .

Sia  $K\langle x, y \rangle$  la  $K$ -algebra associativa unitaria libera generata dall'insieme  $\{x, y\}$ . Definiamo l'omomorfismo  $\varphi : K\langle x, y \rangle \rightarrow C_K(R_1)$  nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= e^* \\ \varphi(y) &= e \\ \varphi(1) &= v.\end{aligned}$$

Grazie alla relazione (CK1) della Definizione 1.2.1 abbiamo

$$\varphi(xy - 1) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(1) = e^*e - v = 0.$$

Dunque  $\varphi$  può essere visto come omomorfismo di  $K$ -algebre con dominio  $A = K\langle x, y \rangle / I$ , dove  $I$  è l'ideale generato dall'elemento  $xy - 1$ .

L'omomorfismo  $\varphi$  è suriettivo perché tutti i generatori di  $C_K(E)$  sono immagine di un elemento di  $A$ .

Per dimostrare che  $\varphi$  è un isomorfismo studiamo il suo nucleo. Sia  $Z := \sum_{i=1}^t k_i y^{m_i} x^{n_i}$  un generico elemento dell'algebra  $A$ . L'immagine  $\varphi(Z)$  è una  $K$ -combinazione lineare di elementi del tipo  $e^{m_i}(e^*)^{n_i}$ , che per la Proposizione 1.3.3 sono linearmente indipendenti. Dunque  $\varphi(Z)$  è nullo se, e solo se, i coefficienti  $k_i$  sono nulli per  $i = 1, \dots, t$ .

Vediamo ora come definire un'involuzione in una Cohn path algebra.

**Proposizione 1.3.12.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $X$  un sottoinsieme di vertici regolari di  $E$ . Allora esiste  $*$  :  $C_K^X(E) \rightarrow C_K^X(E)$  anti-isomorfismo di  $K$  algebre involutorio. In particolare esiste  $*$  :  $L_K(E) \rightarrow L_K(E)$  anti-isomorfismo di  $K$  algebre involutorio.*

*Dimostrazione.* Consideriamo  $K\widehat{E}$  la path algebra del grafo esteso di  $E$ . Indichiamo con  $I$  l'ideale generato dalle relazioni (CK1) e (CK2) della Definizione 1.2.1, al variare di  $v$  in  $X$ . Per la Proposizione 1.1.17 esiste  $*$  :  $K\widehat{E} \rightarrow K\widehat{E}$  anti-isomorfismo. L'immagine tramite  $*$  dei generatori di  $I$  sono ancora generatori di  $I$ :

$$(e^*e' - \delta_{e,e'}r(e))^* = (e')^*e - \delta_{e,e'}r(e)$$

$$\left( v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \right)^* = v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*$$

per ogni  $v \in X$  e ogni  $e \in E^1$ . Quindi  $I^* = I$ .

Consideriamo la proiezione canonica  $\pi : K\widehat{E} \rightarrow C_K^X(E) = K\widehat{E}/I$ . La composizione  $\pi \circ * : K\widehat{E} \rightarrow C_K^X(E)$  è un anti-omomorfismo di  $K$ -algebre. L'ideale  $I$  è contenuto nel suo nucleo, dunque possiamo definire  $*$  nell'algebra quoziente  $C_K^X(E) = K\widehat{E}/I$ .

Sia  $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i^*$  un elemento di  $C_K^X(E)$ , dove  $n \geq 1$ ,  $\lambda$  e  $\mu$  sono cammini di  $E$  tali che  $r(\lambda) = r(\mu)$ . Se applichiamo due volte  $*$  a un qualsiasi elemento di  $C_K^X(E)$  otteniamo l'elemento di partenza:

$$(\alpha^*)^* = \left( \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i^* \right)^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i^* = \alpha.$$

Quindi  $*$  è un'involuzione e in particolare è un anti-isomorfismo.

La seconda parte della proposizione si ottiene dalla prima considerando  $X = \text{Reg}(E)$ .  $\square$

**Corollario 1.3.13.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora la Cohn path algebra  $C_K^X(E)$  del grafo  $E$  è isomorfa alla sua algebra opposta  $(C_K^X(E))^{\text{op}}$ . In particolare la Leavitt path algebra del grafo  $E$  è isomorfa alla sua algebra opposta  $(L_K(E))^{\text{op}}$ .*

*Dimostrazione.* La prima affermazione segue immediatamente considerando l'anti-isomorfismo  $*$  della Proposizione 1.3.12 come un isomorfismo tra  $C_K^X(E)$  e  $(C_K^X(E))^{\text{op}}$ . Per la seconda basta considerare  $X = \text{Reg}(E)$ .  $\square$

**Collegamento con le Leavitt path algebre.** Per continuare a studiare il legame tra Cohn path algebre e Leavitt path algebre abbiamo bisogno della seguente definizione.

**Definizione 1.3.14.** Sia  $E$  un grafo. Consideriamo  $X$  un sottoinsieme di vertici regolari di  $E$  e definiamo l'insieme  $Y := \text{Reg}(E) \setminus X$ . Sia  $Y' = \{v' \mid v \in Y\}$  una copia disgiunta di  $Y$ . Per ogni vertice  $v$  in  $Y$  e ogni lato  $e$  per cui  $r(e) = v$ , consideriamo il simbolo  $e'$ . Definiamo il grafo  $E(X)$  avente come vertici e lati rispettivamente gli insiemi:

$$E(X)^0 = E^0 \sqcup Y', \quad \text{e} \quad E(X)^1 = E^1 \sqcup \{e' \mid r_E(e) \in Y\}.$$

Definiamo i vertici di partenza e di arrivo dei lati come segue:

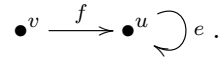
$$\begin{aligned} r_{E(X)}(e) &= r_E(e) && \text{per ogni } e \in E^1 \\ s_{E(X)}(e) &= s_E(e) && \text{per ogni } e \in E^1 \\ r_{E(X)}(e') &= r_E(e) && \text{per ogni simbolo } e' \\ s_{E(X)}(e') &= s_E(e) && \text{per ogni simbolo } e'. \end{aligned}$$

In altre parole da un grafo  $E$  e un sottoinsieme  $X$  di vertici regolari costruiamo un nuovo grafo  $E(X)$  aggiungendo una copia di ogni vertice in  $\text{Reg}(E) \setminus X$ , e un nuovo lato per ogni lato il cui vertice di arrivo sta in  $\text{Reg}(E) \setminus X$ . Osserviamo che i vertici che vengono aggiunti sono sink, dunque l'insieme di vertici regolari di  $E$  coincide con l'insieme dei vertici regolari del nuovo grafo  $E(X)$ .

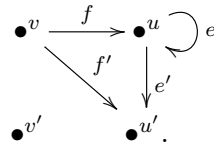
Se scegliamo  $X = \text{Reg}(E)$  allora il grafo  $E(X)$  coincide con il grafo  $E$  di partenza.

Facciamo alcuni esempi di applicazione di questa costruzione.

**Esempio 1.3.15.** Sia  $E$  il seguente grafo:



Consideriamo  $X = \emptyset$ , dunque  $Y$  coincide con l'insieme  $\text{Reg}(E) = \{v, u\}$ . Per ottenere il grafo  $E(X)$  dobbiamo aggiungere due vertici  $v', u'$  e due lati  $f', e'$  che partono rispettivamente da  $v$  e  $u$  e arrivano in  $u'$ :



**Esempio 1.3.16.** Consideriamo la rosa con un petalo:

$$R_1 = e \circlearrowleft \bullet^v,$$

e l'insieme  $X = \emptyset$ . Per ottenere il grafo  $R_1(X)$  dobbiamo aggiungere un vertice  $v'$  e il lato  $e'$  che parte da  $v$  e arriva in  $v'$ :

$$R_1(X) = e \circlearrowleft \bullet^v \xrightarrow{e'} \bullet^{v'}.$$

Possiamo osservare che il grafo  $R_1(X)$  è proprio il grafo di Toeplitz dell'Esempio 1.1.4.

Nel seguente teorema vedremo come la costruzione del grafo  $E(X)$  presentata nella Definizione 1.3.14 ci permette di vedere le Cohn path algebre come Leavitt path algebre.

**Teorema 1.3.17.** *Sia  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $X$  un sottoinsieme di vertici regolari di  $E$  e il grafo  $E(X)$  definito in 1.3.14. Allora la Cohn path algebra  $C_K^X(E)$  è isomorfa alla Leavitt path algebra  $L_K(E(X))$ .*

*Dimostrazione.* Facciamo riferimento alle notazioni delle Definizioni 1.3.14 e 1.2.1. Utilizziamo la Proprietà Universale 1.3.7 di  $C_K^X(E)$  per definire  $\varphi : C_K^X(E) \rightarrow L_K(E(X))$  un omomorfismo di  $K$ -algebre. Consideriamo i seguenti elementi di  $L_K(E(X))$ :

$$a_v = \begin{cases} v + v' & \text{se } v \in Y \\ v & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad a_e = \begin{cases} e + e' & \text{se } e \in E^1 \text{ e } r_E(e) \in Y \\ e & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$b_e = a_e^* \quad \text{per ogni } e \in E^1.$$

Verifichiamo che siano soddisfatte le ipotesi della Proprietà Universale 1.3.7. Siano  $v, w \in E^0$ . Se  $v, w \notin Y$

$$a_v a_w = vw = \delta_{v,w} v = \delta_{v,w} a_v.$$

Se  $v \in Y$  e  $w \notin Y$

$$a_v a_w = (v + v')w = \delta_{v,w} v + \delta_{v',w} v' = 0.$$

Se  $v, w \in Y$

$$\begin{aligned} a_v a_w &= (v + v')(w + w') = \delta_{v,w} v + \delta_{v,w'} v + \delta_{v',w} v' + \delta_{v',w'} v' \\ &= \delta_{v,w} (v + v') = \delta_{v,w} a_v. \end{aligned}$$

Quindi gli elementi  $\{a_v \mid v \in E^0\}$  sono idempotenti e ortogonali tra loro.

Sia  $e \in E^1$  tale che il vertice  $r_E(e)$  non appartenga a  $Y$ . Abbiamo che

$$\begin{aligned} a_{s_E(e)} a_e &= a_{s_E(e)} e = e = a_e \\ a_e a_{r_E(e)} &= e r_E(e) = e = a_e \end{aligned}$$

dove abbiamo usato  $a_{r_E(e)} = r_E(e)$ ,  $a_e = e$  e  $a_{s_E(e)} e = e$ .

Sia  $e \in E^1$  tale che il vertice  $r_E(e)$  appartenga a  $Y$ . Abbiamo che

$$\begin{aligned} a_e a_{r_E(e)} &= (e + e')(r_E(e) + r_E(e)') = e + e' = a_e; \\ a_{s_E(e)} a_e &= a_{s_E(e)} (e + e') = e + a_{s_E(e)} e' \\ &= e + a_{s_E(e)} s_E(e) e' = e + e' = a_e; \end{aligned}$$

dove abbiamo usato  $a_e = e + e'$ ,  $a_{r_E(e)} = r_E(e) + r_E(e)'$  e  $s_E(e) = s_E(X)(e')$ . Applicando l'anti-isomorfismo  $*$  a quanto appena visto si ottiene che la richiesta (i) è soddisfatta.

Siano  $e, f \in E^1$ . Se  $e \neq f$ , allora  $b_e a_f = 0$ . Supponiamo che  $e = f$ . Se  $r_E(E)$  non appartiene a  $Y$ , allora

$$b_e a_e = a_e^* a_e = e^* e = r_E(e) = a_{r_E(e)}.$$

Altrimenti

$$b_e a_e = a_e^* a_e = (e^* + (e')^*)(e + e') = r_E(e) + r_E(e)' = a_{r_E(e)}.$$

Quindi anche la richiesta (ii) è rispettata.

Proseguiamo con la richiesta (iii). Sia  $v \in X$ , con  $e$  indichiamo i lati che partono dal vertice  $v$ . Allora

$$\begin{aligned} a_v - \sum a_e b_e &= a_v - \sum a_e a_e^* \\ &= v - \sum_{r_E(e) \notin Y} e e^* - \sum_{r_E(e) \in Y} (e + e')(e^* + (e')^*) \\ &= v - \sum_{r_E(e) \notin Y} e e^* - \sum_{r_E(e) \in Y} e e^* - \sum_{r_E(e) \in Y} e'(e')^* = 0, \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la relazione (CK2) di  $L_K(E(X))$  e esplicitato le sommatorie sui lati  $e \in s_E^{-1}(v)$ .

Possiamo concludere che esiste  $\varphi : C_K^X(E) \rightarrow L_K(E(X))$  omomorfismo di  $K$ -algebre tale che

$$\varphi(v) = \begin{cases} v + v' & \text{se } v \in Y \\ v & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \varphi(e) = \begin{cases} e + e' & \text{se } e \in E^1 \text{ e } r_E(e) \in Y \\ e & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$\varphi(e^*) = a_e^* \quad \text{per ogni } e \in E^1.$$

Ora vogliamo definire  $\psi$  l'omomorfismo inverso di  $\varphi$ . A tale scopo cerchiamo di capire quali sono gli elementi di  $C_K^X(E)$  che hanno come immagine i generatori dell'algebra  $L_K(E(X))$ .

Sia  $v \in Y$ , allora l'immagine di  $q_v$  è

$$\begin{aligned} \varphi\left(v - \sum e e^*\right) &= v + v' - \sum_{r_E(e) \notin Y} e e^* - \sum_{r_E(e) \in Y} (e + e')(e^* + (e')^*) \\ &= v + v' - \sum_{r_E(e) \notin Y} e e^* - \sum_{r_E(e) \in Y} e e^* - \sum_{r_E(e) \in Y} e'(e')^* = v', \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la relazione (CK2) di  $L_K(E(X))$  e esplicitato le sommatorie sui lati  $e \in s_E^{-1}(v)$ . L'immagine di  $v - q_v$  è

$$\varphi(v - q_v) = \varphi(v) - \varphi(q_v) = v + v' - v' = v.$$

Sia  $e \in E^1$  tale che  $r_E(e) = v$  stia in  $Y$ . Calcoliamo le immagini di  $e(v - q_v)$  e  $eq_v$  rispettivamente:

$$\begin{aligned}\varphi(e(v - q_v)) &= \varphi(e)\varphi(v - q_v) = (e + e')v = e \\ \varphi(eq_v) &= \varphi(e)\varphi(q_v) = (e + e')v' = e'.\end{aligned}$$

Utilizziamo la Proprietà Universale 1.2.2 di  $L_K(E(X))$  per definire  $\psi : L_K(E(X)) \rightarrow C_K^X(E)$  un omomorfismo di  $K$ -algebre. Consideriamo i seguenti elementi di  $C_K^X(E)$ :

$$\begin{aligned}a_v &= v - q_v \quad \text{se } v \in Y \\ a_{v'} &= q_v \quad \text{se } v \in Y \\ a_v &= v \quad \text{altrimenti} \\ a_e &= e(v - q_v) \quad \text{se } e \in E^1 \text{ e } r_E(e) = v \in Y \\ a_{e'} &= eq_v \quad \text{se } e \in E^1 \text{ e } r_E(e) = v \in Y \\ a_e &= e \quad \text{altrimenti} \\ b_e &= a_e^* \quad \text{per ogni } e \in E(X)^1.\end{aligned}$$

Con un calcolo immediato si verifica che le richieste (i) e (ii) sono soddisfatte. Verifichiamo invece la richiesta (iii). Sia  $v$  un vertice regolare di  $E$ , allora per la relazione (CK2) in  $L_K(E(X))$ :

$$v = \sum_{r_E(e) \notin Y} ee^* + \sum_{r_E(e) \in Y} ee^* + \sum_{r_E(e) \in Y} e'(e')^*.$$

dove abbiamo esplicitato le sommatorie sui lati  $e \in s_E^{-1}(v)$ .

Notiamo che per ogni vertice  $w$  di  $E$ , l'elemento  $w - q_w$  in  $C_K^X(E)$  è idempotente e

$$(w - q_w)^* = \left( \sum_{e \in s^{-1}(w)} ee^* \right)^* = \sum_{e \in s^{-1}(w)} ee^* = w - q_w.$$

Ora possiamo calcolare

$$\begin{aligned}& \sum_{r_E(e) \notin Y} a_e b_e + \sum_{r_E(e) \in Y} a_e b_e + \sum_{r_E(e) \in Y} a_{e'} b_{e'} = \\ &= \sum_{r_E(e) \notin Y} ee^* + \sum_{r_E(e) \in Y} e(r_E(e) - q_{r_E(e)})(r_E(e) - q_{r_E(e)})^* e^* + \\ & \qquad \qquad \qquad + \sum_{r_E(e) \in Y} eq_{r_E(e)} q_{r_E(e)}^* e^* =\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{r_E(e) \notin Y} ee^* + \sum_{r_E(e) \in Y} e(r_E(e) - q_{r_E(e)})e^* + \sum_{r_E(e) \in Y} eq_{r_E(e)}e^* = \\
&= \sum_{s_E(e)=v} ee^*, \tag{1.9}
\end{aligned}$$

dove tutte le sommatorie sono esplicitate sui lati  $e \in s_E^{-1}(v)$ . Se  $v$  appartiene a  $X$ , allora per la relazione (CK2) in (1.9) abbiamo ottenuto  $v = a_v$ . Altrimenti, se  $v$  appartiene a  $Y$  quanto ottenuto in (1.9) è uguale a  $v - q_v = a_v$ .

Possiamo concludere che esiste  $\psi : L_K(E(X)) \rightarrow C_K^X(E)$  omomorfismo di  $K$ -algebre tale che

$$\begin{aligned}
\psi(v) &= v - q_v \quad \text{se } v \in Y \\
\psi(v') &= q_v \quad \text{se } v \in Y \\
\psi(v) &= v \quad \text{altrimenti} \\
\psi(e) &= e(v - q_v) \quad \text{se } e \in E^1 \text{ e } r_E(e) = v \in Y \\
\psi(e') &= eq_v \quad \text{se } e \in E^1 \text{ e } r_E(e) = v \in Y \\
\psi(e) &= e \quad \text{altrimenti} \\
\psi(e^*) &= \psi(e)^* \quad \text{per ogni } e \in E(X)^1.
\end{aligned}$$

Gli omomorfismi  $\varphi$  e  $\psi$  sono uno l'inverso dell'altro, dunque  $C_K^X(E)$  è isomorfa a  $L_K(E(X))$ .  $\square$

Come applicazione del Teorema 1.3.17 determiniamo la Leavitt path algebra del grafo di Toeplitz.

**Esempio 1.3.18.** Siano  $K$  un campo e  $E_T$  il grafo di Toeplitz visto nell'Esempio 1.1.4. La Leavitt path algebra  $L_K(E_T)$  è isomorfa alla  $K$ -algebra associativa unitaria libera  $A$  generata dall'insieme  $\{x, y\}$ , soggetta alla relazione  $xy = 1$ .

Per il Teorema 1.3.17 e l'Esempio 1.3.16 la Leavitt path algebra di  $E_T$  è isomorfa alla Cohn path algebra  $C_K(R_1)$ . Dall'Esempio 1.3.11 sappiamo che la Cohn path algebra  $C_K(R_1)$  è isomorfa ad  $A$ . Riassumendo:

$$L_K(E_T) = L_K(R_1(\emptyset)) \cong C_K^\emptyset(R_1) \cong A.$$

## 1.4 Leavitt path algebre di grafi infiniti

Fino a ora abbiamo determinato esplicitamente Leavitt path algebre solo di grafi finiti. Questa sezione ha come obiettivo principale quello di descrivere la Leavitt path algebra di un grafo infinito come limite diretto di algebre.

**Limite diretto di grafi.** Introduciamo una categoria  $\mathcal{G}$  che ci permetterà di parlare di limite diretto di grafi.

**Definizione 1.4.1.** Definiamo la categoria  $\mathcal{G}$  come segue. Gli oggetti di  $\mathcal{G}$  sono le coppie  $(E, X)$  dove  $E$  è un grafo e  $X$  è un sottoinsieme di vertici regolari di  $E$ . Dati  $(F, Y)$  e  $(E, X)$  due oggetti di  $\mathcal{G}$ , allora  $\psi = (\psi^0, \psi^1) : (F, Y) \rightarrow (E, X)$  è un morfismo di  $\mathcal{G}$  se:

- (1)  $\psi : F \rightarrow E$  è un omomorfismo di grafi come nella Definizione 1.1.14, tale che  $\psi^0$  e  $\psi^1$  sono funzioni iniettive;
- (2)  $\psi^0(Y) \subseteq X$ ;
- (3) per ogni vertice  $v$  in  $Y$ , la restrizione  $\psi^1 : s_F^{-1}(v) \rightarrow s_E^{-1}(\psi^0(v))$  è una biiezione.

Il seguente lemma ci permette di ottenere un omomorfismo di  $K$  algebre a partire da un morfismo nella categoria  $\mathcal{G}$ .

**Lemma 1.4.2.** Siano  $(F, Y)$  e  $(E, X)$  due oggetti di  $\mathcal{G}$  e  $\psi : (F, Y) \rightarrow (E, X)$  un loro morfismo in  $\mathcal{G}$ . Allora esiste  $\bar{\psi} : C_K^Y(F) \rightarrow C_K^X(E)$  omomorfismo di  $K$ -algebre.

*Dimostrazione.* Utilizziamo la Proprietà Universale 1.3.7 di  $C_K^Y(F)$  per definire un omomorfismo di  $K$ -algebre  $\bar{\psi} : C_K^Y(F) \rightarrow C_K^X(E)$ . Definiamo i seguenti elementi di  $C_K^X(E)$ :

$$\begin{aligned} a_v &= \psi^0(v) \\ a_e &= \psi^1(e) \\ b_e &= \psi^1(e)^* \end{aligned}$$

per ogni  $v \in F^0$  e ogni  $e \in F^1$ . L'insieme  $\{ a_v \mid v \in F^0 \}$  è formato da elementi idempotenti e ortogonali tra loro:

$$a_v a_w = \psi^0(v) \psi^0(w) = \delta_{v,w} \psi^0(v) = \delta_{v,w} a_v.$$

Dato un lato  $e$  di  $F$ , allora

$$\begin{aligned} a_{s_E(e)} a_e &= \psi^0(s_E(e)) \psi^1(e) = \psi^1(e) = a_e \\ a_e a_{r_E(e)} &= \psi^1(e) \psi^0(r_E(e)) = \psi^1(e) = a_e. \end{aligned}$$

Applicando l'involuzione  $*$  otteniamo che la richiesta (i) della Proprietà Universale 1.2.2 è soddisfatta.

Dati due lati  $e, e'$  di  $F$ , allora

$$b_e a_{e'} = \psi^1(e)^* \psi^1(e') = \delta_{e,e'} \psi^1(e) = \delta_{e,e'} a_{r(e)}.$$

Dunque anche la richiesta (ii) della Proprietà Universale 1.2.2 è rispettata.

Sia ora  $v$  un vertice in  $Y$ , grazie al fatto che  $s_F^{-1}(v)$  è in biiezione con  $s_E^{-1}(\psi^0(v))$ , abbiamo

$$\sum_{e \in s_F^{-1}(v)} a_e b_e = \sum_{e \in s_F^{-1}(v)} \psi^1(e) \psi^1(e)^* = \sum_{f \in s_E^{-1}(\psi^0(v))} f f^* = \psi^0(v) = a_v.$$

Quindi per la Proprietà Universale 1.3.7 possiamo concludere che esiste un omomorfismo  $\bar{\psi} : C_K^Y(F) \rightarrow C_K^X(E)$  tale che

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(v) &= \psi^0(v) \\ \bar{\psi}(e) &= \psi^1(e) \\ \bar{\psi}(e^*) &= \psi^1(e)^*\end{aligned}$$

per ogni  $v \in F^0$  e ogni  $e \in F^1$ .  $\square$

Indichiamo con  $\mathcal{A}_K$  la categoria delle  $K$ -algebre (non necessariamente unitarie). Il Lemma 1.4.2 ci permette di definire un funtore

$$F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}_K, \quad (1.10)$$

dove a un oggetto  $(E, X)$  di  $\mathcal{G}$  viene associato la  $K$ -algebra  $C_K^X(E)$ . Dati  $(F, Y)$  e  $(E, X)$  due oggetti di  $\mathcal{G}$ , a un morfismo  $\psi : (F, Y) \rightarrow (E, X)$  in  $\mathcal{G}$  viene associato l'omomorfismo di  $K$ -algebre  $\bar{\psi} : C_K^Y(F) \rightarrow C_K^X(E)$  descritto nel Lemma 1.4.2.

In seguito indicheremo con  $(I, \leq)$  un insieme diretto, ovvero la relazione  $\leq$  è un ordine parziale e richiediamo che per ogni  $i$  e  $j$  in  $I$ , esista  $k$  in  $I$  tale che  $i \leq k$  e  $j \leq k$ .

Un sistema diretto  $\mathcal{S} = \{ (E_i, X_i)_{i \in I}, (\varphi_{ji})_{i, j \in I} \}$  nella categoria  $\mathcal{G}$  è un insieme formato da oggetti di  $\mathcal{G}$  indicizzati da un insieme  $(I, \leq)$  diretto, e da dei morfismi  $\varphi_{ji} : (E_i, X_i) \rightarrow (E_j, X_j)$  in  $\mathcal{G}$  per ogni  $i \leq j$  in  $I$ , tali che dati  $i \leq j \leq k$  in  $I$ , allora  $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$ . Se  $i = j$  allora  $\varphi_{ii}$  coincide con il morfismo identità dell'oggetto  $(E_i, X_i)$ .

Nella seguente proposizione vedremo come è sempre possibile costruire il limite diretto di un sistema diretto  $\mathcal{S}$  in  $\mathcal{G}$ .

**Proposizione 1.4.3.** *Sia  $\mathcal{S} = \{ (E_i, X_i)_{i \in I}, (\varphi_{ji})_{i, j \in I, i \geq j} \}$  un sistema diretto nella categoria  $\mathcal{G}$ , allora esiste il limite diretto di tale sistema. Inoltre il funtore  $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}_K$  definito in (1.10) è continuo.*

*Dimostrazione.* Consideriamo  $\bigsqcup_{i \in I} E_i^0$  l'unione disgiunta dei vertici dei grafi  $E_i$  e  $\bigsqcup_{i \in I} E_i^1$  l'unione disgiunta dei lati dei grafi  $E_i$ . Definiamo una relazione di equivalenza in tali insiemi come segue:

$$x \sim y \quad \text{se, e solo se, esiste } k \in I \text{ tale che } \varphi_{ki}^s(x) = \varphi_{kj}^s(y),$$

dove  $x \in E_i^s$ ,  $y \in E_j^s$ , per opportuni indici  $i, j \in I$ ,  $s = 0, 1$ ,  $k \geq i$  e  $k \geq j$ .

Definiamo un grafo  $E = (E^0, E^1, s, r)$  come segue. Come insieme di vertici e di lati consideriamo i rispettivi insiemi quozienti

$$E^0 := \bigsqcup_{i \in I} E_i^0 / \sim \quad \text{e} \quad E^1 := \bigsqcup_{i \in I} E_i^1 / \sim .$$

Le funzioni  $s, r : E^1 \rightarrow E^0$  sono così definite:

$$s([e]_{\sim}) = [s_{E_j}(e)]_{\sim}, \quad r([e]_{\sim}) = [r_{E_j}(e)]_{\sim},$$

per ogni lato  $e \in \bigsqcup_{i \in I} E_i^1$  e per un opportuno indice  $j \in I$  tale che  $e$  appartiene a  $E_j$ . Mostriamo che  $s$  è ben definita. Siano  $e$  e  $f$  due lati in  $\bigsqcup_{i \in I} E_i^1$  in relazione tra loro. Esistono  $i$  e  $j$  opportuni indici in  $I$  per cui  $e$  e  $f$  appartengono rispettivamente a  $E_i^1$  e  $E_j^1$ . Considero  $k$  un indice maggiore di  $i$  e  $j$  tale che  $\varphi_{ki}(e) = \varphi_{kj}(f)$ . Allora, dal fatto che i morfismi  $\varphi_{ji}$  sono anche degli omomorfismi di grafi abbiamo che

$$\varphi_{ki}^0(s_{E_i}(e)) = s_{E_k}(\varphi_{ki}^1(e)) = s_{E_k}(\varphi_{kj}^1(f)) = \varphi_{kj}^0(s_{E_j}(f)).$$

Dunque  $s_{E_i}(e)$  è in relazione con  $s_{E_j}(f)$ .

Allo stesso modo si verifica che  $r$  è ben definita.

Consideriamo le mappe canoniche  $\psi_i = (\psi^0, \psi^1) : E_i \rightarrow E$ , al variare di  $i$  in  $I$ . Notiamo subito che le mappe  $\psi$  sono compatibili con il sistema diretto  $\mathcal{S}$ :  $\varphi_{ji} \circ \psi_j = \psi_i$  per ogni  $i, j$  in  $I$  tali che  $i \leq j$ .

Le mappe  $\psi_i$  sono dei morfismi in  $\mathcal{G}$ , ovvero soddisfano le condizioni (1),(2) e (3) della Definizione 1.4.1. Infatti le funzioni  $\psi^0$  e  $\psi^1$  sono iniettive perché due elementi dello stesso grafo non possono essere in relazione tra loro per l'iniettività delle funzioni  $\varphi_{ji}^0$  e  $\varphi_{ji}^1$ , dunque la richiesta (1) è soddisfatta.

Sia  $v$  un vertice di  $E_i$  appartenente a  $X_i$ . Allora l'insieme dei lati del grafo  $E$  uscenti dal vertice  $\psi_i^0(v)$  è:

$$s_E^{-1}(\psi_i^0(v)) = \bigcup_{j \geq i} \psi_j^1(s_{E_j}^{-1}(\varphi_{ji}^0(v))).$$

Per la compatibilità delle  $\psi_i$  e la proprietà (3) dei morfismi in  $\mathcal{G}$ , abbiamo che

$$\psi_i^1(s_{E_i}^{-1}(v)) = \psi_j^1(\varphi_{ji}^1(s_{E_i}^{-1}(v))) = \psi_j^1(s_{E_j}^{-1}(\varphi_{ji}^0(v))).$$

Se definiamo l'insieme  $X$  come l'unione  $\bigcup_{i \in I} \psi_i^0(X_i)$ , abbiamo che le mappe  $\psi_i : (E_i, X_i) \rightarrow (E, X)$  soddisfano anche le condizioni (2) e (3).

Riassumendo  $(E, X)$  è un oggetto di  $\mathcal{G}$  e la famiglia di morfismi in  $\mathcal{G}$

$$\{ \psi_i : (E_i, X_i) \rightarrow (E, X) \}_{i \in I}$$

è compatibile con il sistema  $\mathcal{S}$ . Osserviamo che ogni elemento del grafo  $E$  può essere scritto come l'immagine  $\psi_i(\alpha)$ , per un opportuno indice  $i \in I$  e un opportuno elemento  $\alpha$  del grafo  $E_i$ .

Mostriamo che tale oggetto e tali morfismi sono il limite diretto del sistema  $\mathcal{S}$ . Sia  $(G, Z)$  un oggetto di  $\mathcal{G}$  e

$$\{ \gamma_i : (E_i, X_i) \rightarrow (G, Z) \}_{i \in I}$$

una famiglia di morfismi in  $\mathcal{G}$  compatibili con il sistema  $\mathcal{S}$ . Definiamo  $\gamma : E \rightarrow G$  omomorfismo di grafi come segue:

$$\gamma^t(\psi_i(\alpha)) = \gamma_i^t(\alpha),$$

dove  $i \in I$ ,  $t = 0, 1$  e  $\alpha \in E_i^t$ . Mostriamo che  $\gamma$  è ben definita. Supponiamo che un elemento di  $E$  si possa scrivere come  $\psi_i(\alpha)$  e  $\psi_j(\beta)$ , per opportuni  $i$  e  $j$  in  $I$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  in  $E_i^t$  e  $E_j^t$  rispettivamente. Allora esiste  $k$  in  $I$  tale che  $i \leq k$  e  $j \leq k$ , per cui vale  $\varphi_{ki}^t(\alpha) = \varphi_{kj}^t(\beta)$ . Compongo con il morfismo  $\gamma_k^t$ :

$$\gamma_k^t \circ \varphi_{ki}^t(\alpha) = \gamma_k^t \circ \varphi_{kj}^t(\beta).$$

Per la compatibilità dei morfismi  $\gamma_i$  ottengo

$$\gamma_i^t(\alpha) = \gamma_j^t(\beta),$$

ovvero  $\gamma^t(\psi_i(\alpha)) = \gamma^t(\psi_j(\beta))$ .

Per come è stato definito,  $\gamma$  è l'unico omomorfismo per cui  $\gamma \circ \psi_i = \gamma_i$  per ogni  $i$  in  $I$ .

Ora vogliamo mostrare che  $\gamma$  rappresenta un morfismo  $\gamma : (E, X) \rightarrow (G, Z)$  in  $\mathcal{G}$  verificando le richieste (1), (2) e (3) della Definizione 1.4.1. Le funzioni  $\gamma^0$  e  $\gamma^1$  sono iniettive perché se supponiamo che esistano  $i$  e  $j$  in  $I$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  in  $E_i^t$  e  $E_j^t$  rispettivamente tali che

$$\gamma^t(\psi_i^t(\alpha)) = \gamma^t(\psi_j^t(\beta)),$$

allora per definizione  $\gamma_i^t(\alpha) = \gamma_j^t(\beta)$ . Consideriamo  $k$  in  $I$ , tale che  $i \leq k$  e  $j \leq k$ , per la compatibilità abbiamo

$$\gamma_k^t \circ \varphi_{ki}^t(\alpha) = \gamma_k^t \circ \varphi_{kj}^t(\beta).$$

Per l'iniettività delle funzioni  $\gamma_k^t$  possiamo concludere  $\varphi_{ki}^t(\alpha) = \varphi_{kj}^t(\beta)$ , ovvero  $\alpha$  è equivalente a  $\beta$ .

Per come è definito  $X$  è immediato verificare che per ogni vertice  $v$  in  $X$ , la sua immagine tramite  $\gamma$  appartiene a  $Z$ .

Sia  $v$  un vertice di un grafo  $E_i$  appartenente a  $X_i$ . Per la richiesta (3) della Definizione 1.4.1 l'insieme  $s_{E_i}^{-1}(v)$  dei lati di  $E_i$  uscenti dal vertice  $v$  è in biiezione con gli insiemi  $s_E^{-1}(\psi_i^0(v))$  e  $s_G^{-1}(\gamma_i^0(v))$ . Per definizione  $\gamma^0(\psi_i^0(v)) = \gamma_i^0(v)$ , dunque possiamo concludere che  $s_E^{-1}(\psi_i^0(v))$  è in biiezione con  $s_G^{-1}(\gamma_i^0(v))$ .

Per dimostrare la continuità del funtore  $F$  dobbiamo verificare che il sistema diretto

$$F(\mathcal{S}) = \left\{ (C_K^{X_i}(E_i))_{i \in I}, (\overline{\varphi}_{ji})_{i,j \in I} \right\},$$

ottenuto applicando  $F$  agli oggetti e ai morfismi di  $\mathcal{S}$ , ha come limite diretto l'oggetto  $F((E, X)) = C_K^X(E)$  e la famiglia di mappe compatibili  $\{F(\psi_i) = \overline{\psi}_i\}_{i \in I}$ .

Siano  $A$  una  $K$ -algebra e  $\{\gamma_i\}_{i \in I}$  una famiglia di omomorfismi di  $K$ -algebre compatibili con il sistema  $F(\mathcal{S})$ . Utilizziamo la Proprietà Universale 1.3.7 di  $C_K^X(E)$  per definire un omomorfismo di  $K$ -algebre  $\tilde{\gamma} : C_K^X(E) \rightarrow A$ . Definiamo la funzione  $\gamma : E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rightarrow A$  come segue:

$$\gamma(\psi_i^t(\alpha)) = \gamma_i(\alpha), \quad \text{e} \quad \gamma(\psi_i^t(\alpha)^*) = \gamma_i(\alpha^*),$$

dove  $i \in I$ ,  $t = 0, 1$  e  $\alpha$  è un elemento di  $E_i$ . Analogamente a quanto fatto in precedenza si verifica che  $\gamma$  è ben definita.

Dovremmo mostrare che gli elementi

$$\{\gamma(w) \mid w \in E^0\}, \quad \{\gamma(f) \mid f \in E^1\}, \quad \{\gamma(f^*) \mid f \in E^1\}$$

soddisfano le richieste della Proprietà Universale 1.3.7, ma mostriamo solo che vale la richiesta (iii) perché le altre si ottengono con un calcolo diretto.

Sia un vertice in  $X$  scritto come  $\psi_i^0(v)$ , dove  $i$  è un indice in  $I$  e  $v$  un vertice del grafo  $E_i$  in  $X_i$ . Allora

$$\begin{aligned} \gamma(\psi_i^0(v)) &= \gamma_i(v) = \gamma_i\left(\sum_{e \in s_{E_i}^{-1}(v)} ee^*\right) = \sum_{e \in s_{E_i}^{-1}(v)} \gamma_i(e)\gamma_i(e)^* \\ &= \sum_{e \in s_{E_i}^{-1}(v)} \gamma(\psi_i^1(e))\gamma(\psi_i^1(e))^* = \sum_{f \in s_E^{-1}(v)} \gamma(f)\gamma(f^*), \end{aligned}$$

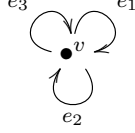
dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che la funzione  $\psi_i^1 : s_{E_i}^{-1}(v) \rightarrow s_E^{-1}(\psi_i^0(v))$  è biiettiva. Quindi per la Proprietà Universale 1.3.7 possiamo concludere che esiste un omomorfismo  $\tilde{\gamma} : C_K^X(E) \rightarrow A$  tale che

$$\tilde{\gamma}(\psi_i^t(\alpha)) = \tilde{\gamma}_i(\alpha), \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}(\psi_i^t(\alpha)^*) = \tilde{\gamma}_i(\alpha^*),$$

dove  $i \in I$ ,  $t = 0, 1$  e  $\alpha$  è un elemento di  $E_i$ . Per come è definito,  $\tilde{\gamma}$  è l'unico omomorfismo per cui  $\tilde{\gamma} \circ \overline{\psi}_i = \gamma_i 0$  per ogni  $i$  in  $I$ .  $\square$

**Sottografi completi.** Si potrebbe pensare che dato un sottografo  $F$  di un grafo  $E$ , la Leavitt path algebra  $L_K(F)$  sia una sottoalgebra di  $L_K(E)$ , ma questo non è vero in generale perché la relazione (CK2) che vale nella  $K$ -algebra  $L_K(F)$  non è compatibile con l'analoga relazione in  $L_K(E)$ . Come

esempio consideriamo la rosa con due petali pensata come sottografo della rosa con tre petali:



$$R_2 = (R_2^0 = \{ v \}, R_2^1 = \{ e_1, e_2 \}) \subseteq R_3 = (R_3^0 = \{ v \}, R_3^1 = \{ e_1, e_2, e_3 \}).$$

In  $R_2$  si ha  $e_1 e_1 * + e_2 e_2^* = v$ , mentre in  $R_3$  si ha  $e_1 e_1 * + e_2 e_2^* = v - e_3 e_3^*$ . Dunque dobbiamo rivedere la nozione di sottografo. A tale scopo introduciamo la seguente definizione.

**Definizione 1.4.4.** Un morfismo  $\psi = (\psi^0, \psi^1) : (F, Y) \rightarrow (E, X)$  in  $\mathcal{G}$  è detto *completo* se

$$\psi^0(v) \in X \text{ e } s_F^{-1}(v) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad v \in Y.$$

Notiamo che un morfismo  $\psi$  è completo se, e solo se,  $Y = (\psi^0)^{-1}(X) \cap \text{Reg}(F)$ .

Sia  $R_n$  la rosa con  $n$  petali come nell'Esempio 1.1.3. Consideriamo il morfismo identità  $\iota = (\iota^0, \iota^1) : (R_n, \emptyset) \rightarrow (R_n, \{ v \})$ , così definito:

$$\begin{aligned} \iota^0(v) &= v \\ \iota^1(e_i) &= e_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Notiamo che l'omomorfismo di  $K$ -algebre  $\bar{\iota} : C_K(R_n) \rightarrow L_K(R_n)$  non è iniettivo perché

$$\bar{\iota} \left( v - \sum_{i=1}^n e_i e_i^* \right) = v - \sum_{i=1}^n e_i e_i^* = 0,$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la relazione (CK2) di  $L_K(R_n)$ . Dunque in generale un omomorfismo di  $K$ -algebre associato a un morfismo in  $\mathcal{G}$  non è iniettivo. Nel caso di morfismi completi l'iniettività è garantita dal seguente lemma.

**Lemma 1.4.5.** Sia  $\psi = (\psi^0, \psi^1) : (F, Y) \rightarrow (E, X)$  un morfismo completo in  $\mathcal{G}$ . Allora l'omomorfismo di  $K$ -algebre  $\bar{\psi} : C_K^Y(F) \rightarrow C_K^X(E)$  a lui associato come nel Lemma 1.4.2, è iniettivo.

*Dimostrazione.* Sia  $v$  un vertice regolare di  $F$  in  $Y$ . Consideriamo  $\{ e_1^v, \dots, e_{n_v}^v \}$  una numerazione dell'insieme  $s_F^{-1}(v)$ . Se  $v$  appartiene a  $Y$ , dal fatto che  $\psi^0 : s_F^{-1}(v) \rightarrow s_E^{-1}(\psi^0(v))$  è una biiezione, otteniamo una numerazione dell'insieme

$$s_E^{-1}(\psi^0(v)) = \{ e_1^{\psi^0(v)}, \dots, e_{n_v}^{\psi^0(v)} \}.$$

Siano  $\mathcal{B}''(F, Y)$  e  $\mathcal{B}''(E, X)$  una base rispettivamente di  $C_K^Y(F)$  e  $C_K^X(E)$ , come nella Proposizione 1.3.8. L'ipotesi di completezza di  $\psi$  ci garantisce che un elemento del tipo  $\lambda e_i^v (e_i^v)^* \mu^*$  appartenente alla base  $\mathcal{B}''(F, Y)$ , dove  $v$  è un vertice regolare appartenente a  $Y$ , ha immagine nella base  $\mathcal{B}''(E, X)$ . Per l'iniettività delle funzioni  $\psi^0$  e  $\psi^1$ , l'omomorfismo  $\bar{\psi}$  manda elementi distinti di  $\mathcal{B}''(F, Y)$  in elementi distinti di  $\mathcal{B}''(E, X)$ , quindi è iniettivo.  $\square$

Introduciamo ora la nozione di sottografo completo.

**Definizione 1.4.6.** Un sottografo  $F$  di un grafo  $E$  è detto *completo*, se il morfismo d'inclusione

$$\varepsilon : (F, \text{Reg}(F) \cap \text{Reg}(E)) \rightarrow (E, \text{Reg}(E))$$

è completo in  $\mathcal{G}$ . In altre parole, il sottografo  $F$  è completo se per ogni vertice  $v$  di  $F$ , regolare in  $E$  e che emette almeno un lato in  $F$ , allora i lati emessi da  $v$  in  $F$  sono esattamente i lati emessi in  $E$ .

Consideriamo  $F$  un sottografo completo di un grafo  $E$ , tale che  $\text{Reg}(F) \cap \text{Reg}(E) = \text{Reg}(F)$ . Allora per il Lemma 1.4.5, l'omomorfismo di  $K$ -algebre  $\bar{\varepsilon} : L_K(F) \rightarrow L_K(E)$  associato al morfismo di inclusione  $\varepsilon : (F, \text{Reg}(F)) \rightarrow (E, \text{Reg}(E))$  è iniettivo. Dunque  $L_K(F)$  è identificata con una sottoalgebra di  $L_K(E)$ . Un esempio concreto è il grafo  $A_n$  dell'Esempio 1.1.2 pensato come sottografo del grafo  $A_{\mathbb{N}}$  dell'Esempio 1.1.8. Infatti l'insieme dei vertici regolari di  $A_n$  è un sottoinsieme di  $\text{Reg}(A_{\mathbb{N}})$ . Quindi le Leavitt path algebre  $L_K(A_n)$  sono sottoalgebre di  $L_K(A_{\mathbb{N}})$ .

Siano  $n$  e  $m$  interi positivi, tali che  $m > n$ . Consideriamo rispettivamente  $R_n$  e  $R_m$  la rosa con  $n$  e  $m$  petali come nell'Esempio 1.1.3. Indichiamo con  $v$  il loro unico vertice regolare. Siccome l'insieme  $s_{R_n}^{-1}(v)$  non è in biiezione con l'insieme  $s_{R_m}^{-1}(v)$ , il grafo  $R_n$  non è un sottografo completo di  $R_m$ . Se invece consideriamo  $R_{\mathbb{N}}$  la rosa con infiniti petali come nell'Esempio 1.1.8, abbiamo che l'insieme di vertici regolari  $\text{Reg}(R_{\mathbb{N}})$  è l'insieme vuoto. Dunque il morfismo d'inclusione

$$\varepsilon : (R_n, \emptyset) \rightarrow (R_{\mathbb{N}}, \emptyset)$$

è completo. Possiamo concludere per la Definizione 1.4.6 che la rosa con  $n$  petali  $R_n$  è un sottografo completo della rosa con infiniti petali  $R_{\mathbb{N}}$ .

**Definizione 1.4.7.** Sia  $E$  un grafo e  $X$  un sottoinsieme di vertici regolari di  $E$ . Diremo che un sottografo  $F$  è  *$X$ -completo* nel caso in cui il morfismo di inclusione

$$(F, \text{Reg}(F) \cap X) \rightarrow (E, X)$$

è un morfismo completo nella categoria  $\mathcal{G}$ . In altre parole, il sottografo  $F$  è  $X$ -completo se per ogni vertice  $v$  non sink di  $F$ , che appartiene a  $X$ , allora i lati emessi da  $v$  in  $F$  sono esattamente i lati emessi in  $E$ .



**Leavitt path algebre come limiti diretti.** Nella categoria  $\mathcal{G}$ , oltre a esistere sempre il limite diretto di un sistema diretto, ogni oggetto è il limite diretto di un opportuno sistema formato da grafi finiti.

**Lemma 1.4.8.** *Sia  $(E, X)$  un oggetto della categoria  $\mathcal{G}$ . Allora esiste  $\{\varepsilon_i : (F_i, X_i) \rightarrow (E, X)\}_{i \in I}$  una famiglia di morfismi in  $\mathcal{G}$  completi tale che*

$$\{ (E, X), (\varepsilon_i)_{i \in I} \}$$

*è il limite diretto di un sistema diretto della forma  $\{ (F_i, X_i)_{i \in I}, (\iota_i)_{i \in I} \}$ , dove ogni  $F_i$  è un grafo finito e  $X_i$  è un sottoinsieme di vertici regolari di  $F_i$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $G$  un sottografo di  $E$ . Costruiamo  $F$  un sottografo  $X$ -completo a partire da  $G$  nel seguente modo. Come insieme dei vertici e dei lati consideriamo rispettivamente:

$$\begin{aligned} F^0 &:= \{ r_E(e) \mid e \in E^1, s_E(e) \in G^0 \cup X \} \cup G^0 \\ F^1 &:= \{ e \in E^1 \mid s_E(e) \in G^0 \cup X \}. \end{aligned}$$

Le funzioni  $s_G$  e  $r_G$  sono rispettivamente la restrizione all'insieme  $F^1$  di  $s_E$  e  $r_E$ .

Mostriamo ora che l'inclusione  $\varepsilon : (F, \text{Reg}(F) \cap X) \rightarrow (E, X)$  è un morfismo in  $\mathcal{G}$  completo. Per prima cosa verifichiamo le richieste della Definizione 1.4.1. Le richieste (1) e (2) sono immediate. Sia  $v$  un vertice in  $\text{Reg}(F) \cap X$ . Sicuramente abbiamo che  $s_F^{-1}(v) \subseteq s_E^{-1}(v)$  perché  $F$  è un sottografo di  $E$ . Dal fatto che  $v$  è regolare in  $F$ , ci deve essere almeno un lato uscente da  $v$ . Per come è stato definito  $F$ , il vertice  $v$  deve appartenere a  $G^0 \cap X$  e i lati uscenti da  $v$  in  $E$  sono anche lati di  $F$ .

Passiamo a mostrare la completezza. Sia  $v$  un vertice di  $F$  non sink che appartiene a  $X$ . In particolare  $v$  è un vertice regolare di  $E$ , quindi è anche un vertice regolare di  $F$  e possiamo concludere che  $v$  appartiene a  $\text{Reg}(F) \cap X$ .

Consideriamo la famiglia di oggetti in  $\mathcal{G}$

$$\mathcal{F} = \{ (F, \text{Reg}(F) \cap X) \mid F \text{ sottografo } X\text{-completo di } E \}.$$

Dati un numero finito di oggetti  $(F_i, \text{Reg}(F_i) \cap X)$  in  $\mathcal{F}$ , con  $i = 1, \dots, n$ , allora il grafo  $F$  ottenuto dall'unione dei sottografi  $F_i$  è ancora  $X$ -completo.

Prima di mostrare che la mappa di inclusione  $\varepsilon : (F, \text{Reg}(F) \cap X) \rightarrow (E, X)$  è un morfismo in  $\mathcal{G}$  completo, verifichiamo che

$$\text{Reg}(F) \cap X = \bigcup_{i=1}^n (\text{Reg}(F_i) \cap X). \quad (1.11)$$

Sia  $v$  un vertice in  $\text{Reg}(F) \cap X$ . Allora  $v$  è un vertice non sink di un grafo  $F_j$ , per un opportuno  $1 \leq j \leq n$ . Dal fatto che il grafo  $F_j$  è  $X$ -completo,

abbiamo che  $v$  appartiene a  $\text{Reg}(F_j) \cap X \subseteq \bigcup_{i=1}^n (\text{Reg}(F_i) \cap X)$ . Sia  $v$  un vertice in  $\bigcup_{i=1}^n (\text{Reg}(F_i) \cap X)$ , allora  $v$  appartiene a  $\text{Reg}(F_j) \cap X$ , per un opportuno  $1 \leq j \leq n$ . Per la richiesta (3) della Definizione 1.4.1 abbiamo che

$$s_E^{-1}(v) = s_{F_j}^{-1}(v) \subseteq s_F^{-1}(v).$$

Siccome  $F$  è un sottografo di  $E$  vale l'inclusione  $s_F^{-1}(v) \subseteq s_E^{-1}(v)$ , quindi  $v$  è un vertice regolare di  $F$ .

Verifichiamo ora le richieste della Definizione 1.4.1 per la mappa di inclusione. Le richieste (1) e (2) sono immediate. Sia  $v$  un vertice in  $\text{Reg}(F) \cap X$ , per l'uguaglianza vista in (1.11),  $v$  appartiene a  $\text{Reg}(F_j) \cap X$  per un opportuno  $1 \leq j \leq n$ . Per la richiesta (3) della Definizione 1.4.1 abbiamo che

$$s_E^{-1}(v) = s_{F_j}^{-1}(v) \subseteq s_F^{-1}(v).$$

Siccome  $F$  è un sottografo di  $E$  vale l'inclusione  $s_F^{-1}(v) \subseteq s_E^{-1}(v)$ , quindi vale la richiesta (3) anche per  $\varepsilon$ .

Ora possiamo dimostrare la completezza del morfismo  $\varepsilon : (F, \text{Reg}(F) \cap X) \rightarrow (E, X)$ . Sia  $v$  un vertice non sink di  $F$  appartenente a  $X$ . In particolare  $v$  è un vertice regolare di  $E$ , quindi è anche un vertice regolare di  $F$  e di conseguenza appartiene a  $\text{Reg}(F) \cap X$ .

Grazie a quanto appena visto possiamo affermare che la famiglia  $\mathcal{F}$  e i morfismi di inclusione  $\iota_{GF} : (F, \text{Reg}(F) \cap X) \rightarrow (G, \text{Reg}(G) \cap X)$ , con  $F$  e  $G$  in  $\mathcal{F}$  e  $F \subseteq G$ , formano un sistema diretto in  $\mathcal{G}$ .

Il nostro obiettivo ora è dimostrare che il limite diretto di tale sistema è l'oggetto  $(E, X)$  e la famiglia di morfismi  $\{\varepsilon_F : (F, \text{Reg}(F) \cap X) \rightarrow (E, X)\}_{F \in \mathcal{F}}$ .

Consideriamo  $(\tilde{F}, \tilde{Y})$  e  $\{\psi_F \mid F \in \mathcal{F}\}$  il limite diretto del sistema

$$\{\mathcal{F}, (\iota_{GF})_{G, F \in \mathcal{F}}\}$$

costruito come nella Proposizione 1.4.3. Per definizione di limite diretto esiste un morfismo  $\psi : (\tilde{F}, \tilde{Y}) \rightarrow (E, X)$ . Il nostro obiettivo è mostrare che  $\psi$  è un isomorfismo.

Notiamo che per ogni elemento di  $E$  esiste  $F$  sottografo  $X$ -completo che lo contiene. In particolare, se un vertice appartiene a  $X$ , allora è un vertice regolare di un opportuno sottografo  $X$ -completo.

Definiamo  $\gamma : (E, X) \rightarrow (\tilde{F}, \tilde{Y})$  il morfismo inverso di  $\psi$  come segue:

$$\gamma^t(\alpha) = \psi_F(\alpha),$$

dove  $\alpha$  è un elemento di  $E$ ,  $F$  un sottografo in  $\mathcal{F}$  contenente  $\alpha$ , e  $t = 0, 1$ . Il morfismo  $\gamma$  è ben definito e soddisfa le richieste (1) e (2) della Definizione 1.4.1.

Ci rimane da verificare la richiesta (3). Sia  $v$  vertice in  $X$ . Considero  $F$  un sottografo in  $\mathcal{F}$  per cui  $v$  appartenga  $\text{Reg}(F) \cap X$ . Dal fatto che  $\varepsilon$  e  $\psi_F$

sono morfismi in  $\mathcal{G}$  abbiamo che gli insiemi  $s_F^{-1}(v)$ ,  $s_E^{-1}(v)$  e  $s_{\tilde{F}}^{-1}(\psi_F^0(v))$  sono in biiezione. Notando che  $\psi_F^0(v) = \gamma^0(v)$  possiamo concludere che  $s_E^{-1}(v)$  è in biiezione con  $s_{\tilde{F}}^{-1}(\gamma^0(v))$ .  $\square$

Grazie al Lemma 1.4.8 riusciamo a descrivere la Leavitt path algebra di un grafo come il limite diretto di algebre isomorfe a Leavitt path algebre di grafi finiti, opportunamente ottenuti da sottografi completi.

Nel seguito useremo le notazioni del Lemma 1.4.8 e della Proposizione 1.4.3.

**Teorema 1.4.9.** *Siano  $E$  un grafo arbitrario e  $K$  un campo. Sia  $X$  un sottoinsieme di vertici regolari di  $E$ . Consideriamo  $\{\mathcal{F}, (\iota_{GF})_{G,F \in \mathcal{F}}\}$  il sistema diretto in  $\mathcal{G}$  che ha limite diretto l'oggetto  $(E, X)$  e la famiglia di morfismi  $\{\varepsilon_F : (F, \text{Reg}(F) \cap X) \rightarrow (E, X)\}_{F \in \mathcal{F}}$ . Allora la Cohn path algebra  $C_K^X(E)$  e la famiglia di monomorfismi*

$$\left\{ \bar{\varepsilon}_F : C_K^{\text{Reg}(F) \cap X}(F) \rightarrow C_K^X(E) \right\}_{F \in \mathcal{F}}$$

sono il limite diretto del sistema diretto in  $\mathcal{A}_K$

$$\left\{ (C_K^{\text{Reg}(F) \cap X}(F))_{F \in \mathcal{F}}, (\bar{\iota}_{GF})_{G,F \in \mathcal{F}} \right\}.$$

In particolare, se  $X$  coincide con l'insieme dei vertici regolari di  $E$ , allora la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  e la famiglia di monomorfismi

$$\left\{ \bar{\varepsilon}_F : C_K^{\text{Reg}(F) \cap \text{Reg}(E)}(F) \rightarrow L_K(E) \right\}_{F \in \mathcal{F}}$$

sono il limite diretto del sistema diretto in  $\mathcal{A}_K$

$$\left\{ (C_K^{\text{Reg}(F) \cap \text{Reg}(E)}(F))_{F \in \mathcal{F}}, (\bar{\iota}_{GF})_{G,F \in \mathcal{F}} \right\}.$$

*Dimostrazione.* Per il Lemma 1.4.8 sappiamo che il limite diretto del sistema  $\{\mathcal{F}, (\iota_{GF})_{G,F \in \mathcal{F}}\}$  è l'oggetto  $(E, X)$  e la famiglia

$$\{\varepsilon_F : (F, \text{Reg}(F) \cap X) \rightarrow (E, X)\}_{F \in \mathcal{F}}$$

di morfismi completi in  $\mathcal{G}$ . Applicando il funtore  $F$  a tale sistema e al suo limite, per la continuità di  $F$  dimostrata nella Proposizione 1.4.3, possiamo concludere che il limite diretto in  $\mathcal{A}_K$  di

$$\left\{ (C_K^{\text{Reg}(F) \cap \text{Reg}(E)}(F))_{F \in \mathcal{F}}, (\bar{\iota}_{GF})_{G,F \in \mathcal{F}} \right\}$$

è la Cohn path algebra  $C_K^X(E)$  e la famiglia di omomorfismi

$$\left\{ \bar{\varepsilon}_F : C_K^{\text{Reg}(F) \cap X}(F) \rightarrow C_K^X(E) \right\}_{F \in \mathcal{F}}.$$

Ogni morfismo  $\varepsilon_F$  è completo, quindi per il Lemma 1.4.5 possiamo concludere che  $\bar{\varepsilon}_F$  è iniettivo.

La seconda parte dell'enunciato segue dalla prima parte scegliendo  $X = \text{Reg}(E)$ .  $\square$

**Corollario 1.4.10.** *Siano  $E$  un grafo arbitrario e  $K$  un campo. Sia  $X$  un sottoinsieme di vertici regolari di  $E$ . I limiti diretti descritti nel Teorema 1.4.9 possono essere riscritti nel seguente modo:*

$$C_K^X(E) = \varinjlim_{F \in \mathcal{F}} L_K(F(\text{Reg}(F) \cap X))$$

$$L_K(E) = \varinjlim_{F \in \mathcal{F}} L_K(F(\text{Reg}(F) \cap \text{Reg}(E)))$$

dove le famiglie di omomorfismi dei sistemi diretti e dei rispettivi limiti diretti si ottengono componendo opportunamente gli omomorfismi del Teorema 1.4.9 con gli isomorfismi del Teorema 1.3.17.

*Dimostrazione.* Il corollario segue dal Teorema 1.4.9 e dal fatto che per il Teorema 1.3.17, le Cohn path algebre  $C_K^{\text{Reg}(F) \cap X}(F)$  sono isomorfe alle Leavitt path algebre  $L_K(E(\text{Reg}(F) \cap X))$  per ogni  $F$  in  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**Esempi.** Vediamo ora come determinare le Leavitt path algebre di alcuni grafi infiniti.

**Esempio 1.4.11.** Consideriamo  $R_{\mathbb{N}}$  la rosa con infiniti petali come nell'Esempio 1.1.8, e  $R_n$  la rosa con  $n$ -petali come nell'Esempio 1.1.3. I grafi  $R_n$  sono sottografi completi di  $R_{\mathbb{N}}$  per ogni  $n$  in  $\mathbb{N}$ . Nella categoria  $\mathcal{G}$  possiamo scrivere l'oggetto  $(R_{\mathbb{N}}, \emptyset)$  come il limite diretto degli oggetti  $(R_n, \emptyset)$  al variare di  $n$  in  $\mathbb{N}$ . Applicando il Corollario 1.4.10 abbiamo che la Leavitt path algebra di  $L_K(R_{\mathbb{N}})$  è il limite diretto delle Leavitt path algebre  $L_K(R_n(\emptyset))$ , al variare di  $n$  in  $\mathbb{N}$ .

**Esempio 1.4.12.** Consideriamo  $C_{\mathbb{N}}$  il grafo a orologio infinito come nell'Esempio 1.1.8, e  $C_n$  il grafo a orologio come nell'Esempio 1.1.7. Osserviamo che l'insieme dei vertici regolari di  $C_{\mathbb{N}}$  è l'insieme vuoto, quindi i sottografi  $C_n$  sono completi perché i morfismi in  $\mathcal{G}$  di inclusione  $\varepsilon_n : (C_n, \emptyset) \rightarrow (C_{\mathbb{N}}, \emptyset)$  sono completi. Nella categoria  $\mathcal{G}$  possiamo scrivere l'oggetto  $(C_{\mathbb{N}}, \emptyset)$  come limite diretto degli oggetti  $(C_n, \emptyset)$ , al variare di  $n$  in  $\mathbb{N}$ . Applicando il Corollario 1.4.10 abbiamo che la Leavitt path algebra  $L_K(C_{\mathbb{N}})$  è il limite diretto delle Leavitt path algebre  $L_K(C_n(\emptyset))$ , al variare di  $n$  in  $\mathbb{N}$ .

**Esempio 1.4.13.** Consideriamo il grafo  $D_{\mathbb{N}}$  come nell'Esempio 1.1.8, e il grafo  $D_n$  come nell'Esempio 1.2.10. Osserviamo che l'insieme dei vertici regolari di  $D_{\mathbb{N}}$  è l'insieme vuoto, quindi i sottografi  $D_n$  sono completi perché i morfismi in  $\mathcal{G}$  di inclusione  $\varepsilon_n : (D_n, \emptyset) \rightarrow (D_{\mathbb{N}}, \emptyset)$  sono completi. Nella categoria  $\mathcal{G}$  possiamo scrivere l'oggetto  $(D_{\mathbb{N}}, \emptyset)$  come limite diretto degli oggetti  $(D_n, \emptyset)$ , al variare di  $n$  in  $\mathbb{N}$ . Applicando il Corollario 1.4.10 abbiamo che la Leavitt path algebra  $L_K(D_{\mathbb{N}})$  è il limite diretto delle Leavitt path algebre  $L_K(D_n(\emptyset))$ , al variare di  $n$  in  $\mathbb{N}$ .

**Esempio 1.4.14.** Consideriamo il grafo  $A_{\mathbb{N}}$  come nell'Esempio 1.1.8, e il grafo  $A_n$  come nell'Esempio 1.1.2. Osserviamo che tutti i vertici del grafo  $A_{\mathbb{N}}$  sono regolari. I sottografi  $A_n$  sono completi perché i morfismi in  $\mathcal{G}$  di inclusione  $\varepsilon_n : (A_n, \text{Reg}(A_n)) \rightarrow (A_{\mathbb{N}}, A_{\mathbb{N}}^0)$  sono completi. Nella categoria  $\mathcal{G}$  possiamo scrivere l'oggetto  $(A_{\mathbb{N}}, A_{\mathbb{N}}^0)$  come limite diretto degli oggetti  $(A_n, \text{Reg}(A_n))$ , al variare di  $n$  in  $\mathbb{N}$ . Per il Teorema 1.4.9 la Leavitt path algebra  $L_K(A_{\mathbb{N}})$  è il limite diretto delle Leavitt path algebre  $L_K(A_n)$ , al variare di  $n$  in  $\mathbb{N}$ . Per quanto visto nell'Esempio 1.2.8 la Leavitt path algebra  $L_K(A_n)$  è isomorfa alla  $K$ -algebra  $M_n(K)$ , quindi  $L_K(A_{\mathbb{N}})$  è isomorfa al limite diretto

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} M_n(K).$$

Ma tale limite è la  $K$ -algebra  $M_{\mathbb{N}}(K)$  delle matrici  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  con solo un numero finito di entrate non nulle.

**Esempio 1.4.15.** Consideriamo il grafo  $B_{\mathbb{N}}$  come nell'Esempio 1.1.8, e il grafo  $B_n$  come nell'Esempio 1.1.6. I sottografi  $B_n$  sono completi perché i morfismi in  $\mathcal{G}$  di inclusione  $\varepsilon_n : (B_n, \text{Reg}(B_n)) \rightarrow (B_{\mathbb{N}}, \text{Reg}(B_{\mathbb{N}}))$  sono completi. Nella categoria  $\mathcal{G}$  possiamo scrivere l'oggetto  $(B_{\mathbb{N}}, \text{Reg}(B_{\mathbb{N}}))$  come limite diretto degli oggetti  $(B_n, \text{Reg}(B_n))$ , al variare di  $n$  in  $\mathbb{N}$ . Per il Teorema 1.4.9 la Leavitt path algebra  $L_K(B_{\mathbb{N}})$  è il limite diretto delle Leavitt path algebre  $L_K(B_n)$ , al variare di  $n$  in  $\mathbb{N}$ . Per quanto visto nell'Esempio 1.2.9 la Leavitt path algebra  $L_K(B_n)$  è isomorfa alla  $K$ -algebra  $M_n(K)$ , quindi  $L_K(B_{\mathbb{N}})$  è isomorfa al limite diretto

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} M_n(K).$$

Ma tale limite è la  $K$ -algebra  $M_{\mathbb{N}}(K)$  delle matrici  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  con solo un numero finito di entrate non nulle.



## Capitolo 2

# Ideali graduati

In questo capitolo vogliamo indagare il reticolo degli ideali graduati di una Leavitt path algebra. L'obiettivo principale di tale capitolo è la dimostrazione del Teorema di Struttura degli Ideali Graduati che ci fornirà una descrizione completa di tale reticolo.

### 2.1 Definizioni preliminari

Per prima cosa introduciamo alcune definizioni e terminologie sui grafi che ricopriranno un ruolo cruciale nello studio degli ideali.

**Cicli.** Cominciamo con lo studio dei cicli in un grafo  $E$ . Un cammino  $\mu$  di  $E$  di lunghezza almeno uno è detto *chiuso* se il vertice di partenza  $s(\mu)$  coincide con il vertice di arrivo  $r(\mu)$ . Il vertice  $s(\mu) = r(\mu)$  è detto *punto base* del cammino.

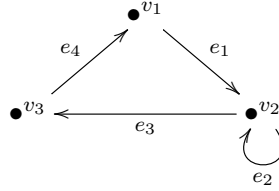
Un cammino chiuso  $\mu = e_1 \cdots e_n$  con punto base  $v$  è detto *semplice* se il vertice  $s(e_i)$  è diverso da  $v$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

**Definizione 2.1.1.** Sia  $E$  un grafo. Un cammino chiuso  $c = e_1 \cdots e_n$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $e_i \in E^0$  e  $v := s(e_1)$ , è un *ciclo con punto base  $v$*  se il vertice  $s(e_i)$  è diverso dal vertice  $s(e_j)$  quando  $i$  è diverso da  $j$ .

Osserviamo che per  $i = 1, \dots, n$ , il cammino  $c_i = e_i e_{i+1} \cdots e_n e_1 \cdots e_{i-1}$  è un ciclo con punto base  $s(e_i)$  e per  $i = 1$  otteniamo  $c_1 = c$ . Inoltre, gli insiemi  $V_{c_i}$  dei vertici di ciascun cammino  $c_i$  coincidono.

Definiamo come ciclo  $c$  l'insieme dei cicli  $c_i$  con punto base  $s(e_i)$ . L'insieme dei vertici  $V_c$  del ciclo  $c$  coincide con l'insieme  $V_{c_i}$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

A esempio, nel grafo



il cammino  $e_1e_2e_3e_4$  è un cammino chiuso semplice perché il vertice  $v_2$  è il punto iniziale del lato  $e_3$  e del lato  $e_2$ , mentre il cammino  $e_1e_3e_4$  è un ciclo con punto base  $v_1$ . L'insieme  $c = \{ e_1e_3e_4, e_3e_4e_1, e_4e_1e_3 \}$  è un ciclo e l'insieme  $V_c$  dei suoi vertici è  $\{ v_1, v_2, v_3 \}$ .

**Definizione 2.1.2.** Un grafo  $E$  soddisfa la condizione (K) se per ogni vertice  $v$  che appartiene a un cammino chiuso semplice, allora esistono almeno due cammini chiusi semplici distinti con punto base  $v$ .

**Definizione 2.1.3.** Un grafo  $E$  è detto *aciclico* se nessun vertice di  $E$  è punto base di un ciclo.

In particolare, un grafo aciclico non può contenere cammini chiusi.

I grafi  $A_n$ ,  $D_n$ ,  $C_n$  e  $B_n$ , studiati rispettivamente negli Esempi 1.1.2, 1.1.6, 1.1.7 e 1.1.5, sono tutti grafi aciclici:

$$A_n = \bullet v_1 \xrightarrow{e_1} \bullet v_2 \xrightarrow{e_2} \bullet v_3 \xrightarrow{e_3} \dots \xrightarrow{e_{n-2}} \bullet v_{n-1} \xrightarrow{e_{n-1}} \bullet v_n ,$$

$$D_n = \bullet v \begin{matrix} \xrightarrow{e_1} \\ \xrightarrow{\dots} \\ \xrightarrow{e_{n-1}} \end{matrix} \bullet w ,$$

$$C_n = \begin{matrix} \bullet & \bullet w_{n-1} & \bullet w_1 \\ & \nearrow e_1 & \\ \bullet & \bullet v & \bullet \\ & \nwarrow e_{n-1} & \\ \bullet & & \bullet \end{matrix} , \quad B_n = \begin{matrix} \bullet & \bullet w_{n-1} & \bullet w_1 \\ & \searrow e_{n-1} & \\ \bullet & \bullet v & \bullet \\ & \nearrow e_1 & \\ \bullet & & \bullet \end{matrix} .$$

**Insiemi ereditari e saturi.** Sia  $E$  un grafo. Dati due vertici  $v$  e  $w$  di  $E$ , allora diremo che  $w \leq v$  se, e solo se, esiste un cammino  $\mu$  di  $E$  tale che  $s(\mu) = v$  e  $r(\mu) = w$ . A parole, un vertice  $w$  è minore e uguale a  $v$  se esiste un cammino con vertice di partenza  $v$  e vertice di arrivo  $w$  che li collega. La relazione  $\leq$  è riflessiva e transitiva, quindi è un preordine.

Introduciamo la nozione di insieme ereditario e di insieme saturo.



**Definizione 2.1.4.** Sia  $E$  un grafo. Un sottoinsieme  $X$  di vertici di  $E$  è detto *ereditario* se dati due vertici  $w \in E^0$  e  $v \in X$  tali che  $w \leq v$ , allora  $w$  appartiene a  $X$ .

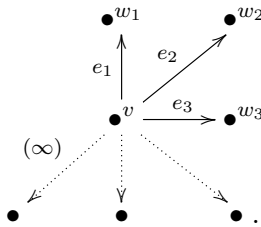
**Definizione 2.1.5.** Sia  $E$  un grafo. Un sottoinsieme  $X$  di vertici di  $E$  è detto *saturo* se dato un vertice regolare  $v$  di  $E$  per cui vale

$$r(s^{-1}(v)) = \{ r(e) \mid s(e) = v \} \subseteq X,$$

allora  $v$  deve appartenere a  $X$ .

Indichiamo con  $\mathcal{H}_E$  l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $E^0$  che sono ereditari e saturi.

**Esempio 2.1.6.** Sia  $C_{\mathbb{N}}$  il grafo a orologio infinito come nell'Esempio 1.1.8:



Indichiamo con  $U$  l'insieme di vertici  $\{ w_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ . Allora ogni sottoinsieme  $H$  di  $U$  è un insieme saturo ed ereditario.

Un qualsiasi insieme ereditario che contiene il vertice  $v$  di  $C_{\mathbb{N}}$  deve coincidere per forza con  $C_{\mathbb{N}}^0$ . Quindi l'insieme  $\mathcal{H}_{C_{\mathbb{N}}}$  di tutti i sottoinsiemi di  $C_{\mathbb{N}}^0$  saturi ed ereditari è formato dall'insieme vuoto, da  $C_{\mathbb{N}}^0$  e da tutti i sottoinsiemi di  $U$ .

Dato un vertice  $v$  di un grafo  $E$ , chiamiamo l'*albero di*  $v$  l'insieme

$$T(v) := \{ w \in E^0 \mid w \leq v \}.$$

L'insieme  $T(v)$  è ereditario e dati due vertici  $v$  e  $w$  di  $E$  tali che  $w \leq v$ , allora abbiamo  $T(w) \subseteq T(v)$ .

Sia  $X$  un sottoinsieme di  $E^0$ . L'insieme  $T(X) := \bigcup_{v \in X} T(v)$  è il più piccolo sottoinsieme di  $E^0$  ereditario contenente  $X$ . Con  $S(X)$  indichiamo il sottoinsieme di  $E^0$

$$\{ v \in \text{Reg}(E) \mid r(s^{-1}(v)) \subseteq X \} \cup X.$$

Se consideriamo una famiglia arbitraria di insiemi ereditari, allora l'unione e l'intersezione di tale famiglia sono ancora insiemi ereditari. Mentre se considero una famiglia di insiemi saturi l'intersezione è ancora saturo, ma in generale l'unione non lo è.

Grazie a ciò per ogni insieme di vertici  $X$  possiamo considerare il più piccolo insieme saturo ed ereditario contenente  $X$ . Tale insieme è dato dall'intersezione di tutti i sottoinsiemi di  $E^0$  saturi ed ereditari contenenti  $X$ .

**Definizione 2.1.7.** Siano  $E$  un grafo e  $X$  un insieme di vertici di  $E$ . La chiusura satura ereditaria di  $X$ , indicata con  $\overline{X}$ , è il più piccolo sottoinsieme di  $E^0$  saturo ed ereditario contenente  $X$ .

Il seguente lemma ci fornisce una costruzione induttiva della chiusura satura ereditaria di un insieme  $X$ .

**Lemma 2.1.8.** Siano  $E$  un grafo e  $X$  un insieme di vertici di  $E$ . Definiamo  $X_0 := T(X)$  e per induzione poniamo  $X_{n+1} := S(X_n)$ , dove  $n > 0$ . Allora la chiusura satura ereditaria di  $X$  è data da

$$\overline{X} = \bigcup_{n \geq 0} X_n.$$

*Dimostrazione.* Cominciamo osservando che dato un sottoinsieme  $Y$  di  $E^0$  ereditario, allora l'insieme  $S(Y)$  è ancora ereditario. Consideriamo un vertice  $v$  in  $S(Y)$  e un vertice  $w$  in  $E^0$  tali che  $w \leq v$ . Se  $v$  appartiene a  $Y$ , per l'ereditarietà  $w$  deve appartenere a  $Y$ . Se invece  $v$  è un vertice regolare per cui  $r(s^{-1}(v)) \subseteq Y$ , allora  $w \leq r(e)$ , dove  $e$  è un opportuno lato in  $s^{-1}(v)$ , e dunque per l'ereditarietà di  $Y$  deve appartenere a  $Y$ .

Siccome l'insieme  $X_0$  è ereditario, allora gli insiemi  $X_n$  sono anch'essi ereditari per ogni  $n \geq 1$ , e la loro unione è ancora ereditaria.

Ora mostriamo che l'insieme  $\bigcup_{n \geq 0} X_n$  è saturo. Consideriamo un vertice regolare  $v$  per cui l'insieme  $r(s^{-1}(v)) \subseteq \bigcup_{n \geq 0} X_n$ . Siccome per ogni  $n \geq 0$  abbiamo  $X_n \subseteq X_{n+1}$ , allora esiste un opportuno intero positivo  $N$  tale che  $r(s^{-1}(v)) \subseteq X_N$ . Quindi il vertice  $v$  deve appartenere all'insieme  $X_{N+1} = S(X_N)$  e di conseguenza all'insieme  $\bigcup_{n \geq 0} X_n$ .

Per poter concludere la dimostrazione dobbiamo verificare che l'insieme  $\bigcup_{n \geq 0} X_n$  è il più piccolo insieme saturo ed ereditario contenente  $X$ . Sia  $Y$  un sottoinsieme di  $E^0$  saturo ed ereditario contenente  $X$ . Dimostriamo per induzione su  $n$  che ogni  $X_n$  è contenuto in  $Y$ .

L'insieme  $X_0 = T(X)$  è contenuto in  $Y$  perché è il più piccolo insieme ereditario contenente  $X$ .

Supponiamo per ipotesi induttiva che  $X_n$  sia contenuto in  $Y$ . Per definizione

$$X_{n+1} = S(X_n) = X_n \cup \{ v \in \text{Reg}(E) \mid r(s^{-1}(v)) \subseteq X_n \},$$

ma  $X_n \subseteq Y$  per l'ipotesi induttiva e  $\{ v \in \text{Reg}(E) \mid r(s^{-1}(v)) \subseteq X_n \} \subseteq Y$  perché  $Y$  è saturo.

Quindi segue che l'insieme  $\bigcup_{n \geq 0} X_n$  è contenuto in  $Y$ . □

**Esempio 2.1.9.** Consideriamo il grafo  $A_n$  dell'Esempio 1.1.2. Fissiamo  $v_i$  un vertice di  $A_n$ . L'albero  $T(v_i)$  è l'insieme  $\{ v_j \in A_n \mid j \geq i \}$ , l'insieme  $X_1 = S(T(v_i))$  è dato da  $\{ v_{i-1} \} \cup T(v_i)$  e proseguendo si ha  $X_n = \{ v_{i-n} \} \cup X_{n-1}$  fino a che  $i-n = 1$ . Dopo un numero finito di passi otteniamo che la chiusura

satura ereditaria di  $\{v_i\}$  è l'insieme  $A_n^0$ . Quindi nel grafo  $A_n$  la chiusura satura ereditaria di un qualsiasi insieme non vuoto di vertici è  $A_n^0$ .

In particolare, gli unici insiemi ereditari e saturi nel grafo  $A_n$  sono l'insieme vuoto e  $A_n^0$ . Infatti sia  $H$  un sottoinsieme non vuoto di vertici di  $A_n$  saturo ed ereditario. Sicuramente esiste un vertice  $v_i \in A_n^0$  contenuto in  $H$ . Per quanto appena visto la chiusura satura ereditaria di  $\{v_i\}$  coincide con  $A_n^0$ , quindi

$$A_n^0 = \overline{\{v\}} \subseteq \overline{H} = H.$$

Quanto detto per il grafo  $A_n$  vale analogamente per il grafo  $A_{\mathbb{N}}$  dell'Esempio 1.1.8.

Sia  $E$  un grafo. L'insieme  $\mathcal{H}_E$  con la relazione d'inclusione insiemistica è un reticolo: l'estremo inferiore di due elementi  $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_E$  è  $H_1 \wedge H_2 := H_1 \cap H_2$ , mentre l'estremo superiore è  $H_1 \vee H_2 := \overline{H_1 \cup H_2}$ . In particolare, il reticolo  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  è completo, ovvero data una famiglia  $\{H_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{H}_E$ , dove  $I$  è un insieme di indici arbitrario, allora esistono gli estremi inferiore e superiore, che sono rispettivamente:

$$\bigwedge_{i \in I} H_i = \bigcap_{i \in I} H_i, \quad \bigvee_{i \in I} H_i = \overline{\bigcup_{i \in I} H_i}.$$

## 2.2 Algebre $\mathbb{Z}$ -graduate

In questa sezione studieremo la struttura di algebra  $\mathbb{Z}$ -graduata di una Leavitt path algebra.

**Algebre  $G$ -graduate.** Cominciamo con dare la definizione di algebra graduata rispetto a un gruppo.

**Definizione 2.2.1.** Siano  $(G, \cdot)$  un gruppo e  $A$  un'algebra su un campo  $K$ . L'algebra  $A$  è detta  *$G$ -graduata* se esiste  $\{A_\sigma\}_{\sigma \in G}$  una famiglia di sottospazi di  $A$  tale che

$$A = \bigoplus_{\sigma \in G} A_\sigma \quad \text{e} \quad A_\sigma A_\tau \subseteq A_{\sigma\tau},$$

per ogni  $\sigma, \tau \in G$ . I sottospazi  $A_\sigma$  sono detti *componenti omogenee* di  $A$ , e gli elementi appartenenti ad  $A_\sigma$  sono chiamati *elementi omogenei di grado  $\sigma$* .

Analogamente possiamo dare la definizione di anello graduato rispetto a un gruppo.

**Definizione 2.2.2.** Siano  $(G, \cdot)$  un gruppo e  $R$  un anello. L'anello  $R$  è detto  *$G$ -graduato* se esiste  $\{R_\sigma\}_{\sigma \in G}$  una famiglia di sottogruppi additivi di  $R$  tale che

$$R = \bigoplus_{\sigma \in G} R_\sigma \quad \text{e} \quad R_\sigma R_\tau \subseteq R_{\sigma\tau},$$

per ogni  $\sigma, \tau \in G$ . I sottogruppi  $R_\sigma$  sono detti *componenti omogenee* di  $R$ , e gli elementi appartenenti a  $R_\sigma$  sono chiamati *elementi omogenei di grado  $\sigma$* .

Osserviamo che un'algebra  $G$ -graduata è anche un anello  $G$ -graduato.

Le definizioni e i risultati che studieremo in seguito riguardanti le algebre graduate si possono replicare in modo analogo al caso di anelli graduati.

Noi siamo interessati a strutture graduate in cui il gruppo  $(G, \cdot)$  è il gruppo additivo degli interi  $(\mathbb{Z}, +)$ , che per semplicità indichiamo solo con  $\mathbb{Z}$ .

Vediamo ora alcuni esempi.

**Esempio 2.2.3.** Sia  $K$  un campo. La  $K$ -algebra  $K[x^{-1}, x]$  dei polinomi di Laurent è un'algebra  $\mathbb{Z}$ -graduata. Consideriamo i sottospazi  $A_n = \text{span}_K(\{x^n\})$ , per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ . È immediato verificare che

$$K[x^{-1}, x] = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{span}_K(\{x^n\}),$$

e che  $A_n A_m$  è contenuto in  $A_{n+m}$ , per ogni  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

**Esempio 2.2.4.** Sia  $K$  un campo. La  $K$ -algebra  $M_n(K)$  delle matrici  $n \times n$  a coefficienti in  $K$  è un'algebra  $\mathbb{Z}$ -graduata. Consideriamo per  $-n+1 \leq t \leq n-1$  i sottospazi

$$A_t = \{X \in M_n(K) \mid x_{i,j} = 0 \text{ se } i - j \neq t\} = \text{span}_K(\{E_{i,j} \mid i - j = t\}).$$

Mentre se  $t \geq n$  o  $t \leq -n$  consideriamo come  $A_t$  il sottospazio banale.

Sicuramente vale

$$M_n(K) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \text{span}_K(\{E_{i,j} \mid i - j = t\}).$$

Siano  $E_{i,j}$  e  $E_{h,k}$  tali che  $i - j = t$  e  $h - k = s$ , dove  $-n+1 \leq t, s \leq n-1$ . Se  $j \neq h$ , abbiamo che  $E_{i,j} E_{h,k} = 0$ . Mentre se  $j = h$ , abbiamo  $E_{i,j} E_{h,k} = E_{i,k}$  e vale  $i - k = i - j + j - k = t + s$ . Quindi il prodotto di un generatore di  $A_t$  per uno di  $A_s$  è uguale alla matrice nulla o a un generatore di  $A_{t+s}$ . Possiamo concludere che  $A_t A_s$  è contenuto in  $A_{t+s}$ , per ogni  $t, s \in \mathbb{Z}$ .

**Esempio 2.2.5.** Sia  $R = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} R_m$  un anello  $\mathbb{Z}$ -graduato. Vogliamo definire una struttura di anello  $\mathbb{Z}$ -graduato sull'anello  $M_n(R)$  delle matrici  $n \times n$  a coefficienti in  $R$ . A tale scopo definiamo il grado di un elemento  $rE_{i,j}$ , dove  $r$  è un elemento omogeneo di  $R$  di grado  $m$ :

$$\deg(rE_{i,j}) = m + i - j.$$

Mostriamo che i sottogruppi

$$(M_n(R))_t = \text{span}_R(\{rE_{i,j} \mid r \in R_m, m + i - j = t\}),$$

al variare di  $t \in \mathbb{Z}$ , sono le componenti omogenee di  $M_n(R)$ . Sia  $X$  una matrice appartenente a  $M_n(R)$ , allora possiamo scrivere  $X$  in modo unico come  $\sum_{i,j} x_{i,j} E_{i,j}$ , dove  $i, j = 1, \dots, n$  e  $x_{i,j} \in R$ . A loro volta, gli elementi  $x_{i,j}$  possono essere scritti in modo unico come somma di elementi omogenei di  $R$ . Quindi ogni matrice  $X \in M_n(R)$  può essere scritta in modo unico come somma di elementi del tipo  $rE_{i,j}$ , dove  $r$  è un elemento omogeneo di  $R$  di grado  $m$ . Possiamo concludere che i sottogruppi  $(M_n(R))_t$  sono in somma diretta.

Siano  $xE_{i,j}$  e  $yE_{h,k}$  elementi omogenei di  $M_n(R)$ , dove  $x \in R_l, y \in R_m, l + i - j = t$  e  $m + h - k = s$  con  $t, s \in \mathbb{Z}$ . Allora  $xE_{i,j}yE_{h,k} = xyE_{i,j}E_{h,k}$  è nullo se  $j \neq h$ , altrimenti se  $j = h$

$$xE_{i,j}yE_{h,k} = xyE_{i,j}E_{h,k} = xyE_{i,k},$$

e vale  $l + m + i - k = l + i - j + m + h - k = t + s$ . Questo dimostra che  $(M_n(R))_t(M_n(R))_s$  è contenuto in  $(M_n(R))_{t+s}$ , per ogni  $t, s \in \mathbb{Z}$ .

**Ideali graduati.** Analizziamo ora la nozione di ideale graduato di un'algebra.

**Definizione 2.2.6.** Siano  $(G, \cdot)$  un gruppo e  $K$  un campo. Un ideale bilatero  $I$  (rispettivamente sinistro, destro) di una  $K$ -algebra  $G$ -graduata  $A$  è detto *graduato* se vale

$$I = \sum_{\sigma \in G} (I \cap A_\sigma). \quad (2.1)$$

Siano  $G$  un gruppo e  $K$  un campo. Sia  $I$  un ideale graduato di una  $K$ -algebra  $G$ -graduata  $A$ . Indichiamo con  $A_\sigma$  le componenti omogenee di  $A$ . Consideriamo un elemento  $y$  appartenente a  $I$  e la sua rispettiva decomposizione come somma di elementi omogenei  $y = \sum_{\sigma \in G} y_\sigma$ , dove  $y_\sigma$  appartiene ad  $A_\sigma$  per ogni  $\sigma \in G$  e solo un numero finito di  $y_\sigma$  sono non nulli. Allora per la condizione (2.1) della Definizione 2.2.6 ogni  $y_\sigma$  appartiene a  $I$ .

Viceversa, se per ogni elemento  $y = \sum_{\sigma \in G} y_\sigma$  di un ideale  $I$  qualsiasi, le sue componenti  $y_\sigma$  appartengono ancora all'ideale, allora  $I$  è graduato.

Indichiamo con  $\mathcal{L}(A)$  l'insieme degli ideali di  $A$  e con  $(\mathcal{L}(A), \subseteq)$  il reticolo degli ideali di  $A$  ordinato dalla relazione d'inclusione. Denotiamo invece con  $\mathcal{L}_{gr}(A)$  il sottoinsieme di  $\mathcal{L}(A)$  formato dagli ideali graduati. Risulta che  $(\mathcal{L}_{gr}(A), \subseteq)$  è un sottoreticolo di  $(\mathcal{L}(A), \subseteq)$ ; infatti la somma  $I + J$  e l'intersezione  $I \cap J$  sono ancora ideali graduati di  $A$ .

Vediamo ora come l'algebra quoziente rispetto a un ideale graduato eredita naturalmente la struttura di algebra graduata.

**Proposizione 2.2.7.** Siano  $(G, \cdot)$  un gruppo e  $K$  un campo. Consideriamo  $A = \bigoplus_{\sigma \in G} A_\sigma$  una  $K$ -algebra  $G$ -graduata e  $I$  un suo ideale graduato. Allora l'algebra quoziente  $A/I$  è ancora una  $K$ -algebra  $G$ -graduata.

*Dimostrazione.* Consideriamo  $\pi : A \rightarrow A/I$  la proiezione canonica e indichiamo l'immagine  $\pi(a)$  di un elemento  $a$  di  $A$  con  $\bar{a}$ , e analogamente l'immagine  $\pi(X)$  di un sottoinsieme  $X$  di  $A$  con  $\bar{X}$ .

La struttura di algebra  $G$ -graduata si ottiene scegliendo come componenti omogenee di  $\bar{A}$  i sottospazi  $\bar{A}_\sigma := \overline{A_\sigma}$ . Controlliamo che tali sottospazi siano in somma diretta. Per la proprietà di omomorfismo di  $\pi$ , abbiamo che la  $K$ -algebra  $\bar{A}$  coincide con la somma  $\sum_{\sigma \in G} \bar{A}_\sigma$  e che  $\bar{A}_\sigma \bar{A}_\tau$  è contenuto in  $\bar{A}_{\sigma\tau}$ , per ogni  $\sigma, \tau \in G$ .

Consideriamo i sottospazi  $\bar{A}_\tau$  e  $\sum_{\sigma \neq \tau} \bar{A}_\sigma$ . Sia  $x$  un elemento di  $A$  appartenente a  $\bar{A}_\tau \cap \sum_{\sigma \neq \tau} \bar{A}_\sigma$ , allora  $x$  può essere scritto come  $\bar{x}_\tau$ , con  $x_\tau$  elemento omogeneo in  $A$  di grado  $\tau$ , oppure come somma  $\sum_{\sigma \neq \tau} \bar{x}_\sigma$ , dove gli  $x_\sigma$  sono elementi omogenei di  $A$  di grado  $\sigma$  quasi tutti nulli. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \bar{x}_\tau - \sum_{\sigma \neq \tau} \bar{x}_\sigma &= \bar{0} \\ \pi \left( x_\tau - \sum_{\sigma \neq \tau} x_\sigma \right) &= \bar{0} \\ x_\tau - \sum_{\sigma \neq \tau} x_\sigma &\in I, \end{aligned}$$

ma dall'ipotesi che  $I$  è graduato possiamo concludere che  $x_\sigma$  appartiene a  $I$ , per ogni  $\sigma \in G$ . In particolare possiamo concludere che l'elemento  $x$  considerato in partenza è nullo e l'intersezione  $\bar{A}_\tau \cap \sum_{\sigma \neq \tau} \bar{A}_\sigma$  è banale.  $\square$

In un'algebra  $G$ -graduata non è detto che tutti gli ideali siano graduati. a esempio la  $K$ -algebra  $K[x^{-1}, x]$  dei polinomi di Laurent ha come unici ideali graduati l'ideale  $0$  e  $K[x^{-1}, x]$ . Infatti, se consideriamo un elemento non nullo  $\alpha$  di un ideale  $I$  graduato di  $K[x^{-1}, x]$ , allora lui si scrive nella forma  $\sum_{i=m}^n k_i x^i$ , dove  $m$  e  $n$  sono due interi tali che  $m \leq n$ , e  $k_i$  appartiene a  $K$  per  $m \leq i \leq n$ . Siccome  $I$  è graduato e  $\alpha$  è diverso da  $0$ , allora esiste un elemento  $k_i x^i$  appartenente a  $I$ , con  $k_i \in K^\times$ . Essendo un elemento invertibile possiamo concludere che l'identità appartiene all'ideale, ovvero  $I$  coincide con  $K[x^{-1}, x]$ .

Alcuni ideali graduati si possono ottenere come ideali generati da un insieme formato da elementi omogenei.

**Proposizione 2.2.8.** *Siano  $(G, \cdot)$  un gruppo e  $K$  un campo. Consideriamo  $A = \bigoplus_{\sigma \in G} A_\sigma$  una  $K$ -algebra  $G$ -graduata e  $X$  un sottoinsieme di  $A$  i cui elementi sono tutti omogenei. Allora l'ideale  $I(X)$  generato da  $X$  è graduato.*

*Dimostrazione.* Ogni elemento  $y$  appartenente a  $I(X)$  si può scrivere come  $\sum_{i=1}^n a_i x_i b_i$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_i, b_i \in A$ ,  $x_i \in X$  per  $i = 1, \dots, n$ . Decomponiamo come somma di elementi omogenei  $a_i$  e  $b_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ :

$$a_i = \sum_{\sigma \in G} (a_i)_\sigma, \quad b_i = \sum_{\sigma \in G} (b_i)_\sigma,$$

dove le sommatorie hanno solo un numero finito di addendi non nulli. Sostituendo le decomposizioni nell'espressione di  $y$  possiamo scrivere

$$y = \sum_{\sigma, i, \tau} (a_i)_\sigma x_i (b_i)_\tau, \quad (2.2)$$

dove  $\sigma$  e  $\tau$  variano in  $G$  e  $1 \leq i \leq n$ . Ogni elemento  $(a_i)_\sigma x_i (b_i)_\tau$  è omogeneo perché prodotto di elementi omogenei, e appartenenti a  $I(X)$  perché gli  $x_i$  appartengono a  $X$ . Dunque, in (2.2) abbiamo scritto  $y$  come somma delle sue componenti omogenee, che come abbiamo visto appartengono a  $I(X)$ . Possiamo concludere che  $I(X)$  è graduato.  $\square$

**Omomorfismi graduati.** Date due algebre graduate, è naturale considerare degli omomorfismi che preservano il grado degli elementi. Più precisamente, introduciamo la nozione di omomorfismo graduato.

**Definizione 2.2.9.** Siano  $(G, \cdot)$  un gruppo e  $K$  un campo. Consideriamo  $A = \bigoplus_{\sigma \in G} A_\sigma$  e  $B = \bigoplus_{\sigma \in G} B_\sigma$  due  $K$ -algebre  $G$ -graduate. Un *omomorfismo graduato*  $f : A \rightarrow B$  è un omomorfismo di  $K$ -algebre tale che  $f(A_\sigma) \subseteq B_\sigma$ , per ogni  $\sigma \in G$ .

Un *isomorfismo graduato*  $f : A \rightarrow B$  è un isomorfismo di  $K$ -algebre per cui  $f$  e  $f^{-1}$  sono omomorfismi graduati.

Consideriamo  $f : A \rightarrow B$  un omomorfismo graduato tra due  $K$ -algebre  $G$ -graduate  $A$  e  $B$ . Il nucleo di  $f$  è un ideale graduato. Infatti, se consideriamo  $x$  in  $A$  tale che  $f(x) = 0$ , decomponendo  $x$  come somma di elementi omogenei  $\sum_{\sigma \in G} x_\sigma$  possiamo scrivere

$$f(x) = f\left(\sum_{\sigma \in G} x_\sigma\right) = \sum_{\sigma \in G} f(x_\sigma) = 0.$$

Siccome le componenti omogenee  $B_\sigma$  di  $B$  sono in somma diretta, allora  $f(x_\sigma) = 0$  per ogni  $\sigma \in G$ , ovvero  $x_\sigma$  appartiene al nucleo di  $f$  per ogni  $\sigma \in G$ .

**Leavitt path algebre come algebre  $\mathbb{Z}$ -graduate.** Come anticipato le Leavitt path algebre hanno una struttura di algebra  $\mathbb{Z}$ -graduata. Cominciamo con definire il grado dei vertici e dei lati di un grafo esteso.

**Definizione 2.2.10.** Sia  $E$  un grafo. Definiamo il *grado* degli elementi in  $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ :  $\deg(v) = 0$  per ogni  $v \in E^0$ ,  $\deg(e) = 1$  e  $\deg(e^*) = -1$  per ogni  $e \in E^1$ .

Sia  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  la  $K$ -algebra associativa libera generata dall'insieme  $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ . Definiamo il grado di un monomio  $kx_1 \cdots x_n$  di  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  in questo modo:

$$\deg(kx_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^n \deg(x_i).$$

Grazie alla Definizione 2.2.10 possiamo introdurre una struttura di algebra  $\mathbb{Z}$ -graduata nella  $K$ -algebra  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$ .

**Proposizione 2.2.11.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora la  $K$ -algebra associativa libera  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  generata dall'insieme  $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$  è un'algebra  $\mathbb{Z}$ -graduata.*

*Dimostrazione.* Consideriamo  $A_n$  il  $K$ -sottospazio vettoriale di  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$

$$A_n := \text{span}_K(\{x_1 \cdots x_t \mid t \in \mathbb{N}, \deg(x_1 \cdots x_t) = n\}), \quad (2.3)$$

al variare di  $n \in \mathbb{Z}$ . Sicuramente  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n$  è diretta e coincide con  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$ . Inoltre dati due monomi  $x_1 \cdots x_t \in A_n$  e  $y_1 \cdots y_s \in A_m$ , allora il grado del loro prodotto è

$$\begin{aligned} \deg(x_1 \cdots x_t y_1 \cdots y_s) &= \sum_{i=1}^t \deg(x_i) + \sum_{i=1}^s \deg(y_i) \\ &= \deg(x_1 \cdots x_t) + \deg(y_1 \cdots y_s) = n + m. \end{aligned}$$

Quindi  $A_n A_m$  è contenuto in  $A_{n+m}$  per ogni  $n, m \in \mathbb{Z}$ . □

**Osservazione 2.2.12.** I polinomi di  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  che compaiono nelle relazioni (V), (E1), (E2), (CK1) e (CK2) della Definizione 1.2.1 sono omogenei. Dunque un ideale generato da tali relazioni o solo da alcune di esse, per la Proposizione 2.2.8, è graduato.

**Proposizione 2.2.13.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $X$  un sottoinsieme di vertici regolari di  $E$ . Allora:*

- (1) *la path algebra  $K\widehat{E}$  del grafo esteso di  $E$  è un'algebra  $\mathbb{Z}$ -graduata e ogni componente omogenea  $(K\widehat{E})_n$  di grado  $n$  è data dal sottospazio*

$$\text{span}_K\left(\left\{ \mu \in \text{Path}(\widehat{E}) \mid \deg(\mu) = n \right\}\right);$$

- (2) *la Cohn path algebra  $C_K^X(E)$  relativa a  $X$  è un'algebra  $\mathbb{Z}$ -graduata e ogni componente omogenea  $(C_K^X(E))_n$  di grado  $n$  è data dal sottospazio*

$$\text{span}_K(\{\lambda\mu^* \mid \lambda, \mu \in \text{Path}(E), r(\lambda) = r(\mu), \ell(\lambda) - \ell(\mu) = n\}).$$

*Dimostrazione.* Ci riferiamo con (V), (E1), (E2), (CK1) e (CK2) alle relazioni della Definizione 1.2.1, e con  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  alla  $K$ -algebra associativa libera generata dall'insieme  $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ .

Cominciamo dal punto (1). Secondo la Definizione 1.1.16 la path algebra  $K\widehat{E}$  è l'algebra quoziente tra l'algebra  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  e l'ideale generato dalle relazioni (V), (E1) e (E2). Per quanto detto nell'Osservazione 2.2.12 tale ideale è graduato e per la Proposizione 2.2.11 l'algebra  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup$



$(E^1)^*$  è  $\mathbb{Z}$ -graduata, quindi per la Proposizione 2.2.7 possiamo concludere che  $K\widehat{E}$  è  $\mathbb{Z}$ -graduata.

Le componenti omogenee di  $K\widehat{E}$  sono l'immagine tramite la proiezione canonica  $\pi : K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle \rightarrow K\widehat{E}$  delle componenti omogenee  $A_n$  di  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  descritte in (2.3). L'immagine tramite  $\pi$  di un monomio  $x_1 \cdots x_t$  di  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  è 0 oppure uguale a un cammino del grafo esteso  $\widehat{E}$ . Il grado di un elemento  $\pi(x_1 \cdots x_t) = \lambda \in \text{Path}(\widehat{E})$  è uguale a quello del monomio  $x_1 \cdots x_t$  di partenza in  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  perché per determinare  $\pi(x_1 \cdots x_t)$ , secondo le relazioni (V), (E1), (E2), bisogna semplificare i termini  $vw$ ,  $fr(f)$ ,  $s(f)f$ , dove  $v, w$  sono vertici in  $E^0$ ,  $f$  è un lato in  $E^1 \cup (E^1)^*$ . Ma tali termini vengono sostituiti da monomi dello stesso grado, quindi l'immagine  $\pi(A_n)$  coincide con il sottospazio di  $K\widehat{E}$

$$\text{span}_K \left( \left\{ \mu \in \text{Path}(\widehat{E}) \mid \deg(\mu) = n \right\} \right).$$

Proseguiamo con il punto (2). Secondo l'Osservazione 1.3.6 la Cohn path algebra  $C_K^X(E)$  è l'algebra quoziente di  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  con l'ideale generato dalle relazioni (V), (E1), (E2), (CK1) e la relazione (CK2) riferita ai vertici appartenenti a  $X$ . Per quanto detto nell'Osservazione 2.2.12 tale ideale è graduato e per la Proposizione 2.2.11 l'algebra  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  è  $\mathbb{Z}$ -graduata, quindi per la Proposizione 2.2.7 possiamo concludere che  $C_K^X(E)$  è  $\mathbb{Z}$ -graduata.

Le componenti omogenee di  $C_K^X(E)$  sono l'immagine tramite la proiezione canonica  $\pi : K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle \rightarrow C_K^X(E)$  delle componenti omogenee  $A_n$  di  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  descritte in (2.3). L'immagine tramite  $\pi$  di un monomio  $x_1 \cdots x_t$  di  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  è 0 oppure uguale a  $\lambda\mu^*$ , dove  $\lambda$  e  $\mu$  sono due cammini di  $E$  con lo stesso vertice di arrivo. Il grado di un elemento  $\pi(x_1 \cdots x_t) = \lambda\mu^*$  in  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  è dato da

$$\deg(\lambda\mu^*) = \deg(\lambda) + \deg(\mu^*) = \ell(\lambda) - \ell(\mu),$$

che è uguale a quello del monomio  $x_1 \cdots x_t$  di partenza perché per determinare  $\pi(x_1 \cdots x_t)$ , secondo le relazioni (V), (E1), (E2), (CK1), bisogna semplificare i termini  $vw$ ,  $fr(f)$ ,  $s(f)f$ ,  $e^*e'$ , dove  $v, w$  sono vertici in  $E^0$ ,  $f$  è un lato in  $E^1 \cup (E^1)^*$  ed  $e, e'$  sono lati in  $E^1$ . Ma tali termini vengono sostituiti da monomi dello stesso grado, quindi l'immagine  $\pi(A_n)$  coincide con il sottospazio di  $C_K^X(E)$

$$\text{span}_K \left( \{ \lambda\mu^* \mid \lambda, \mu \in \text{Path}(E), r(\lambda) = r(\mu), \ell(\lambda) - \ell(\mu) = n \} \right). \quad \square$$

**Corollario 2.2.14.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $X$  un sottoinsieme di vertici regolari di  $E$ . Indichiamo con  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$  la  $K$ -algebra associativa libera generata dall'insieme  $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ . Le proiezioni canoniche  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle \rightarrow K\widehat{E}$  e  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle \rightarrow C_K^X(E)$  sono omomorfismi graduati.*

*Dimostrazione.* Il corollario segue subito da quanto visto nella dimostrazione della Proposizione 2.2.13: le componenti omogenee di  $K\widehat{E}$  e  $C_K^X(E)$  sono immagini tramite le rispettive proiezioni canoniche delle componenti omogenee di  $K\langle E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \rangle$ .  $\square$

**Corollario 2.2.15.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  e la Cohn path algebra  $C_K(E)$  sono algebre  $\mathbb{Z}$ -graduate e le loro componenti omogenee sono date dal sottospazio*

$$\text{span}_K(\{ \lambda\mu^* \mid \lambda, \mu \in \text{Path}(E), r(\lambda) = r(\mu), \ell(\lambda) - \ell(\mu) = n \}).$$

*Dimostrazione.* L'enunciato è un caso particolare della Proposizione 2.2.13. Per la Leavitt path algebra basta considerare  $X = \text{Reg}(E)$ , mentre per la Cohn path algebra  $X = \emptyset$ .  $\square$

**Esempio 2.2.16.** Siano  $R_1$  la con un petalo come nell'Esempio 1.1.3 con  $n = 1$ , e  $K$  un campo. Consideriamo l'isomorfismo di  $K$ -algebre

$$\begin{aligned} \varphi : L_K(R_1) &\rightarrow K[x^{-1}, x] \\ v &\mapsto 1 \\ e &\mapsto x \\ e^* &\mapsto x^{-1}, \end{aligned}$$

studiato nell'Esempio 1.2.6 tra la Leavitt path algebra di  $R_1$  e la  $K$ -algebra dei polinomi di Laurent a coefficienti in  $K$ . Tale isomorfismo rispetta i gradi dei generatori di  $L_K(R_1)$ , quindi è un isomorfismo graduato.

**Proposizione 2.2.17.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $X$  un sottoinsieme di vertici regolari di  $E$ . La Cohn path algebra  $C_K^X(E)$  di  $E$  relativa a  $X$  e la Leavitt path algebra  $L_K(E(X))$  del grafo  $E(X)$ , come costruito nella Definizione 1.3.14, sono isomorfe come algebre  $\mathbb{Z}$ -graduate.*

*Dimostrazione.* Per il Teorema 1.3.17 sappiamo che l'algebra  $C_K^X(E)$  è isomorfa a  $L_K(E(X))$ . Ma gli isomorfismi  $\varphi$  e  $\psi$  presentati nella dimostrazione del Teorema 1.3.17 rispettano i gradi dei generatori delle rispettive algebre, quindi sono graduati.  $\square$

## 2.3 Il Teorema di Riduzione e i Teoremi di Unicità

Il Teorema di riduzione è un risultato importante perché le sue conseguenze tornano utili in diversi contesti. In particolare, in questa sezione ci permetterà di dimostrare i Teoremi di Unicità e alcune proprietà riguardanti le Leavitt path algebre come anelli.

**Notazioni.** Sia  $E$  un grafo. Siano  $c$  un ciclo di  $E$  con punto base il vertice  $v$  e  $n \in \mathbb{N}$ , allora nel contesto di una Leavitt path algebra o di una Cohn path algebra indichiamo con  $c^0$  il punto base  $v$ , con  $c^n$  l' $n$ -esima potenza di  $c$  e con  $c^{-n}$  l' $n$ -esima potenza del cammino  $c^*$ :

$$c^0 := v, \quad c^{-n} := (c^*)^n. \quad (2.4)$$

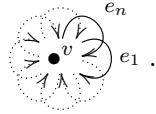
Sia  $p(x) = \sum_{i=m}^n k_i x^i$  un polinomio di Laurent, dove i coefficienti  $k_i$  appartengono a un campo  $K$ , e  $n, m \in \mathbb{Z}$  tali che  $m \leq n$ . Grazie alle notazioni (2.4) ha senso valutare il polinomio  $p(x)$  nel ciclo  $c$ :

$$p(c) := \sum_{i=m}^n k_i c^i.$$

**Definizione 2.3.1.** Siano  $E$  un grafo e  $\mu = e_1 \cdots e_n$  un suo cammino, con  $n \in \mathbb{N}$ . Un lato  $e$  di  $E$  è un'uscita per  $\mu$  se esiste  $i = 1, \dots, n$ , tale che  $e \neq e_i$  e  $s(e_i) = s(e)$ .

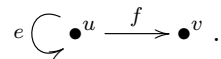
Diremo che un grafo soddisfa la condizione (L) se per ogni ciclo esiste un'uscita.

Sia  $R_n$  la rosa con  $n$  petali come nell'Esempio 1.1.3:



Se  $n = 1$ , allora il grafo  $R_1$  ha un unico lato che è anche l'unico ciclo, quindi non soddisfa la condizione (L). Mentre se  $n \geq 2$ , i cicli di  $R_n$  sono i lati  $e_i$  per  $i = 1, \dots, n$ , e tutti ammettono un'uscita. Quindi  $R_n$  soddisfa la condizione (L).

Sia  $E_T$  il grafo di Toeplitz come nell'Esempio 1.1.4:



L'unico ciclo di  $E_T$  è il lato  $e$  che ha come uscita il lato  $f$ . Quindi il grafo  $E_T$  soddisfa la condizione (L).

Ogni grafo aciclico, non possedendo cicli, soddisfa la condizione (L).

**Teorema di Riduzione.** Enunciamo alcuni risultati utili per il Teorema di Riduzione.

**Lemma 2.3.2.** Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Se  $c = e_1 \cdots e_n$  è un ciclo di  $E$  con punto base  $v$  senza uscite, allora l'anello unitario  $vL_K(E)v$  coincide con l'insieme

$$\left\{ \sum_{i=m}^n k_i c^i \mid k_i \in K, m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n \right\},$$

ed è isomorfo all'anello dei polinomi di Laurent  $K[x^{-1}, x]$  a coefficienti in  $K$ .

*Dimostrazione.* Per prima cosa mostriamo che ogni cammino  $\lambda$  di  $E$  con punto di partenza  $s(\lambda) = v$  deve essere del tipo  $c^m e_1 \cdots e_k$ , dove  $m$  e  $k$  sono due interi tali che  $m \geq 0$ ,  $0 \leq k < n$  e  $\deg(\lambda) = mn + k$ . Per  $k = 0$  i lati  $e_1 \cdots e_k$  non compaiono. In altre parole, vogliamo mostrare che ogni cammino di  $E$  che parte da  $v$  è formato dal ciclo  $c$  percorso un certo numero di volte ed eventualmente da un tratto iniziale di  $c$ .

Procediamo per induzione sul grado di  $\lambda$ . Se  $\deg(\lambda) = 1$ , allora  $\lambda$  è un lato di  $E$  con vertice iniziale  $v$ , ma deve coincidere con  $e_1$  perché  $c$  non ha uscite.

Ora supponiamo che la nostra affermazione sia vera per i cammini di grado minore o uguale di  $m$ . Sia  $\lambda$  un cammino di grado  $m + 1$ , scriviamo  $\lambda = \lambda' f$ , dove  $\lambda'$  è un cammino di  $E$  di grado  $m$ , e  $f$  è un lato di  $E$  tali che  $r(\lambda') = s(f)$ . Utilizziamo l'ipotesi induttiva per scrivere  $\lambda' = c^q e_1 \cdots e_t$ , dove  $q \geq 0$ ,  $0 \leq t < n$  e  $m = qn + t$ . Si deve avere che il vertice  $r(e_t)$  coincida con il vertice  $s(f)$ , ma siccome il ciclo  $c$  non ha uscite, allora  $f = e_{t+1}$ . In conclusione possiamo scrivere

$$\lambda = \lambda' f = c^q e_1 \cdots e_t f = c^q e_1 \cdots e_{t+1},$$

e vale  $\deg(\lambda) = qn + t + 1 = m + 1$ . Quindi abbiamo scritto  $\lambda$  nella forma richiesta.

Consideriamo ora due cammini  $\lambda$  e  $\mu$  di  $E$  tali che  $s(\lambda) = s(\mu) = v$  e  $\lambda\mu^* \neq 0$  (ovvero  $r(\lambda) = r(\mu)$ ). Per il paragrafo precedente possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\lambda &= c^r e_1 \cdots e_t \\ \mu &= c^s e_1 \cdots e_t.\end{aligned}$$

Notiamo che i lati finali  $e_1 \cdots e_t$  sono gli stessi perché i due cammini hanno lo stesso vertice di arrivo. Se  $\deg(\lambda) = \deg(\mu)$ , allora  $r = s$  e

$$\lambda\mu^* = c^r e_1 \cdots e_t e_t^* \cdots e_1^* c^{-s} = v = c^0.$$

Se  $\deg(\lambda) > \deg(\mu)$ , allora  $r > s$  e

$$\lambda\mu^* = c^r e_1 \cdots e_t e_t^* \cdots e_1^* c^{-s} = c^{r-s}.$$

Se  $\deg(\lambda) < \deg(\mu)$ , allora  $r < s$  e

$$\lambda\mu^* = c^r e_1 \cdots e_t e_t^* \cdots e_1^* c^{-s} = c^{-(s-r)}.$$

Ogni elemento  $\alpha$  di  $vL_K(E)v$  si scrive come  $\sum_{i=0}^m k_i \lambda_i \mu_i^* + kv$ , dove  $k, k_0, \dots, k_m \in K$ ,  $\lambda_0, \dots, \lambda_m, \mu_0, \dots, \mu_m \in \text{Path}(E)$ ,  $s(\lambda_i) = s(\mu_i) = v$ ,  $r(\lambda_i) = r(\mu_i)$  per ogni  $i = 0, \dots, m$ . Per quanto appena mostrato i prodotti

$\lambda_i \mu_i^*$  sono potenze di  $c$ . In conclusione possiamo affermare che ogni elemento di  $vL_K(E)v$  è un polinomio di Laurent a coefficienti in  $K$  valutato nel ciclo  $c$ .

Per dimostrare la seconda parte del lemma troviamo un isomorfismo esplicito tra  $K[x^{-1}, x]$  e  $vL_K(E)v$ . Consideriamo  $K\langle x^{-1}, x \rangle$  la  $K$ -algebra associativa unitaria libera generata dall'insieme  $\{x^{-1}, x\}$ . Definiamo  $\varphi : K\langle x^{-1}, x \rangle \rightarrow vL_K(E)v$  omomorfismo di anelli come segue:

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= v \\ \varphi(x) &= c \\ \varphi(x^{-1}) &= c^*.\end{aligned}$$

È immediato verificare che gli elementi  $x^{-1}x - 1$  e  $xx^{-1} - 1$  di  $K\langle x^{-1}, x \rangle$  appartengono al nucleo di  $\varphi$ . Quindi  $\varphi$  è ben definito come omomorfismo con dominio  $K[x^{-1}, x]$ .

Per la prima parte del lemma  $\varphi$  è suriettivo.

L'immagine di un polinomio di Laurent  $p(x)$  tramite  $\varphi$  è la sua valutazione in  $c$ . Per il Corollario 1.3.9 le potenze di  $c$  sono linearmente indipendenti, quindi  $\varphi(p(x)) = p(c) = 0$  se, e solo se,  $p(x)$  è nullo. Quindi  $\varphi$  è iniettivo e in particolare è un isomorfismo.  $\square$

Prima di proseguire, introduciamo la seguente definizione.

**Definizione 2.3.3.** Sia  $E$  un grafo. Con  $P_c(E)$  indichiamo l'insieme dei vertici di un grafo  $E$  che appartengono a un ciclo senza uscite. In altre parole, un vertice  $v$  appartiene a  $P_c(E)$  se esiste un ciclo  $c$  senza uscite con punto base  $v$ .

Consideriamo l'insieme  $\Gamma = \{c \mid c \text{ è un ciclo senza uscite di } E\}$ , allora possiamo scrivere

$$P_c(E) = \bigsqcup_{c \in \Gamma} V_c.$$

**Lemma 2.3.4.** Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo un vertice  $v$  di  $E$  per cui vale  $T(v) \cap P_c(E) = \emptyset$ , ovvero ogni vertice  $w$  di  $E$  tale che  $w \leq v$ , non può appartenere a un ciclo senza uscite. Sia  $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \tau_i + kv$  un elemento della Leavitt path algebra  $L_K(E)$  tale che  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k, k_i \in K^\times$ ,  $\tau_i \in \text{Path}(E) \setminus \{v\}$ ,  $s(\tau_i) = r(\tau_i) = v$  e  $\tau_i \neq \tau_j$  se  $i \neq j$ . Allora esiste  $\gamma \in \text{Path}(E)$  tale che  $s(\gamma) = v$  e  $\gamma^* \alpha \gamma = kr(\gamma)$ .

*Dimostrazione.* Non è restrittivo supporre che gli addendi di  $\alpha$  siano ordinati in modo che  $0 < \deg(\tau_1) \leq \dots \leq \deg(\tau_n)$ .

Dall'ipotesi  $T(v) \cap P_c(E) = \emptyset$  ci deve essere un vertice che sta nel cammino  $\tau_1$  per cui l'insieme dei lati uscenti da tale vertice abbia cardinalità strettamente maggiore di 1. Quindi possiamo scrivere  $\tau_1 = \lambda \tau'_1$ , dove  $\lambda$  e  $\tau'_1$  sono due cammini di  $E$  e  $|s^{-1}(r(\lambda))| > 1$ . Per i valori di  $i$  diversi da

1, se possiamo scrivere  $\tau_i = \lambda\tau'_i$  per un opportuno  $\tau'_i \in \text{Path}(E)$ , allora  $\lambda^*\tau_i\lambda = \lambda^*\lambda\tau'_i\lambda = \tau'_i\lambda$ , altrimenti il prodotto è uguale a 0. Calcoliamo  $\lambda^*\alpha\lambda$  e rinumeriamo gli addendi:

$$\lambda^*\alpha\lambda = \sum_{i=1}^n k_i\lambda^*\tau_i\lambda + k\lambda^*v\lambda = \sum_{i=1}^m k_i\tau'_i\lambda + kr(\lambda),$$

con  $m \leq n$ .

Sia  $e$  il primo lato di  $\tau'_1$ , siccome  $s(\tau'_1) = r(\lambda)$  e  $|s^{-1}(r(\lambda))| > 1$  possiamo scegliere un lato  $f$  diverso da  $e$  e uscente da  $r(\lambda)$ . Abbiamo che  $f^*\tau'_1\lambda f = 0$  e quindi

$$f^*\lambda^*\alpha\lambda f = \sum_{i=1}^m k_i f^*\tau'_i\lambda f + k f^*r(\lambda) f = \sum_{i=2}^m k_i f^*\tau'_i\lambda f + kr(f),$$

dove i monomi  $f^*\tau'_i\lambda f$  sono nulli oppure formano un cammino chiuso di lati reali, e essendo  $r(f) \leq v$  vale  $T(r(f)) \subseteq T(v)$  e di conseguenza  $T(r(f)) \cap P_c(E) = \emptyset$ . Riassumendo il vertice  $r(f)$  e l'elemento  $f^*\lambda^*\alpha\lambda f$  di  $L_K(E)$  soddisfano le stesse ipotesi di  $v$  e  $\alpha$ , solo che  $f^*\lambda^*\alpha\lambda f$  ha un numero minore di addendi rispetto ad  $\alpha$ . Ora ripetendo il procedimento appena descritto, a ogni passaggio riusciamo a eliminare almeno un addendo. Dopo un numero finito di passi rimane solo un multiplo di un vertice e quindi abbiamo costruito un cammino  $\gamma$  in modo che  $\gamma^*\alpha\gamma = kr(\gamma)$ .  $\square$

**Definizione 2.3.5.** Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $\lambda$  e  $\mu$  due cammini di  $E$  tali che  $r(\lambda) = r(\mu)$  e  $k$  un elemento di  $K^\times$ . Diremo che il *grado fantasma* del monomio  $k\lambda\mu^*$  nella Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è la lunghezza del cammino  $\mu$ , e lo indichiamo con  $\text{gdeg}(k\lambda\mu^*)$ .

Dato un elemento di  $L_K(E)$  del tipo  $\sum_{i=1}^n k_i\lambda_i\mu_i^*$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_i \in K^\times$ ,  $\lambda_i, \mu_i \in \text{Path}(E)$  tali che  $r(\lambda_i) = r(\mu_i)$  per  $i = 1, \dots, n$ , diremo che il suo grado fantasma è il massimo dei gradi fantasma dei singoli monomi.

Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Dato un cammino  $\mu$  di un grafo  $E$ , siccome è formato solo da lati reali il grado fantasma  $\text{gdeg}(\mu)$  è uguale a 0. In particolare tutti gli elementi appartenenti alla sottoalgebra  $KE$  di  $L_K(E)$  hanno grado fantasma nullo.

Per il Lemma 1.2.5 possiamo rappresentare ogni elemento della Leavitt path algebra  $L_K(E)$  nella forma  $\sum_{i=1}^n k_i\lambda_i\mu_i^*$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_i \in K^\times$ ,  $\lambda_i, \mu_i \in \text{Path}(E)$  tali che  $r(\lambda_i) = r(\mu_i)$  per  $i = 1, \dots, n$ . Però questa scrittura non è unica, quindi il grado fantasma di un elemento di  $L_K(E)$  dipende dalla sua rappresentazione.

**Lemma 2.3.6.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Sia  $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i\lambda_i\mu_i^*$  un elemento della Leavitt path algebra  $L_K(E)$  con grado fantasma positivo, dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_i \in K^\times$ ,  $\lambda_i, \mu_i \in \text{Path}(E)$  e  $r(\lambda_i) = r(\mu_i)$  per  $i = 1, \dots, n$ . Sia  $e$  un lato di  $E$ . Allora il grado fantasma di  $e\alpha e$  è strettamente minore del grado fantasma di  $\alpha$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\lambda_i \mu_i^*$  un monomio con grado fantasma positivo, allora  $\lambda_i \mu_i^* e$  o è nullo, oppure vale  $\text{gdeg}(\lambda_i \mu_i^* e) < \text{gdeg}(\lambda_i \mu_i^*)$  per la relazione (CK1) della Definizione 1.2.1. Visto che moltiplicando a destra per  $e$  abbassiamo il grado fantasma di ogni monomio possiamo concludere che  $\text{gdeg}(\alpha e) < \text{gdeg}(\alpha)$ .  $\square$

Siamo pronti ora a provare il Teorema di Riduzione. A parole, questo risultato ci permette di ottenere da un elemento di una Leavitt path algebra, moltiplicandolo per degli opportuni cammini, un multiplo di un vertice oppure un polinomio di Laurent valutato in un ciclo senza uscite.

**Teorema 2.3.7** (Teorema di Riduzione). *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora per ogni elemento  $\alpha$  non nullo della Leavitt path algebra  $L_K(E)$  esistono due cammini  $\mu, \eta$  di  $E$  tali che:*

- (i)  $\mu^* \alpha \eta = kv \neq 0$ , per degli opportuni  $k \in K^\times$  e  $v \in E^0$ , oppure
- (ii)  $\mu^* \alpha \eta = p(c) \neq 0$ , dove  $c$  è un ciclo senza uscite in  $E$  e  $p(c)$  è un polinomio di Laurent a coefficienti in  $K$  valutato nel ciclo  $c$ .

*Dimostrazione.* La prima parte della dimostrazione consiste nel determinare  $\eta \in \text{Path}(E)$  in modo che  $\alpha \eta$  appartenga alla sottoalgebra  $KE$ , ma non sia nullo. Cominciamo scegliendo un vertice  $v$  di  $E$  tale che  $\alpha v \neq 0$ . Tale vertice lo si può determinare scrivendo  $\alpha$  come una  $K$ -combinazione lineare di monomi del tipo  $\gamma \kappa^*$ , dove  $\gamma, \kappa \in \text{Path}(E)$ , grazie al Lemma 1.2.5. Come  $v$  si può scegliere un qualsiasi vertice iniziale di un cammino  $\kappa$ .

Ora scriviamo  $\alpha v$  come

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* + \alpha',$$

dove  $e_1, \dots, e_n \in E^1$  e  $e_i \neq e_j$  se  $i \neq j$ ,  $\alpha' \in (KE)v$ ,  $s(e_i) = v$ ,  $\alpha_i \in (L_K(E))r(e_i)$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

Se il grado fantasma di  $\alpha v$  è 0 allora abbiamo concluso.

Supponiamo che  $\text{gdeg}(\alpha v) > 0$ . Se  $\alpha v e_j = 0$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ , allora

$$\begin{aligned} \alpha v e_j &= \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* e_j + \alpha' e_j \\ &= \alpha_j + \alpha' e_j = 0, \end{aligned}$$

e quindi abbiamo  $\alpha_j = -\alpha' e_j$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ . Se sostituiamo quanto trovato nell'espressione di  $\alpha v$  otteniamo:

$$\alpha v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* + \alpha' = \sum_{i=1}^n (-\alpha' e_i e_i^*) + \alpha' v = \alpha' \left( -\sum_{i=1}^n e_i e_i^* + v \right) \neq 0.$$

In particolare i fattori  $v - \sum_{i=1}^n e_i e_i^*$  e  $\alpha'$  devono essere diversi da 0. Per la relazione (CK2) della Definizione 1.2.1 e  $v - \sum_{i=1}^n e_i e_i^* \neq 0$ , deve esistere  $f \in s^{-1}(v)$  diverso da ogni  $e_i$  per  $i = 1, \dots, n$ .

Se calcoliamo

$$\alpha v f = \alpha' \left( - \sum_{i=1}^n e_i e_i^* + v \right) f = \alpha' v f = \alpha' f \neq 0,$$

otteniamo che  $\alpha v f$  è un elemento non nullo appartenente a  $KE$ .

Supponiamo esista  $j = 1, \dots, n$  tale che  $\alpha v e_j \neq 0$ . Non è restrittivo supporre  $j = 1$ . Ora abbiamo

$$\alpha v e_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* e_1 + \alpha' e_1 = \alpha_1 r(e_1) + \alpha' e_1 = (\alpha_1 + \alpha' e_1) r(e_1) \neq 0,$$

e  $\text{gdeg}(\alpha v e_1) < \text{gdeg}(\alpha v)$  per il Lemma 2.3.6. Quindi possiamo riapplicare il procedimento descritto all'elemento  $\alpha v e_1$  ottenendo un elemento non nullo di  $KE$  oppure abbassando il grado fantasma. Dopo un numero finito di passi otteniamo un elemento non nullo di  $KE$ .

Proseguiamo con la seconda parte della dimostrazione. Sia  $\alpha$  un elemento non nullo di  $L_K(E)$ , per quanto visto nella prima parte esiste  $\eta \in \text{Path}(E)$  tale che  $\beta := \alpha \eta \in KE \setminus \{0\}$ . Scriviamo  $\beta = \sum_{i=1}^m k_i \gamma_i$ , dove  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, \dots, k_m \in K^\times$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \text{Path}(E)$ ,  $\gamma_i \neq \gamma_j$  se  $i \neq j$ , e  $v := r(\gamma_i) = r(\eta)$  per ogni  $i = 1, \dots, m$ . Inoltre supponiamo di aver ordinato gli addendi in modo che  $\text{deg}(\gamma_i) \leq \text{deg}(\gamma_{i+1})$  per ogni  $i = 1, \dots, m-1$ .

Dimostriamo l'esistenza del cammino  $\mu$  per induzione su  $m$ . Supponiamo  $m = 1$ . Se  $\text{deg}(\gamma_1) = 0$  allora abbiamo già concluso. Se  $\text{deg}(\gamma_1) > 0$ , allora

$$\gamma_1^* \alpha \eta = \gamma_1^* \beta = k_1 \gamma_1^* \gamma_1 = k_1 r(\gamma_1) \neq 0.$$

Supponiamo il risultato sia vero per elementi con al più  $m-1$  addendi. Moltiplichiamo a sinistra per il cammino  $\gamma_1^*$ :

$$\gamma_1^* \beta = k_1 v + \sum_{i=2}^m k_i \gamma_1^* \gamma_i.$$

Se  $\gamma_1^* \gamma_i = 0$  per un qualche  $2 \leq i \leq m$ , allora applicando l'ipotesi induttiva riusciamo a concludere. Si osservi che essendo  $\text{deg}(\gamma_1) \leq \text{deg}(\gamma_i)$  per  $i = 2, \dots, m$ , se  $\gamma_1^* \gamma_i \neq 0$ , allora  $\gamma_1^* \gamma_i \in KE$ .

Supponiamo invece che  $\gamma_1^* \gamma_i \neq 0$  per ogni  $2 \leq i \leq m$ . Se vale  $T(v) \cap P_c(E) = \emptyset$ , allora per il Lemma 2.3.4 esiste  $\tau \in \text{Path}(E)$  tale che  $\tau^* \gamma_1^* \alpha \eta \tau = k_1 r(\tau)$ . Mentre se  $T(v) \cap P_c(E) \neq \emptyset$ , allora esiste un cammino  $\rho$  di  $E$  che parte da  $v$  e il punto di arrivo  $w := r(\rho)$  appartiene a un ciclo senza uscite  $c$ . Quindi

$$0 \neq \rho^* \gamma_1^* \beta \rho = \rho^* \gamma_1^* \alpha \eta \rho \in w L_K(E) w.$$

Per il Lemma 2.3.2 possiamo concludere che esiste un polinomio di Laurent  $p(x)$  per cui  $p(c)$  coincide con l'elemento  $\rho^* \gamma_1^* \alpha \eta \rho$ .  $\square$



Enunciamo delle conseguenze immediate del Teorema di Riduzione 2.3.7.

**Corollario 2.3.8.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Sia  $\alpha$  un elemento non nullo della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ .*

- (i) *Esiste un cammino  $\eta \in \text{Path}(E)$  tale che  $0 \neq \alpha\eta \in KE$ .*
- (ii) *Se  $\alpha$  è un elemento omogeneo, allora esiste  $\eta \in \text{Path}(E)$  tale che  $\alpha\eta$  è un elemento omogeneo non nullo di  $KE$ .*

*Dimostrazione.* Il punto (i) è quanto dimostrato nella prima parte della dimostrazione del Teorema di Riduzione 2.3.7.

Per dimostrare il punto (ii) basta osservare che il cammino  $\eta$  del punto (i) appartiene a  $\text{Path}(E)$  ed è quindi un elemento omogeneo di  $L_K(E)$ . L'elemento  $\alpha\eta \in KE \setminus \{0\}$  è ancora omogeneo perché prodotto di elementi omogenei.  $\square$

**Corollario 2.3.9.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Sia  $\alpha$  un elemento omogeneo non nullo della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ . Allora esistono due cammini  $\mu, \eta$  di  $E$  tali che  $\mu\alpha\eta = kv \neq 0$ , per opportuni  $k \in K^\times$  e  $v \in E^0$ . In particolare ogni ideale graduato di  $L_K(E)$  contiene un vertice.*

*Dimostrazione.* Per il punto (ii) del Corollario 2.3.8 esiste  $\eta \in \text{Path}(E)$  tale che  $\beta := \alpha\eta$  è un elemento omogeneo non nullo di  $KE$ . Scriviamo  $\beta = \sum_{i=1}^n k_i\beta_i$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, \dots, k_n \in K$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \text{Path}(E)$  e  $\beta_i \neq \beta_j$  se  $i \neq j$ . Dal fatto che  $\beta$  è un elemento omogeneo i cammini  $\beta_i$  devono avere tutti lo stesso grado, ovvero hanno tutti la stessa lunghezza. Moltiplichiamo  $\beta = \alpha\eta$  a sinistra per  $\beta_1^*$ :

$$\beta_1^*\alpha\eta = \sum_{i=1}^n k_i\beta_1^*\beta_i = k_1\beta_1^*\beta_1 = k_1r(\beta_1) \neq 0,$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato la condizione  $\beta_1^*\beta_i = 0$  per  $i \neq 1$ , valida per l'assunzione che i cammini  $\beta_i$  sono distinti, ma della stessa lunghezza.

La seconda affermazione segue immediatamente dal fatto che un ideale graduato non banale contiene sicuramente un elemento omogeneo non nullo.  $\square$

**Proposizione 2.3.10.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Se  $E$  soddisfa la condizione (L) della Definizione 2.3.1, allora ogni ideale non banale della Leavitt path algebra  $L_K(E)$  contiene un vertice.*

*Dimostrazione.* Siano  $I$  un ideale non banale di  $L_K(E)$  e  $\alpha$  un suo elemento non nullo. La condizione (ii) del Teorema di Riduzione 2.3.7 non può verificarsi perché il grafo  $E$  soddisfa la condizione (L) per ipotesi. Quindi per il Teorema di Riduzione 2.3.7 esistono  $\mu, \eta \in \text{Path}(E)$  tali che  $\mu^*\alpha\eta = kv$ , per opportuni  $k \in K^\times$  e  $v \in E^0$ . Per la proprietà di assorbimento di  $I$  vale:  $k^{-1}\mu^*\alpha\eta = v \in I$ .  $\square$

**Teoremi di Unicità.** I Teoremi di Unicità sono due risultati che sono conseguenza del Teorema di Riduzione 2.3.7. Vediamo la loro dimostrazione e alcune loro applicazioni.

**Teorema 2.3.11** (Teorema di Unicità graduato). *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $L_K(E)$  la Leavitt path algebra di  $E$ ,  $A$  un anello  $\mathbb{Z}$ -graduato e  $\varphi : L_K(E) \rightarrow A$  un omomorfismo graduato di anelli. Se  $\varphi(v) \neq 0$  per ogni vertice  $v$  di  $E$ , allora l'omomorfismo  $\varphi$  è iniettivo.*

*Dimostrazione.* Studiamo il nucleo di  $\varphi$ . Per ipotesi  $\varphi$  è un omomorfismo graduato di  $L_K(E)$ , quindi il suo nucleo è un ideale graduato. Per il Corollario 2.3.9 sappiamo che un ideale graduato non banale deve contenere un vertice, ma per ipotesi  $\varphi(v) \neq 0$  per ogni vertice  $v$  di  $E$ . Quindi l'unica possibilità è che il nucleo di  $\varphi$  sia banale, ovvero  $\varphi$  sia iniettivo.  $\square$

**Teorema 2.3.12** (Teorema di Unicità di Cuntz-Krieger). *Siano  $E$  un grafo soddisfacente la condizione (L) e  $K$  un campo. Consideriamo  $L_K(E)$  la Leavitt path algebra di  $E$ ,  $A$  un anello e  $\varphi : L_K(E) \rightarrow A$  un omomorfismo di anelli. Se  $\varphi(v) \neq 0$  per ogni vertice  $v$  di  $E$ , allora l'omomorfismo  $\varphi$  è iniettivo.*

*Dimostrazione.* Studiamo il nucleo di  $\varphi$ . Per la Proposizione 2.3.10 ogni ideale contiene un vertice di  $E$ , ma per ipotesi  $\varphi(v) \neq 0$  per ogni vertice  $v$  di  $E$ . Quindi l'unica possibilità è che il nucleo di  $\varphi$  sia banale, ovvero  $\varphi$  sia iniettivo.  $\square$

Gli enunciati dei Teoremi di Unicità possono essere modificati considerando  $A$  un'algebra  $\mathbb{Z}$ -graduata su un campo  $K$ , e  $\varphi$  un omomorfismo di  $K$ -algebre graduato. Le dimostrazioni rimangono identiche.

Il prossimo risultato ha un enunciato simile ai Teoremi di Unicità perché da delle condizioni per cui un omomorfismo sia iniettivo.

**Proposizione 2.3.13.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $L_K(E)$  la Leavitt path algebra di  $E$ ,  $A$  una  $K$ -algebra  $\mathbb{Z}$ -graduata e  $\varphi : L_K(E) \rightarrow A$  un omomorfismo di  $K$ -algebre non necessariamente graduato. Se  $\varphi(v) \neq 0$  per ogni vertice  $v$  di  $E$  e l'immagine di ogni ciclo senza uscite di  $E$  è un elemento omogeneo non nullo di grado diverso da 0, allora  $\varphi$  è iniettivo.*

*Dimostrazione.* Consideriamo  $\ker(\varphi)$  il nucleo dell'omomorfismo  $\varphi$ . Dall'ipotesi  $\varphi(v) \neq 0$  per ogni vertice  $v$  di  $E$ , sappiamo che nessun vertice appartiene al nucleo.

Consideriamo un elemento di  $L_K(E)$  non nullo appartenente a  $\ker(\varphi)$ . Per il Teorema di Riduzione 2.3.7 esistono  $c$  ciclo senza uscite di  $E$  e  $p(x) =$

$\sum_{i=m}^n k_i x^i \neq 0$  polinomio di Laurent a coefficienti in  $K$ , dove  $m, n \in \mathbb{Z}$  e  $m \leq n$ , tali che  $p(c)$  appartiene a  $\ker(\varphi)$ . L'elemento

$$c^{-m}p(c) = \sum_{i=0}^{n-m} k_{i+m}c^i,$$

per la proprietà di assorbimento di  $\ker(\varphi)$ , deve appartenere al nucleo e quindi

$$\varphi(c^{-m}p(c)) = \sum_{i=0}^{n-m} k_{i+m}\varphi(c)^i = 0.$$

Ma  $\varphi(c)$  è un elemento omogeneo non nullo di grado diverso da 0, quindi gli elementi  $\varphi(c)^i$  sono tutti omogenei, di grado diverso e linearmente indipendenti; i coefficienti  $k_i$  sono nulli per  $m \leq i \leq n$ .

Supponendo che nel nucleo di  $\varphi$  esista un elemento non nullo arriviamo a una contraddizione, quindi  $\ker(\varphi) = 0$  e di conseguenza  $\varphi$  è iniettivo.  $\square$

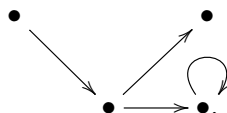
Guardiamo ora a un'applicazione del Teorema di Unicità graduato 2.3.11. In particolare, tale teorema ci permette di dimostrare che un'algebra di matrici a coefficienti in una Leavitt path algebra è ancora una Leavitt path algebra. A tale scopo introduciamo la seguente costruzione.

**Definizione 2.3.14.** Siano  $E$  un grafo e  $n \in \mathbb{N}$ . Indichiamo con  $M_n E$  il grafo ottenuto a partire da  $E$  aggiungendo a ogni vertice  $v$  di  $E$  un tratto rettilineo del tipo

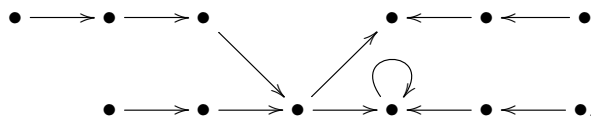
$$\bullet v_{n-1} \xrightarrow{e_{n-1}^v} \dots \xrightarrow{e_3^v} \bullet v_2 \xrightarrow{e_2^v} \bullet v_1 \xrightarrow{e_1^v} \bullet v.$$

Notiamo che per  $n = 1$  il grafo  $M_1 E$  coincide con il grafo  $E$  di partenza. Proviamo a vedere alcuni esempi di questa costruzione.

**Esempio 2.3.15.** Sia  $E$  il grafo



Sia  $n = 3$ . Allora per costruire il grafo  $M_3 E$  a ogni vertice attacchiamo un tratto rettilineo con due vertici e due lati:



**Esempio 2.3.16.** Sia  $R_1$  la rosa con un petalo, come nell'Esempio 1.1.3 con  $n = 1$ :

$$R_1 = \bullet^v \curvearrowright e .$$

Sia  $n \in \mathbb{N}$ . Il grafo  $M_n R_1$  si ottiene aggiungendo un tratto rettilineo all'unico vertice  $v$ :

$$M_n R_1 = \bullet^{v_{n-1}} \xrightarrow{e_{n-1}^v} \dots \xrightarrow{e_3^v} \bullet^{v_2} \xrightarrow{e_2^v} \bullet^{v_1} \xrightarrow{e_1^v} \bullet^v \curvearrowright .$$

**Proposizione 2.3.17.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora per ogni  $n$  intero positivo la  $K$ -algebra  $M_n(L_K(E))$  delle matrici  $n \times n$  a coefficienti nella Leavitt path algebra di  $E$  è isomorfa alla Leavitt path algebra  $L_K(M_n E)$  del grafo  $M_n E$ , introdotto nella Definizione 2.3.14.*

*Dimostrazione.* Sia  $\alpha$  un elemento nella Leavitt path algebra  $L_K(E)$ . Indichiamo con  $\alpha E_{i,j}$ , per  $i, j = 1, \dots, n$ , la matrice di  $M_n(L_K(E))$  avente  $\alpha$  nell'entrata di indici  $(i, j)$  e 0 altrove.

Utilizziamo la Proprietà Universale 1.2.2 di  $L_K(E)$  per definire un omomorfismo di  $K$ -algebre  $\varphi : L_K(M_n E) \rightarrow M_n(L_K(E))$ . Scegliamo i seguenti elementi di  $M_n(L_K(E))$ :

$$\begin{aligned} A_v &= vE_{1,1} \\ A_{v_k} &= vE_{k+1,k+1} \\ A_e &= eE_{1,1} \\ A_{e_k^v} &= vE_{k+1,k} \\ B_e &= e^*E_{1,1} \\ B_{e_k^v} &= vE_{k,k+1} \end{aligned}$$

per ogni  $v \in E^0$ ,  $e \in E^1$  e  $k = 1, \dots, n - 1$ .

Verifichiamo che tali elementi soddisfano le ipotesi della Proprietà Universale 1.2.2. Gli elementi  $\{ A_v, A_{v_k} \mid v \in E^0, k = 1, \dots, n - 1 \}$  sono idempotenti e ortogonali tra loro:

$$\begin{aligned} A_v A_w &= vE_{1,1} wE_{1,1} = vwE_{1,1} = \delta_{v,w} vE_{1,1} = \delta_{A_v, A_w} A_v \\ A_{v_k} A_{w_h} &= vE_{k+1,k+1} wE_{h+1,h+1} = vwE_{k+1,k+1} E_{h+1,h+1} \\ &= \delta_{v,w} \delta_{k,h} vE_{k+1,k+1} = \delta_{A_{v_k}, A_{w_h}} A_{v_k} \\ A_v A_{w_h} &= vE_{1,1} wE_{h+1,h+1} = vwE_{1,1} E_{h+1,h+1} = 0 \end{aligned}$$

per ogni  $v, w \in E^0$  e  $k, h = 1, \dots, n - 1$ .

Verifichiamo la condizione (i) della Proprietà Universale 1.2.2:

$$\begin{aligned}
A_{s(e)}A_e &= s(e)E_{1,1}eE_{1,1} = s(e)eE_{1,1} = eE_{1,1} = A_e \\
A_eA_{r(e)} &= eE_{1,1}r(e)E_{1,1} = er(e)E_{1,1} = eE_{1,1} = A_e \\
A_{r(e)}B_e &= r(e)E_{1,1}e^*E_{1,1} = r(e)e^*E_{1,1} = e^*E_{1,1} = B_e \\
B_eA_{s(e)} &= e^*E_{1,1}s(e)E_{1,1} = e^*s(e)E_{1,1} = e^*E_{1,1} = B_e \\
A_{v_k}A_{e_k^v} &= vE_{k+1,k+1}vE_{k+1,k} = vE_{k+1,k+1}E_{k+1,k} = vE_{k+1,k} = A_{v_k} \\
A_{e_k^v}A_{v_{k-1}} &= vE_{k+1,k}vE_{k,k} = vE_{k+1,k} = A_{e_k^v} \\
A_{v_{k-1}}B_{e_k^v} &= vE_{k,k}vE_{k,k+1} = vE_{k,k}E_{k,k+1} = vE_{k,k+1} = B_{e_k^v} \\
B_{e_k^v}A_{v_k} &= vE_{k,k+1}vE_{k+1,k+1} = vE_{k,k+1}E_{k+1,k+1} = vE_{k,k+1} = B_{e_k^v}
\end{aligned}$$

per ogni  $v \in E^0$ ,  $e \in E^1$  e  $k = 1, \dots, n-1$ . Nei calcoli appena svolti dobbiamo porre  $v_{k-1} = v$  quando  $k = 1$ .

Verifichiamo la condizione (ii):

$$\begin{aligned}
B_fA_e &= f^*E_{1,1}eE_{1,1} = f^*eE_{1,1} = \delta_{e,f}r(e)E_{1,1} = \delta_{e,f}A_{r(e)} \\
B_{e_k^v}A_{e_h^w} &= vE_{k,k+1}wE_{h+1,h} = vwE_{k,k+1}E_{h+1,h} \\
&= \delta_{v,w}\delta_{k,h}vE_{k,k} = \delta_{e_k^v,e_h^w}A_{v_{k-1}} \\
B_fA_{e_h^w} &= f^*E_{1,1}wE_{h+1,h} = f^*wE_{1,1}E_{h+1,h} = 0 \\
B_{e_k^v}A_e &= vE_{k,k+1}eE_{1,1} = veE_{k,k+1}E_{1,1} = 0
\end{aligned}$$

per ogni  $v, w \in E^0$ ,  $e, f \in E^1$  e  $k, h = 1, \dots, n-1$ . Nei calcoli appena svolti dobbiamo porre  $v_{k-1} = v$  quando  $k = 1$ .

Osserviamo che l'insieme dei vertici regolari del grafo  $M_nE$  è formato dai vertici regolari di  $E$  e dai vertici  $\{v_k \mid v \in E^0, k = 1, \dots, n-1\}$ . Inoltre, per ogni vertice regolare  $v$  di  $E$  vale  $s_{M_nE}^{-1}(v) = s_E^{-1}(v)$ , mentre per ogni vertice  $v$  di  $E$  e  $k = 1, \dots, n-1$  vale  $s_{M_nE}^{-1}(v_k) = \{e_k^v\}$ .

Verifichiamo la condizione (iii). Sia  $v$  un vertice regolare di  $E$ :

$$A_v = vE_{1,1} = \sum_{e \in s_E^{-1}(v)} (ee^*E_{1,1}) = \sum_{e \in s_E^{-1}(v)} (eE_{1,1}e^*E_{1,1}) = \sum_{e \in s_E^{-1}(v)} A_eB_e.$$

Siano  $v$  un vertice di  $E$  e  $k = 1, \dots, n-1$ :

$$A_{v_k} = vE_{k+1,k+1} = vE_{k+1,k}vE_{k,k+1} = A_{e_k^v}B_{e_k^v}.$$

Per la Proprietà Universale 1.2.2 di  $L_K(M_nE)$  possiamo concludere che

esiste un omomorfismo  $\varphi : L_K(M_n E) \rightarrow M_n(L_K(E))$  tale che

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= vE_{1,1} \\ \varphi(v_k) &= vE_{k+1,k+1} \\ \varphi(e) &= eE_{1,1} \\ \varphi(e_k^v) &= vE_{k+1,k} \\ \varphi(e^*) &= e^*E_{1,1} \\ \varphi((e_k^v)^*) &= vE_{k,k+1}\end{aligned}$$

per ogni  $v \in E^0$ ,  $e \in E^1$  e  $k = 1, \dots, n-1$ .

Ora dobbiamo mostrare che  $\varphi$  è un isomorfismo.

L'immagine di  $\varphi$  è la sottoalgebra generata dall'insieme

$$\{ A_v, A_e, B_e \mid v \in M_n E^0, e \in M_n E^1 \}.$$

Tale sottoalgebra coincide con  $M_n(L_K(E))$  perché contiene gli elementi  $vE_{i,j}$  e  $eE_{i,j}$ , al variare di  $v \in E^0$ ,  $e \in E^1$  e  $i, j = 1, \dots, n$ . Infatti, sia  $v \in E^0$  e  $i, j = 1, \dots, n$ , allora:

$$vE_{i,i} = \begin{cases} A_v & \text{se } i = 1 \\ A_{v_{i-1}} & \text{se } i \geq 2. \end{cases}$$

Se  $i > j$ :

$$vE_{i,j} = (vE_{i,i-1})(vE_{i-1,i-2}) \cdots (vE_{j+1,j}) = A_{e_{i-1}^v} A_{e_{i-2}^v} \cdots A_{e_j^v}.$$

Se  $i < j$ :

$$vE_{i,j} = (vE_{i,i+1})(vE_{i+1,i+2}) \cdots (vE_{j-1,j}) = B_{e_i^v} B_{e_{i+1}^v} \cdots B_{e_{j-1}^v}.$$

Sia  $e \in E^1$  e  $i, j = 1, \dots, n$ , allora:

$$eE_{i,j} = (s(e)E_{i,1})(eE_{1,1})(r(e)E_{1,j}) = A_{e_{i-1}^v} \cdots A_{e_1^v} A_e B_{e_1^v} \cdots B_{e_{j-1}^v}.$$

Quindi  $\varphi$  è suriettiva.

Per il Corollario 2.2.15  $L_K(M_n E)$  e  $L_K(E)$  sono algebre  $\mathbb{Z}$ -graduate. Quindi facendo riferimento all'Esempio 2.2.5, possiamo pensare a  $M_n(L_K(E))$  come a un'algebra  $\mathbb{Z}$ -graduata. Inoltre l'omomorfismo  $\varphi$  è graduato:

$$\begin{aligned}\deg(v) &= \deg(vE_{1,1}) = 0 + 1 - 1 = 0 \\ \deg(v_k) &= \deg(vE_{k+1,k+1}) = 0 + k + 1 - k - 1 = 0 \\ \deg(e) &= \deg(eE_{1,1}) = 1 + 1 - 1 = 1 \\ \deg(e_k^v) &= \deg(vE_{k+1,k}) = 0 + k + 1 - k = 1 \\ \deg(e^*) &= \deg(e^*E_{1,1}) = -1 + 1 - 1 = -1 \\ \deg((e_k^v)^*) &= \deg(vE_{k,k+1}) = 0 + k - k - 1 = -1.\end{aligned}$$

Siccome  $\varphi(w) \neq 0$  per ogni vertice  $w$  di  $M_n E$ , grazie al Teorema di Unicità graduato 2.3.11 possiamo concludere che  $\varphi$  è iniettivo.  $\square$

**Esempio 2.3.18.** Sia  $R_1$  la rosa con un petalo, come nell'Esempio 1.1.3 con  $n = 1$ :

$$R_1 = \bullet^v \curvearrowright e.$$

Siano  $K$  un campo e  $n \in \mathbb{N}$ . Allora per la Proposizione 2.3.17 possiamo concludere che la Leavitt path algebra  $L_K(M_n R_1)$  del grafo  $M_n R_1$  è isomorfa alla  $K$ -algebra  $M_n(L_K(R_1))$  delle matrici  $n \times n$  a coefficienti nella Leavitt path algebra  $L_K(R_1)$  del grafo  $R_1$ . Nell'Esempio 1.2.6 abbiamo dimostrato che l'algebra  $L_K(R_1)$  è isomorfa alla  $K$ -algebra  $K[x^{-1}, x]$  dei polinomi di Laurent. Quindi possiamo concludere:

$$L_K(M_n R_1) \cong M_n(K[x^{-1}, x]).$$

Siamo ora in grado di produrre un esempio di grafi a cui corrispondono identici grafi estesi, che producono Leavitt Path algebre non isomorfe. Il grafo  $M_2 R_1$  è

$$\bullet^{v_1} \xrightarrow{e_1^v} \bullet^v \curvearrowright .$$

Tale grafo coincide con il grafo  $E_T^*$ , dove  $E_T$  è il grafo di Toeplitz introdotto nell'Esempio 1.1.4. Nell'Esempio 1.3.18 abbiamo visto che la Leavitt path algebra  $L_K(E_T)$  del grafo di Toeplitz è isomorfa alla  $K$ -algebra associativa unitaria libera generata dall'insieme  $\{x, y\}$  e soggetta alla relazione  $xy = 1$ . Da  $E_T^* = M_2 R_1$  e per quanto mostrato nell'Esempio 2.3.18 possiamo concludere che  $L_K(E_T^*) \cong M_2(K[x^{-1}, x])$ . Bensì ai grafi  $E_T$  e  $E_T^*$  corrisponda lo stesso grafo esteso, producono Leavitt path algebre non isomorfe.

**Definizione 2.3.19.** Siano  $E$  un grafo e  $H$  un insieme di vertici di  $E$  ereditario. Definiamo il *grafo ristretto*  $E_H = (E_H^0, E_H^1, s', r')$  dove l'insieme dei vertici e l'insieme dei lati sono rispettivamente

$$E_H^0 = H \quad \text{e} \quad E_H^1 = \{e \in E^1 \mid s(e) \in H\};$$

le funzioni  $s'$  e  $r'$  sono le rispettive restrizioni delle funzioni  $s$  e  $r$  del grafo  $E$  all'insieme  $E_H^1$ .

Siano  $E$  un grafo e  $H$  un insieme di vertici di  $E$  ereditario. Un vertice  $v$  del grafo  $E_H$  è regolare se, e solo se,  $v$  appartiene a  $H$  ed è regolare in  $E$ ; perché per definizione l'insieme  $(s')^{-1}(v)$  dei lati uscenti da  $v$  in  $E_H$  coincide con l'insieme  $s^{-1}(v)$  dei lati uscenti da  $v$  in  $E$ .

**Proposizione 2.3.20.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$  ereditario,  $L_K(E_H)$  la Leavitt path algebra del grafo  $E_H$  e  $L_K(E)$  la Leavitt path algebra di  $E$ . Allora esiste un omomorfismo di  $K$ -algebre graduato e iniettivo  $\varphi : L_K(E_H) \rightarrow L_K(E)$  tale che*

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= v \\ \varphi(e) &= e \\ \varphi(e^*) &= e^* \end{aligned}$$

per ogni  $v \in E_H^0$  e ogni  $e \in E_H^1$ . Inoltre se l'insieme  $H$  è finito l'immagine  $\varphi(L_K(E_H))$  della Leavitt path algebra di  $E_H$  coincide con  $p_H L_K(E) p_H$ , dove  $p_H := \sum_{v \in H} v \in L_K(E)$ .

*Dimostrazione.* Utilizziamo la Proprietà Universale 1.2.2 di  $L_K(E_H)$  per definire un omomorfismo di  $K$ -algebre  $\varphi : L_K(E_H) \rightarrow L_K(E)$ . Consideriamo i seguenti elementi di  $L_K(E)$ :

$$\begin{aligned} a_v &= v \\ a_e &= e \\ b_e &= e^* \end{aligned}$$

per ogni  $v \in E_H^0$  e ogni  $e \in E_H^1$ . È immediato verificare che tali elementi soddisfano le richieste della Proprietà Universale 1.2.2. Dunque possiamo concludere che esiste un omomorfismo  $\varphi : L_K(E_H) \rightarrow L_K(E)$  tale che

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= v \\ \varphi(e) &= e \\ \varphi(e) &= e^* \end{aligned}$$

per ogni  $v \in E_H^0$  e ogni  $e \in E_H^1$ .

Ogni generatore di  $L_K(E_H)$  ha come immagine un elemento di  $L_K(E)$  dello stesso grado, quindi  $\varphi$  è un omomorfismo graduato e per ipotesi  $\varphi(v) \neq 0$ , per ogni vertice di  $E_H$ . Quindi per il Teorema di Unicità graduato 2.3.11  $\varphi$  è iniettivo.

Passiamo alla seconda parte dell'enunciato. Sicuramente ogni elemento di  $L_K(E_H)$  ha come immagine un elemento di  $p_H L_K(E) p_H$ .

Sia  $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i \mu_i^*$  appartenente a  $p_H L_K(E) p_H$ . Per l'ereditarietà dell'insieme  $H$ , i vertici e i lati che compongono i cammini  $\lambda_i$  e  $\mu_i$  appartengono al grafo ristretto  $E_H$ . Quindi  $\alpha$  è un elemento di  $L_K(E_H)$  e vale  $\varphi(\alpha) = \alpha$ .

In conclusione vale  $\varphi(L_K(E_H)) = p_H L_K(E) p_H$ .  $\square$

**Anelli semiprimi.** Il Teorema di Riduzione 2.3.7 ci permette di dimostrare che ogni Leavitt path algebra è un anello semiprimo. Questa proprietà ci tornerà utile quando indagheremo lo zoccolo di una Leavitt path algebra.

Richiamiamo la definizione di anello semiprimo e dimostriamo alcune proprietà riguardanti i loro ideali.

**Definizione 2.3.21.** Sia  $R$  un anello. Allora  $R$  è un anello semiprimo se l'unico ideale bilatero  $I$  per cui  $I^2 = 0$  è l'ideale  $\{0\}$ .

Richiamiamo la definizione di ideale minimale in un anello  $R$ : un ideale sinistro  $I$  è minimale se non è banale, e non esiste nessun altro ideale sinistro propriamente contenuto in  $I$ . La definizione di ideale destro minimale è analoga.



**Proposizione 2.3.22.** *Sia  $R$  un anello.*

- (i) *Se  $I$  è un ideale sinistro di  $R$  minimale, allora  $I^2 = 0$  oppure esiste  $e \in R$  idempotente tale che  $I = Re$ .*
- (ii) *Se  $I$  è un ideale destro di  $R$  minimale, allora  $I^2 = 0$  oppure esiste  $e \in R$  idempotente tale che  $I = eR$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il punto (i); il punto (ii) è analogo.

Sia  $I$  un ideale sinistro di  $R$  minimale. Supponiamo che  $I^2 \neq 0$ . Possiamo affermare che esiste  $x \in I$  tale che  $Ix \neq 0$ . L'insieme  $Ix$  è ancora un ideale sinistro di  $R$  e per la proprietà di assorbimento di  $I$  è contenuto in  $I$ . Per la minimalità di  $I$  vale  $Ix = I$ . Quindi esiste  $e \in I$  non nullo tale che  $ex = x$ .

Consideriamo l'insieme

$${}_{R}\text{ann}(x) := \{ r \in R \mid rx = 0 \},$$

che viene chiamato l'annullatore sinistro dell'elemento  $x$  in  $R$ . Notiamo che  ${}_{R}\text{ann}(x) \cap I$  non può coincidere con tutto  $I$  perché  $ex = x \neq 0$  ed  $e \in I$ . Per la minimalità di  $I$  possiamo concludere che  ${}_{R}\text{ann} \cap I = 0$ .

Moltiplicando ambo i membri di  $ex = x$  a sinistra per  $e$  si ha:

$$\begin{aligned} e^2x &= ex \\ (e^2 - e)x &= 0. \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto così  $e^2 - e \in {}_{R}\text{ann} \cap I$ , ma essendo  ${}_{R}\text{ann} \cap I$  banale vale  $e^2 = e$ .

Per concludere la dimostrazione dobbiamo verificare  $I = Re$ . L'inclusione  $Re \subseteq I$  vale per la proprietà di assorbimento di  $I$ . Per la minimalità di  $I$  e osservando che  $0 \neq e = e^2 \in Re$ , possiamo concludere che vale l'uguaglianza.  $\square$

**Proposizione 2.3.23.** *Siano  $R$  un anello semiprimo ed  $F$  un insieme di unità locali per  $R$  (vedi Definizione 1.2.4).*

- (i) *Sia  $I$  un ideale sinistro di  $R$ . Se  $I^2 = 0$ , allora  $I = 0$ . In particolare, se  $I$  è minimale, allora esiste  $e \in R$  idempotente tale che  $I = Re$ .*
- (ii) *Sia  $I$  un ideale destro di  $R$ . Se  $I^2 = 0$ , allora  $I = 0$ . In particolare, se  $I$  è minimale, allora esiste  $e \in R$  idempotente tale che  $I = eR$ .*
- (iii) *Sia  $x \in R$  non nullo. Allora  $xRx \neq 0$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il punto (i); il punto (ii) è analogo.

Sia  $I$  un ideale sinistro di  $R$  tale che  $I^2 = 0$ . Consideriamo l'ideale bilatero  $IR$  di  $R$ . Grazie all'ipotesi  $I^2 = 0$  abbiamo

$$(IR)^2 = (IR)(IR) = I(RI)R \subseteq IIR = I^2R = 0.$$

Siccome  $R$  è semiprimo, allora  $IR = 0$ .

Consideriamo  $x \in I$  e  $f \in F$  tale che  $xf = x$ . Siccome  $xf \in IR$ , segue subito  $x = xf = 0$ .

Supponiamo ora che l'ideale  $I$  sia anche minimale, in particolare  $I$  non è banale. Per la Proposizione 2.3.22 vale  $I^2 = 0$  oppure esiste  $e \in R$  idempotente tale che  $I = Re$ . Se fosse vera la prima opzione, per quanto appena dimostrato, l'ideale  $I$  dovrebbe essere banale.

Dimostriamo il punto (iii). Sia  $x \in R$  non nullo. L'ideale sinistro  $Rx$  generato da  $x$  non è banale, quindi per il punto (i) abbiamo

$$R(xRx) = (Rx)(Rx) = (Rx)^2 \neq 0.$$

Questo ci permette di concludere che  $xRx \neq 0$ . □

**Proposizione 2.3.24.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è un anello semiprimo.*

*Dimostrazione.* Sia  $I$  un ideale non banale di  $L_K(E)$ . Consideriamo  $\alpha \in I$  non nullo. Per il Teorema di Riduzione 2.3.7 esistono  $\mu, \eta \in \text{Path}(E)$  tali che  $\mu^*\alpha\eta = kv$  con  $k \in K^\times$  e  $v \in E^0$ , oppure  $\mu^*\alpha\eta = p(c)$  dove  $p(c)$  è un polinomio non nullo di Laurent a coefficienti in  $K$  valutato in un ciclo  $c$  senza uscite di  $E$ .

Supponiamo che si verifichi il primo caso. Per la proprietà di assorbimento di  $I$  abbiamo  $kv \in I$  e inoltre vale

$$I^2 \ni (kv)^2 = k^2v^2 = k^2v \neq 0.$$

Supponiamo che si verifichi il secondo caso. Indichiamo con  $w$  il punto base del ciclo  $c$ . Notiamo che  $p(c) \in wL_K(E)w$ ; in particolare  $wL_K(E)w$  è un dominio di integrità perché  $wL_K(E)w \cong K[x^{-1}, x]$  grazie al Lemma 2.3.2. Quindi  $p(c) \neq 0$ .

Per la proprietà di assorbimento di  $I$  abbiamo  $p(c) \in I$ , dunque vale  $0 \neq p(c)^2 \in I^2$ . □

**Il radicale di Jacobson.** In questo paragrafo, come applicazione del Teorema di Riduzione 2.3.7, vogliamo studiare il radicale di Jacobson di una Leavitt path algebra.

Per prima cosa, generalizzeremo la definizione di modulo su un anello con unità al caso di un anello con unità locali (vedi Definizione 1.2.4), in seguito richiameremo la definizione di radicale di un modulo e di radicale di Jacobson di un anello con unità locali, dimostrando alcune caratterizzazioni.

**Definizione 2.3.25.** Sia  $R$  un anello con un insieme  $F$  di unità locali. La terna  ${}_R M = (M, +, \cdot)$  è un  $R$ -modulo sinistro se  $(M, +)$  è un gruppo abeliano e  $\cdot : R \times M \rightarrow M$  è un'applicazione per cui vale:

- 1)  $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$ , per ogni  $m \in M$  e per ogni  $r_1, r_2 \in R$ ;
- 2)  $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$ , per ogni  $m_1, m_2 \in M$  e per ogni  $r \in R$ ;
- 3)  $(rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$ , per ogni  $m \in M$  e per ogni  $r, s \in R$ ;
- 4) per ogni  $m \in M$  esiste  $f \in F$  tale che  $f \cdot m = m$ .

La definizione di  $R$ -modulo destro è analoga.

**Definizione 2.3.26.** Siano  $R$  un anello e  ${}_R M$  un  $R$ -modulo sinistro. Il radicale di  $M$ , indicato con  $J({}_R M)$ , è il sottomodulo proprio ottenuto dall'intersezione di tutti i sottomoduli massimali di  $M$ . Se  ${}_R M$  non ha sottomoduli massimali, allora poniamo  $J({}_R M) = M$ .

La definizione è la medesima nel caso di  $M_R$  modulo destro.

Siano  $R$  un anello con unità locali e  ${}_R M$  un  $R$ -modulo sinistro. Ricordiamo che  $R$  ha una struttura di  $R$ -modulo sinistro e una struttura di  $R$ -modulo destro. Fissiamo  $x \in {}_R M$  non nullo. Consideriamo il seguente omomorfismo di  $R$ -moduli sinistri:

$$\begin{aligned} \rho_x : {}_R R &\rightarrow {}_R M \\ r &\mapsto r \cdot x. \end{aligned} \tag{2.5}$$

L'annullatore sinistro di  $x$  è l'ideale sinistro di  $R$

$${}_R \text{ann}(x) = \{ r \in R \mid r \cdot x = 0 \},$$

e coincide con il nucleo dell'omomorfismo  $\rho_x$ .

Se  ${}_R M$  è un modulo semplice, l'omomorfismo  $\rho_x$  è suriettivo; per il Primo Teorema di Isomorfismo abbiamo

$${}_R(R/{}_R \text{ann}(x)) \cong {}_R M,$$

in particolare l'ideale sinistro  ${}_R \text{ann}(x)$  è massimale.

Analogamente, se  $M_R$  è un  $R$ -modulo destro semplice e  $x \in M_R$  non nullo, allora

$$(R/\text{ann}_R(x))_R \cong M_R,$$

dove  $\text{ann}_R(x)$  è l'annullatore destro di  $x$ :

$$\text{ann}_R(x) = \{ r \in R \mid x \cdot r = 0 \}.$$

L'annullatore di un modulo sinistro  ${}_R M$  è l'ideale bilatero di  $R$  ottenuto intersecando gli annullatori sinistri dei suoi elementi:

$${}_R \text{ann}({}_R M) := \bigcap_{x \in {}_R M} {}_R \text{ann}(x) = \{ r \in R \mid r \cdot m = 0 \forall m \in {}_R M \}.$$

Analogamente, l'annullatore di un modulo destro  $M_R$  è l'ideale bilatero di  $R$  ottenuto da

$$\text{ann}_R(M_R) := \bigcap_{x \in M_R} \text{ann}_R(x) = \{ r \in R \mid m \cdot r = 0 \forall m \in M_R \}.$$

Introduciamo ora la nozione di ideale regolare.

**Definizione 2.3.27.** Sia  $R$  un anello. Un ideale sinistro  $I$  di  $R$  è detto *regolare* se esiste  $e \in R$  tale che  $r - re \in I$ , per ogni  $r \in R$ . L'elemento  $e$  viene detto *unità destra di  $I$* .

Un ideale destro  $I$  di  $R$  è detto *regolare* se esiste  $e \in R$  tale che  $r - er \in I$ , per ogni  $r \in R$ . L'elemento  $e$  viene detto *unità sinistra di  $I$* .

In entrambi i casi  $e$  non può appartenere all'ideale  $I$ , altrimenti  $I$  coinciderebbe con  $R$ .

**Esempio 2.3.28.** Siano  $R$  un anello con un insieme  $F$  di unità locali e  ${}_R M$  un  $R$ -modulo sinistro. L'annullatore  ${}_R \text{ann}(x)$  di un elemento  $x \in {}_R M$  è un ideale sinistro regolare. Infatti, sia  $e \in F$  tale che  $e \cdot x = x$ , allora

$$(r - re) \cdot x = r \cdot x - r \cdot (e \cdot x) = r \cdot x - r \cdot x = 0,$$

per ogni  $r \in R$ . Questo significa che  $r - re \in {}_R \text{ann}(x)$  per ogni  $r \in R$ .

Analogamente, se  $N_R$  è un  $R$ -modulo destro, l'annullatore  $\text{ann}_R(y)$  di un elemento  $y \in N_R$  è un ideale destro regolare.

**Proposizione 2.3.29.** *Sia  $R$  un anello con unità locali.*

- (i) *Un  $R$ -modulo sinistro  ${}_R M$  semplice non banale è isomorfo al modulo quoziente  ${}_R(R/I)$ , dove  $I$  è un ideale sinistro massimale regolare di  $R$ .*
- (ii) *Un  $R$ -modulo destro  $N_R$  semplice non banale è isomorfo al modulo quoziente  $(R/I)_R$ , dove  $I$  è un ideale destro massimale regolare di  $R$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il punto (i); il punto (ii) è analogo. Sia  $x \in {}_R M$  non nullo. L'omomorfismo  $\rho_x$ , definito come in 2.5, è suriettivo per la semplicità di  ${}_R M$  e per il Primo Teorema di Isomorfismo abbiamo che

$${}_R(R/{}_R \text{ann}(x)) \cong {}_R M.$$

L'ideale sinistro  ${}_R \text{ann}(x)$  è massimale per la semplicità di  ${}_R M$  e regolare per quanto visto nell'Esempio 2.3.28.  $\square$

**Definizione 2.3.30.** Sia  $R$  un anello con unità locali. Il radicale di Jacobson sinistro di  $R$ , indicato con  $J({}_R R)$ , è il radicale di  $R$  pensato come  $R$ -modulo sinistro; in altre parole  $J({}_R R)$  è dato dall'intersezione di tutti gli ideali sinistri massimali di  $R$ .

**Osservazione 2.3.31.** Ricordiamo che un anello con unità possiede sempre un ideale destro massimale e un ideale sinistro massimale. Dunque, in un anello con unità il radicale di Jacobson sinistro e destro non coincidono con  $R$ .

Il radicale di Jacobson destro di  $R$ , indicato con  $J(R_R)$ , è il radicale di  $R$  pensato come  $R$ -modulo destro; in altre parole  $J(R_R)$  è dato dall'intersezione di tutti gli ideali destri massimali di  $R$ .

**Proposizione 2.3.32.** *Sia  $R$  un anello con unità locali.*

- (i) *Il radicale di Jacobson sinistro  $J({}_R R)$  coincide con l'intersezione degli annullatori degli  $R$ -moduli sinistri semplici.*
- (ii) *Il radicale di Jacobson destro  $J(R_R)$  coincide con l'intersezione degli annullatori degli  $R$ -moduli destri semplici.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il punto (i); il punto (ii) è analogo. Siano  $x \in J({}_R R)$  e  ${}_R S$  un  $R$ -modulo sinistro semplice. Sappiamo che se  $s \in {}_R S$  non nullo, allora l'annullatore sinistro  ${}_R \text{ann}(s)$  è un ideale sinistro massimale di  $R$ . Siccome  $x$  appartiene a tutti gli ideali sinistri massimali di  $R$ , allora appartiene a tutti gli annullatori sinistri  ${}_R \text{ann}(s)$ , per  $s \in {}_R S$ . Dunque  $x$  appartiene all'annullatore di  ${}_R S$ .

Viceversa, siano  $x \in R$  appartenente a ogni annullatore di un  $R$ -modulo sinistro semplice  ${}_R S$  e  $I$  un ideale sinistro massimale. Essendo il modulo quoziente  ${}_R(R/I)$  semplice, abbiamo che

$$x \cdot {}_R(R/I) = 0,$$

quindi  $(xR + I)/I = 0$ . Sia  $f \in F$  un'unità locale per  $x$ , allora  $xf + I = x + I = 0$ , ovvero  $x \in I$ .

Abbiamo dimostrato che l'elemento  $x$  appartiene a ogni ideale sinistro massimale di  $R$  e di conseguenza appartiene a  $J({}_R R)$ .  $\square$

**Osservazione 2.3.33.** Sia  $R$  un anello con unità locali. Il radicale di Jacobson sinistro e destro sono entrambi ideali bilateri perché per quanto visto nella Proposizione 2.3.32 coincidono con l'intersezione di ideali bilateri.

**Proposizione 2.3.34.** *Sia  $R$  un anello con un insieme  $F$  di unità locali.*

- (i) *Il radicale di Jacobson sinistro  $J({}_R R)$  coincide con*

$$\bigcap \{ I \leq {}_R R \mid I \text{ regolare e massimale} \}.$$

- (ii) *Il radicale di Jacobson destro  $J(R_R)$  coincide con*

$$\bigcap \{ I \leq R_R \mid I \text{ regolare e massimale} \}.$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo il punto (i); il punto (ii) è analogo. Se  $x \in J({}_R R)$ , allora appartiene a tutti gli ideali sinistri massimali di  $R$ , in particolare appartiene a tutti gli ideali sinistri massimali regolari di  $R$ . Quindi l'inclusione

$$J({}_R R) \subseteq \bigcap \{ I \leq {}_R R \mid I \text{ regolare e massimale} \}$$

è verificata.

Per la Proposizione 2.3.32 abbiamo

$$J({}_R R) = \bigcap \{ {}_R \text{ann}({}_R S) \mid {}_R S \text{ è } R\text{-modulo sinistro semplice} \};$$

a loro volta gli annullatori  ${}_R \text{ann}({}_R S)$  sono intersezione degli annullatori dei singoli elementi di  ${}_R S$  che sappiamo essere ideali sinistri regolari e massimali. Quindi anche l'inclusione

$$\{ I \leq {}_R R \mid I \text{ regolare e massimale} \} \subseteq J({}_R R)$$

è verificata. □

**Lemma 2.3.35.** *Sia  $R$  un anello con un insieme  $F$  di unità locali.*

- (i) *Per ogni  $I$  ideale sinistro proprio regolare di  $R$  esiste  $K$  ideale sinistro regolare massimale che lo contiene.*
- (ii) *Per ogni  $I$  ideale destro proprio regolare di  $R$  esiste  $K$  ideale destro regolare massimale che lo contiene.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il punto (i); il punto (ii) è analogo. Siano  $I$  un ideale sinistro proprio regolare di  $R$  ed  $e \in R$  la sua unità destra. Applichiamo il Lemma di Zorn per determinare un elemento massimale della famiglia

$$\mathcal{F} = \{ J \leq {}_R R \mid I \subseteq J, e \notin J \},$$

ordinata dall'inclusione insiemistica.

Sia  $\{ J_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$  una catena di elementi in  $\mathcal{F}$  indicizzata su un insieme  $\Lambda$  arbitrario. Consideriamo  $\bar{J} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda$ . Tale insieme è un ideale sinistro di  $R$ , appartiene alla famiglia  $\mathcal{F}$  ed è un maggiorante della catena considerata. Dunque ogni catena di  $\mathcal{F}$  ammette maggiorante; per il Lemma di Zorn possiamo concludere che esiste  $\bar{I} \in \mathcal{F}$  elemento massimale. Osserviamo che l'ideale  $\bar{I}$  è regolare e la sua unità destra coincide con  $e$ .

Dimostriamo che  $\bar{I}$  è un ideale massimale di  $R$ . Supponiamo esista un ideale sinistro  $J$  di  $R$  che contenga propriamente  $\bar{I}$ . Si deve avere che  $e \in J$ , per la massimalità di  $\bar{I}$  in  $\mathcal{F}$ . Per ogni  $r \in R$ , abbiamo

$$r = r - re + re \in J,$$

perché  $r - re \in \bar{I} \subseteq J$  essendo  $e$  l'unità destra di  $\bar{I}$  e  $re \in J$  per la proprietà di assorbimento di  $J$ . Ma ciò significa che  $J = R$ . □

**Definizione 2.3.36.** Sia  $R$  un anello. Un elemento  $a \in R$  è *quasi regolare a sinistra* se esiste  $b \in R$  tale che  $a = ba - b$ . L'elemento  $b$  viene detto *quasi inverso sinistro* di  $a$ .

Un elemento  $a \in R$  è *quasi regolare a destra* se esiste  $b \in R$  tale che  $a = ab - b$ . L'elemento  $b$  viene detto *quasi inverso destro* di  $a$ .

Sia  $I$  un ideale sinistro (o destro) di  $R$ . Allora  $I$  è *quasi regolare a sinistra* se ogni elemento appartenente a  $I$  è quasi regolare a sinistra.

L'ideale  $I$  è *quasi regolare a destra* se ogni elemento appartenente a  $I$  è quasi regolare a destra.

L'ideale  $I$  è *quasi regolare* se è quasi regolare a destra e quasi regolare a sinistra.

**Osservazione 2.3.37.** Sia  $R$  un anello con un insieme  $F$  di unità locali. Siano  $a \in R$  ed  $e \in F$  tali che  $a = eae \in eRe$ . Allora l'elemento  $a$  è quasi regolare a sinistra se, e solo se,  $e - a \in eRe$  ha inverso sinistro nell'anello unitario  $eRe$ .

Supponiamo  $a$  quasi regolare a sinistra. Sia  $b \in R$  il quasi inverso sinistro di  $a$ ; deve valere  $b = ba - a$  e in particolare  $be = b$ . L'elemento  $e - b$  è l'inverso sinistro di  $e - a$ :

$$(e - b)(e - a) = e - ea - be + ba = e - a - b + ba = e;$$

nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che  $b$  è il quasi inverso sinistro di  $a$  e dunque  $-a - b + ba = 0$ .

Supponiamo che  $e - a$  sia invertibile a sinistra in  $eRe$ . Non è restrittivo supporre che l'inverso sinistro sia della forma  $e - b$ , per un opportuno  $b \in eRe$ . Deve valere:

$$\begin{aligned} (e - b)(e - a) &= e \\ e - ea - be + ba &= e \\ e - a - b + ba &= e \\ -a - b + ba &= 0 \\ a &= ba - b, \end{aligned}$$

ovvero  $b$  è il quasi inverso sinistro di  $a$ .

Analogamente, si dimostra che  $a$  è quasi regolare a destra se, e solo se,  $e - a \in eRe$  ha inverso destro nell'anello unitario  $eRe$ .

Consideriamo  $a \in R$  quasi regolare a sinistra e quasi regolare a destra. Siano  $b$  il suo quasi inverso sinistro e  $c$  il suo quasi inverso destro. Per quanto appena mostrato, esiste  $e \in F$  tale che  $e - b$  e  $e - c$  sono rispettivamente l'inverso sinistro e l'inverso destro di  $e - a$  in  $eRe$ . Ma in un anello con unità l'inverso sinistro e l'inverso destro di un elemento coincidono:

$$\begin{aligned} e - b &= e - c \\ -b &= -c \\ b &= c. \end{aligned}$$

Quindi il quasi inverso sinistro e il quasi inverso destro di un elemento coincidono.

Sia  $I$  un ideale sinistro di  $R$  quasi regolare a sinistra. Consideriamo  $a \in I$  e  $b$  il suo quasi inverso sinistro. In particolare,  $b = ba - a \in I$  è quasi regolare a destra e il suo quasi inverso destro è  $a$ . L'elemento  $b$  è anche quasi regolare a sinistra perché è un elemento di  $I$ , ma siccome quasi inverso sinistro e quasi inverso destro coincidono,  $a$  è il quasi inverso sinistro di  $b$ . In particolare,  $a$  risulta quasi regolare a destra. Abbiamo mostrato che ogni  $a \in I$  è quasi regolare a destra, quindi ogni ideale sinistro quasi regolare a sinistra è anche quasi regolare a destra.

Analogamente, possiamo mostrare che ogni ideale destro quasi regolare a destra è quasi regolare a sinistra.

**Proposizione 2.3.38.** *Sia  $R$  un anello con un insieme  $F$  di unità locali. Allora il radicale di Jacobson sinistro  $J({}_R R)$  è quasi regolare e ogni ideale sinistro quasi regolare a sinistra è contenuto in  $J({}_R R)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $x \in J({}_R R)$ . Supponiamo che  $x$  non sia quasi regolare a sinistra. Definiamo il seguente ideale sinistro di  $R$ :

$$I := \{ yx - y \mid y \in R \};$$

siccome  $x$  non è quasi regolare a sinistra abbiamo  $yx - y \neq x$  per ogni  $y \in R$ , quindi  $I$  è un ideale sinistro proprio e regolare, con unità destra  $x$ .

Per il punto (i) del Lemma 2.3.35 esiste  $K$  ideale sinistro massimale e regolare contenente  $I$ . Grazie al punto (i) della Proposizione 2.3.34 abbiamo  $x \in K$ . Da  $x \in K$  e  $I \subseteq K$  possiamo dedurre che  $I + Rx \subseteq K$ , ma per ogni  $r \in R$  abbiamo:

$$r = r - rx + rx \in I + Rx.$$

Quindi  $R = I + Rx \subseteq K$ , ma questa è una contraddizione perché  $K$  essendo un ideale massimale deve essere proprio.

Possiamo concludere che ogni elemento  $x \in J({}_R R)$  deve essere quasi regolare a sinistra e di conseguenza  $J({}_R R)$  è quasi regolare a sinistra e quasi regolare per l'Osservazione 2.3.37.

Sia  $I$  un ideale sinistro di  $R$  quasi regolare a sinistra. Supponiamo che  $I$  non sia contenuto in  $J({}_R R)$ . Allora per il punto (i) della Proposizione 2.3.34 esiste  $K$  ideale sinistro regolare e massimale che non contiene  $I$ . Sia  $e \in R$  l'unità destra di  $K$ .

Consideriamo l'ideale  $I + K$ ; esso contiene propriamente  $K$ , quindi per la massimalità di  $K$  abbiamo  $R = I + K$ . Possiamo scrivere  $e = x + k$ , per opportuni  $x \in I, k \in K$ . L'elemento  $x \in I$  è quasi regolare, indichiamo dunque con  $y$  il suo quasi inverso. Calcoliamo

$$ye = yx + yk = x + y + yk,$$



e isoliamo  $x$ :

$$x = ye - y - yk \in K.$$

Deduciamo così  $e = x + k \in K$ , che è un assurdo.  $\square$

**Proposizione 2.3.39.** *Sia  $R$  un anello con un insieme  $F$  di unità locali. Allora il radicale di Jacobson destro  $J(R_R)$  è quasi regolare e ogni ideale destro quasi regolare a destra è contenuto in  $J(R_R)$ .*

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga a quella della Proposizione 2.3.38.  $\square$

Come conseguenza delle Proposizioni 2.3.38 e 2.3.39 possiamo dimostrare che gli ideali  $J({}_R R)$  e  $J(R_R)$  coincidono; tali ideali vengono chiamati il radicale di Jacobson di  $R$  e indicati con  $J(R)$ .

**Teorema 2.3.40.** *Sia  $R$  un anello con unità locali. Allora il radicale di Jacobson sinistro e destro di  $R$  coincidono.*

*Dimostrazione.* Consideriamo  $J({}_R R)$  il radicale di Jacobson sinistro di  $R$ . Per la Proposizione 2.3.38  $J({}_R R)$  è quasi regolare, in particolare è quasi regolare a destra e quindi  $J({}_R R) \subseteq J(R_R)$ .

Consideriamo  $J(R_R)$  il radicale di Jacobson destro di  $R$ . Per la Proposizione 2.3.39  $J(R_R)$  è quasi regolare, in particolare è quasi regolare a sinistra e quindi  $J(R_R) \subseteq J({}_R R)$ .  $\square$

Ora siamo interessati a studiare il radicale di Jacobson di un anello unitario del tipo  $eRe$ , dove  $e$  è un elemento idempotente di un anello  $R$  con unità locali.

**Proposizione 2.3.41.** *Siano  $R$  un anello con unità locali ed  $e \in R$  un elemento idempotente. Allora*

$$J(eRe) = J(R) \cap eRe = eJ(R)e.$$

*Dimostrazione.* Cominciamo a dimostrare l'uguaglianza  $J(R) \cap eRe = eJ(R)e$ . Sicuramente vale  $eJ(R)e \subseteq eRe$ , e siccome  $J(R)$  è un ideale bilatero  $eJ(R)e \subseteq J(R)$  allora possiamo concludere  $eJ(R)e \subseteq J(R) \cap eRe$ .

Viceversa, se  $x \in J(R) \cap eRe$  allora  $x = exe \in eJ(R)e$ . Quindi  $J(R) \cap eRe \subseteq eJ(R)e$ .

Ora dimostriamo  $J(eRe) \subseteq J(R) \cap eRe$ . Sia  $x \in J(eRe)$ , chiaramente  $x \in eRe$ . Supponiamo che  $x$  non appartenga a  $J(R)$ . Allora per la Proposizione 2.3.32 esiste un  $R$ -modulo semplice  ${}_R M$  tale che  $x \cdot M \neq 0$ . Osserviamo che l'insieme  $e \cdot M$  è un  $eRe$ -modulo sinistro non banale, altrimenti avremmo  $x \cdot M = xe \cdot M = 0$ .

Dimostriamo che  $e \cdot M$  è  $eRe$ -modulo semplice. Sia  $e \cdot m \in e \cdot M$  non nullo. Allora per la semplicità di  ${}_R M$ , il sottomodulo  $R(e \cdot m)$ , generato da

$e \cdot m$ , coincide con  $M$ . Dunque anche il sottomodulo  $eRe(e \cdot m) = eR(e \cdot m)$  coincide con  $e \cdot M$ .

L'elemento  $x \in J(eRe)$  deve appartenere all'annullatore di  $eM$ , ma allora  $x$  appartiene all'annullatore di  ${}_R M$ :

$$x \cdot M = (xe) \cdot M = x \cdot (e \cdot M) = 0;$$

ciò è una contraddizione con quanto supposto all'inizio. Possiamo concludere dunque che  $x \in J(R)$  e di conseguenza  $x \in J(R) \cap eRe = eJ(R)e$ .

Ora consideriamo  $eJ(R)e$  ideale bilatero di  $eRe$ . Dimostriamo che  $eJ(R)e$  è quasi regolare a sinistra. Sia  $exe \in eJ(R)e \subseteq J(R)$ . Per la Proposizione 2.3.38  $exe$  è quasi regolare a sinistra; sia  $b \in R$  il quasi inverso sinistro di  $exe$ , allora abbiamo:

$$exe = b(exe) - b.$$

Moltiplicando  $exe = bexe - b$  per  $e$  a destra e a sinistra otteniamo

$$\begin{aligned} exe &= ebexe - ebe \\ &= (ebe)(exe) - ebe, \end{aligned}$$

ovvero  $ebe$  è il quasi inverso sinistro di  $exe$  in  $eRe$ .

Possiamo concludere che  $eJ(R)e$  è un ideale quasi regolare a sinistra, quindi per la Proposizione 2.3.38 vale  $eJ(R)e \subseteq J(eRe)$ .  $\square$

**Corollario 2.3.42.** *Sia  $R$  un anello con unità locali. Allora il radicale di Jacobson di  $R$  non contiene elementi idempotenti.*

*Dimostrazione.* Sia  $e \in R$  idempotente. Supponiamo  $e \in J(R)$ . Ricordiamo che per la Proposizione 2.3.41 vale  $J(eRe) = eJ(R)e$ . Osserviamo che  $e \in eJ(R)e = J(eRe)$ , quindi  $J(eRe) = eRe$  perché  $J(R)$  è un ideale che contiene l'identità dell'anello  $eRe$ . Ma questa è una contraddizione perché per l'Osservazione 2.3.31 il radicale di Jacobson di un anello con unità è un ideale proprio. Quindi  $e$  non può appartenere a  $J(R)$ .  $\square$

Ora siamo pronti a studiare il radicale di Jacobson di una Leavitt path algebra.

**Definizione 2.3.43.** Sia  $R$  un anello con unità locali. Allora  $R$  è un anello *semiprimitivo* se il radicale di Jacobson è banale.

Prima di proseguire vogliamo verificare che l'anello  $K[x^{-1}, x]$  dei polinomi di Laurent a coefficienti in un campo  $K$  è semiprimitivo. Ricordiamo che gli elementi invertibili in  $K[x^{-1}, x]$  sono i polinomi costanti non nulli e le potenze di  $x$  con esponente intero. Essendo  $K[x^{-1}, x]$  un anello con unità, certamente  $J(K[x^{-1}, x]) \neq K[x^{-1}, x]$ , pertanto il radicale di Jacobson non contiene elementi invertibili.

Sia  $f(x) \in J(K[x^{-1}, x])$  non nullo, allora possiamo scrivere  $f(x) = \sum_{i=m}^n k_i x^i$  dove  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $m < n$ , e  $k_m, k_n \neq 0$ . Consideriamo il polinomio  $g(x) := x^{-m} f(x) = \sum_{j=0}^{n-m} k_{j+m} x^j \in K[x]$ , il quale ha termine noto e coefficiente direttore non nulli. Per la proprietà di assorbimento  $g(x) \in J(K[x^{-1}, x])$ . Richiamiamo che in un anello unitario  $R$  vale la seguente proprietà del radicale di Jacobson:

$$x \in J(R) \iff 1 - rxs \text{ è invertibile } \forall r, s \in R.$$

Nel nostro caso possiamo affermare che il polinomio  $1 - xg(x)$  è invertibile in  $K[x^{-1}, x]$ . Ma tale polinomio non è costante, né una potenza intera di  $x$ . Questo ci porta a concludere che l'unico elemento del radicale di Jacobson dell'anello  $K[x^{-1}, x]$  è il polinomio costante nullo.

**Proposizione 2.3.44.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora la Leavitt path algebra di  $E$  è un anello semiprimitivo.*

*Dimostrazione.* Sia  $J(L_K(E))$  il radicale di Jacobson di  $L_K(E)$ . Dobbiamo dimostrare che  $J(L_K(E)) = 0$ . Supponiamo esista  $\alpha \in J(L_K(E))$  non nullo. Allora per il Teorema di Riduzione 2.3.7 esistono  $\mu, \eta \in \text{Path}(E)$  tali che  $\mu^* \alpha \eta = kv$ , per opportuni  $k \in K^\times$  e  $v \in E^0$ , oppure  $\mu^* \alpha \eta = p(c)$ , dove  $p(c)$  è un polinomio di Laurent non nullo a coefficienti in  $K$  valutato in un ciclo  $c$  senza uscite.

Supponiamo si verifichi il primo caso; per la proprietà di assorbimento di  $J(L_K(E))$ , abbiamo  $v = k^{-1} \mu^* \alpha \eta \in J(L_K(E))$ , ma questa è una contraddizione per il Corollario 2.3.42.

Supponiamo si verifichi il secondo caso; per la proprietà di assorbimento  $p(c) \in J(L_K(E))$ . Per il Lemma 2.3.2 abbiamo  $p(c) \in uL_K(E)u$ , dove  $s(c) = u$ , quindi  $p(c) \in J(L_K(E)) \cap uL_K(E)u$ . Per la Proposizione 2.3.41 abbiamo  $J(L_K(E)) \cap uL_K(E)u = J(uL_K(E)u)$ , mentre per il Lemma 2.3.2 l'anello  $uL_K(E)u$  è isomorfo all'anello  $K[x^{-1}, x]$  dei polinomi di Laurent a coefficienti in  $K$ , dunque

$$p(c) \in J(L_K(E)) \cap uL_K(E)u = J(uL_K(E)u) \cong J(K[x^{-1}, x]) = \{0\}.$$

Di conseguenza si deve avere  $p(c) = 0$ , ma ciò è ancora una contraddizione.

Possiamo concludere che non esistono elementi non nulli in  $J(L_K(E))$ , ovvero  $J(L_K(E)) = \{0\}$ .  $\square$

## 2.4 Proprietà degli Ideali graduati

L'obiettivo di questa sezione è quello di studiare le proprietà degli ideali graduati di un Leavitt path algebra. In particolare, descriveremo i generatori di un ideale graduato e l'algebra quoziente di una Leavitt path algebra rispetto a un ideale graduato.

**Generatori.** Nella descrizione dei generatori di un ideale graduato di una Leavitt path algebra, ricoprono un ruolo centrale gli insiemi di vertici di un grafo che sono ereditari e saturi.

Cominciamo con studiare gli ideali bilateri generati da un insieme di vertici ereditario.

**Lemma 2.4.1.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$  non vuoto ed ereditario. Allora l'ideale bilatero  $I(H)$  della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , generato dall'insieme  $H$ , è dato da*

$$I(H) = \text{span}_K(\{ \lambda\mu \mid \lambda, \mu \in \text{Path}(E), r(\lambda) = r(\mu) \in H \}).$$

L'ideale  $I(H)$  è graduato. Inoltre,  $I(H)$  coincide con l'ideale bilatero  $I(\overline{H})$ , generato dalla chiusura satura ereditaria dell'insieme  $H$ .

*Dimostrazione.* Sia  $I(H)$  l'ideale bilatero generato dall'insieme  $H$ . Tale ideale è graduato per la Proposizione 2.2.8. Un generico elemento di  $I(H)$  è dato da  $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \beta_i$  dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_i, \beta_i \in L_K(E)$ ,  $v_i \in H$  per  $i = 1, \dots, n$ ; per il Lemma 1.2.5 ogni elemento di  $L_K(E)$  si scrive come  $\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i \mu_i^*$  dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_i \in K$ ,  $\lambda_i, \mu_i \in \text{Path}(E)$  e  $r(\lambda_i) = r(\mu_i)$  per  $i = 1, \dots, n$ . Quindi possiamo scrivere ogni elemento di  $I(H)$  come  $\sum_{i=1}^m k_i \lambda_i \mu_i^* v_i \gamma_i \kappa_i^*$  dove  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k_i \in K$ ,  $v_i \in H$ ,  $\lambda_i, \mu_i, \gamma_i, \kappa_i \in \text{Path}(E)$  e  $r(\lambda_i) = r(\mu_i), r(\gamma_i) = r(\kappa_i)$  per  $i = 1, \dots, m$ .

Consideriamo un monomio del tipo  $\lambda\mu^*v\gamma\kappa^*$  dove  $v \in H$ ,  $\lambda, \mu, \gamma, \kappa \in \text{Path}(E)$  tali che  $r(\lambda) = r(\mu)$  e  $r(\gamma) = r(\kappa)$ . Analizziamo tutti i casi possibili che si possono presentare. Affinché tale monomio sia non nullo deve essere  $s(\gamma) = s(\mu) = v$ . Se  $\mu = \gamma\mu'$ , con  $\mu' \in \text{Path}(E)$  e  $r(\gamma) = s(\mu')$ , allora

$$\lambda\mu^*v\gamma\kappa^* = \lambda(\mu')^*\gamma^*\gamma\kappa^* = \lambda(\mu')^*\kappa^*,$$

dove  $r(\lambda) = r(\mu) = r(\mu') = s((\mu')^*) \in H$  per l'ereditarietà di  $H$  e  $r((\mu')^*) = s(\mu') = r(\gamma) = r(\kappa) = s(\kappa^*)$ . Se  $\gamma = \mu\gamma'$ , con  $\gamma' \in \text{Path}(E)$  e  $r(\mu) = s(\gamma')$ , allora

$$\lambda\mu^*v\gamma\kappa^* = \lambda\mu^*\mu\gamma'\kappa^* = \lambda\gamma'\kappa^*,$$

dove  $r(\lambda) = r(\mu) = s(\gamma')$  e  $r(\gamma') = r(\gamma) = r(\kappa) = s(\kappa^*) \in H$  per l'ereditarietà di  $H$ . Altrimenti  $\lambda\mu^*v\gamma\kappa^* = 0$ .

Grazie a quanto appena visto, possiamo concludere che ogni elemento di  $I(H)$  è una  $K$ -combinazione lineare di monomi del tipo  $\lambda\mu^*$ , dove  $\lambda, \mu \in \text{Path}(E)$  e  $r(\lambda) = r(\mu) \in H$ , che è esattamente la prima parte dell'enunciato.

Ora ci rimane da verificare l'uguaglianza  $I(H) = I(\overline{H})$ . Dal fatto che  $H$  è contenuto nella sua chiusura satura ereditaria  $\overline{H}$ , abbiamo  $I(H) \subseteq I(\overline{H})$ . Invece, per verificare che  $I(\overline{H}) \subseteq I(H)$  usiamo la descrizione induttiva  $\overline{H} = \bigcup_{n \geq 0} X_n$  del Lemma 2.1.8; è sufficiente dimostrare che  $X_n \subseteq I(H)$  per ogni  $n \geq 0$ .

Procediamo per induzione su  $n$ . Per  $n = 0$  si ha  $X_0 = H \subseteq I(H)$ . Supponiamo ora che  $X_{n-1} \subseteq I(H)$ . Sia  $v \in X_n$ . Se  $v \in X_{n-1}$ , allora

$v \in I(H)$  per l'ipotesi induttiva. Altrimenti, se  $v$  è un vertice regolare di  $E$  per cui  $r(s^{-1}(v)) \subseteq X_{n-1}$ , per la relazione (CK2) della Definizione 1.2.1 abbiamo

$$v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* = \sum_{e \in s^{-1}(v)} er(e)e^* \in I(H),$$

perché per ogni  $e \in s^{-1}(v)$  il vertice  $r(e)$  appartiene a  $X_{n-1} \subseteq I(H)$ .  $\square$

**Corollario 2.4.2.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$  non vuoto ed ereditario. Sia  $x$  un elemento omogeneo non nullo appartenente all'ideale graduato  $I(H)$  generato dall'insieme  $H$ . Allora esistono  $\mu, \eta \in \text{Path}(E)$  tali che  $\mu^*x\eta = kv$ , dove  $k \in K^\times$  e  $v \in H$ .*

*Dimostrazione.* Per il Corollario 2.3.9 esistono  $\lambda, \gamma \in \text{Path}(E)$ ,  $w \in E^0$  e  $k \in K^\times$  tali che  $k^{-1}\gamma^*x\lambda = w$ . Per la proprietà di assorbimento di  $I(H)$  il vertice  $w$  deve appartenere a  $I(H)$ . Quindi per il Lemma 2.4.1  $w = \sum_{i=1}^n k'_i \lambda_i \mu_i^*$  con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_i, \mu_i \in \text{Path}(E)$ ,  $r(\lambda_i) = r(\mu_i) \in H$  e  $s(\lambda_i) = s(\mu_i) = w$  per  $i = 1, \dots, n$ . Ora possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} r(\mu_1) &= \mu_1^* \mu_1 = \mu_1^* w \mu_1 = k^{-1} \mu_1^* \gamma^* x \lambda \mu_1 \\ kr(\mu_1) &= \mu_1^* \gamma^* x \lambda \mu_1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Se poniamo  $v := r(\mu_1)$ ,  $\mu := \gamma \mu_1$  e  $\eta := \lambda \mu_1$ , allora quanto ottenuto in 2.6 è la nostra tesi.  $\square$

**Lemma 2.4.3.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $I$  un ideale bilatero della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ . Allora l'insieme di vertici  $I \cap E^0$  è un insieme saturo ed ereditario.*

*Dimostrazione.* Consideriamo  $v \in I \cap E^0$  e  $w \in E^0$  tali che  $w \leq v$ . Allora esiste un cammino  $\lambda \in \text{Path}(E)$  per cui  $s(\lambda) = v$  e  $r(\lambda) = w$ . Per la relazione (CK1) della Definizione 1.2.1 e per la proprietà di assorbimento di  $I$  possiamo scrivere

$$w = \lambda^* \lambda = \lambda^* v \lambda \in I \cap E^0.$$

Questo dimostra che  $I \cap E^0$  è ereditario.

Sia  $v$  un vertice regolare di  $E$  tale che  $r(s^{-1}(v)) \subseteq I \cap E^0$ . Per la relazione (CK2) della Definizione 1.2.1 e per la proprietà di assorbimento di  $I$  possiamo scrivere

$$v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* = \sum_{e \in s^{-1}(v)} er(e)e^* \in I \cap E^0.$$

Questo dimostra che  $I \cap E^0$  è ereditario.  $\square$

Altri elementi che ci aiuteranno a dare una descrizione dei generatori di un ideale graduato di una Leavitt path algebra, sono i vertici di rottura di un insieme ereditario.

**Definizione 2.4.4.** Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$  ereditario. L'insieme dei vertici di rottura dell'insieme  $H$  è

$$B_H := \{ v \in E^0 \setminus H \mid v \in \text{Inf}(E) \text{ e } 0 < |s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H)| < \infty \}.$$

A parole,  $v$  è un vertice di rottura per l'insieme  $H$  se è infinite emitter e il numero di lati uscenti da  $v$ , il cui vertice di arrivo non sta in  $H$ , è non nullo e finito.

Per semplicità indicheremo l'insieme  $s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H)$  con  $A(v, H)$ . Sia  $v \in B_H$ , indichiamo con  $v^H$  il seguente elemento di  $L_K(E)$ :

$$v^H := v - \sum_{e \in A(v, H)} ee^*.$$

Dato  $S \subseteq B_H$ , indichiamo con  $S^H$  l'insieme  $\{ v^H \mid v \in S \}$ .

**Osservazione 2.4.5.** Sia  $E$  un grafo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$  ereditario ed  $S \subseteq B_H$ . Se  $H = \emptyset$ , allora

$$A(v, H) = s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus \emptyset) = s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0) = s^{-1}(v);$$

l'insieme  $A(v, H)$  ha cardinalità infinita per ogni  $v \in \text{Inf}(E)$ . Quindi  $B_H = \emptyset$ . Se  $H = E^0$ , allora

$$A(v, H) = s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus E^0) = s^{-1}(v) \cap r^{-1}(\emptyset) = \emptyset;$$

l'insieme  $A(v, H)$  ha cardinalità 0 per ogni  $v \in \text{Inf}(E)$ . Quindi  $B_H = \emptyset$ .

**Osservazione 2.4.6.** Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$  non vuoto ed ereditario. Gli elementi  $v^H$ , dove  $v \in B_H$ , sono elementi omogenei di grado 0 perché i loro addendi sono tutti monomi di grado 0.

Inoltre, tali elementi sono idempotenti e ortogonali tra loro. Siano  $v, w \in B_H$ :

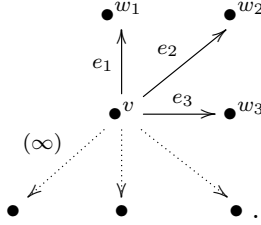
$$\begin{aligned} v^H w^H &= \left( v - \sum_{e \in A(v, H)} ee^* \right) \left( w - \sum_{f \in A(w, H)} ff^* \right) \\ &= vw - \sum_{f \in A(w, H)} vff^* - \sum_{e \in A(v, H)} ee^*w + \sum_{e \in A(v, H)} \sum_{f \in A(w, H)} ee^*ff^*. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Se  $v \neq w$ , allora gli addendi dell'espressione 2.7 sono tutti nulli. Invece, se  $v = w$ , allora

$$\begin{aligned}
vw &= v \\
\sum_{f \in A(w,H)} vff^* &= \sum_{f \in A(w,H)} ff^* \\
\sum_{e \in A(v,H)} ee^*w &= \sum_{e \in A(v,H)} ee^* \\
\sum_{e \in A(v,H)} \sum_{f \in A(w,H)} ee^*ff^* &= \sum_{e \in A(v,H)} ee^*.
\end{aligned}$$

Quindi l'espressione 2.7 è uguale a  $v^H$ .

**Esempio 2.4.7.** Sia  $C_{\mathbb{N}}$  il grafo a orologio infinito come nell'Esempio 1.1.8:



L'insieme  $\text{Inf}(C_{\mathbb{N}})$  è formato dal solo vertice  $v$ . Indichiamo con  $U$  l'insieme di vertici  $\{w_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ . Per quanto visto nell'Esempio 2.1.6 ogni sottoinsieme di  $U$  è un insieme ereditario e saturo.

Sia  $H \subseteq U$  finito. Allora il numero di lati uscenti dal vertice  $v$  il cui vertice di arrivo non appartiene ad  $H$  è sicuramente infinito, quindi  $B_H = \emptyset$ .

Sia  $H \subseteq U$  tale che  $U \setminus H$  sia finito. In questo caso il numero di lati uscenti dal vertice  $v$  il cui vertice di arrivo non appartiene ad  $H$  è finito, quindi  $B_H = \{v\}$ .

**Lemma 2.4.8.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$  non vuoto ed ereditario, e  $S \subseteq B_H$ . Allora l'ideale graduato  $I(H \cup S^H)$  della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , generato dall'insieme  $H \cup S^H$ , è dato da*

$$\begin{aligned}
I(H \cup S^H) &= \text{span}_K(\{ \lambda\mu^* \mid \lambda, \mu \in \text{Path}(E), r(\lambda) = r(\mu) \in H \}) \\
&\quad + \text{span}_K(\{ \lambda v^H \mu^* \mid \lambda, \mu \in \text{Path}(E), r(\lambda) = r(\mu) = v \in S \}). \quad (2.8)
\end{aligned}$$

*Inoltre, il primo addendo coincide con l'ideale  $I(H)$  generato da  $H$ ; il secondo addendo, che indichiamo con  $J$ , è una sottoalgebra di  $L_K(E)$  tale che  $I(S^H) \subseteq I(H) + J$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $I(H \cup S^H)$  l'ideale bilatero generato dall'insieme  $H \cup S^H$ . Osserviamo che i generatori di tale ideale sono omogenei perché gli elementi

di  $H$  sono vertici, mentre gli elementi di  $S^H$  sono omogenei per l'Osservazione 2.4.6. Dunque, l'ideale  $I(H \cup S^H)$  è graduato per la Proposizione 2.2.8.

Siccome  $H \cap S^H = \emptyset$ , vale  $I(H \cup S^H) = I(H) + I(S^H)$ ; il primo addendo della formula 2.8 coincide con l'ideale  $I(H)$  per il Lemma 2.4.1.

Studiamo l'ideale  $I(S^H)$ . Siano  $v \in S$  ed  $e \in E^1$ . Se  $e \notin s^{-1}(v)$ , allora

$$e^*v^H = 0 = v^He.$$

Se  $e \in A(v, H)$ , allora

$$\begin{aligned} e^*v^H &= e^* \left( v - \sum_{f \in A(v, H)} ff^* \right) = e^*v - \sum_{f \in A(v, H)} e^*ff^* = e^* - e^* = 0 \\ v^He &= \left( v - \sum_{f \in A(v, H)} ff^* \right) e = ve - \sum_{f \in A(v, H)} ff^*e = e - e = 0. \end{aligned}$$

Se  $e \in s^{-1}(v)$  ma  $e \notin A(v, H)$ , ovvero  $s(e) = v$  e  $r(e) \in H$ , allora

$$\begin{aligned} e^*v^H &= e^* \left( v - \sum_{f \in A(v, H)} ff^* \right) = e^*v - \sum_{f \in A(v, H)} e^*ff^* \\ &= e^* - 0 = e^* = r(e)e^* \in I(H) \\ v^He &= \left( v - \sum_{f \in A(v, H)} ff^* \right) e = ve - \sum_{f \in A(v, H)} ff^*e \\ &= e - 0 = e = er(e) \in I(H). \end{aligned}$$

Quindi dati  $\lambda, \mu \in \text{Path}(E)$  tali che  $\lambda, \mu \in E^0$ , e  $v \in S$ ,  $\mu^*v^H$  è uguale a 0 oppure è uguale a  $\mu^* \in I(H)$ . Allo stesso modo,  $v^H\lambda$  è uguale a 0 oppure è uguale a  $\lambda \in I(H)$ .

Un generico elemento di  $I(H)$  è dato da  $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^H \beta_i$  dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_i, \beta_i \in L_K(E)$ ,  $v_i^H \in S^H$  per  $i = 1, \dots, n$ ; per il Lemma 1.2.5 ogni elemento di  $L_K(E)$  si scrive come  $\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i \mu_i^*$  dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_i \in K$ ,  $\lambda_i, \mu_i \in \text{Path}(E)$  e  $r(\lambda_i) = r(\mu_i)$  per  $i = 1, \dots, n$ . Quindi possiamo scrivere ogni elemento di  $I(S^H)$  come  $\sum_{i=1}^m k_i \lambda_i \mu_i^* v_i^H \gamma_i \kappa_i^*$  dove  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k_i \in K$ ,  $v_i^H \in S^H$ ,  $\lambda_i, \mu_i, \gamma_i, \kappa_i \in \text{Path}(E)$  e  $r(\lambda_i) = r(\mu_i)$ ,  $r(\gamma_i) = r(\kappa_i)$  per  $i = 1, \dots, m$ .

Consideriamo un monomio del tipo  $\lambda \mu^* v^H \gamma \kappa^*$  dove  $v^H \in S^H$ ,  $\lambda, \mu, \gamma, \kappa \in \text{Path}(E)$  tali che  $r(\lambda) = r(\mu)$  e  $r(\gamma) = r(\kappa)$ . Per quanto visto precedentemente, i casi che si possono presentare sono i seguenti:  $\lambda \mu^* v^H \gamma \kappa^* = 0$ ; oppure  $\lambda \mu^* v^H \gamma \kappa^* \in I(H)$ ; oppure  $\mu = r(\lambda)$  e  $\gamma = r(\kappa)$ . Nell'ultimo caso  $\lambda v^H \kappa^*$  non è nullo se, e solo se,  $r(\lambda) = r(\kappa) = v$ , e in tal caso  $\lambda v^H \kappa^* \in J$ .

Riassumendo, abbiamo dimostrato che  $I(S^H) \subseteq I(H) + J$ , quindi

$$I(H \cup S^H) = I(H) + I(S^H) \subseteq I(H) + J;$$



l'inclusione  $I(H) + J \subseteq I(H \cup S^H)$  è immediata per la proprietà di assorbimento di  $I(H \cup S^H)$ .

Dimostriamo ora che  $J$  è una sottoalgebra. Consideriamo  $\lambda v^H \mu^*, \gamma w^H \kappa^*$  due generatori di  $J$ , dove  $\lambda, \mu, \gamma, \kappa \in \text{Path}(E)$ ,  $v, w \in S$  tali che  $r(\lambda) = r(\mu) = v$  e  $r(\gamma) = r(\kappa) = w$ . Si possono presentare tre casi; il primo caso che consideriamo è che i cammini  $\mu$  e  $\gamma$  non sono vertici. Se  $\mu = \gamma \mu'$ , per un opportuno  $\mu' \in \text{Path}(E)$ , allora

$$\lambda v^H \mu^* \gamma w^H \kappa^* = \lambda v^H (\mu')^* \gamma^* \gamma w^H \kappa^* = \lambda v^H (\mu')^* w^H \kappa^*. \quad (2.9)$$

Per i calcoli presentati all'inizio della dimostrazione,  $(\mu')^* w^H$  è uguale a 0 oppure è uguale a  $(\mu')^*$ . Quindi in 2.9 otteniamo 0 oppure  $\lambda v^H (\mu')^* \kappa^* \in J$ .

Se  $\gamma = \mu \gamma'$ , per un opportuno  $\gamma' \in \text{Path}(E)$ , si procede in modo analogo a quanto appena visto.

Se  $\mu = \gamma$ , allora  $v = r(\mu) = r(\gamma) = w$ , quindi

$$\lambda v^H \mu^* \gamma w^H \kappa^* = \lambda v^H r(\mu) w^H \kappa^* = \lambda v^H w^H \kappa^* = \lambda v^H \kappa^* \in J.$$

Se  $\mu \neq \gamma$  e non si verificano i casi precedenti, allora  $\lambda v^H \mu^* \gamma w^H \kappa^* = 0 \in J$ .

Come secondo caso supponiamo  $\mu = v$  e il cammino  $\gamma$  non è un vertice. Possiamo scrivere

$$\lambda v^H \mu^* \gamma w^H \kappa^* = \lambda v^H \gamma w^H \kappa^*. \quad (2.10)$$

Per i calcoli presentati all'inizio della dimostrazione,  $v^H \gamma$  è uguale a 0 oppure è uguale a  $\gamma$ . Quindi in 2.10 otteniamo 0 oppure  $\lambda \gamma w^H \kappa^* \in J$ .

Come terzo e ultimo caso supponiamo  $\mu = v$  e  $\gamma = w$ . Possiamo scrivere

$$\lambda v^H \mu^* \gamma w^H \kappa^* = \lambda v^H w^H \kappa^*.$$

Tale espressione è 0 se  $v \neq w$ , altrimenti è uguale a  $\lambda v^H \kappa^*$  se  $v = w$ .  $\square$

**Proposizione 2.4.9.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $\{H_j\}_{j \in J}$  una famiglia di insiemi  $H_j \subseteq E^0$  ereditari, a due a due disgiunti, indicizzati da un insieme  $J$ . Allora valgono le seguenti uguaglianze tra ideali della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ :*

$$I\left(\overline{\bigsqcup_{j \in J} H_j}\right) = I\left(\bigsqcup_{j \in J} H_j\right) = \bigoplus_{j \in J} I(H_j) = \bigoplus_{j \in J} I(\overline{H_j}). \quad (2.11)$$

*Dimostrazione.* La prima e ultima uguaglianza di 2.11 valgono per il Lemma 2.4.1.

Poniamo  $H := \bigsqcup_{j \in J} H_j$ . L'insieme  $H$  è ereditario perché unione di insiemi ereditari; per il Lemma 2.4.1 un elemento dell'ideale  $I(H)$  si scrive come  $\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i \mu_i^*$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_i \in K^\times$ ,  $r(\lambda_i) = r(\mu_i) \in H$  per  $i = 1, \dots, n$ . Per ogni  $j \in J$  possiamo raggruppare gli addendi per cui  $r(\lambda_i) = r(\mu_i) \in H_j$ . Quindi ogni elemento di  $I(H)$  si può scrivere come somma finita di

elementi appartenenti a  $I(H_j)$ , al variare di  $j \in J$ . Con questa osservazione si conclude facilmente che

$$I(H) = \sum_{j \in J} I(H_j).$$

Dimostriamo che tale somma è diretta. Sia  $k \in J$ . Supponiamo che  $I(H_k) \cap \sum_{j \neq k} I(H_j) \neq 0$ ; tale intersezione è un ideale graduato di  $L_K(E)$ . Consideriamo  $x$  un elemento omogeneo non nullo appartenente a  $I(H_k) \cap \sum_{j \neq k} I(H_j) \neq 0$ . Per il Corollario 2.4.2 esistono  $\mu, \eta \in \text{Path}(E)$  tali che  $\mu^* x \eta = kv$ , dove  $k \in K^\times$  e  $v \in H_k$  e per la proprietà di assorbimento vale  $k^{-1} \mu^* x \eta = v \in \sum_{j \neq k} I(H_j)$ . Grazie al Lemma 2.4.1 possiamo scrivere  $v = \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i \mu_i^*$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \text{Path}(E)$ ,  $r(\lambda_i) = r(\mu_i) \in \bigsqcup_{j \neq k} H_j$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Inoltre deve valere  $s(\lambda_i) = s(\mu_i) = v \in H_k$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Da ciò possiamo concludere per l'ereditarietà dell'insieme  $H_k$  che  $r(\lambda_i) = r(\mu_i) \in H_k \cap \bigsqcup_{j \neq k} H_j$ , ma ciò è una contraddizione perché per ipotesi gli insiemi  $H_j$  sono a due a due disgiunti. Possiamo concludere che  $I(H_k) \cap \sum_{j \neq k} I(H_j) = 0$  per ogni  $k \in J$  e di conseguenza la somma  $\sum_{j \in J} I(H_j)$  è diretta.  $\square$

Il seguente teorema descrive in modo esplicito i generatori di un ideale graduato di una Leavitt path algebra, evidenziando il collegamento tra ideali graduati, insiemi saturi ed ereditari e vertici di rottura.

**Teorema 2.4.10.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $I$  un ideale graduato della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ . Allora  $I$  è generato dall'insieme  $H \cup S^H$ , dove  $H = I \cap E^0$  è un insieme saturo ed ereditario di vertici di  $E$ , e  $S = \{v \in B_H \mid v^H \in I\}$ .*

*In particolare, ogni ideale graduato di  $L_K(E)$  è generato da un insieme di elementi idempotenti.*

*Dimostrazione.* Sia  $I(H \cup S^H)$  l'ideale di  $L_K(E)$  generato dall'insieme  $H \cup S^H$ . L'insieme  $H = I \cap E^0$  è saturo ed ereditario per il Lemma 2.4.3. Per costruzione  $H \cup S^H \subseteq I$ , quindi vale  $I(H \cup S^H) \subseteq I$ .

Dimostriamo  $I \subseteq I(H \cup S^H)$ . Siccome  $I$  è un ideale graduato, è sufficiente verificare che ogni elemento omogeneo appartenente ad  $I$  appartenga a  $I(H \cup S^H)$ .

Per il Lemma 1.2.5 ogni elemento  $\alpha \in L_K(E)$  si può scrivere come  $\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i \mu_i^*$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, \dots, k_n \in K^\times$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \text{Path}(E)$ ,  $r(\lambda_i) = r(\mu_i)$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Grazie a questa scrittura notiamo che se  $v \in E^0$ , allora  $\alpha v \neq 0$  se, e solo se,  $v = s(\mu_j)$  per un opportuno  $j = 1, \dots, n$ . Quindi la somma  $\sum_{v \in E^0} \alpha v$  è finita; ogni elemento  $\alpha \in L_K(E)$  si può scrivere come una somma finita di elementi  $\beta \in L_K(E)$  tali che  $\beta v \beta = \beta$ , per un qualche  $v \in E^0$ .

Queste osservazioni ci permettono di semplificare la nostra dimostrazione. Infatti, è sufficiente mostrare che ogni elemento omogeneo  $\alpha \in I$ , tale che  $\alpha v = \alpha$  per un opportuno  $v \in E^0$ , appartiene a  $I(H \cup S^H)$ .

Sia  $\alpha \in I$  un elemento omogeneo tale che  $\alpha v = \alpha$ , per un opportuno  $v \in E^0$ . Mostriamo per induzione sul grado fantasma di  $\alpha$  che  $\alpha \in I(H \cup S^H)$ .

Supponiamo  $\text{gdeg}(\alpha) = 0$ , allora possiamo scrivere  $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \gamma_i$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, \dots, k_n \in K^\times$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \text{Path}(E)$ ,  $\gamma_i \neq \gamma_j$  se  $i \neq j$ ,  $r(\gamma_i) = v$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Per l'assunzione che  $\alpha$  è omogeneo i cammini  $\gamma_i$  devono avere tutti la stessa lunghezza. Per ogni  $j = 1, \dots, n$  abbiamo

$$k_j^{-1} \gamma_j^* \alpha v = k_j^{-1} \gamma_j^* \left( \sum_{i=1}^n k_i \gamma_i \right) = \gamma_j^* \gamma_j = r(\gamma_j) = v \in I \cap E^0 = H,$$

per la proprietà di assorbimento di  $I$ . Quindi  $\alpha = \alpha v \in I(H) \subseteq I(H \cup S^H)$ .

Supponiamo ora  $\text{gdeg}(\alpha) = n \in \mathbb{N}$  e che la tesi sia vera per gli elementi di  $I$  dello stesso tipo di  $\alpha$ , con grado fantasma strettamente minore di  $n$ . Scriviamo

$$\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i^* + \lambda,$$

dove  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \in KE$  omogeneo,  $\alpha_i \in L_K(E)$  omogenei,  $e_i \in E^1$ ,  $s(e_i) = v$  per ogni  $i = 1, \dots, m$ . Per ottenere questa scrittura basta usare il Lemma 1.2.5, isolare i monomi di grado fantasma nullo e raggruppare i monomi che terminano con lo stesso lato fantasma. Inoltre, dal fatto che  $\alpha$  è un elemento omogeneo tutti i suoi addendi devono avere lo stesso grado, dunque anche gli  $\alpha_i$  devono avere tutti lo stesso grado.

Notiamo che  $v$  non è un vertice sink perché i lati  $e_i$  hanno come vertice iniziale  $v$ .

Se  $\lambda = 0$ , allora per ogni  $j = 1, \dots, m$

$$\alpha e_j = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i^* e_j = \alpha_j e_j^* e_j = \alpha_j r(e_j) = \alpha_j.$$

Ma  $\text{gdeg}(\alpha_j) = \text{gdeg}(\alpha e_j) < \text{gdeg}(\alpha) = n$  grazie al Lemma 2.3.6; per l'ipotesi induttiva  $\alpha_j \in I(H \cup S^H)$  per ogni  $j = 1, \dots, m$  e di conseguenza  $\alpha \in I(H \cup S^H)$ .

Se  $\lambda \neq 0$ , allora scriviamo  $\lambda = \sum_{r=1}^l k_r \lambda_r$ , dove  $l \in \mathbb{N}$ ,  $k_r \in K^\times$ ,  $\lambda_r \in \text{Path}(E)$ ,  $\lambda_r \neq \lambda_s$  se  $r \neq s$ ,  $r(\lambda_r) = v$  per ogni  $r = 1, \dots, l$ .

Consideriamo  $f \in s^{-1}(v)$ . Se  $f \neq e_i$  per ogni  $i = 1, \dots, m$ , allora

$$\alpha f = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i^* f + \lambda f = \lambda f;$$

essendo  $\text{gdeg}(\alpha f) = 0$ , per quanto visto in precedenza possiamo concludere  $\alpha f \in I(H \cup S^H)$ .

Se  $f = e_j$  per qualche  $j = 1, \dots, m$ , allora

$$\alpha f = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i^* f + \lambda f = \alpha_j e_j^* f + \lambda f = \alpha_j + \lambda f.$$

Ma  $\text{gdeg}(\alpha f) < \text{gdeg}(\alpha) = n$  grazie al Lemma 2.3.6; per l'ipotesi induttiva  $\alpha f \in I(H \cup S^H)$ .

Riassumendo  $\alpha f \in I(H \cup S^H)$  per ogni  $f \in s^{-1}(v)$ .

Ora se  $v$  è un vertice regolare, allora

$$\alpha = \alpha v = \alpha \sum_{f \in s^{-1}(v)} f f^* = \sum_{f \in s^{-1}(v)} \alpha f f^* \in I(H \cup S^H),$$

per la proprietà di assorbimento di  $I(H \cup S^H)$ .

Sia  $v$  infinite emitter. Se  $v \in H$ , allora possiamo concludere immediatamente  $\alpha = \alpha v \in I(H) \subseteq I(H \cup S^H)$ . Se  $v \notin H$ , allora  $v$  deve essere un vertice di rottura di  $H$ . Infatti se  $f \in A(v, H)$ , per forza deve coincidere con uno dei lati  $e_i$ , altrimenti

$$\alpha f = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i^* f + \lambda f = \lambda f \in I$$

implicherebbe

$$r(f) = f^* f = f^* v f = f^* (k_1^{-1} \lambda_1^* \lambda) f = f^* k_1^{-1} \lambda_1^* (\lambda f) \in I \cap E^0 = H.$$

A parole, abbiamo dimostrato che  $A(v, H) \subseteq \{e_i \mid i = 1, \dots, n\}$ , quindi è finito. Inoltre, possiamo assumere  $A(v, H) \neq \emptyset$ , altrimenti  $r(s^{-1}(v)) \subseteq H$  e  $f = fr(e) \in I(H)$  per ogni  $f \in s^{-1}(v)$ , permettendoci di concludere  $\alpha = \alpha v \in I(H) \subseteq I(H \cup S^H)$ .

Scriviamo ora

$$\alpha = \alpha v = \alpha v^H + \alpha \sum_{f \in A(v, H)} f f^* = \alpha v^H + \sum_{f \in A(v, H)} \alpha f f^*;$$

il secondo addendo appartiene a  $I(H \cup S^H)$  perché  $\alpha f \in I(H \cup S^H)$  per ogni  $f \in s^{-1}(v)$ . Se dimostriamo che  $v^H \in I$ , allora  $v^H \in S^H$  e possiamo concludere che  $\alpha v^H \in I(H \cup S^H)$ , quindi  $\alpha$  appartiene all'ideale  $I(H \cup S^H)$ .

Per dimostrare che  $v^H \in I$  calcoliamo  $e_i^* v^H$  per  $i = 1, \dots, m$ . Ricordando che  $s(e_i) = v$  per  $i = 1, \dots, m$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} e_i^* v^H &= e_i^* \left( v - \sum_{f \in A(v, H)} f f^* \right) \\ &= \begin{cases} e_i^* - e_i^* = 0 & \text{se } e_i \in r^{-1}(E^0 \setminus H) \\ e_i^* v = e_i^* & \text{se } e_i \in r^{-1}(H). \end{cases} \end{aligned}$$

Nel secondo caso siccome  $r(e_i) \in H$ ,  $e_i^*v^H \in I(H) \subseteq I$ . Dunque in entrambi i casi  $e_i^*v^H \in I$ .

Per la proprietà di assorbimento di  $I$  abbiamo  $\alpha v^H \in I$ , e per quanto appena visto  $e_i^*v^H \in I$  per ogni  $i = 1, \dots, m$ , quindi anche

$$\lambda v^H = \alpha v^H - \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i^* v^H \in I.$$

Per concludere basta usare la proprietà di assorbimento di  $I$ :

$$v^H = v v^H = (k_1^{-1} \lambda_1^* \lambda) v^H = k_1^{-1} \lambda_1^* (\lambda v^H) \in I. \quad \square$$

Nel caso particolare di un grafo  $E$  row-finite, il Teorema 2.4.10 ci permette di dedurre che ogni ideale graduato della Leavitt path algebra di  $E$  è generato da un insieme di vertici saturo ed ereditario.

**Corollario 2.4.11.** *Siano  $E$  un grafo row-finite e  $K$  un campo. Consideriamo  $I$  un ideale graduato della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ . Allora  $I$  è generato dall'insieme saturo ed ereditario  $I \cap E^0$ .*

*Dimostrazione.* Per il Teorema 2.4.10 abbiamo  $I = I(H \cup S^H)$ , dove  $H = I \cap E^0$  e  $S = \{v \in B^H \mid v^H \in I\}$ . Ma per ipotesi  $E$  è row-finite, quindi non ci sono vertici infinite emitter. Quindi  $S^H = \emptyset$  e  $I = I(H)$ .

L'insieme  $H$  è saturo ed ereditario per il Lemma 2.4.3.  $\square$

**Algebre quozienti.** Nel resto della sezione ci concentreremo sullo studio dell'algebra quoziente di una Leavitt path algebra rispetto a un suo ideale graduato. In particolare vedremo come una tale algebra quoziente sia ancora una Leavitt path algebra.

Per prima cosa introduciamo la nozione di grafo quoziente rispetto ad un insieme ereditario.

**Definizione 2.4.12.** Siano  $E$  un grafo e  $H$  un sottoinsieme di vertici di  $E$  ereditario. Indichiamo con  $E/H = ((E/H)^0, (E/H)^1, \bar{s}, \bar{r})$  il *grafo quoziente di  $E$  rispetto ad  $H$* , i cui vertici e lati sono dati rispettivamente dagli insiemi

$$(E/H)^0 = E^0 \setminus H \quad \text{e} \quad (E/H)^1 = \{e \in E^1 \mid r(e) \notin H\}.$$

Le funzioni  $\bar{s}$  ed  $\bar{r}$  sono rispettivamente le restrizioni delle funzioni  $s$  ed  $r$  di  $E$  all'insieme  $(E/H)^1$ .

**Osservazione 2.4.13.** Sia  $E$  un grafo. Consideriamo il grafo quoziente  $E/H$  rispetto ad un insieme di vertici  $H$  saturo ed ereditario. Un vertice regolare di  $E$  che non appartiene ad  $H$  è ancora un vertice regolare nel grafo quoziente. Infatti se l'insieme  $s^{-1}(v)$  è finito e non vuoto, sicuramente  $\bar{s}^{-1}(v)$  è finito perché  $\bar{s}^{-1}(v) \subseteq s^{-1}(v)$ ; non è vuoto perché altrimenti implicherebbe  $s^{-1}(v) \subseteq H$ , e di conseguenza  $v \in H$  in quanto  $H$  insieme saturo.

Ogni vertice  $v$  di rottura dell'insieme  $H$  nel grafo quoziente diventa regolare; eliminando i lati in  $s^{-1}(v)$  il cui vertice di arrivo appartiene ad  $H$ , rimangono i lati dell'insieme  $A(v, H)$  che è finito e non vuoto.

Quindi possiamo concludere  $\text{Reg}(E/H) = (\text{Reg}(E) \setminus H) \cup B_H$ .

**Teorema 2.4.14.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$  saturo ed ereditario, ed  $S \subseteq B_H$ . Consideriamo  $L_K(E)$  la Leavitt path algebra del grafo  $E$ ,  $C_K^X(E/H)$  la Cohn path algebra del grafo quoziente  $E/H$  relativa all'insieme  $X = (\text{Reg}(E) \setminus H) \cup S$  e  $I(H \cup S^H)$  l'ideale generato dall'insieme  $H \cup S^H$ . Allora l'algebra quoziente  $L_K(E)/I(H \cup S^H)$  e  $C_K^X(E/H)$  sono isomorfe come algebre  $\mathbb{Z}$ -graduate.*

*Dimostrazione.* Le notazioni riguardante il grafo quoziente  $E/H$  sono le stesse della Definizione 2.4.12.

Utilizziamo la Proprietà Universale 1.2.2 di  $L_K(E)$  per definire un omomorfismo di  $K$  algebre  $\varphi : L_K(E) \rightarrow C_K^X(E/H)$ . A tale scopo consideriamo i seguenti elementi di  $C_K^X(E/H)$ :

$$a_v = \begin{cases} v & \text{se } v \notin H \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad a_e = \begin{cases} e & \text{se } r(e) \notin H \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad b_e = \begin{cases} e^* & \text{se } r(e) \notin H \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

per ogni  $v \in E^0$  e per ogni  $e \in E^1$ .

Verifichiamo che tali elementi soddisfano le richieste della Proprietà Universale 1.2.2.

Siano  $v, w \notin H$ , allora

$$a_v a_w = vw = \delta_{v,w} v = \delta_{v,w} a_v.$$

Siano  $v \in H$  e  $w \notin H$ , allora

$$a_v a_w = 0w = 0.$$

Siano  $v, w \in H$ , allora

$$a_v a_w = 0 = \delta_{v,w} a_v.$$

Quindi gli elementi  $\{a_v \mid v \in E^0\}$  sono idempotenti e ortogonali tra loro.

Sia  $e \in E^1$  tale che  $r(e) \notin H$ , allora

$$a_{s(e)} a_e = s(e)e = e = a_e$$

$$a_e a_{r(e)} = er(e) = e = a_e.$$

Osserviamo che nella prima riga abbiamo usato  $a_{s(e)} = s(e)$  perché  $s(e) \notin H$ . Se fosse  $s(e) \in H$ , per l'ereditarietà di  $H$  avremmo  $r(e) \in H$ .

Sia  $e \in E^1$  tale che  $r(e) \in H$ , allora

$$a_{s(e)} a_e = a_{s(e)} 0 = 0 = a_e$$

$$a_e a_{r(e)} = 0 = a_e.$$

Applicando l'involuzione  $*$  a quanto appena visto otteniamo che la richiesta (i) di 1.2.2 è rispettata.

Siano  $e, f \in E^1$  tali che  $r(e), r(f) \notin H$ , allora

$$b_e a_f = e^* f = \delta_{e,f} r(e) = \delta_{e,f} a_{r(e)}.$$

Siano  $e, f \in E^1$  tali che  $r(e) \notin H$  e  $r(f) \in H$ , allora

$$b_e a_f = e^* 0 = 0.$$

Il caso  $r(e) \in H$  e  $r(f) \notin H$  è analogo.

Siano  $e, f \in E^1$  tali che  $r(e), r(f) \in H$ , allora

$$b_e a_f = 0 = \delta_{e,f} a_{r(e)}.$$

Quindi la richiesta (ii) è rispettata.

Sia  $v$  un vertice regolare di  $E$  appartenente ad  $H$ , allora

$$a_v = 0 = \sum_{e \in s^{-1}(v)} a_e b_e,$$

perché per l'ereditarietà di  $H$ , per ogni  $e \in s^{-1}(v)$  abbiamo  $r(e) \in H$  e dunque  $a_e = b_e = 0$ .

Sia  $v$  un vertice regolare di  $E$  non appartenente ad  $H$ , allora

$$\begin{aligned} a_v = v &= \sum_{e \in \bar{s}^{-1}(v)} e e^* = \sum_{e \in s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H)} e e^* \\ &= \sum_{e \in s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H)} a_e b_e + \sum_{e \in s^{-1}(v) \cap r^{-1}(H)} a_e b_e = \sum_{e \in s^{-1}(v)} a_e b_e. \end{aligned}$$

Quindi la richiesta (iii) è rispettata.

Per la Proprietà Universale 1.2.2 possiamo concludere che esiste un omomorfismo  $\varphi : L_K(E) \rightarrow C_K^X(E/H)$  tale che

$$\varphi(v) = \begin{cases} v & \text{se } v \notin H \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \varphi(e) = \begin{cases} e & \text{se } r(e) \notin H \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$\varphi(e^*) = \begin{cases} e^* & \text{se } r(e) \notin H \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

per ogni  $v \in E^0$  e per ogni  $e \in E^1$ .

Dalla definizione di  $\varphi$  possiamo osservare che  $\varphi(v) = 0$  per ogni vertice  $v \in H$ . Inoltre, per ogni vertice  $v \in S$  abbiamo

$$\begin{aligned} \varphi(v^H) &= \varphi\left(v - \sum_{e \in A(v,H)} e e^*\right) = \varphi(v) - \sum_{e \in A(v,H)} \varphi(e) \varphi(e^*) \\ &= v - \sum_{e \in A(v,H)} e e^* = 0, \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la relazione (CK2) della Definizione 1.2.1, in quanto  $v$  vertice regolare del grafo  $E/H$  per l'Osservazione 2.4.13. Di conseguenza l'ideale  $I(H \cup S^H)$  generato dall'insieme  $H \cup S^H$  è contenuto nel nucleo di  $\varphi$ . L'omomorfismo  $\varphi$  è ben definito come omomorfismo di  $K$ -algebre con dominio l'algebra quoziente  $L_K(E)/I(H \cup S^H)$ ; l'immagine di una classe di equivalenza  $x + I(H \cup S^H)$  è data da  $\varphi(x + I(H \cup S^H)) = \varphi(x)$ .

Utilizziamo la Proprietà Universale 1.3.7 di  $C_K^X(E/H)$  per definire un omomorfismo di  $K$ -algebre  $\psi : C_K^X(E/H) \rightarrow L_K(E)/I(H \cup S^H)$ . A tale scopo definiamo i seguenti elementi di  $L_K(E)/I(H \cup S^H)$ :

$$\begin{aligned} a_v &= v + I(H \cup S^H) \\ a_e &= e + I(H \cup S^H) \\ b_e &= e^* + I(H \cup S^H) \end{aligned}$$

per ogni  $v \in (E/H)^0$  e per ogni  $e \in (E/H)^1$ .

Con un calcolo immediato e facendo riferimento alle relazioni di  $L_K(E)$  della Definizione 1.2.1, si verificano le richieste (i) e (ii) della Proprietà Universale 1.3.7, e che gli elementi  $\{a_v \mid v \in (E/H)^0\}$  sono idempotenti e ortogonali tra loro.

Verifichiamo la richiesta (iii) della Proprietà Universale 1.3.7. Sia  $v \in X = (\text{Reg}(E) \setminus H) \cup S$ . Se  $v \in \text{Reg}(E) \setminus H$ , allora

$$\begin{aligned} a_v &= v + I(H \cup S^H) = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* + I(H \cup S^H) \\ &= \sum_{e \in s^{-1}(v)} (e + I(H \cup S^H))(e^* + I(H \cup S^H)) = \sum_{e \in s^{-1}(v)} a_e b_e \\ &= \sum_{e \in s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H)} a_e b_e + \sum_{e \in s^{-1}(v) \cap r^{-1}(H)} a_e b_e \\ &= \sum_{e \in s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H)} a_e b_e = \sum_{e \in \bar{s}^{-1}(v)} a_e b_e, \end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo usato  $a_e = b_e = 0$  se  $e \in s^{-1}(v) \cap r^{-1}(H)$ , in quanto  $e = er(e) \in I(H \cup S^H)$  e  $e^* = r(e)e^* \in I(H \cup S^H)$ .

Se  $v \in S$ , allora

$$\begin{aligned} a_v &= v + I(H \cup S^H) = \sum_{e \in A(v, H)} ee^* + I(H \cup S^H) \\ &= \sum_{e \in A(v, H)} (e + I(H \cup S^H))(e^* + I(H \cup S^H)) \\ &= \sum_{e \in \bar{s}^{-1}(v)} a_e b_e, \end{aligned}$$



dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato

$$v^H + I(H \cup S^H) = v + I(H \cup S^H) - \sum_{e \in A(v, H)} ee^* + I(H \cup S^H) = 0$$

$$v + I(H \cup S^H) = \sum_{e \in A(v, H)} ee^* + I(H \cup S^H).$$

Per la Proprietà Universale 1.3.7 possiamo concludere che esiste un omomorfismo  $\psi : C_K^X(E/H) \rightarrow L_K(E)/I(H \cup S^H)$  tale che

$$\begin{aligned}\psi(v) &= v + I(H \cup S^H) \\ \psi(e) &= e + I(H \cup S^H) \\ \psi(e^*) &= e^* + I(H \cup S^H)\end{aligned}$$

per ogni  $v \in (E/H)^0$  e per ogni  $e \in (E/H)^1$ .

Dalle definizioni di  $\psi$  e  $\varphi$  possiamo constatare che sono una l'inversa dell'altra, quindi sono entrambi isomorfismi.

Ricordiamo che per la Proposizione 2.2.13 e il Corollario 2.2.15, la Cohn path algebra  $C_K^X(E/H)$  e la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  sono  $\mathbb{Z}$ -graduate. L'ideale  $I(H \cup S^H)$  è graduato perché è generato da elementi omogenei di grado 0, quindi grazie alla Proposizione 2.2.7 possiamo affermare che anche  $L_K(E)/I(H \cup S^H)$  è un'algebra  $\mathbb{Z}$ -graduata.

Sia  $\psi$  che  $\varphi$  rispettano il grado dei generatori, quindi possiamo concludere che sono isomorfismi graduati e dedurre la nostra tesi.  $\square$

**Corollario 2.4.15.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $I$  un'ideale graduato della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ . Allora esistono un insieme  $H$  saturo ed ereditario, e un insieme  $S \subseteq B_H$ , tali che la Cohn path algebra  $C_K^X(E/H)$  del grafo quoziente  $E/H$  relativa all'insieme  $X = (\text{Reg}(E) \setminus H) \cup S$  e l'algebra quoziente  $L_K(E)/I$  sono isomorfe come algebre  $\mathbb{Z}$ -graduate.*

*Dimostrazione.* Sia  $I$  un ideale graduato di  $L_K(E)$ . Per il Teorema 2.4.10 esistono un insieme  $H$  saturo ed ereditario, e un insieme  $S \subseteq B_H$ , tali che l'ideale  $I$  coincida con l'ideale  $I(H \cup S^H)$ , generato dall'insieme  $H \cup S^H$ .

Grazie al Teorema 2.4.14, l'algebra quoziente  $L_K(E)/I = L_K(E)/I(H \cup S^H)$  e  $C_K^X(E/H)$  sono isomorfe come algebre  $\mathbb{Z}$ -graduate.  $\square$

**Corollario 2.4.16.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$  saturo ed ereditario. Siano  $L_K(E)$  la Leavitt path algebra del grafo  $E$  e  $L_K(E/H)$  la Leavitt path algebra del grafo quoziente  $E/H$ .*

- (i) *Supponiamo che  $E$  sia un grafo row-finite. Sia  $I(H)$  l'ideale di  $L_K(E)$  generato dall'insieme  $H$ . Allora l'algebra quoziente  $L_K(E)/I(H)$  e  $L_K(E/H)$  sono isomorfe come algebre  $\mathbb{Z}$ -graduate.*

(ii) Sia  $I(H \cup B_H^H)$  l'ideale di  $L_K(E)$  generato dall'insieme  $H \cup B_H^H$ , dove  $B_H$  è l'insieme dei vertici di rottura di  $H$ . Allora l'algebra quoziente  $L_K(E)/I(H \cup B_H^H)$  e  $L_K(E/H)$  sono isomorfe come algebre  $\mathbb{Z}$ -graduate.

*Dimostrazione.* Dimostriamo il punto (i). Ricordiamo che in un grafo row-finite non sono presenti vertici infinite emitter. Quindi l'insieme dei vertici di rottura dell'insieme  $H$  è l'insieme vuoto.

Scegliamo  $S = B_H$ . Allora per il Teorema 2.4.14 abbiamo

$$L_K(E)/I(H) = L_K(E)/I(H \cup S^H) \cong C_K^X(E/H),$$

dove  $X = \text{Reg}(E) \setminus H = \text{Reg}(E/H)$ . Infatti grazie all'Osservazione 2.4.13, l'insieme  $X$  coincide con l'insieme dei vertici regolari del grafo quoziente  $E/H$ . Questo significa che la Cohn path algebra  $C_K^X(E/H)$  coincide con la Leavitt path algebra  $L_K(E/H)$  del grafo quoziente.

Dimostriamo il punto (ii). Applichiamo il Teorema 2.4.14 per  $S = B_H$ :

$$L_K(E)/I(H \cup B_H^H) \cong C_K^X(E/H),$$

dove  $X = (\text{Reg}(E) \setminus H) \cup B_H = \text{Reg}(E/H)$ . Infatti grazie all'Osservazione 2.4.13, l'insieme  $X$  coincide con l'insieme dei vertici regolari del grafo quoziente  $E/H$ . Questo significa che la Cohn path algebra  $C_K^X(E/H)$  coincide con la Leavitt path algebra  $L_K(E/H)$  del grafo quoziente.  $\square$

**Esempio 2.4.17.** Siano  $K$  un campo ed  $E_T$  il grafo di Toeplitz come nell'Esempio 1.1.4:

$$e \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet^u \end{array} \xrightarrow{f} \bullet^v.$$

Consideriamo l'insieme saturo ed ereditario  $H = \{v\}$ . Facendo riferimento alla Definizione 2.4.12, il grafo quoziente  $E_T/H$  rispetto all'insieme  $H$  si ottiene eliminando il vertice  $v$  e il lato  $f$ . Si ottiene dunque

$$E_T/H = e \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet^u \end{array} = R_1,$$

dove  $R_1$  indica la rosa con un petalo.

Sia  $I(H)$  l'ideale della Leavitt path algebra  $L_K(E_T)$ , generato dall'insieme  $H$ . Grazie al Corollario 2.4.16 sappiamo che l'algebra  $L_K(E_T)/I(H)$  è isomorfa alla Leavitt path algebra  $L_K(E_T/H)$ . Prima abbiamo osservato che  $E_T/H = R_1$ , quindi ne consegue che  $L_K(E_T)/I(H)$  è isomorfa alla Leavitt path algebra  $L_K(R_1)$ . Per l'Esempio 1.2.6,  $L_K(R_1)$  è isomorfa alla  $K$ -algebra  $K[x^{-1}, x]$  dei polinomi di Laurent a coefficienti in  $K$ . In conclusione abbiamo

$$L_K(E_T)/I(H) \cong K[x^{-1}, x].$$

Il Teorema 2.4.14 ci permette di vedere l'algebra quoziente di una Leavitt path algebra rispetto a un ideale graduato, come una Cohn path algebra di un grafo quoziente relativa ad un opportuno insieme. Per poter descrivere tali quozienti come Leavitt path algebre, introduciamo una nuova versione del grafo quoziente.

**Definizione 2.4.18.** Sia  $E$  un grafo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$  saturo ed ereditario, ed  $S \subseteq B_H$ . Il simbolo  $v'$  rappresenta una copia di un vertice  $v \in B_H \setminus S$ , mentre  $e'$  rappresenta una copia di un lato  $e \in E^1$  per cui  $r(e) \in B_H \setminus S$ .

Indichiamo con  $E/(H, S) = (((E/(H, S))^0, ((E/(H, S))^1, s', r')$  il *grafo quoziente di  $E$  rispetto  $(H, S)$* , i cui vertici e lati sono dati rispettivamente dagli insiemi

$$\begin{aligned} ((E/(H, S))^0 &= (E^0 \setminus H) \cup \{ v' \mid v \in B_H \setminus S \} \\ ((E/(H, S))^1 &= \{ e \in E^1 \mid r(e) \notin H \} \cup \{ e' \mid e \in E^1 \text{ e } r(e) \in B_H \setminus S \}. \end{aligned}$$

Le funzioni  $s'$  ed  $r'$  coincidono con le funzioni  $s$  ed  $r$  di  $E$  nei lati appartenenti all'insieme  $\{ e \in E^1 \mid r(e) \notin H \}$ , mentre per i lati dell'insieme  $\{ e' \mid e \in E^1 \text{ e } r(e) \in B_H \setminus S \}$  vale

$$s'(e') = s(e) \quad \text{e} \quad r'(e') = r(e)'.$$

Notiamo che per  $S = B_H$  il grafo quoziente  $E/(H, B_H)$  coincide con il grafo quoziente  $E/H$  della Definizione 2.4.12.

**Osservazione 2.4.19.** Sia  $E$  un grafo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$  saturo ed ereditario, ed  $S \subseteq B_H$ . Sia  $v$  un vertice regolare di  $E$  non appartenente all'insieme  $H$ . Allora  $v$  è ancora un vertice regolare del grafo quoziente  $E/(H, S)$ , infatti l'insieme

$$s'^{-1}(v) = \{ e \in s^{-1}(v) \mid r(e) \notin H \} \cup \{ e' \mid e \in s^{-1}(v) \text{ e } r(e) \in B_H \setminus S \}$$

è finito e non vuoto. La finitezza deriva dal fatto che  $s^{-1}(v)$  è finito, mentre se fosse  $\{ e \in s^{-1}(v) \mid r(e) \notin H \} = \emptyset$ , allora  $s^{-1}(v) \subseteq H$  e dall'ipotesi che  $H$  è saturo concluderemmo  $v \in H$ , contrariamente a come abbiamo scelto  $v$ .

Sia  $v$  un vertice di rottura dell'insieme  $H$ . Allora  $v$  è un vertice regolare del grafo quoziente  $E/(H, S)$ , infatti l'insieme

$$s'^{-1}(v) = A(v, H) \cup \{ e' \mid e \in A(v, H) \text{ e } r(e) \in B_H \setminus S \}$$

è finito e non vuoto perché per la Definizione 2.4.4 l'insieme  $A(v, H)$  è finito e non vuoto.

I vertici dell'insieme  $\{ v' \mid v \in B_H \setminus S \}$  sono tutti sink.

Possiamo concludere che  $\text{Reg}(E/(H, S)) = (\text{Reg}(E) \setminus H) \cup B_H$ .

**Osservazione 2.4.20.** Sia  $E$  un grafo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$  saturo ed ereditario, ed  $S \subseteq B_H$ . Con  $E/H = ((E/H)^0, (E/H)^1, \bar{s}, \bar{r})$  indichiamo il grafo quoziente di  $E$  rispetto ad  $H$ , come nella Definizione 2.4.12. Sia  $X = (\text{Reg}(E) \setminus H) \cup S$  l'insieme di vertici di  $E/H$ ; per l'Osservazione 2.4.13 vale  $X \subseteq \text{Reg}(E/H)$ .

Ora vogliamo costruire il grafo

$$(E/H)(X) = (((E/H)(X))^0, ((E/H)(X))^1, \hat{s}, \hat{r})$$

secondo la Definizione 1.3.14. Per prima cosa osserviamo che

$$\begin{aligned} Y &= \text{Reg}(E/H) \setminus X \\ &= ((\text{Reg}(E) \setminus H) \cup B_H) \setminus ((\text{Reg}(E) \setminus H) \cup S) = B_H \setminus S. \end{aligned}$$

Gli insiemi dei vertici e dei lati sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} ((E/H)(X))^0 &= (E/H)^0 \cup \{v' \mid v \in Y\} \\ &= (\text{Reg}(E) \setminus H) \cup \{v' \mid v \in B_H \setminus S\} \\ ((E/H)(X))^1 &= (E/H)^1 \cup \{e' \mid r(e) \in Y\} \\ &= \{e \in E^1 \mid r(e) \notin H\} \cup \{e' \mid r(e) \in B_H \setminus S\}. \end{aligned}$$

É immediato verificare che gli insiemi  $((E/H)(X))^0$  e  $((E/H)(X))^1$  coincidono rispettivamente con gli insiemi  $(E/(H, S))^0$  e  $(E/(H, S))^1$ , dove  $E/(H, S)$  è il grafo quoziente di  $E$  rispetto a  $(H, S)$  della Definizione 2.4.18.

Proviamo ora a studiare le funzioni  $\hat{s}$  e  $\hat{r}$ . Se  $e \in \{e \in E^1 \mid r(e) \notin H\}$ , allora

$$\begin{aligned} \hat{s}(e) &= \bar{s}(e) = s(e) = s'(e) \\ \hat{r}(e) &= \bar{r}(e) = r(e) = r'(e). \end{aligned}$$

Se  $e' \in \{e' \mid r(e) \in B_H \setminus S\}$ , allora

$$\begin{aligned} \hat{s}(e') &= \bar{s}(e) = s(e) = s'(e') \\ \hat{r}(e') &= \bar{r}(e)' = r(e)' = r'(e'). \end{aligned}$$

Questo ci porta a concludere che il grafo  $(E/H)(X)$  coincide con il grafo quoziente  $E/(H, S)$ .

Ora abbiamo tutte le informazioni necessarie per dimostrare che l'algebra quoziente di una Leavitt path algebra rispetto a un suo ideale graduato è la Leavitt path algebra di un grafo quoziente introdotto nella Definizione 2.4.18.

**Teorema 2.4.21.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$  saturo ed ereditario, ed  $S \subseteq B_H$ . Consideriamo  $L_K(E)$  la Leavitt path algebra del grafo  $E$ ,  $L_K(E/(H, S))$  la Leavitt path algebra del grafo quoziente  $E/(H, S)$  e  $I(H \cup S^H)$  l'ideale generato dall'insieme  $H \cup S^H$ . Allora l'algebra quoziente  $L_K(E)/I(H \cup S^H)$  e  $L_K(E/(H, S))$  sono isomorfe come algebre  $\mathbb{Z}$ -graduate.*

*Dimostrazione.* Il Teorema 2.4.14 ci permette di affermare che l'algebra quoziente  $L_K(E)/I(H \cup S^H)$  e la Cohn path algebra  $C_K^X(E/H)$ , dove  $E/H$  è il grafo quoziente della Definizione 2.4.12 e  $X = (\text{Reg}(E) \setminus H) \cup S$ , sono isomorfe come algebre  $\mathbb{Z}$ -graduate.

Per l'Osservazione 2.4.20, il grafo quoziente  $E/(H, S)$ , della Definizione 2.4.18, coincide con il grafo  $(E/H)(X)$ , costruito nella Definizione 1.3.14.

Grazie alla Proposizione 2.2.17, la Cohn path algebra  $C_K^X(E/H)$  e la Leavitt path algebra  $L_K((E/H)(X)) = L_K(E/(H, S))$  sono isomorfe come algebre  $\mathbb{Z}$ -graduate.

Riassumendo:

$$L_K(E)/I(H \cup S^H) \cong C_K^X(E/H) \cong L_K((E/H)(X)) = L_K(E/(H, S)),$$

dove tutti questi isomorfismi sono graduati.  $\square$

**Osservazione 2.4.22.** Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$  saturo ed ereditario, ed  $S \subseteq B_H$ . Per il Teorema 2.4.21, sappiamo che esiste un isomorfismo  $\varphi : L_K(E)/I(H \cup S^H) \rightarrow L_K(E/(H, S))$  tra l'algebra quoziente  $L_K(E)/I(H \cup S^H)$  e la Leavitt path algebra  $L_K(E/(H, S))$ , dove  $E/(H, S)$  è il grafo quoziente della Definizione 2.4.18. In seguito ci tornerà utile conoscere le immagini dei seguenti elementi di  $L_K(E/(H, S))$  tramite  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi(v + I(H \cup S^H)) &= v \quad \text{se } v \in (E^0 \setminus H) \setminus (B_H \setminus S) \\ \varphi(v + I(H \cup S^H)) &= v + v' \quad \text{se } v \in B_H \setminus S \\ \varphi(v^H + I(H \cup S^H)) &= v' \quad \text{se } v \in B_H \setminus S \\ \varphi(v - v^H + I(H \cup S^H)) &= v \quad \text{se } v \in B_H \setminus S. \end{aligned}$$

Concludiamo la sezione con un corollario del Teorema 2.4.14. Per capire come utilizzeremo in seguito tale risultato, qui di seguito facciamo un'osservazione informale.

Grazie al Teorema 2.4.10 a ogni ideale graduato di una Leavitt path algebra possiamo associare una coppia di insiemi  $(H, S)$ , dove  $H$  è un insieme di vertici saturo ed ereditario,  $S$  è un insieme formato da vertici di rottura di  $H$ , tali che  $H \cup S^H$  generino l'ideale.

Viceversa, a una coppia di insiemi  $(H, S)$  come prima possiamo associare l'ideale graduato generato dall'insieme  $H \cup S^H$ .

Il seguente risultato ci garantisce che queste due associazioni sono una l'inversa dell'altra.

**Corollario 2.4.23.** Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$  saturo ed ereditario, ed  $S \subseteq B_H$ . Consideriamo  $I(H \cup S^H)$  e  $I(H)$  gli ideali della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , generati rispettivamente dagli insiemi  $H \cup S^H$  e  $H$ . Allora valgono le seguenti uguaglianze:

(i)  $I(H \cup S^H) \cap E^0 = H$ . In particolare vale  $I(H) \cap E^0 = H$ ;

(ii)  $S = \{ v \in B_H \mid v^H \in I(H \cup S^H) \}$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo l'isomorfismo  $\varphi : L_K(E) \rightarrow C_K^X(E/H)$  del Teorema 2.4.14, dove  $E/H$  è il grafo quoziente di  $E$  rispetto ad  $H$  come nella Definizione 2.4.12, e  $X = (\text{Reg}(E) \setminus H) \cup S$ . Ricordiamo che l'ideale  $I(H \cup S^H)$  è contenuto nel nucleo di  $\varphi$ , che indichiamo con  $\ker(\varphi)$ .

Dimostriamo il punto (i). L'inclusione  $H \subseteq I(H \cup S^H) \cap E^0$  è chiara.

Sia  $v$  un vertice di  $E$  appartenente a  $I(H \cup S^H)$ . Se  $v$  non appartiene ad  $H$ , allora  $\varphi(v) \neq 0$  per definizione di  $\varphi$ ; allo stesso tempo deve essere  $\varphi(v) = 0$  perché  $I(H \cup S^H) \subseteq \ker(\varphi)$ . Quindi l'unica possibilità è  $v \in H$ .

Dimostriamo il punto (ii). L'inclusione  $S \subseteq \{ v \in B_H \mid v^H \in I(H \cup S^H) \}$  è chiara.

Sia  $v \in B_H$  tale che  $v^H \in I(H \cup S^H)$ . Se  $v$  non appartiene a  $S$ , allora  $\varphi(v^H) \neq 0$  per definizione di  $\varphi$ ; allo stesso tempo deve essere  $\varphi(v^H) = 0$  perché  $I(H \cup S^H) \subseteq \ker(\varphi)$ . Quindi l'unica possibilità è  $v \in S$ .  $\square$

## 2.5 Il Teorema di Struttura degli Ideali Graduati

In questa sezione vogliamo arrivare a una descrizione completa del reticolo  $(\mathcal{L}_{gr}(L_K(E)), \subseteq)$  degli ideali graduati di una Leavitt path algebra  $L_K(E)$ .

**Reticolo  $\mathcal{T}_E$ .** Sia  $E$  un grafo. Per prima cosa costruiamo un insieme parzialmente ordinato formato da coppie di insiemi  $(H, S)$ , dove  $H$  è un insieme di vertici saturo ed ereditario, mentre  $S$  è un sottoinsieme di  $B_H$ .

Ricordiamo che l'insieme  $\mathcal{H}_E$  è formato da tutti gli insiemi di vertici di  $E$  saturi ed ereditari.

**Definizione 2.5.1.** Sia  $E$  un grafo. Definiamo l'insieme

$$\mathcal{S} = \bigcup_{H \in \mathcal{H}_E} \mathcal{P}(B_H),$$

dove  $\mathcal{P}(B_H)$  indica l'insieme delle parti di  $B_H$ .

Con  $\mathcal{T}_E$  indichiamo il sottoinsieme di  $\mathcal{H}_E \times \mathcal{S}$  formato dalle coppie  $(H, S)$ , dove  $S \in \mathcal{P}(B_H)$ . Definiamo su  $\mathcal{T}_E$  la relazione

$$(H_1, S_1) \leq (H_2, S_2) \quad \text{se, e solo se,} \quad H_1 \subseteq H_2 \text{ e } S_1 \subseteq H_2 \cup S_2.$$

Verifichiamo che la relazione  $\leq$  è un ordine parziale:

- dalla definizione è immediato verificare che  $(H, S) \leq (H, S)$  per ogni coppia  $(H, S) \in \mathcal{T}_E$ , quindi la relazione  $\leq$  è riflessiva;

- siano  $(H_1, S_1), (H_2, S_2) \in \mathcal{T}_E$  tali che  $(H_1, S_1) \leq (H_2, S_2)$  e  $(H_2, S_2) \leq (H_1, S_1)$ . Allora vale

$$H_1 \subseteq H_2, \quad H_2 \subseteq H_1, \quad S_1 \subseteq H_2 \cup S_2, \quad S_2 \subseteq H_1 \cup S_1.$$

Dalle prime due inclusioni si conclude immediatamente che  $H_1 = H_2$ .

Ora utilizzando le ultime due inclusioni abbiamo

$$\begin{aligned} S_1 &\subseteq H_2 \cup S_2 = H_1 \cup S_2 \\ S_2 &\subseteq H_1 \cup S_1 = H_2 \cup S_1. \end{aligned}$$

Siccome  $S_1$  ed  $S_2$  sono rispettivamente disgiunti ad  $H_1$  e ad  $H_2$  vale  $S_1 \subseteq S_2$  ed  $S_2 \subseteq S_1$ , ovvero  $S_1 = S_2$ . Quindi  $(H_1, S_1) = (H_2, S_2)$  e la relazione  $\leq$  è antisimmetrica;

- siano  $(H_1, S_1), (H_2, S_2), (H_3, S_3) \in \mathcal{T}_E$  tali che  $(H_1, S_1) \leq (H_2, S_2)$  e  $(H_2, S_2) \leq (H_3, S_3)$ . Allora abbiamo

$$H_1 \subseteq H_2, \quad H_2 \subseteq H_3, \quad S_1 \subseteq H_2 \cup S_2, \quad S_2 \subseteq H_3 \cup S_3.$$

Dalle prime due inclusioni si conclude immediatamente che  $H_1 \subseteq H_3$ .

Ora a partire dalla penultima inclusione abbiamo

$$S_1 \subseteq H_2 \cup S_2 \subseteq H_3 \cup S_3,$$

dove abbiamo usato  $H_2 \subseteq H_3$  ed  $S_2 \subseteq H_3 \cup S_3$ . Quindi  $(H_1, S_1) \leq (H_3, S_3)$  e la relazione  $\leq$  è transitiva.

**Osservazione 2.5.2.** Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Siano  $H_1 \subseteq H_2$  due insiemi di vertici di  $E$  saturi ed ereditari. Sia  $v$  un vertice di rottura di  $H_1$ . Ricordiamo che

$$A(v, H_1) = s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H_1), \quad A(v, H_2) = s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H_2).$$

Notiamo che vale la seguente uguaglianza:

$$A(v, H_1) = A(v, H_2) \sqcup \{ e \in A(v, H_1) \mid r(e) \in H_2 \}. \quad (2.12)$$

Per semplicità poniamo  $B := \{ e \in A(v, H_1) \mid r(e) \in H_2 \}$ .

Visto che l'insieme  $A(v, H_1)$  è finito, allora grazie all'uguaglianza 2.12 anche  $A(v, H_2)$  è finito.

Se l'insieme  $r(s^{-1}(v))$  non è contenuto in  $H_2$ , allora  $v$  è vertice di rottura di  $H_2$  e in  $L_K(E)$  vale

$$v^{H_1} = v - \sum_{e \in A(v, H_1)} ee^* = v - \sum_{e \in A(v, H_2)} ee^* - \sum_{e \in B} ee^* = v^{H_2} - \sum_{e \in B} ee^*.$$

Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Per ogni coppia  $(H, S) \in \mathcal{T}_E$  indichiamo con  $I(H, S)$  l'ideale graduato della Leavitt path algebra  $L_K(E)$  generato dall'insieme  $H \cup S^H$ .

Consideriamo l'insieme ordinato  $(\mathcal{T}_E, \leq)$  della Definizione 2.5.1, e il reticolo  $(\mathcal{L}_{gr}(L_K(E)), \subseteq)$  degli ideali graduati di  $L_K(E)$ . Definiamo le funzioni

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}_{gr}(L_K(E)) &\rightarrow \mathcal{T}_E \\ I &\mapsto (H, S), \end{aligned} \quad (2.13)$$

dove  $H = I \cap E^0$  ed  $S = \{ v \in B_H \mid v^H \in I \}$ , e

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{T}_E &\rightarrow \mathcal{L}_{gr}(L_K(E)) \\ (H, S) &\mapsto I(H, S). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Osserviamo che per ogni coppia  $(H, S) \in \mathcal{T}_E$  l'ideale  $\Psi((H, S)) = I(H, S)$  è graduato per la Proposizione 2.2.8. Mentre per ogni  $I \in \mathcal{L}_{gr}(L_K(E))$  la coppia  $\Phi(I) = (I \cap E^0, S)$  appartiene all'insieme  $\mathcal{T}_E$  grazie al Lemma 2.4.3.

Mostriamo che le funzioni  $\Phi$  e  $\Psi$  sono due biiezioni. Sia  $I \in \mathcal{L}_{gr}(L_K(E))$ , allora

$$\Psi(\Phi(I)) = \Psi((I \cap E^0, S)) = I(I \cap E^0, S) = I((I \cap E^0) \cup S) = I,$$

dove l'ultima uguaglianza è vera per il Teorema 2.4.10.

Sia  $(H, S) \in \mathcal{T}_E$ , allora

$$\Phi(\Psi((H, S))) = \Phi(I(H, S)) = (H, S),$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il Corollario 2.4.23.

Dunque le funzioni  $\Psi \circ \Phi$  e  $\Phi \circ \Psi$  corrispondono rispettivamente all'identità dell'insieme  $\mathcal{L}_{gr}(L_K(E))$  e all'identità dell'insieme  $\mathcal{T}_E$ . Possiamo concludere che  $\Phi$  e  $\Psi$  sono biietive.

**Proposizione 2.5.3.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo due coppie  $(H_1, S_1), (H_2, S_2) \in \mathcal{T}_E$  e i rispettivi ideali graduati  $I(H_1, S_1)$  e  $I(H_2, S_2)$  della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ . Allora  $(H_1, S_1) \leq (H_2, S_2)$  se, e solo se,  $I(H_1, S_1) \subseteq I(H_2, S_2)$ . Ovvero, le funzioni  $\Phi$  e  $\Psi$  definite rispettivamente in 2.13 e 2.14 sono isomorfismi di insiemi ordinati.*

*Dimostrazione.* Supponiamo dapprima che valga  $I(H_1, S_1) \subseteq I(H_2, S_2)$ . Allora possiamo dedurre

$$I(H_1, S_1) \cap E^0 \subseteq I(H_2, S_2) \cap E^0,$$

ma per il Corollario 2.4.23 tali insiemi corrispondono a  $H_1 \subseteq H_2$ .

Sia  $v \in S_1$ . Se vale  $r(s^{-1}(v)) \subseteq H_2$ , possiamo scrivere

$$v = v^{H_1} + \sum_{e \in A(v, H_1)} ee^*;$$



il primo addendo appartiene a  $I(H_1, S_1)$ , mentre il secondo appartiene a  $I(H_2, S_2)$  perché  $ee^* = er(e)e^* \in I(H_2)$  per ogni  $e \in A(v, H_1)$ . Quindi  $v \in I(H_2, S_2) \cap E^0 = H_2$ .

Altrimenti, per quanto detto nell'Osservazione 2.5.2 possiamo scrivere

$$v^{H_2} = v^{H_1} + \sum_{e \in B} ee^*;$$

il primo addendo appartiene a  $I(H_1, S_1)$ , mentre il secondo appartiene a  $I(H_2, S_2)$  perché  $ee^* = er(e)e^* \in I(H_2)$  per ogni  $e \in B$ . Quindi  $v^{H_2} \in I(H_2, S_2)$  e di conseguenza  $v \in S_2$ .

Possiamo concludere che  $H_1 \subseteq H_2$  ed  $S_1 \subseteq H_2 \cup S_2$ , ovvero  $(H_1, S_1) \leq (H_2, S_2)$ .

Supponiamo ora  $(H_1, S_1) \leq (H_2, S_2)$ . Allora vale

$$H_1 \subseteq H_2 \quad \text{e} \quad S_1 \subseteq H_2 \cup S_2,$$

in particolare  $H_1 \cup S_1 \subseteq H_2 \cup S_2$ . Se consideriamo un vertice  $v \in H_1$ , allora  $v \in H_2 \subseteq I(H_2, S_2)$ . Mentre se  $v \in S_1$ , allora abbiamo due casi:  $v \in H_2$  o  $v \in S_2$ . Nel primo caso si conclude  $v \in H_2 \subseteq I(H_2, S_2)$ . Nel secondo caso, per l'Osservazione 2.5.2, possiamo scrivere

$$v^{H_1} = v^{H_2} - \sum_{e \in B} ee^*.$$

Possiamo osservare che il primo addendo appartiene a  $I(H_2, S_2)$  perché  $v \in S_2$ , mentre il secondo addendo appartiene a  $I(H_2, S_2)$  perché  $ee^* = er(e)e^* \in I(H_2, S_2)$  per ogni  $e \in B$ , grazie alla proprietà di assorbimento di  $I(H_2, S_2)$ . Quindi  $v^{H_1} \in I(H_2, S_2)$ , per ogni  $v \in S_1$ . In conclusione, abbiamo appena dimostrato che  $H_1 \cup S^{H_1} \subseteq I(H_2, S_2)$ , dunque

$$I(H_1, S_1) = I(H_1 \cup S^{H_1}) \subseteq I(H_2 \cup S^{H_2}) = I(H_2, S_2). \quad \square$$

Ora vogliamo introdurre una struttura di reticolo nell'insieme  $\mathcal{T}_E$ . A tale scopo introduciamo la nozione di saturazione di un insieme  $H$ , rispetto a un opportuno insieme  $S$ , che generalizza la definizione di chiusura satura ereditaria presentata nella Definizione 2.1.7

**Definizione 2.5.4.** Sia  $E$  un grafo. Consideriamo un insieme ereditario  $H$  di vertici di  $E$ , ed  $S \subseteq H \cup B_H$ . La  $S$ -saturazione di  $H$ , indicata con  $\overline{H}^S$ , è il più piccolo insieme saturo ed ereditario tale che

- (i)  $H \subseteq \overline{H}^S$ ;
- (ii) se  $v \in S$  e  $r(s^{-1}(v)) \subseteq \overline{H}^S$ , allora  $v \in \overline{H}^S$ .

Se  $S = \emptyset$ , allora la  $S$ -saturazione di  $H$  coincide con la chiusura satura ereditaria di  $H$  (vedi Definizione 2.1.7).

Diamo una descrizione induttiva della  $S$ -saturazione di un insieme.

**Lemma 2.5.5.** *Sia  $E$  un grafo. Consideriamo un insieme ereditario  $H$  di vertici di  $E$ , ed  $S \subseteq H \cup B_H$ . Poniamo  $\Lambda_0^S(H) := H$ , mentre per  $n \geq 1$ :*

$$\Lambda_n^S(H) := \Lambda_{n-1}^S(H) \cup \{ v \in E^0 \setminus \Lambda_{n-1}^S(H) \mid v \in \text{Reg}(E) \cup S \text{ e } r(s^{-1}(v)) \subseteq \Lambda_{n-1}^S(H) \}.$$

Allora

$$\overline{H}^S = \bigcup_{n \geq 0} \Lambda_n^S(H).$$

*Dimostrazione.* Consideriamo l'insieme  $H' := \bigcup_{n \geq 0} \Lambda_n^S(H)$ . Chiaramente  $H \subseteq H'$ .

Dimostriamo per induzione che gli insiemi  $\Lambda_n^S(H)$  sono ereditari per ogni  $n \geq 0$ . Se  $n = 0$ , allora  $\Lambda_0^S(H) = H$  che è ereditario per ipotesi. Supponiamo ora  $\Lambda_n^S(H)$  ereditario. Siano  $v \in \Lambda_{n+1}^S(H)$  e  $w \in E^0$ , tali che  $w \leq v$ . Se  $v \in \Lambda_n^S(H)$ , allora  $w \in \Lambda_n^S(H) \subseteq \Lambda_{n+1}^S(H)$  perché per l'ipotesi induttiva  $\Lambda_n^S(H)$  è ereditario. Se

$$v \in \{ v \in E^0 \setminus \Lambda_n^S(H) \mid v \in \text{Reg}(E) \cup S \text{ e } r(s^{-1}(v)) \subseteq \Lambda_n^S(H) \},$$

allora  $w$  è in relazione con un vertice appartenente a  $r(s^{-1}(v)) \subseteq \Lambda_n^S(H)$ ; per l'ipotesi induttiva possiamo concludere che  $w \in \Lambda_n^S(H) \subseteq \Lambda_{n+1}^S(H)$ .

L'insieme  $H'$  è unione di insiemi ereditari, quindi è ereditario.

Dimostriamo ora che l'insieme  $H'$  è saturo. Sia  $v \in \text{Reg}(E)$  tale che  $r(s^{-1}(v)) \subseteq H'$ , allora esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $r(s^{-1}(v)) \subseteq \Lambda_N^S(H)$ ; per costruzione abbiamo  $v \in \Lambda_{N+1}^S(H) \subseteq H'$ .

Verifichiamo ora la condizione (ii) della Definizione 2.5.4. Sia  $v \in S$  tale che  $r(s^{-1}(v)) \subseteq H'$ . Se  $v \in H$ , allora  $v \in \Lambda_0^S(H) \subseteq H'$ . Altrimenti, se  $v \in B_H$ , possiamo scrivere

$$r(s^{-1}(v)) = r(s^{-1}(v) \cap r^{-1}(H)) \cup r(s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H)) \subseteq H'.$$

Notiamo che  $r(s^{-1}(v) \cap r^{-1}(H)) \subseteq H$  e  $r(s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H))$  è finito, dunque esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che

$$r(s^{-1}(v)) = r(s^{-1}(v) \cap r^{-1}(H)) \cup r(s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H)) \subseteq \Lambda_N^S(H);$$

per costruzione possiamo concludere  $v \in \Lambda_{N+1}^S(H) \subseteq H'$ .

Ora supponiamo esista  $H'' \subseteq E^0$  saturo ed ereditario tale che soddisfi le condizioni (i) e (ii) della Definizione 2.5.4. Dobbiamo dimostrare che  $H' \subseteq H''$ ; procediamo per induzione e dimostriamo che  $\Lambda_n^S(H) \subseteq H''$  per ogni  $n \geq 0$ . Se  $n = 0$ , allora  $\Lambda_0^S(H) = H \subseteq H''$ . Supponiamo ora che  $\Lambda_n^S(H) \subseteq H''$ , con  $n > 0$ , e dimostriamo  $\Lambda_{n+1}^S(H) \subseteq H''$ . Ci basta mostrare

$$\{ v \in E^0 \setminus \Lambda_n^S(H) \mid v \in \text{Reg}(E) \cup S \text{ e } r(s^{-1}(v)) \subseteq \Lambda_n^S(H) \} \subseteq H''.$$

Sia  $v \in \text{Reg}(E)$  tale che  $r(s^{-1}(v)) \subseteq \Lambda_n^S(H) \subseteq H''$ , allora  $v \in H''$  perché  $H''$  è un insieme saturo. Se  $v \in S$ , allora  $r(s^{-1}(v)) \subseteq \Lambda_n^S(H) \subseteq H''$  e per la condizione (ii) della Definizione 2.5.4 possiamo concludere  $v \in H''$ .  $\square$

Vediamo ora come la Definizione 2.5.4 ci permette di definire una struttura di reticolo sull'insieme ordinato  $(\mathcal{T}_E, \leq)$  (vedi Definizione 2.5.1).

**Proposizione 2.5.6.** *Sia  $E$  un grafo. Allora l'insieme ordinato  $(\mathcal{T}_E, \leq)$  è un reticolo, dove l'estremo superiore e l'estremo inferiore sono così definiti:*

$$(H_1, S_1) \vee (H_2, S_2) = (\overline{H_1 \cup H_2}^{S_1 \cup S_2}, (S_1 \cup S_2) \setminus \overline{H_1 \cup H_2}^{S_1 \cup S_2}) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} (H_1, S_1) \wedge (H_2, S_2) \\ = (H_1 \cap H_2, (S_1 \cap S_2) \cup ((S_1 \cup S_2) \cap (H_1 \cup H_2))), \end{aligned} \quad (2.16)$$

per ogni  $(H_1, S_1), (H_2, S_2) \in \mathcal{T}_E$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo per prima cosa che le coppie definite in 2.15 e 2.16 sono elementi di  $\mathcal{T}_E$ . Infatti,  $\overline{H_1 \cup H_2}^{S_1 \cup S_2} \in \mathcal{H}_E$  per definizione, mentre se  $v \in (S_1 \cup S_2) \setminus \overline{H_1 \cup H_2}^{S_1 \cup S_2}$ , allora

$$\emptyset \neq A\left(v, \overline{H_1 \cup H_2}^{S_1 \cup S_2}\right) \subseteq A(v, H_1) \cup A(v, H_2),$$

altrimenti se  $r(s^{-1}(v)) \subseteq \overline{H_1 \cup H_2}^{S_1 \cup S_2}$ , per la condizione (ii) della Definizione 2.5.4 avremmo  $v \in \overline{H_1 \cup H_2}^{S_1 \cup S_2}$ .

L'insieme  $H_1 \cap H_2$  è ancora saturo ed ereditario perché intersezione di insiemi saturi ed ereditari. Notiamo che vale

$$(S_1 \cap S_2) \cup ((S_1 \cup S_2) \cap (H_1 \cup H_2)) = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap H_2) \cup (H_1 \cap S_2).$$

Se  $v \in (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap H_2) \cup (H_1 \cap S_2)$ , allora  $A(v, H_1 \cap H_2) \neq \emptyset$ . Verifichiamo che  $A(v, H_1 \cap H_2)$  sia finito. Se  $v \in S_1 \cap S_2$ , allora  $A(v, H_1 \cap H_2) \subseteq A(v, H_1) \cup A(v, H_2)$ . Se  $v \in S_1 \cap H_2$ , allora c'è un numero finito di lati con vertice finale in  $E^0 \setminus H_1$ , mentre i restanti infiniti lati uscenti da  $v$  hanno vertice finale in  $H_1 \cap H_2$  per l'ereditarietà di  $H_2$ . Il caso  $v \in H_1 \cap S_2$  è analogo.

Dimostriamo ora che  $(H_i, S_i) \leq (H_1, S_1) \vee (H_2, S_2)$ , per  $i = 1, 2$ . Per la condizione (i) della Definizione 2.5.4 vale

$$H_i \subseteq \overline{H_1 \cup H_2}^{S_1 \cup S_2} \quad \text{per } i = 1, 2,$$

inoltre

$$S_i \subseteq ((S_1 \cup S_2) \setminus \overline{H_1 \cup H_2}^{S_1 \cup S_2}) \cup \overline{H_1 \cup H_2}^{S_1 \cup S_2} = S_1 \cup S_2, \quad \text{per } i = 1, 2.$$

Consideriamo  $(H, S) \in \mathcal{T}_E$  tale che  $(H_i, S_i) \leq (H, S)$ , per  $i = 1, 2$ . Dimostriamo che  $(H_1, S_1) \vee (H_2, S_2) \leq (H, S)$ . Osserviamo che valgono

$$H_i \subseteq H, S_i \subseteq H \cup S \quad \text{per } i = 1, 2.$$

Per dimostrare che  $\overline{H_1 \cup H_2}^{S_1 \cup S_2} \subseteq H$  usiamo il Lemma 2.5.5 e dimostriamo  $\Lambda_n := \Lambda_n^{S_1 \cup S_2}(H_1 \cup H_2) \subseteq H$  per induzione su  $n \geq 0$ . Per  $n = 0$  abbiamo  $\Lambda_0^{S_1 \cup S_2}(H_1 \cup H_2) = H_1 \cup H_2 \subseteq H$ . Ora supponiamo che per  $n > 0$  valga  $\Lambda_n^{S_1 \cup S_2}(H_1 \cup H_2) \subseteq H$  e dimostriamo che  $\Lambda_{n+1}^{S_1 \cup S_2}(H_1 \cup H_2) \subseteq H$ . É sufficiente mostrare

$$\{ v \in E^0 \setminus \Lambda_n \mid v \in \text{Reg}(E) \cup S_1 \cup S_2 \text{ e } r(s^{-1}(v)) \subseteq \Lambda_n \} \subseteq H.$$

Sia  $v \in \text{Reg}(E)$  e  $r(s^{-1}(v)) \subseteq \Lambda_n \subseteq H$ , allora dall'ipotesi  $H$  saturo abbiamo  $v \in H$ . Sia  $v \in S_1 \cup S_2$  e  $r(s^{-1}(v)) \subseteq \Lambda_n \subseteq H$ , allora da  $v \in S_1 \cup S_2 \subseteq H \cup S$  concludiamo che  $v$  non può appartenere a  $S$  e di conseguenza abbiamo  $v \in H$ .

Sempre dall'inclusione  $S_1 \cup S_2 \subseteq H \cup S$ , è chiaro che vale

$$(S_1 \cup S_2) \setminus \overline{H_1 \cup H_2}^{S_1 \cup S_2} \subseteq H \cup S.$$

Dimostriamo ora che  $(H_1, S_1) \wedge (H_2, S_2) \leq (H_i, S_i)$ , per  $i = 1, 2$ . Sicuramente vale

$$H_1 \cap H_2 \subseteq H_i \quad \text{per } i = 1, 2,$$

e con una verifica immediata si verifica che

$$(S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap H_2) \cup (H_1 \cup S_2) \subseteq H_i \cup S_i \quad \text{per } i = 1, 2.$$

Consideriamo  $(H, S) \in \mathcal{T}_E$  tale che  $(H, S) \leq (H_i, S_i)$ , per  $i = 1, 2$ . Dimostriamo che  $(H, S) \leq (H_1, S_1) \wedge (H_2, S_2)$ . Osserviamo che valgono

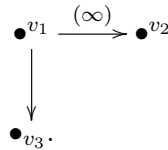
$$H \subseteq H_i, S \subseteq H_i \cup S_i \quad \text{per } i = 1, 2.$$

Sicuramente vale  $H \subseteq H_1 \cap H_2$  e  $S \subseteq (H_1 \cup S_1) \cap (H_2 \cup S_2)$ , ovvero

$$S \subseteq (H_1 \cap H_2) \cup (H_1 \cap S_2) \cup (H_2 \cap S_1) \cup (S_1 \cap S_2). \quad \square$$

Presentiamo alcuni esempi in cui calcoliamo esplicitamente la chiusura di un insieme come nella Definizione 2.5.4, e gli estremi superiore e inferiore di elementi in  $\mathcal{T}_E$ .

**Esempio 2.5.7.** Sia  $E$  il seguente grafo:



Consideriamo gli insiemi ereditari  $H_1 = \{v_1\}$  e  $H_2 = \{v_e\}$ . L'insieme dei vertici di rottura dell'insieme  $H_1$  è  $B_{H_1} = \{v_1\}$ , mentre l'insieme dei vertici di rottura di  $H_2$  è l'insieme vuoto. Fissiamo  $S_1 = \{v_1\}$  e  $S_2 = \emptyset$ .

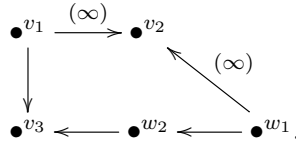
Calcoliamo la  $S_1$ -saturazione dell'insieme  $H_1 \cup H_2$  utilizzando il Lemma 2.5.5:

$$\begin{aligned}\Lambda_0^{S_1}(H_1 \cup H_2) &= H_1 \cup H_2 \\ \Lambda_1^{S_1}(H_1 \cup H_2) &= \Lambda_0^{S_1}(H_1 \cup H_2) \cup \{v_1\} = \{v_1, v_2, v_3\} = E^0,\end{aligned}$$

dunque  $\overline{H_1 \cup H_2}^{S_1} = E^0$ .

Per quanto appena calcolato e per la formula 2.15 abbiamo  $(H_1, S_1) \vee (H_2, S_2) = (E^0, \emptyset)$ .

**Esempio 2.5.8.** Sia  $G$  il seguente grafo:



Consideriamo gli insiemi ereditari  $H_1 = \{v_2\}$  e  $H_2 = \{v_3\}$ . L'insieme dei vertici di rottura dell'insieme  $H_1$  è  $B_{H_1} = \{v_1, w_1\}$ , mentre l'insieme dei vertici di rottura di  $H_2$  è l'insieme vuoto. Fissiamo  $S_1 = \{v_1, w_1\}$  e  $S_2 = \emptyset$ .

Calcoliamo la  $S_1$ -saturazione dell'insieme  $H_1 \cup H_2$  utilizzando il Lemma 2.5.5:

$$\begin{aligned}\Lambda_0^{S_1}(H_1 \cup H_2) &= H_1 \cup H_2 \\ \Lambda_1^{S_1}(H_1 \cup H_2) &= \Lambda_0^{S_1}(H_1 \cup H_2) \cup \{v_1, w_2\} = \{v_1, v_2, v_3, w_2\} \\ \Lambda_2^{S_1}(H_1 \cup H_2) &= \Lambda_1^{S_1}(H_1 \cup H_2) \cup \{w_1\} = \{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2\} = E^0,\end{aligned}$$

dunque  $\overline{H_1 \cup H_2}^{S_1} = E^0$ .

Per quanto appena calcolato e per la formula 2.15 abbiamo  $(H_1, S_1) \vee (H_2, S_2) = (E^0, \emptyset)$ .

**Il Teorema di struttura degli Ideali Graduati.** Il seguente teorema ci permette di dare una descrizione completa del reticolo degli ideali graduati di una Leavitt path algebra in termini di opportuni sottoinsiemi di vertici.

**Teorema 2.5.9** (Teorema di struttura degli Ideali Graduati). *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora il reticolo  $(\mathcal{L}_{gr}(L_K(E)), \subseteq)$  degli ideali graduati della Lavitt path algebra  $L_K(E)$  è isomorfo al reticolo  $(\mathcal{T}_E, \leq)$  della Definizione 2.5.1.*

*Dimostrazione.* Siano

$$\Phi : \mathcal{L}_{gr}(L_K(E)) \rightarrow \mathcal{T}_E \quad \text{e} \quad \Psi : \mathcal{T}_E \rightarrow \mathcal{L}_{gr}(L_K(E))$$

le biiezioni presentate rispettivamente in 2.13 e 2.14. Per la Proposizione 2.5.3 tali funzioni sono isomorfismi di insiemi ordinati.

Dimostriamo che  $\Phi$  e  $\Psi$  sono isomorfismi di reticoli, in particolare verifichiamo che rispettano gli estremi superiori e inferiori dei rispettivi reticoli.

Siano  $I$  e  $J$  ideali graduati, cominciamo con il verificare  $\Phi(I \cap J) = \Phi(I) \wedge \Phi(J)$ . Siccome  $I \cap J \subseteq I, J$ , allora  $\Phi(I \cap J) \leq \Phi(I), \Phi(J)$  e dunque  $\Phi(I \cap J) \leq \Phi(I) \wedge \Phi(J)$ .

Da  $\Phi(I) \wedge \Phi(J) \leq \Phi(I), \Phi(J)$ , applicando  $\Psi$  otteniamo  $\Psi(\Phi(I) \wedge \Phi(J)) \subseteq I \cap J$ . Applicando nuovamente  $\Phi$  abbiamo  $\Phi(I) \wedge \Phi(J) \leq \Phi(I \cap J)$ .

Dimostriamo ora che  $\Phi(I + J) = \Phi(I) \vee \Phi(J)$ . Da  $I, J \subseteq I + J$ , abbiamo  $\Phi(I) \vee \Phi(J) \leq \Phi(I + J)$ .

Da  $\Phi(I), \Phi(J) \leq \Phi(I) \vee \Phi(J)$ , applicando  $\Psi$  otteniamo  $I + J \subseteq \Psi(\Phi(I) \vee \Phi(J))$ . Applicando nuovamente  $\Phi$  abbiamo  $\Phi(I + J) \leq \Phi(I) \vee \Phi(J)$ .

Analogamente si dimostra che  $\Psi((H_1, S_1) \vee (H_2, S_2)) = \Psi((H_1, S_1)) + \Psi((H_2, S_2))$  e  $\Psi((H_1, S_1) \wedge (H_2, S_2)) = \Psi((H_1, S_1)) \cap \Psi((H_2, S_2))$ .  $\square$

**Teorema 2.5.10.** *Siano  $E$  un grafo row-finite e  $K$  un campo. Allora il reticolo  $(\mathcal{L}_{gr}(L_K(E)), \subseteq)$  degli ideali graduati della Lavitt path algebra  $L_K(E)$  è isomorfo al reticolo  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  formato dagli insiemi di vertici di  $E$  saturi ed ereditari.*

*Dimostrazione.* Se  $E$  è un grafo row-finite, allora non esistono vertici infinite emitter in  $E$ . Dunque per ogni insieme  $H$  saturo ed ereditario l'insieme  $B_H$  dei vertici di rottura è vuoto. Da ciò possiamo concludere che il reticolo  $(\mathcal{T}_E, \leq)$  della Definizione 2.5.1 è isomorfo al reticolo  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$ ; in dettaglio possiamo considerare le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{H}_E &\rightarrow \mathcal{T}_E \\ H &\mapsto (H, \emptyset), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{T}_E &\rightarrow \mathcal{H}_E \\ (H, \emptyset) &\mapsto H. \end{aligned}$$

È immediato verificare che  $\sigma$  e  $\tau$  sono omomorfismi di reticoli uno l'inverso dell'altro.

Per il Teorema di struttura degli Ideali Graduati 2.5.9 il reticolo  $(\mathcal{T}_E, \leq)$  è isomorfo al reticolo  $(\mathcal{L}_{gr}(L_K(E)), \subseteq)$ . Possiamo concludere infine

$$(\mathcal{H}_E, \subseteq) \cong (\mathcal{L}_{gr}(L_K(E)), \subseteq)$$

come reticoli.  $\square$

La seguente proposizione ci permette di considerare l'insieme  $\mathcal{L}_{gr}(L_K(E))$ , formato dagli ideali graduati di una Leavitt path algebra associata a un certo grafo  $E$  e un campo  $K$ , come un monoide commutativo; l'operazione è il prodotto tra ideali, l'elemento neutro è l'algebra stessa. In particolare, nel monoide  $(\mathcal{L}_{gr}(L_K(E)), \cdot)$ , dove  $\cdot$  indica il prodotto tra ideali, ogni elemento è idempotente.

**Proposizione 2.5.11.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Siano  $I$  e  $J$  ideali graduati della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , allora  $I \cdot J = I \cap J$ . In particolare, il prodotto tra due ideali graduati è ancora un ideale graduato, il prodotto tra due ideali graduati è commutativo e per ogni  $I$  ideale graduato di  $L_K(E)$  abbiamo  $I^2 = I$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $I$  e  $J$  ideali graduati di  $L_K(E)$ . Per la proprietà di assorbimento di  $I$  e  $J$  vale  $I \cdot J \subseteq I \cap J$ .

Osserviamo che  $I \cap J$  è ancora un ideale graduato, quindi per il Teorema 2.4.10 esiste un insieme  $H$  saturo ed ereditario, e  $S \subseteq B_H$  tali che  $I \cap J = I(H \cup S^H)$ . Siccome ogni elemento dell'insieme  $H \cup S^H$  appartiene a  $I \cap J$  ed è idempotente, allora  $H \cup S^H \subseteq I \cdot J$ . Possiamo concludere che  $I \cap J = I(H \cup S^H) \subseteq I \cdot J$ .

Ora grazie all'uguaglianza  $I \cdot J = I \cap J$ , si deduce che il prodotto tra due ideali graduati è ancora un ideale graduato perché l'intersezione tra ideali graduati è ancora un ideale graduato, il prodotto tra ideali graduati è commutativo:  $I \cdot J = I \cap J = J \cdot I$ , e  $I^2 = I \cap I = I$  per ogni  $I$  ideale graduato di  $L_K(E)$ .  $\square$

**Algebre graduate noetheriane e artiniane.** Introduciamo la nozione di insieme parzialmente ordinato noetheriano e artiniano.

**Definizione 2.5.12.** Sia  $(P, \leq)$  un insieme parzialmente ordinato. Allora  $(P, \leq)$  è detto *noetheriano* se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti:

- (1) ogni sottoinsieme  $X$  non vuoto di  $P$  ammette un elemento massimale;
- (2) ogni catena di  $P$  ammette elemento massimo;
- (3) ogni catena numerabile ascendente  $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  è stazionaria, ovvero esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $p_n = p_i$  per ogni  $i \geq n$ .

Le implicazioni (1)  $\Rightarrow$  (2) e (2)  $\Rightarrow$  (3) sono immediate.

Dimostriamo (3)  $\Rightarrow$  (1). Supponiamo esista un sottoinsieme  $X$  non vuoto di  $P$  che non ammetta elemento massimale. Sia  $x_1 \in X$ , allora  $x_1$  non è massimale, dunque esiste  $x_2 \in X$  diverso da  $x_1$  tale che  $x_1 \leq x_2$ . Ripetendo il ragionamento a ogni passo arriviamo a costruire una catena numerabile ascendente non stazionaria contrariamente a quanto ipotizzato nel punto (3).

**Definizione 2.5.13.** Sia  $(P, \leq)$  un insieme parzialmente ordinato. Allora  $(P, \leq)$  è detto *artiniano* se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti:

- (1) ogni sottoinsieme  $X$  non vuoto di  $P$  ammette un elemento minimale;
- (2) ogni catena di  $P$  ammette elemento minimo;
- (3) ogni catena numerabile discendente  $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  è stazionaria, ovvero esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $p_n = p_i$  per ogni  $i \geq n$ .

Le implicazioni (1)  $\Rightarrow$  (2) e (2)  $\Rightarrow$  (3) sono immediate.

Dimostriamo (3)  $\Rightarrow$  (1). Supponiamo esista un sottoinsieme  $X$  non vuoto di  $P$  che non ammetta elemento minimale. Sia  $x_1 \in X$ , allora  $x_1$  non è massimale, dunque esiste  $x_2 \in X$  diverso da  $x_1$  tale che  $x_2 \leq x_1$ . Ripetendo il ragionamento a ogni passo arriviamo a costruire una catena numerabile discendente non stazionaria contrariamente a quanto ipotizzato nel punto (3).

**Definizione 2.5.14.** Siano  $G$  un gruppo e  $K$  un campo. Una  $K$ -algebra  $A$   $G$ -graduata è detta *graduata noetheriana* se il reticolo  $(\mathcal{L}_{gr}(A), \subseteq)$  degli ideali graduati di  $A$  è un insieme noetheriano. Mentre  $A$  è detta *graduata artiniana* se  $(\mathcal{L}_{gr}(A), \subseteq)$  è artiniano.

**Definizione 2.5.15.** Siano  $G$  un gruppo e  $K$  un campo. Una  $K$ -algebra  $A$   $G$ -graduata è detta *graduata semplice* se  $A^2 \neq 0$  e l'insieme  $\mathcal{L}_{gr}(A)$  degli ideali graduati di  $A$  contiene solo gli ideali  $\{0\}$  e  $A$ .

**Lemma 2.5.16.** Sia  $E$  un grafo. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- (1) il reticolo  $(\mathcal{T}_E, \leq)$  è noetheriano (rispettivamente artiniano);
- (2) il reticolo  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  è noetheriano (rispettivamente artiniano), e per ogni  $H \in \mathcal{H}_E$ , l'insieme  $B_H$  dei vertici di rottura è finito.

*Dimostrazione.* Supponiamo  $(\mathcal{T}_E, \leq)$  noetheriano. Consideriamo  $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una catena numerabile ascendente di  $\mathcal{H}_E$ . Possiamo costruire la seguente catena di  $\mathcal{T}_E$ :  $\{(H_i, \emptyset)\}_{i \in \mathbb{N}}$ ; per ipotesi tale catena deve essere stabile dunque deve esistere  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $(H_n, \emptyset) = (H_i, \emptyset)$  per ogni  $i \geq n$ , ovvero  $H_n = H_i$  per ogni  $i \geq n$ .

Supponiamo che esista un insieme  $H \in \mathcal{H}_E$  tale che l'insieme  $B_H$  sia infinito. Allora è possibile costruire una catena numerabile ascendente di insiemi  $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , dove  $S_i \subseteq B_H$  e  $S_i \subseteq S_{i+1}$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ . Di conseguenza possiamo costruire la seguente catena non stazionaria di  $\mathcal{T}_E$ :  $\{(H, S_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ . La contraddizione nasce dall'ipotesi  $B_H$  infinito.

Il caso  $(\mathcal{T}_E, \leq)$  artiniano è analogo.

Supponiamo  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  noetheriano. Consideriamo  $\{(H_i, S_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  una catena numerabile ascendente di  $\mathcal{T}_E$ . Allora gli insiemi  $H_i$  formano una catena



di  $\mathcal{H}_E$  che deve essere stazionaria, dunque esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $H_i = H_n =: H$  per ogni  $i \geq n$ . Ora per ogni  $i \geq n$  abbiamo  $S_i \subseteq H \cup S_{i+1}$ , ma siccome  $B_H$  è finito,  $S_i \subseteq B_H$  e  $S_i \cap H = \emptyset$  per ogni  $i \geq n$ , abbiamo che la catena  $\{S_i\}_{i \geq n}$  è stazionaria. Possiamo concludere dunque che esiste  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $(H_m, S_m) = (H_i, S_i)$  per ogni  $i \geq m$ .

Il caso  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  artiniiano è analogo.  $\square$

Ora, grazie al Teorema 2.5.9 possiamo dare una caratterizzazione delle Leavitt path algebre graduate noetheriane e graduate artiniane.

**Proposizione 2.5.17.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Sia  $L_K(E)$  la Leavitt path algebra del grafo  $E$ , allora*

- (i) *l'algebra  $L_K(E)$  è graduata noetheriana se, e solo se, il reticolo  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  è noetheriano e per ogni  $H \in \mathcal{H}_E$ , l'insieme  $B_H$  dei vertici di rottura è finito;*
- (ii) *l'algebra  $L_K(E)$  è graduata artiniana se, e solo se, il reticolo  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  è artiniiano e per ogni  $H \in \mathcal{H}_E$ , l'insieme  $B_H$  dei vertici di rottura è finito.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il punto (i); il punto (ii) è analogo. Supponiamo  $L_K(E)$  sia graduata noetheriana, ovvero il reticolo  $(\mathcal{L}_{gr}(L_K(E)), \subseteq)$  degli ideali graduati è noetheriano. Per il Teorema di struttura degli Ideali Graduati 2.5.9 anche il reticolo  $(\mathcal{T}_E, \leq)$  è noetheriano. Per il Lemma 2.5.16 possiamo concludere che il reticolo  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  è noetheriano e per ogni  $H \in \mathcal{H}_E$ , l'insieme  $B_H$  dei vertici di rottura è finito.

Viceversa, supponiamo che il reticolo  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  sia noetheriano e per ogni  $H \in \mathcal{H}_E$ , l'insieme  $B_H$  dei vertici di rottura sia finito. Per il Lemma 2.5.16 il reticolo  $(\mathcal{T}_E, \leq)$  è noetheriano. Per il Teorema di struttura degli Ideali Graduati 2.5.9 possiamo concludere che il reticolo  $(\mathcal{L}_{gr}(L_K(E)), \subseteq)$  è noetheriano, ovvero  $L_K(E)$  è un'algebra graduata noetheriana.  $\square$

**Corollario 2.5.18.** *Siano  $E$  un grafo formato da un numero finito di vertici e  $K$  un campo. Allora la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  di  $E$  è un'algebra graduata noetheriana e graduata artiniana.*

*Dimostrazione.* Se il grafo  $E$  ha un numero finito, allora il reticolo  $(\mathcal{H}_E, \leq)$ , formato dagli insiemi di vertici saturi ed ereditari, è finito, in particolare è noetheriano e artiniiano. Inoltre, per ogni  $H \in \mathcal{H}_E$  l'insieme  $B_H$  dei vertici di rottura è finito. Per la Proposizione 2.5.17 possiamo concludere che  $L_K(E)$  è un'algebra graduata noetheriana e graduata artiniana.  $\square$

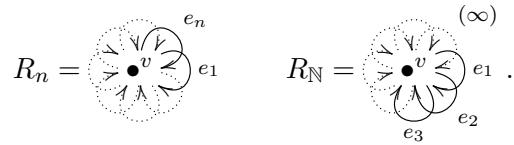
**Corollario 2.5.19.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  di  $E$  è un'algebra graduata semplice se, e solo se, gli unici insiemi di vertici saturi ed ereditari di  $E$  sono l'insieme vuoto ed  $E^0$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $L_K(E)$  sia un'algebra graduata semplice. Se esiste un insieme proprio di vertici  $H$ , saturo ed ereditario, e diverso dal vuoto, allora l'ideale  $I(H)$  di  $L_K(E)$  generato dall'insieme  $H$  è un ideale graduato proprio e non banale. Ciò è una contraddizione con l'ipotesi che  $L_K(E)$  sia graduata semplice. Dunque gli unici insiemi saturi ed ereditari di  $E$  sono l'insieme vuoto ed  $E^0$ .

Supponiamo  $\mathcal{H}_E = \{ \emptyset, E^0 \}$ . Se  $I$  è un ideale graduato di  $L_K(E)$  non banale e proprio, allora per il Lemma 2.4.3 l'insieme  $I \cap E^0$  è saturo ed ereditario. Grazie al Corollario 2.3.9 l'insieme  $I \cap E^0$  non è vuoto, inoltre  $I \cap E^0$  è proprio, altrimenti se  $E^0 \subseteq I$  l'ideale  $I$  coincide con  $L_K(E)$  contrariamente a come abbiamo scelto  $I$ . Possiamo concludere che gli unici ideali graduati di  $L_K(E)$  sono  $\{ 0 \}$  e  $L_K(E)$ , ovvero  $L_K(E)$  è un'algebra graduata semplice.  $\square$

**Esempi.** Vediamo ora come applicare il Teorema di struttura degli Ideali Graduati 2.5.9 e la Proposizione 2.5.17 per studiare il reticolo degli ideali graduati di Leavitt path algebre incontrate precedentemente.

**Esempio 2.5.20.** Siano  $K$  un campo,  $R_n$  la rosa con  $n$  petali, dove  $n \in \mathbb{N}$  come nell'Esempio 1.1.3, e  $R_{\mathbb{N}}$  la rispettiva versione infinita come nell'Esempio 1.1.8:

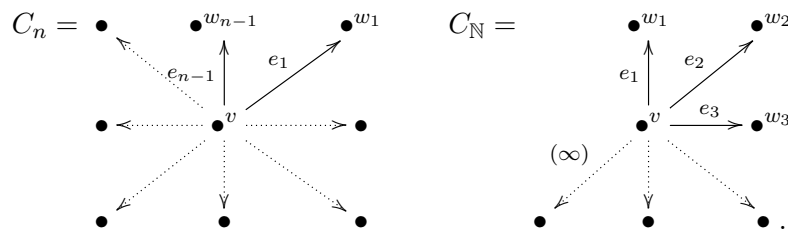


È immediato osservare che

$$\mathcal{H}_{R_n} = \{ \emptyset, R_n^0 \} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_{R_{\mathbb{N}}} = \{ \emptyset, R_{\mathbb{N}}^0 \}.$$

Dunque  $L_K(R_n)$  e  $L_K(R_{\mathbb{N}})$  sono entrambe algebre graduate semplici per il Corollario 2.5.19.

**Esempio 2.5.21.** Siano  $K$  un campo,  $C_n$  il grafo a orologio, dove  $n \in \mathbb{N}$  come nell'Esempio 1.1.7, e la rispettiva versione infinita  $C_{\mathbb{N}}$  come nell'Esempio 1.1.8:



Iniziamo con il caso del grafo  $C_n$ . Indichiamo con  $U$  l'insieme dei vertici  $\{ w_i \mid i = 1, \dots, n-1 \}$ . Gli insiemi saturi ed ereditari di  $C_n$  sono

$$\mathcal{H}_{C_n} = \{ \emptyset, C_n^0, H \mid H \subset U \}.$$

Per il Teorema 2.5.10 gli ideali graduati della Leavitt path algebra  $L_K(C_n)$  sono

$$\mathcal{L}_{gr}(L_K(C_n)) = \{ \{ 0 \}, L_K(C_n), I(H) \mid H \subset U \}.$$

Inoltre, grazie al Corollario 2.5.18 l'algebra  $L_K(C_n)$  è graduata noetheriana e graduata artiniana.

Proseguiamo con il caso del grafo  $C_{\mathbb{N}}$ . Indichiamo con  $U$  l'insieme dei vertici  $\{ w_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ . Gli insiemi saturi ed ereditari di  $C_{\mathbb{N}}$  sono

$$\mathcal{H}_{C_{\mathbb{N}}} = \{ \emptyset, C_{\mathbb{N}}^0, H \mid H \subseteq U \},$$

Per il Teorema di struttura degli Ideali Graduati 2.5.9 l'insieme  $\mathcal{L}_{gr}(L_K(C_{\mathbb{N}}))$  degli ideali graduati di  $L_K(C_{\mathbb{N}})$  è formato dall'ideale banale, dall'algebra  $L_K(C_{\mathbb{N}})$ , dagli ideali generati da un insieme  $H \subseteq U$ , e infine dagli ideali generati da un insieme del tipo

$$H \cup \left\{ v - \sum_{e \in r^{-1}(U \setminus H)} ee^* \right\},$$

dove  $H \subset U$  e  $U \setminus H$  finito.

Consideriamo la catena ascendente  $\{ H_i \}_{i \in \mathbb{N}}$ , dove  $H_i = \{ w_1, \dots, w_i \}$ , e la catena discendente  $\{ U \setminus H_i \}_{i \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{H}_{C_{\mathbb{N}}}$ . Entrambe le catene non sono stazionarie, quindi il reticolo  $(\mathcal{H}_{C_{\mathbb{N}}}, \subseteq)$  non è né noetheriano, né artiniano. Per la Proposizione 2.5.17 l'algebra  $L_K(C_{\mathbb{N}})$  non è né graduata noetheriana, né graduata artiniana.

**Esempio 2.5.22.** Siano  $K$  un campo e  $D_{\mathbb{N}}$  il grafo dell'Esempio 1.1.8:

$$\bullet v \xrightarrow{(\infty)} \bullet w.$$

Gli insiemi saturi ed ereditari sono

$$\mathcal{H}_{D_{\mathbb{N}}} = \{ \emptyset, D_{\mathbb{N}}^0, \{ w \} \}.$$

Osserviamo che l'insieme dei vertici di rottura dell'insieme  $\{ w \}$  è vuoto.

Per il Teorema di Struttura degli Ideali Graduati 2.5.9 l'insieme degli ideali graduati della Leavitt path algebra  $L_K(D_{\mathbb{N}})$  è

$$\mathcal{L}_{gr}(L_K(D_{\mathbb{N}})) = \{ \{ 0 \}, L_K(D_{\mathbb{N}}), I(\{ w \}) \}.$$

Osserviamo che il reticolo  $(\mathcal{H}_{D_{\mathbb{N}}}, \subseteq)$  è finito, in particolare è noetheriano e artiniano. Per ogni insieme  $H \in \mathcal{H}_{D_{\mathbb{N}}}$ , l'insieme  $B_H$  dei vertici di rottura è finito, quindi grazie alla Proposizione 2.5.17 l'algebra  $L_K(D_{\mathbb{N}})$  è graduata noetheriana e graduata artiniana.

**Ideali graduati come Leavitt path algebre.** Sia  $K$  un campo. Un ideale di una  $K$ -algebra  $A$  è ancora una  $K$ -algebra. In questo paragrafo vedremo come gli ideali graduati di una Leavitt path algebra possono essere visti a meno di isomorfismo come Leavitt path algebre di opportuni grafi. Però per ideali bilateri qualunque questo non è sempre vero. Ad esempio, consideriamo la Leavitt path algebra  $L_K(R_1)$  della rosa con un petalo (vedi Esempio 1.1.3 per  $n = 1$ )

$$R_1 = \bullet^v \curvearrowright e,$$

e il suo ideale  $I(v + e)$  generato dall'elemento  $e + v \in L_K(R_1)$ . Per quanto studiato nell'Esempio 1.2.6, l'ideale  $I(v + e)$  corrisponde all'ideale  $I(1 + x)$  della  $K$ -algebra  $K[x^{-1}, x]$  dei polinomi di Laurent, generato dal polinomio  $1 + x$ . Osserviamo che l'ideale  $I(v + e)$  non contiene elementi idempotenti. Dunque  $I(v + e)$  è una  $K$ -algebra non unitaria e senza unità locali. Perciò  $I(v + e)$  non può essere isomorfo a una Leavitt path algebra.

Cominciamo con studiare il caso di un ideale graduato generato da un insieme di vertici saturo ed ereditario.

**Definizione 2.5.23.** Siano  $E$  un grafo e  $H$  un insieme di vertici di  $E$  ereditario. Definiamo l'insieme

$$F_E(H) := \{\lambda \in \text{Path}(E) \mid \lambda = e_1 \cdots e_n, \text{ dove } n \in \mathbb{N}, e_i \in E^0 \\ \text{e } s(e_1) \notin H, r(e_i) \notin H, r(e_n) \in H \forall i = 1, \dots, n-1\}.$$

Denotiamo con  $\overline{F}_E(H)$  una copia dell'insieme  $F_E(H)$ , e con  $\overline{\lambda} \in \overline{F}_E(H)$  indichiamo la copia dell'elemento  $\lambda \in F_E(H)$ .

Definiamo il *grafo a riccio*  ${}_H E = ({}_H E^0, {}_H E^1, s', r')$ , dove gli insiemi dei vertici e dei lati sono rispettivamente

$${}_H E^0 = H \cup F_E(H) \\ {}_H E^1 = \{e \in E^1 \mid s(e) \in H\} \cup \overline{F}_E(H);$$

le funzioni  $s'$  ed  $r'$  coincidono rispettivamente con le funzioni  $s$  ed  $r$  di  $E$  sull'insieme  $\{e \in E^1 \mid s(e) \in H\}$ , mentre per ogni  $\overline{\lambda} \in \overline{F}_E(H)$  vale  $s'(\overline{\lambda}) = \lambda$  ed  $r'(\overline{\lambda}) = r(\lambda)$ .

**Osservazione 2.5.24.** Siano  $E$  un grafo e  $H$  un insieme di vertici di  $E$  ereditario. Notiamo che i cicli nel grafo  ${}_H E$  della Definizione 2.5.23 sono esattamente i cicli nell'insieme  $H$ . In particolare, i cicli senza uscite di  ${}_H E$  corrispondono ai cicli senza uscite nell'insieme  $H$ .

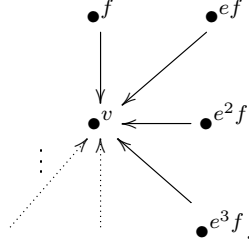
Vediamo un esempio della costruzione del grafo a riccio introdotto nella Definizione 2.5.23.

**Esempio 2.5.25.** Sia  $E_T$  il grafo di Toeplitz come nell'Esempio 1.1.4:

$$e \curvearrowleft \bullet^u \xrightarrow{f} \bullet^v.$$

Consideriamo l'insieme ereditario  $H := \{v\}$ . Allora l'insieme  $F_{E_T}(H)$  è dato da  $\{e^n f \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ .

Il grafo a riccio  ${}_H E_T$  è



**Teorema 2.5.26.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Sia  $H$  un insieme di vertici di  $E$  non vuoto ed ereditario. Allora la Leavitt path algebra  $L_K({}_H E)$  del grafo a riccio  ${}_H E$  della Definizione 2.5.23, e l'ideale bilatero  $I(H)$  della Leavitt path algebra  $L_K(E)$  generato dall'insieme  $H$ , sono isomorfi come  $K$ -algebre.*

*Dimostrazione.* Per quanto riguarda il grafo  ${}_H E$  facciamo riferimento alle notazioni della Definizione 2.5.23. Utilizziamo la Proprietà Universale 1.2.2 di  $L_K({}_H E)$  per definire un omomorfismo di  $K$ -algebre  $\varphi : L_K({}_H E) \rightarrow L_K(E)$ . Consideriamo i seguenti elementi di  $L_K(E)$ :

$$a_v = \begin{cases} v & \text{se } v \in H \\ \lambda\lambda^* & \text{se } v = \lambda \in F_E(H), \end{cases} \quad a_e = \begin{cases} e & \text{se } e \in s^{-1}(H) \\ \lambda & \text{se } e = \bar{\lambda} \in \bar{F}_E(H), \end{cases}$$

$$b_e = \begin{cases} e^* & \text{se } e \in s^{-1}(H) \\ \lambda^* & \text{se } e = \bar{\lambda} \in \bar{F}_E(H), \end{cases}$$

per ogni  $v \in {}_H E^0$  e per ogni  $e \in {}_H E^1$ .

Verifichiamo ora che tali elementi soddisfino le condizioni della Proprietà Universale 1.2.2. Controlliamo che gli elementi  $\{a_v \mid v \in {}_H E^0\}$  sono idempotenti e ortogonali tra loro. Se  $v, w \in H$ , allora possiamo concludere grazie alla relazione (CK2) della Definizione 1.2.1. Se  $v = \lambda \in F_E(H)$  e  $w = \mu \in F_E(H)$ , allora

$$a_v a_w = \lambda\lambda^* \mu\mu^*,$$

dove otteniamo  $\lambda\lambda^* = a_v$  se  $v = w$ , altrimenti otteniamo 0. Se  $v \in H$  e  $w = \mu \in F_E(H)$ , allora

$$a_v a_w = v\mu\mu^* = 0,$$

perché il vertice iniziale del cammino  $\mu$  non appartiene ad  $H$ .

Verifichiamo la condizione (i). Sia  $e \in s^{-1}(H)$ , allora la condizione (i) è soddisfatta grazie alle relazioni (E1) ed (E2) della Definizione 1.2.1. Sia

$e = \bar{\lambda} \in \overline{F}_E(H)$ , allora

$$\begin{aligned} a_{s(e)}a_e &= \lambda\lambda^*\lambda = \lambda r(\lambda) = \lambda = a_e \\ a_e a_{r(e)} &= \lambda r(\lambda) = \lambda = a_e \\ a_{r(e)}b_e &= r(\lambda)\lambda^* = e^* = b_e \\ b_e a_{s(e)} &= \lambda^*\lambda\lambda^* = r(\lambda)\lambda^* = b_e. \end{aligned}$$

Verifichiamo la condizione (ii). Siano  $e, f \in s^{-1}(H)$ , allora la condizione (ii) è soddisfatta grazie alla relazione (CK1) della Definizione 1.2.1. Siano  $e \in s^{-1}(H)$  e  $f = \bar{\lambda} \in \overline{F}_E(H)$ , allora

$$b_f a_e = \lambda^* e = 0,$$

perché il vertice finale del cammino  $\lambda^*$  non appartiene ad  $H$ . Siano  $e = \bar{\lambda} \in \overline{F}_E(H)$  e  $f \in s^{-1}(v)$ , allora

$$b_f a_e = f^* \lambda = 0$$

perché il vertice iniziale di  $\lambda$  non appartiene ad  $H$ . Siano  $e = \bar{\lambda}, f = \bar{\mu} \in \overline{F}_E(H)$ , allora

$$b_f a_e = \mu^* \lambda,$$

dove otteniamo  $\lambda^* \lambda = r(\lambda) = a_{r'(\bar{\lambda})}$  se  $e = f$ , altrimenti otteniamo 0.

Verifichiamo la condizione (iii). Sia  $v$  un vertice regolare del grafo  ${}_H E$ . Se  $v \in \text{Reg}(E) \cap H$ , allora osservando che  $s^{-1}(v) = (s')^{-1}(v)$  possiamo scrivere

$$a_v = v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} e e^* = \sum_{(s')^{-1}(v)} a_e b_e,$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato la relazione (CK2) della Definizione 1.2.1. Se  $v = \lambda \in F_E(H)$ , allora osservando che  $(s')^{-1}(v) = \{e := \bar{\lambda}\}$  possiamo scrivere

$$a_v = \lambda\lambda^* = a_e b_e.$$

Per la Proprietà Universale 1.2.2 possiamo concludere che esiste un omomorfismo di  $K$ -algebre  $\varphi : L_K({}_H E) \rightarrow L_K(E)$  tale che

$$\varphi(v) = \begin{cases} v & \text{se } v \in H \\ \lambda\lambda^* & \text{se } v = \lambda \in F_E(H), \end{cases} \quad \varphi(e) = \begin{cases} e & \text{se } e \in s^{-1}(H) \\ \lambda & \text{se } e = \bar{\lambda} \in \overline{F}_E(H), \end{cases}$$

$$\varphi(e^*) = \begin{cases} e^* & \text{se } e \in s^{-1}(H) \\ \lambda^* & \text{se } e = \bar{\lambda} \in \overline{F}_E(H), \end{cases}$$

per ogni  $v \in {}_H E^0$  e per ogni  $e \in {}_H E^1$ .

Verifichiamo che l'immagine dell'omomorfismo  $\varphi$  coincide con l'ideale bilatero  $I(H)$ . Dalla definizione di  $\varphi$  è immediato osservare che la sua immagine è contenuta in  $I(H)$ . Ora dimostriamo che ogni vertice di  $H$  e ogni cammino di  $E$  con vertice finale in  $H$  appartengono all'immagine di  $\varphi$ . Per definizione abbiamo  $\varphi(v) = v$  per ogni  $v \in H$ . Sia  $\gamma = e_1 \cdots e_n \in \text{Path}(E)$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $e_i \in E^1$  ed  $r(\gamma) \in H$ . Se  $s(\gamma) \in H$ , allora  $\gamma = \varphi(e_1) \cdots \varphi(e_n) = \varphi(e_1 \cdots e_n)$ , altrimenti esiste  $j = 1, \dots, n-1$  tale che  $r(e_j) \notin H$  e  $r(e_{j+1}) \in H$ . Possiamo scrivere  $\gamma = \beta e_{j+2} \cdots e_n$ , dove  $\beta = e_1 \cdots e_{j+1} \in F_E(H)$ . Dunque

$$\gamma = \beta e_{j+2} \cdots e_n = \varphi(\bar{\beta})\varphi(e_{j+2}) \cdots \varphi(e_n) = \varphi(\bar{\beta}e_{j+2} \cdots e_n).$$

Grazie al Lemma 2.4.1 possiamo concludere ogni elemento di  $I(H)$  appartiene all'immagine di  $\varphi$ .

Ricordiamo che ogni ciclo senza uscite nel grafo  ${}_H E$  corrisponde a un ciclo senza uscite in  $H$ , in particolare, l'immagine tramite  $\varphi$  di un ciclo senza uscite in  ${}_H E$  è un elemento non nullo e omogeneo di  $L_K(E)$ . Inoltre, nessun vertice di  ${}_H E$  appartiene al nucleo di  $\varphi$ . Grazie alla Proposizione 2.3.13 possiamo concludere che  $\varphi$  è iniettivo.

Per il Primo Teorema di Isomorfismo abbiamo  $L_H({}_H E) \cong I(H)$ , come  $K$ -algebra.  $\square$

Ora vogliamo generalizzare il Teorema 2.5.26 a tutti gli ideali graduati di una Leavitt path algebra.

Per prima cosa introduciamo una nuova versione del grafo a riccio.

**Definizione 2.5.27.** Sia  $E$  un grafo. Consideriamo un insieme  $H$  di vertici di  $E$  non vuoto ed ereditario, e  $S \subseteq B_H$ . Definiamo i seguenti insiemi disgiunti:

$$F_1(H, S) := \{ \lambda \in \text{Path}(E) \mid \lambda = e_1 \cdots e_n, n \in \mathbb{N}, e_i \in E^1, r(e_n) \in H \text{ ed } s(e_n) \notin H \cup S \},$$

$$F_2(H, S) := \{ \lambda \in \text{Path}(E) \mid \ell(\lambda) \geq 1 \text{ ed } r(\lambda) \in S \}.$$

Per  $i = 1, 2$  indichiamo con  $\bar{F}_i(H, S)$  una copia dell'insieme  $F_i(H, S)$ , e indichiamo con  $\bar{\lambda} \in \bar{F}_i(H, S)$  una copia dell'elemento  $\lambda \in F_i(H, S)$ .

Definiamo il grafo  $({}_{(H,S)} E = ({}_{(H,S)} E^0, ({}_{(H,S)} E^1, s'', r''))$ , dove gli insiemi dei vertici e dei lati sono rispettivamente

$$({}_{(H,S)} E^0 = H \cup S \cup F_1(H, S) \cup F_2(H, S),$$

$$({}_{(H,S)} E^1 = \{ e \in E^1 \mid s(e) \in H \} \cup \{ e \in E^1 \mid s(e) \in S \text{ ed } r(e) \in H \} \cup \bar{F}_1(H, S) \cup \bar{F}_2(H, S).$$

Le funzioni  $s''$  ed  $r''$  coincidono con le funzioni  $s$  ed  $r$  di  $E$  nell'insieme

$$\{ e \in E^1 \mid s(e) \in H \} \cup \{ e \in E^1 \mid s(e) \in S \text{ ed } r(e) \in H \},$$

mentre per ogni  $\bar{\lambda} \in \bar{F}_1(H, S) \cup \bar{F}_2(H, S)$  vale  $s''(\bar{\lambda}) = \lambda$  ed  $r''(\bar{\lambda}) = r(\lambda)$ .

**Osservazione 2.5.28.** Sia  $E$  un grafo. Consideriamo un insieme  $H$  di vertici di  $E$  non vuoto ed ereditario, ed  $S \subseteq B_H$ . Se  $S = \emptyset$ , allora

$$F_1(H, \emptyset) = F_E(H) \quad \text{e} \quad F_2(H, \emptyset) = \emptyset,$$

quindi il grafo  ${}_{(H,S)}E$  della Definizione 2.5.27 coincide con il grafo  ${}_HE$  della Definizione 2.5.23.

**Teorema 2.5.29.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo un insieme  $H$  di vertici di  $E$  non vuoto, saturo ed ereditario, ed  $S \subseteq B_H$ . Allora l'ideale bilatero  $I(H \cup S^H)$  della Leavitt path algebra  $L_K(E)$  di  $E$  generato dall'insieme  $H \cup S^H$ , e la Leavitt path algebra  $L_K({}_{(H,S)}E)$  del grafo  ${}_{(H,S)}E$  della Definizione 2.5.27, sono isomorfi come  $K$ -algebre.*

*Dimostrazione.* Per quanto riguarda il grafo  ${}_{(H,S)}E$  facciamo riferimento alle notazioni della Definizione 2.5.27. Utilizziamo la Proprietà Universale 1.2.2 di  $L_K({}_{(H,S)}E)$  per definire un omomorfismo di  $K$ -algebre  $\varphi : L_K({}_{(H,S)}E) \rightarrow L_K(E)$ . Consideriamo i seguenti elementi di  $L_K(E)$ :

$$a_v = \begin{cases} v & \text{se } v \in H \\ v^H & \text{se } v \in S \\ \lambda\lambda^* & \text{se } v = \lambda \in F_1(H, S) \\ \lambda r(\lambda)^H \lambda^* & \text{se } v = \lambda \in F_2(H, S), \end{cases}$$

$$a_e = \begin{cases} e & \text{se } e \in E^1 \\ \lambda & \text{se } e = \bar{\lambda} \in \bar{F}_1(H, S) \\ \lambda r(\lambda)^H & \text{se } e = \bar{\lambda} \in \bar{F}_2(H, S), \end{cases} \quad b_e = \begin{cases} e^* & \text{se } e \in E^1 \\ \lambda^* & \text{se } e = \bar{\lambda} \in \bar{F}_1(H, S) \\ r(\lambda)^H \lambda^* & \text{se } e = \bar{\lambda} \in \bar{F}_2(H, S), \end{cases}$$

per ogni  $v \in {}_{(H,S)}E^0$  e per ogni  ${}_{(H,S)}E^1$ .

Verifichiamo che tali elementi soddisfano le condizioni della Proprietà Universale 1.2.2. Controlliamo che gli elementi  $\{ a_v \mid v \in {}_{(H,S)}E^0 \}$  siano idempotenti e ortogonali tra loro. Se  $v \in H \cup S$ , allora  $a_v$  è idempotente grazie alla relazione (CK2) della Definizione 1.2.1 o grazie all'Osservazione 2.4.6. Se  $v = \lambda \in F_1(H, S)$ , allora

$$a_v a_v = \lambda\lambda^* \lambda\lambda^* = \lambda r(\lambda)\lambda^* = \lambda\lambda^* = a_v.$$

Se  $v = \lambda \in F_2(H, S)$ , allora

$$\begin{aligned} a_v a_v &= \lambda r(\lambda)^H \lambda^* \lambda r(\lambda)^H \lambda^* \\ &= \lambda r(\lambda)^H r(\lambda) r(\lambda)^H \lambda^* \\ &= \lambda r(\lambda)^H \lambda^* = a_v. \end{aligned}$$



Con un calcolo immediato si verifica che tali elementi sono ortogonali tra loro.

Verifichiamo la condizione (i). Se  $e \in {}_{(H,S)}E^1 \cap E^1$ , allora possiamo concludere per le relazioni (E1) ed (E2) della Definizione 1.2.1 di  $L_K(E)$ . Se  $e = \bar{\lambda} \in \bar{F}_1(H, S)$ , allora

$$\begin{aligned} a_{s(e)}a_e &= \lambda\lambda^*\lambda = \lambda r(\lambda) = \lambda = a_e \\ a_e a_{r(e)} &= \lambda r(\lambda) = \lambda = a_e \\ a_{r(e)}b_e &= r(\lambda)\lambda^* = \lambda^* = b_e \\ b_e a_{s(e)} &= \lambda^*\lambda\lambda^* = r(\lambda)\lambda^* = \lambda^* = b_e. \end{aligned}$$

Se  $e = \bar{\lambda} \in \bar{F}_2(H, S)$ , allora

$$\begin{aligned} a_{s(e)}a_e &= \lambda r(\lambda)^H \lambda^* \lambda r(\lambda)^H = \lambda r(\lambda)^H r(\lambda) r(\lambda)^H = \lambda r(\lambda)^H = a_e \\ a_e a_{r(e)} &= \lambda r(\lambda)^H r(\lambda)^H = \lambda r(\lambda)^H = a_e \\ a_{r(e)}b_e &= r(\lambda)^H r(\lambda)^H \lambda^* = r(\lambda)^H \lambda^* = b_e \\ b_e a_{s(e)} &= r(\lambda)^H \lambda^* \lambda r(\lambda)^H \lambda^* = r(\lambda)^H r(\lambda) r(\lambda)^H \lambda^* = r(\lambda)^H \lambda^* = b_e. \end{aligned}$$

Verifichiamo la condizione (ii). Siano  $e, f \in {}_{(H,S)}E^1 \cap E^1$ , allora possiamo concludere grazie alla relazione (CK1) della Definizione 1.2.1 di  $L_K(E)$ . Sia  $e = \bar{\lambda} \in \bar{F}_1(H, S)$ , allora

$$b_e a_e = \lambda^* \lambda = r(\lambda) = a_{r(e)}.$$

Sia  $e = \bar{\lambda} \in \bar{F}_2(H, S)$ , allora

$$b_e a_e = r(\lambda)^H \lambda^* \lambda r(\lambda)^H = r(\lambda)^H r(\lambda) r(\lambda)^H = r(\lambda)^H = a_{r(e)}.$$

Con un calcolo immediato si verifica  $b_f a_e = 0$  se  $e \neq f$ .

Verifichiamo la condizione (iii). Sia  $v$  un vertice regolare di  ${}_{(H,S)}E$ . Se  $v \in \text{Reg}(E) \cap H$ , allora osservando che  $s^{-1}(v) = (s'')^{-1}(v)$  possiamo scrivere

$$a_v = v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} e e^* = \sum_{e \in (s'')^{-1}(v)} a_e b_e,$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato la relazione (CK2) della Definizione 1.2.1 di  $L_K(E)$ . Se  $v = \lambda \in F_1(H, S)$ , allora osservando che  $(s'')^{-1}(v) = \{e := \bar{\lambda}\}$  possiamo scrivere

$$a_v = \lambda\lambda^* = a_e b_e.$$

Analogamente, se  $v = \lambda \in F_2(H, S)$ , allora

$$a_v = \lambda r(\lambda)^H \lambda^* = \lambda r(\lambda)^H r(\lambda)^H \lambda^* = a_e b_e.$$

Per la Proprietà Universale 1.2.2 esiste  $\varphi : L_K((H,S)E) \rightarrow L_K(E)$  omomorfismo di  $K$ -algebre tale che

$$\varphi(v) = \begin{cases} v & \text{se } v \in H \\ v^H & \text{se } v \in S \\ \lambda\lambda^* & \text{se } v = \lambda \in F_1(H, S) \\ \lambda r(\lambda)^H \lambda^* & \text{se } v = \lambda \in F_2(H, S), \end{cases}$$

$$\varphi(e) = \begin{cases} e & \text{se } e \in E^1 \\ \lambda & \text{se } e = \bar{\lambda} \in \bar{F}_1(H, S) \\ \lambda r(\lambda)^H & \text{se } e = \bar{\lambda} \in \bar{F}_2(H, S), \end{cases}$$

$$\varphi(e^*) = \begin{cases} e^* & \text{se } e \in E^1 \\ \lambda^* & \text{se } e = \bar{\lambda} \in \bar{F}_1(H, S) \\ r(\lambda)^H \lambda^* & \text{se } e = \bar{\lambda} \in \bar{F}_2(H, S), \end{cases}$$

per ogni  $v \in (H,S)E^0$  e per ogni  $(H,S)E^1$ .

Dalla definizione di  $\varphi$  possiamo osservare che la sua immagine è contenuta in  $I(H \cup S^H)$ . Vogliamo ora dimostrare che l'ideale  $I(H \cup S^H)$  è contenuto nell'immagine di  $\varphi$ . Facciamo riferimento al Lemma 2.4.8 e dimostriamo che i generatori di  $I(H \cup S^H)$  come  $K$ -spazio vettoriale appartengono all'immagine di  $\varphi$ .

Sia  $\gamma \in \text{Path}(E)$  ed  $r(\gamma) \in H$ . Si possono presentare quattro casi:

- (1) se  $\gamma = e_1 \cdots e_n$ , dove  $n \in \mathbb{N}$  ed  $s(\gamma) \in H$ , allora

$$\gamma = e_1 \cdots e_n = \varphi(e_1) \cdots \varphi(e_n) = \varphi(e_1 \cdots e_n);$$

- (2) se  $\gamma = e_1 \cdots e_n$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s(\gamma) \in S$  ed  $r(e_1) \in H$ , allora come nel caso (1)

$$\gamma = e_1 \cdots e_n = \varphi(e_1) \cdots \varphi(e_n) = \varphi(e_1 \cdots e_n);$$

- (3) se  $\gamma = f_1 \cdots f_m e_1 \cdots e_n$  dove  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $r(f_m) \in H$  ed  $s(f_m) \notin H \cup S$ , allora poniamo  $\beta := f_1 \cdots f_m \in F_1(H, S)$  e scriviamo

$$\gamma = \beta e_1 \cdots e_n = \varphi(\bar{\beta}) \varphi(e_1) \cdots \varphi(e_n) = \varphi(\bar{\beta} e_1 \cdots e_n);$$

(4) se  $\gamma = f_1 \cdots f_m g e_1 \cdots e_n$  dove  $r(g) \in H$ ,  $s(g) \in S$  ed  $n, m \in \mathbb{Z}^+$  con  $m \geq 1$ , allora poniamo  $\beta := f_1 \cdots f_m \in F_2(H, S)$  e calcoliamo

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar{\beta} g e_1 \cdots e_n) &= \varphi(\bar{\beta}) \varphi(g) \varphi(e_1) \cdots \varphi(e_n) \\
&= \beta r(\beta)^H g e_1 \cdots e_n \\
&= \beta \left( r(\beta) - \sum_{e \in A(r(\beta), H)} e e^* \right) g e_1 \cdots e_n \\
&= \beta r(\beta) g e_1 \cdots e_n + \beta \left( \sum_{e \in A(r(\beta), H)} e e^* \right) g e_1 \cdots e_n \\
&= \beta r(\beta) g e_1 \cdots e_n + \sum_{e \in A(r(\beta), H)} (\beta e e^* g e_1 \cdots e_n) \\
&= \beta g e_1 \cdots e_n = \gamma.
\end{aligned}$$

Sia  $\gamma v^H \in I(H \cup S^H)$  tale che  $\gamma \in \text{Path}(E)$  ed  $r(\gamma) = v \in S$ . Se  $\ell(\gamma) = 0$ , allora  $\gamma = v$  e  $\gamma v^H = v^H = \varphi(v)$ . Se  $\ell(\gamma) \geq 1$ , allora  $\gamma \in F_2(H)$  e  $\gamma v^H = \varphi(\bar{\gamma})$ .

Osserviamo che nessun vertice di  $(H, S)E$  appartiene al nucleo di  $\varphi$ . Inoltre, ogni ciclo di  $(H, S)E$  ha i vertici che appartengono all'insieme  $H \cup S$ , in particolare l'immagine tramite  $\varphi$  di un ciclo senza uscite di  $(H, S)E$  è ancora un ciclo senza uscite di  $E$ , ovvero è un elemento non nullo e omogeneo di  $L_K(E)$ . Per la Proposizione 2.3.13 possiamo concludere che  $\varphi$  è iniettivo.

Per il Primo Teorema di Isomorfismo abbiamo che  $L_K((H, S)E) \cong I(H \cup S^H)$  come  $K$ -algebre.  $\square$

**Proposizione 2.5.30.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $\{H_j\}_{j \in J}$  una famiglia di insiemi di vertici di  $E$  ereditari, indicizzata su un insieme  $J$  arbitrario. Allora valgono le seguenti uguaglianze tra ideali bilateri della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ :*

$$(i) \quad I\left(\bigcap_{j \in J} \overline{H_j}\right) = \bigcap_{j \in J} I(H_j);$$

$$(ii) \quad I\left(\bigcap_{j \in J} H_j\right) = \bigcap_{j \in J} I(H_j) \text{ se } J \text{ è finito.}$$

*Dimostrazione.* Cominciamo con dimostrare il punto (i). Siccome  $\bigcap_{j \in J} I(H_j)$  è un ideale graduato di  $L_K(E)$ , allora grazie al Teorema 2.4.10 esistono  $H$  insieme di vertici di  $E$  saturo ed ereditario, e  $S \subseteq B_H$  tali che  $\bigcap_{j \in J} I(H_j) = I(H \cup S^H)$ . L'insieme  $H$  è formato da tutti i vertici presenti nell'ideale  $\bigcap_{j \in J} I(H_j)$ :

$$H = \left( \bigcap_{j \in J} I(H_j) \right) \cap E^0 = \left( \bigcap_{j \in J} I(\overline{H_j}) \right) \cap E^0 = \bigcap_{j \in J} (I(\overline{H_j}) \cap E^0) = \bigcap_{j \in J} \overline{H_j},$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo usato il Lemma 2.4.1, nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il Corollario 2.4.23.

Ora vogliamo dimostrare che l'insieme  $S = \left\{ v \in B_H \mid v^H \in \bigcap_{j \in J} I(H_j) \right\}$  è vuoto. Supponiamo per assurdo che esista  $v \in S$ . In particolare, abbiamo  $v \notin H$ . Dunque esiste  $i \in J$  tale che  $v \notin \overline{H_i}$ . Se  $v$  è un vertice di rottura dell'insieme  $\overline{H_i}$ , allora abbiamo

$$v^{\overline{H_i}} = v^H + \sum_{e \in s^{-1}(v) \cap r^{-1}(\overline{H_i} \setminus H)} ee^*.$$

Osserviamo che entrambi gli addendi a secondo membro appartengono a  $I(\overline{H_i})$ , quindi deve essere  $v^H \in I(\overline{H_i})$ . Ma siccome l'ideale graduato  $I(\overline{H_i})$  è generato solo da un insieme di vertici abbiamo  $v \in \overline{H_i}$ , che è una contraddizione.

Se  $v$  non è un vertice di rottura di  $\overline{H_i}$ , ovvero  $r(s^{-1}(v)) \subseteq \overline{H_i}$ , allora possiamo scrivere

$$v = v^H + \sum_{e \in s^{-1}(v) \cap r^{-1}(\overline{H_i} \setminus H)} ee^* \in I(\overline{H_i}),$$

perché entrambi gli addendi a secondo membro appartengono a  $I(\overline{H_i})$ . Possiamo concludere  $v \in I(\overline{H_i}) \cap E^0 = \overline{H_i}$ , che è una contraddizione.

Visto che abbiamo appena dimostrato che  $S = \emptyset$ , allora abbiamo

$$\bigcap_{j \in J} I(H_j) = I(H \cup S^H) = I(H) = I\left(\bigcap_{j \in J} \overline{H_j}\right).$$

Dimostriamo il punto (ii). Sia  $J$  finito. Verifichiamo per prima cosa che

$$\overline{\bigcap_{j \in J} H_j} = \bigcap_{j \in J} \overline{H_j}. \quad (2.17)$$

In particolare, consideriamo il caso di un insieme  $J$  di cardinalità 2; vogliamo dimostrare dunque che

$$\overline{H_1 \cap H_2} = \overline{H_1} \cap \overline{H_2},$$

dove  $H_1$  e  $H_2$  sono insiemi di vertici di  $E$  ereditari. Il caso generale segue per induzione sulla cardinalità di  $J$ .

Da  $H_1 \cap H_2 \subseteq H_1, H_2$  abbiamo  $\overline{H_1 \cap H_2} \subseteq \overline{H_1}, \overline{H_2}$  e di conseguenza  $\overline{H_1 \cap H_2} \subseteq \overline{H_1} \cap \overline{H_2}$ .

Per dimostrare  $\overline{H_1} \cap \overline{H_2} \subseteq \overline{H_1 \cap H_2}$ , applichiamo il Lemma 2.1.8 e scriviamo

$$\overline{H_1} = \bigcup_{n \geq 0} X_n, \quad \overline{H_2} = \bigcup_{n \geq 0} Y_n, \quad \overline{H_1} \cap \overline{H_2} = \bigcup_{n \geq 0} Z_n.$$

Dimostriamo per induzione su  $n$  che  $X_n \cap Y_n \subseteq Z_n$ . Se  $n = 0$ , allora

$$x_0 \cap Y_0 = H_1 \cap H_2 = Z_0.$$

Supponiamo che la nostra tesi valga per  $n - 1$ , con  $n > 0$ . Scriviamo

$$X_n \cap Y_n = (X_{n-1} \cup \{ v \in \text{Reg}(E) \mid r(s^{-1}(v)) \subseteq X_{n-1} \}) \cap \\ (Y_{n-1} \cup \{ v \in \text{Reg}(E) \mid r(s^{-1}(v)) \subseteq Y_{n-1} \})$$

e

$$Z_n = Z_{n-1} \cup \{ v \in \text{Reg}(E) \mid r(s^{-1}(v)) \subseteq Z_{n-1} \}.$$

Sia  $v \in X_n \cap Y_n$ , allora si possono presentare quattro casi:

- (1) se  $v \in X_{n-1} \cap Y_{n-1}$ , allora per l'ipotesi induttiva  $v \in Z_{n-1} \subseteq Z_n$ ;
- (2) se  $v \in \text{Reg}(E) \cap Y_{n-1}$  ed  $r(s^{-1}(v)) \subseteq X_{n-1}$ , allora per l'ereditarietà di  $Y_{n-1}$  e per l'ipotesi induttiva abbiamo

$$r(s^{-1}(v)) \subseteq X_{n-1} \cap Y_{n-1} \subseteq Z_{n-1} \subseteq Z_n;$$

- (3) se  $v \in \text{Reg}(E) \cap X_{n-1}$  ed  $r(s^{-1}(v)) \subseteq Y_{n-1}$ , si procede in modo analogo al caso (2);
- (4) se  $v \in \text{Reg}(E)$  ed  $r(s^{-1}(v)) \subseteq X_{n-1}, Y_{n-1}$ , allora per l'ipotesi induttiva abbiamo

$$r(s^{-1}(v)) \subseteq X_{n-1} \cap Y_{n-1} \subseteq Z_{n-1} \subseteq Z_n.$$

Grazie a quanto appena dimostrato possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \overline{H_1} \cap \overline{H_2} &= \left( \bigcup_{n \geq 0} X_n \right) \cap \left( \bigcup_{n \geq 0} Z_n \right) \\ &= \bigcup_{n \geq 0} (X_n \cap Y_n) \\ &\subseteq \bigcup_{n \geq 0} Z_n = \overline{H_1 \cap H_2}. \end{aligned}$$

Ora applicando la formula 2.17 otteniamo l'uguaglianza del punto (ii):

$$I\left(\bigcap_{j \in J} H_j\right) = I\left(\overline{\bigcap_{j \in J} H_j}\right) = \bigcap_{j \in J} I(\overline{H_j}) = \bigcap_{j \in J} I(H_j),$$

dove nella prima e ultima uguaglianza abbiamo usato il Lemma 2.4.1.  $\square$

## 2.6 Lo zoccolo di una Leavitt path algebra

In questa sezione vogliamo indagare lo zoccolo di una Leavitt path algebra. In particolare riusciremo a dare una descrizione dello zoccolo come ideale generato da un opportuno insieme di vertici.

**Lo zoccolo di un anello.** Per cominciare richiamiamo la definizione di zoccolo di un anello e studiamo alcune sue caratteristiche nel caso di anelli con unità locali (vedi Definizione 1.2.4).

**Definizione 2.6.1.** Sia  $R$  un anello. Lo *zoccolo sinistro* di  $R$ , indicato con  $\text{Soc}({}_R R)$ , è l'ideale sinistro di  $R$  ottenuto dalla somma degli ideali sinistri minimali di  $R$ . Se l'anello  $R$  non contiene ideali sinistri minimali allora poniamo  $\text{Soc}({}_R R) = \{0\}$ .

Lo *zoccolo destro* di  $R$ , indicato con  $\text{Soc}(R_R)$ , è l'ideale destro di  $R$  ottenuto dalla somma degli ideali destri minimali di  $R$ . Se l'anello  $R$  non contiene ideali destri minimali allora poniamo  $\text{Soc}(R_R) = \{0\}$ .

**Osservazione 2.6.2.** Siano  $R$  un anello e  $f : {}_R R \rightarrow {}_R R$  un endomorfismo di  $R$ -moduli sinistri non nullo. Consideriamo  $I$  ideale sinistro minimale di  $R$ . Se  $I$  è contenuto nel nucleo di  $f$ , allora  $f(I) = \{0\} \subseteq \text{Soc}({}_R R)$ . Altrimenti, per la semplicità di  $I$  l'immagine  $f(I)$  è un ideale sinistro minimale di  $R$ , dunque anche in questo caso  $f(I) \subseteq \text{Soc}({}_R R)$ .

Possiamo concludere che  $f(\text{Soc}({}_R R)) \subseteq \text{Soc}({}_R R)$  per ogni endomorfismo  $f : {}_R R \rightarrow {}_R R$  di  $R$ -moduli sinistri. In particolare, se consideriamo  $r \in R$  non nullo e l'endomorfismo  $\rho_r : {}_R R \rightarrow {}_R R$  tale che  $\rho_r(x) = xr$  per ogni  $x \in R$ , allora abbiamo  $\rho_r(\text{Soc}({}_R R)) = \text{Soc}({}_R R)r \subseteq \text{Soc}({}_R R)$  per ogni  $r \in R$ , ovvero  $\text{Soc}({}_R R)$  è un ideale bilatero di  $R$ .

Analogamente, si può dimostrare che  $f(\text{Soc}(R_R)) \subseteq \text{Soc}(R_R)$  per ogni endomorfismo  $f : R_R \rightarrow R_R$  di  $R$ -moduli destri e che  $\text{Soc}(R_R)$  è un ideale bilatero di  $R$ .

**Proposizione 2.6.3.** Siano  $R$  un anello ed  $e^2 = e \in R$ . Allora

- (i) l'anello unitario  $eRe$  è isomorfo all'anello  $\text{Hom}(eR, eR)$  degli endomorfismi dell' $R$ -modulo destro  $eR$ ;
- (ii) l'anello unitario  $eRe$  è isomorfo all'anello  $\text{Hom}(Re, Re)$  degli endomorfismi dell' $R$ -modulo sinistro  $Re$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo il punto (i); il punto (ii) è analogo. Definiamo la seguente funzione:

$$\varphi : eRe \rightarrow \text{Hom}(eR, eR),$$

dove per ogni  $r \in R$ ,  $\varphi(ere)$  è un endomorfismo di  $eR$  tale che  $\varphi(ere)(es) = erees = eres$  per ogni  $s \in R$ .

Verifichiamo che  $\varphi$  è un omomorfismo di anelli. L'immagine dell'unità  $e$  e dello 0 di  $eRe$  sono rispettivamente l'endomorfismo identità e l'endomorfismo nullo di  $eR$ :

$$\begin{aligned}\varphi(e)(es) &= ees = es \quad \text{per ogni } s \in R \\ \varphi(0)(es) &= 0es = 0 \quad \text{per ogni } s \in R.\end{aligned}$$

Inoltre,  $\varphi$  rispetta le operazioni di anello di  $eRe$ :

$$\begin{aligned}\varphi((ere)(er'e))(es) &= (ereer'e)(es) \\ &= (ere)(er'ees) \\ &= \varphi(ere) \circ \varphi(er'e)(es),\end{aligned}$$

per ogni  $r, r', s \in R$ ;

$$\begin{aligned}\varphi(ere + er'e)(es) &= (ere + er'e)(es) \\ &= erees + er'ees \\ &= \varphi(ere)(es) + \varphi(er'e)(es),\end{aligned}$$

per ogni  $r, r', s \in R$ .

Dimostriamo che l'omomorfismo  $\varphi$  è iniettivo e suriettivo. Supponiamo esista  $ere \in eRe$  tale che  $\varphi(ere)(es) = 0$  per ogni  $s \in R$ . Se scegliamo  $s = e$ , abbiamo

$$\varphi(ere)(e) = eree = ere = 0,$$

ovvero il nucleo di  $\varphi$  è banale.

Consideriamo  $\psi \in \text{Hom}(eR, eR)$ . Verifichiamo che l'immagine tramite  $\varphi$  di  $\psi(e)e \in eRe$  è proprio l'endomorfismo  $\psi$ :

$$\varphi(\psi(e)e)(es) = \psi(e)ees = \psi(e)es = \psi(ees) = \psi(es),$$

per ogni  $s \in R$ .

Grazie a quanto appena visto possiamo concludere che  $\varphi$  è un isomorfismo di anelli.  $\square$

**Proposizione 2.6.4.** *Siano  $R$  un anello semiprimo con unità locali. Consideriamo  $e^2 = e \in R$ . Allora*

- (i) *l'ideale destro  $eR$  generato da  $e$  è minimale se, e solo se, l'anello unitario  $eRe$  è un anello con divisione;*
- (ii) *l'ideale sinistro  $Re$  generato da  $e$  è minimale se, e solo se, l'anello unitario  $eRe$  è un anello con divisione.*

*In particolare, l'ideale destro  $eR$  è minimale se, e solo se, l'ideale sinistro  $Re$  è minimale.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il punto (i); il punto (ii) è analogo. Supponiamo  $eR$  sia un ideale destro minimale, ovvero  $eR$  è un  $R$ -modulo destro semplice. Allora l'anello  $\text{Hom}(eR, eR)$  degli endomorfismi di  $R$ -moduli semplici di  $eR$  è un anello con divisione, perché dato  $\psi \in \text{Hom}(eR, eR)$  non nullo, per la semplicità di  $eR$  il nucleo è uguale a  $\{0\}$  e l'immagine di  $\psi$  devono coincidere con  $eR$ , ovvero  $\psi$  è un isomorfismo. Grazie al punto (i) della Proposizione 2.6.3 l'anello  $\text{Hom}(eR, eR)$  è isomorfo all'anello  $eRe$ , dunque anche  $eRe$  è un anello con divisione.

Supponiamo  $eRe$  anello con divisione. Per dimostrare che  $eR$  è semplice verifichiamo che ogni elemento  $er \in eR$  non nullo è generatore dell'ideale destro  $eR$ . Sia  $er \in eR$  non nullo, allora per la Proposizione 2.3.23 esiste  $s \in R$  tale che  $er ser \neq 0$ . In particolare  $erse \in eRe$  è diverso da 0. Sia  $ete \in eRe$  l'inverso di  $erse$ , allora abbiamo

$$e = (erse)(ete) = (er)(seete) \in (er)R.$$

Dunque abbiamo che  $(er)R \subseteq eR$  ed  $eR \subseteq (er)R$ . Possiamo concludere che per ogni  $er \in eR$  non nullo, l'ideale destro generato da  $er$  coincide con l'ideale destro  $eR$ .

L'ultima parte dell'enunciato è conseguenza dei punti (i) e (ii).  $\square$

Concludiamo la nostra discussione sullo zoccolo di un anello dimostrando che nel caso di anelli semiprimi con unità locali lo zoccolo destro e lo zoccolo sinistro coincidono.

**Proposizione 2.6.5.** *Sia  $R$  un anello semiprimo con unità locali. Allora lo zoccolo destro  $\text{Soc}(R_R)$  e lo zoccolo sinistro  $\text{Soc}({}_R R)$  di  $R$  coincidono. In tal caso, lo zoccolo di  $R$  viene indicato con  $\text{Soc}(R)$ .*

*Dimostrazione.* Per la Definizione 2.6.1 lo zoccolo destro e lo zoccolo sinistro di  $R$  sono dati rispettivamente dalla somma degli ideali destri minimali e dalla somma degli ideali sinistri minimali. Ma in un anello semiprimo, per la Proposizione 2.3.23, tali ideali minimali devono essere generati da un elemento idempotente di  $R$ . Grazie alla Proposizione 2.6.4, possiamo affermare che  $\text{Soc}(R_R) = \sum eR$ , dove  $e^2 = e \in R$  ed  $eRe$  è un anello con divisione, e  $\text{Soc}({}_R R) = \sum Re$ , dove  $e^2 = e \in R$  ed  $eRe$  è un anello con divisione.

Sia  $e^2 = e \in \text{Soc}(R_R)$ , tale che  $eRe$  è un anello di divisione, allora  $e \in \text{Soc}({}_R R)$  e inoltre  $eR \subseteq \text{Soc}({}_R R)$  per la proprietà di assorbimento dell'ideale bilatero  $\text{Soc}({}_R R)$ . Quindi  $\text{Soc}(R_R) \subseteq \text{Soc}({}_R R)$ .

Analogamente si dimostra che  $\text{Soc}({}_R R) \subseteq \text{Soc}(R_R)$ . Quindi possiamo concludere  $\text{Soc}(R_R) = \text{Soc}({}_R R)$ .  $\square$

**Corollario 2.6.6.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora lo zoccolo destro e lo zoccolo sinistro della Leavitt path algebra  $L_K(E)$  coincidono.*

*Dimostrazione.* La Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è un anello con unità locali per il punto (iv) del Lemma 1.2.5, ed è un anello semiprimo per la Proposizione 2.3.24. Grazie alla Proposizione 2.6.5 possiamo concludere.  $\square$



**Biforcazioni e vertici lineari.** Per poter studiare lo zoccolo di una Leavitt path algebra dobbiamo introdurre la definizione di biforcazione e di vertice lineare.

**Definizione 2.6.7.** Sia  $E$  un grafo. Un vertice  $v$  di  $E$  è detto *biforcazione* se l'insieme  $s^{-1}(v)$  dei lati con vertice iniziale  $v$  contiene almeno due elementi distinti.

Un vertice  $v$  di  $E$  è detto *vertice lineare* se l'albero  $T(v)$  non contiene cicli e non contiene biforcazioni. In altre parole, ogni vertice  $w \in T(v)$  non è punto base di un ciclo di  $E$ , ed esiste al più un lato con vertice iniziale  $w$ .

L'insieme dei punti lineari di  $E$  viene indicato con  $P_l(E)$ .

**Osservazione 2.6.8.** Sia  $E$  un grafo. Osserviamo che ogni vertice sink di  $E$  è anche un punto lineare e l'insieme  $P_l(E)$  dei punti lineari di  $E$  è ereditario.

Consideriamo  $v \in P_l(E)$ . Allora i vertici dell'albero  $T(v)$  posso essere numerati nel seguente modo:  $T(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots\}$ , dove  $v_1 = v$  e per ogni  $v_i$  esiste un unico lato  $e_i \in E^1$  tale che  $s(e_i) = v_i$  ed  $r(e_i) = v_{i+1}$ . Se  $T(v)$  contiene un sink, allora è finito.

Dati due vertici  $v_i, v_j \in T(v)$  con  $i \leq j$ , allora esiste un unico cammino, che indichiamo con  $p_{i,j}$ , tale che  $s(p_{i,j}) = v_i$  ed  $r(p_{i,j}) = v_j$ . Se  $i = j$ , allora  $p_{i,i} = v_i$ . Inoltre, per le relazioni (CK1) e (CK2) della Definizione 1.2.1 abbiamo rispettivamente  $p_{i,j}^* p_{i,j} = v_j$  e  $p_{i,j} p_{i,j}^* = v_i$ .

Con queste notazioni possiamo definire i seguenti elementi:

$$x_{i,j} := \begin{cases} p_{i,j} & \text{se } i \leq j \\ p_{j,i}^* & \text{se } i > j, \end{cases} \quad (2.18)$$

per ogni  $i, j \in \mathbb{N}$ . Verifichiamo che tali elementi soddisfano la proprietà  $x_{i,j} x_{h,k} = \delta_{j,h} x_{i,k}$  per ogni  $i, j, h, k \in \mathbb{N}$ :

$$x_{i,j} x_{h,k} = \begin{cases} p_{i,j} p_{h,k} = \delta_{j,h} x_{i,k} & \text{se } i \leq j, h \leq k \\ p_{i,j} p_{k,h}^* = \delta_{j,h} x_{i,k} & \text{se } i \leq j, k \leq h \\ p_{j,i}^* p_{h,k} = \delta_{j,h} x_{i,k} & \text{se } j \leq i, h \leq k \\ p_{j,i}^* p_{k,h}^* = \delta_{j,h} x_{i,k} & \text{se } j \leq i, k \leq h. \end{cases}$$

Siano  $R$  un anello unitario e  $\Gamma$  un insieme arbitrario. Nella nostra discussione dello zoccolo di una Leavitt path algebra rivestiranno un ruolo centrale gli anelli  $M_\Gamma(R)$  delle matrici quadrate a coefficienti in  $R$  con  $\Gamma$  righe e colonne.

Indichiamo con  $e_{i,i} \in M_\Gamma(R)$ , dove  $i \in \Gamma$ , la matrice con tutte le entrate nulle eccetto l'entrata di posto  $(i, i)$  che vale  $1_R$ . Gli elementi  $\{e_{i,i} \mid i \in \Gamma\}$  sono idempotenti e ortogonali tra loro, in particolare l'anello  $M_\Gamma(R)$  è abbastanza idempotente (vedi Definizione 1.2.4).

Consideriamo  $A$  un'algebra su un campo  $K$ . Sia  $I$  un ideale bilatero di  $A$ . Supponiamo che esistano degli elementi  $\{\varepsilon_{i,j} \mid i, j \in \Gamma\}$ , chiamati

matrici unità per  $I$ , dove  $\Gamma$  è un insieme, e tali che generino  $I$  come  $K$ -spazio vettoriale e per ogni  $i, j, h, k \in \Gamma$  vale  $\varepsilon_{i,j}\varepsilon_{h,k} = \delta_{j,h}\varepsilon_{i,k}$ . Allora l'ideale  $I$  è isomorfo alla  $K$ -algebra  $M_\Gamma(K)$  delle matrici quadrate a coefficienti in  $K$  con  $\Gamma$  righe e colonne. Infatti, possiamo considerare il seguente omomorfismo di  $K$ -spazi vettoriali:

$$\begin{aligned}\varphi : M_\Gamma(K) &\rightarrow I \\ e_{i,j} &\mapsto \varepsilon_{i,j}\end{aligned}$$

per ogni  $i, j \in \Gamma$ . Verifichiamo che  $\varphi$  è un omomorfismo di  $K$ -algebre, ovvero  $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ , per ogni  $A, B \in M_\Gamma(K)$ . Siano  $A, B \in M_\Gamma(K)$  e scriviamo

$$A = \sum_{i,j} k_{i,j}e_{i,j}, \quad B = \sum_{h,k} k'_{h,l}e_{h,l},$$

dove  $i, j, h, l \in \Gamma$  e  $k_{i,j}, k'_{h,l} \in K$  sono quasi tutti nulli. Ora possiamo calcolare  $\varphi(AB)$ :

$$\begin{aligned}\varphi(AB) &= \varphi\left(\sum_{i,j} k_{i,j}e_{i,j} \cdot \sum_{h,l} k'_{h,l}e_{h,l}\right) = \varphi\left(\sum_{i,j,j,h,l} k_{i,j}k'_{h,l}e_{i,j}e_{h,l}\right) \\ &= \varphi\left(\sum_{i,j,j,h,l} k_{i,j}k'_{h,l}\delta_{j,h}e_{i,l}\right) = \sum_{i,j,j,h,l} k_{i,j}k'_{h,l}\delta_{j,h}\varphi(e_{i,l}) \\ &= \sum_{i,j,j,h,l} k_{i,j}k'_{h,l}\delta_{j,h}\varepsilon_{i,l} = \sum_{i,j,j,h,l} k_{i,j}k'_{h,l}\varepsilon_{i,j}\varepsilon_{h,l} \\ &= \sum_{i,j} k_{i,j}\varepsilon_{i,j} \cdot \sum_{h,l} k'_{h,l}\varepsilon_{h,l} = \sum_{i,j} k_{i,j}\varphi(e_{i,j}) \cdot \sum_{h,l} k'_{h,l}\varphi(e_{h,l}) \\ &= \varphi\left(\sum_{i,j} k_{i,j}e_{i,j}\right)\varphi\left(\sum_{h,l} k'_{h,l}e_{h,l}\right) = \varphi(A)\varphi(B).\end{aligned}$$

Dall'ipotesi  $I = \text{span}_K(\{\varepsilon_{i,j} \mid i, j \in \Gamma\})$ , l'omomorfismo di  $K$ -algebre  $\varphi$  è suriettivo. Mostriamo che  $\varphi$  è iniettivo verificando che i generatori di  $I$  sono linearmente indipendenti. Supponiamo esista un combinazione  $K$ -lineare finita di elementi  $e_{i,j} \in I$  nulla:

$$\sum_{i,j} k_{i,j}e_{i,j} = 0,$$

dove  $i, j \in \Gamma$  e  $k_{i,j} \in K$ . Fissiamo  $h, l \in \Gamma$  tali che  $e_{h,l}$  compaia nella combinazione  $K$ -lineare. Moltiplicando ambo i membri per  $e_{h,h}$  a sinistra e per  $e_{l,l}$  a destra otteniamo  $k_{h,l}e_{h,l} = 0$ , ma ciò implica  $k_{h,l} = 0$ . Ovvero, i coefficienti  $k_{i,j}$  devono essere tutti nulli.

Con il seguente lemma ci proponiamo di studiare l'ideale generato da un vertice lineare.

**Lemma 2.6.9.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Sia  $v$  un vertice di  $E$  lineare. Con  $F_E(T(v))$  indichiamo l'insieme dei cammini di  $E$  in cui solo il vertice finale appartiene a  $T(v)$ . Poniamo  $\Lambda_v := F_E(T(v)) \cup T(v)$ . Allora l'ideale bilatero  $I(v)$  della Leavitt path algebra  $L_K(E)$  generato da  $v$  è isomorfo alla  $K$ -algebra  $M_{\Lambda_v}(K)$ .*

*Dimostrazione.* Facciamo riferimento alle notazioni dell'Osservazione 2.6.8. In particolare, consideriamo la numerazione di  $T(v)$ .

Un generico elemento di  $I(v)$  è della forma  $\alpha v \beta$ , dove  $\alpha, \beta \in L_K(E)$ . Ma per il Lemma 1.2.5 ogni elemento di  $L_K(E)$  può essere scritto come  $\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i \mu_i^*$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, \dots, k_n \in K^\times$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \text{Path}(E)$ ,  $r(\lambda_i) = r(\mu_i)$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Dunque ogni elemento di  $I(v)$  può essere scritto come una  $K$ -combinazione lineare di elementi del tipo  $\lambda \mu^* v \gamma \kappa^*$ , dove  $\lambda, \mu, \gamma, \kappa \in \text{Path}(E)$ ,  $r(\lambda) = r(\mu)$ ,  $r(\gamma) = r(\kappa)$  ed  $s(\mu) = s(\gamma) = v$ . Osserviamo che  $r(\mu), r(\gamma) \in T(v)$ , ovvero  $\mu = p_{1,i}$  e  $\gamma = p_{1,j}$  per opportuni  $i, j \in \mathbb{N}$ .

Il cammino  $\lambda$  può essere scritto come  $\lambda' p_{h,i}$  dove  $\lambda' \in \Lambda_v$ ,  $h \in \mathbb{N}$  ed  $h \leq i$ . Quindi

$$\lambda \mu^* = \lambda' p_{h,i} p_{1,i}^* = \lambda' x_{h,i} x_{i,1} = \lambda' x_{h,1} = \lambda' p_{1,h}^*.$$

Analogamente, il cammino  $\kappa$  può essere scritto come  $\kappa' p_{l,j}$  dove  $\kappa' \in \Lambda_v$ ,  $l \in \mathbb{N}$  ed  $l \leq j$ . Quindi

$$\gamma \kappa^* = p_{1,j} p_{1,j}^* (\kappa')^* = x_{1,j} x_{j,l} (\kappa')^* = x_{1,l} (\kappa')^* = p_{1,l} (\kappa')^*.$$

Quindi possiamo scrivere

$$\lambda \mu^* v \gamma \kappa^* = \lambda \mu^* \gamma \kappa^* = \lambda' x_{h,1} x_{1,l} (\kappa')^* = \lambda' x_{h,l} (\kappa')^*.$$

Possiamo concludere che l'ideale  $I(v)$  è generato come  $K$ -spazio vettoriale dall'insieme

$$\{ \varepsilon_{\lambda, \kappa} := \lambda x_{h,l} \kappa^* \mid \lambda, \kappa \in \Lambda_v, r(\lambda) = s(x_{h,l}), r(\kappa) = r(x_{h,l}) \}.$$

Con un calcolo immediato si verifica che tale insieme è un insieme di matrici unità per  $I(v)$ , quindi possiamo concludere  $I(v) \cong M_{\Lambda_v}(K)$  come  $K$ -algebra.  $\square$

**Corollario 2.6.10.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo un vertice  $v$  di  $E$  sink. Allora l'ideale bilatero  $I(v)$  della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , generato da  $v$ , è isomorfo alla  $K$ -algebra  $M_{\Lambda_v}(K)$ , dove  $\Lambda_v$  è l'insieme dei cammini di  $E$  che terminano nel vertice  $v$ .*

*Dimostrazione.* L'isomorfismo richiesto è un caso particolare del Lemma 2.6.9 ricordando che i vertici sink di un grafo sono vertici lineari.  $\square$

**Corollario 2.6.11.** *Sia  $K$  un campo. Per ogni insieme  $\Lambda$  definiamo il grafo  $E_\Lambda = (E_\Lambda^0, E_\Lambda^1, s, r)$  dove gli insiemi dei vertici e dei lati sono rispettivamente*

$$\begin{aligned} E_\Lambda^0 &= \{ v \} \cup \{ w_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \} \\ E_\Lambda^1 &= \{ f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}. \end{aligned}$$

*Per ogni  $\lambda \in \Lambda$  vale  $s(f_\lambda) = w_\lambda$  ed  $r(f_\lambda) = v$ . Allora la Leavitt path algebra  $L_K(E_\Lambda)$  del grafo  $E_\Lambda$  è isomorfa alla  $K$ -algebra  $M_{\Lambda \cup \{v\}}(K)$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo il vertice  $v$  del grafo  $E_\Lambda$ . Osserviamo che tale vertice è sink, quindi per il Corollario 2.6.10 abbiamo

$$I(v) \cong M_{\Lambda_v}(K),$$

dove  $\Lambda_v$  è l'insieme dei cammini di  $E_\Lambda$  che terminano in  $v$ . In particolare, tale insieme è formato dal vertice  $v$  e dai lati  $f_\lambda$  per ogni  $\lambda \in \Lambda$ .

Osserviamo che per la proprietà di assorbimento di  $I(v)$  e per le relazioni (E1),(E2) e (CK2) della Definizione 1.2.1 abbiamo

$$f_\lambda = f_\lambda v \in I(v), \quad f_\lambda^* = v f_\lambda^* \in I(v), \quad w_\lambda = f_\lambda f_\lambda^* \in I(v),$$

per ogni  $\lambda \in \Lambda$ .

Siccome tutti i generatori di  $L_K(E_\Lambda)$  appartengono a  $I(v)$  possiamo concludere che

$$L_K(E_\Lambda) = I(v) \cong M_{\Lambda_v}(K) = M_{\Lambda \cup \{v\}}(K). \quad \square$$

**Lo zoccolo di una Leavitt path algebra.** Cominciamo a dimostrare alcuni risultati preliminari utili per descrivere lo zoccolo di una Leavitt path algebra.

**Lemma 2.6.12.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $v$  un vertice di  $E$ . Se  $v$  è una biforcazione, allora l'ideale sinistro  $L_K(E)v$  della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , generato da  $v$ , non è minimale.*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $v$  biforcazione, ovvero esistono  $e, f \in s^{-1}(v)$  distinti. L'ideale sinistro  $L_K(E)ee^*$  generato da  $ee^*$  è non nullo ed è contenuto in  $L_K(E)v$ . Ma l'elemento  $ff^* \in L_K(E)v$  non appartiene a  $L_K(E)ee^*$ , altrimenti  $ff^* = \alpha ee^*$ , per un opportuno  $\alpha \in L_K(E)$ , e moltiplicando ambo i membri a destra per  $ff^*$  otterremmo  $ff^* = 0$ . Possiamo concludere che l'ideale sinistro  $L_K(E)ee^*$  è un ideale propriamente contenuto in  $L_K(E)v$ .  $\square$

**Proposizione 2.6.13.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $v$  un vertice di  $E$ . Allora  $v$  è un vertice lineare se, e solo se, l'ideale sinistro  $L_K(E)v$  della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , generato da  $v$  è minimale.*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $v$  sia un vertice lineare. Per dimostrare che  $L_K(E)v$  è minimale, per il punto (ii) della Proposizione 2.6.4, è sufficiente mostrare che l'anello unitario  $vL_K(E)v$  è un anello con divisione.

Sia  $\alpha \in vL_K(E)v$ . Allora possiamo scrivere  $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i \mu_i^*$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_i \in K^\times$ ,  $\lambda_i, \mu_i \in \text{Path}(E)$ ,  $r(\lambda_i) = r(\mu_i)$ , ed  $s(\lambda_i) = s(\mu_i) = v$  per  $i = 1, \dots, n$ . Dall'ipotesi che  $v$  è lineare, i cammini  $\lambda_i$  e  $\mu_i$  devono coincidere, dunque  $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i v \in Kv$ . Possiamo concludere che l'anello  $vL_K(E)v$  coincide con l'anello con divisione  $Kv$ .

Viceversa, supponiamo che l'ideale sinistro  $L_K(E)v$  sia minimale, dobbiamo mostrare che  $v$  è un vertice lineare, ovvero che ogni vertice di  $T(v)$  non è una biforcazione e non appartiene a un ciclo di  $E$ . Sia  $w \in T(v)$ , allora esiste  $\mu \in \text{Path}(E)$  tale che  $s(\mu) = v$  ed  $r(\mu) = w$ . Consideriamo il seguente omomorfismo non nullo di  $L_K(E)$ -moduli:

$$\begin{aligned} \rho_\mu : L_K(E)v &\rightarrow L_K(E)w \\ \alpha v &\mapsto \alpha v \mu = \alpha \mu w. \end{aligned}$$

Per ogni  $\beta w \in L_K(E)w$  abbiamo  $\rho_\mu(\beta w \mu^*) = \beta w \mu^* \mu = \beta w$ , ovvero  $\rho_\mu$  è suriettivo.

L'epimorfismo  $\rho_\mu$  è iniettivo per la minimalità di  $L_K(E)v$ .

Possiamo concludere che  $L_K(E)v \cong L_K(E)w$  per ogni  $w \in T(v)$ , in particolare  $L_K(E)w$  è un ideale sinistro minimale e per la Proposizione 2.6.4 l'anello unitario  $wL_K(E)w$  è un anello con divisione.

Per il Lemma 2.6.12 ogni vertice  $w \in T(v)$  non può essere una biforcazione.

Per il Lemma 2.3.2 ogni vertice  $w \in T(v)$  non può appartenere a nessun ciclo, altrimenti  $wL_K(E)w \cong K[x^{-1}, x]$  non è un anello di divisione.  $\square$

**Lemma 2.6.14.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora esiste una famiglia  $\{H_i\}_{i \in \Gamma}$ , dove  $\Gamma$  è un insieme e gli  $H_i$  sono insiemi di vertici di  $E$  ereditari a due a due disgiunti, tale che  $P_l(E) = \sqcup_{i \in \Gamma} H_i$  e  $I(H_i) = I(v)$  per ogni  $v \in H_i$  e  $i \in \Gamma$ , dove  $I(H_i)$  e  $I(v)$  sono due ideali bilateri della Leavitt path algebra  $L_K(E)$  generati rispettivamente da  $H_i$  e  $v$ .*

*Dimostrazione.* Definiamo la seguente relazione sull'insieme  $P_l(E)$ :

$$v \equiv w \iff I(v) = I(w),$$

dove  $I(v)$  e  $I(w)$  sono due ideali bilateri di  $L_K(E)$  generati rispettivamente da  $v$  e  $w$ . È immediato verificare che  $\equiv$  è una relazione di equivalenza.

Sia  $\{H_i\}_{i \in \Gamma}$  l'insieme delle classi di equivalenza di  $\equiv$ . Dimostriamo che le classi di equivalenze  $H_i$  sono insiemi ereditari. Siano  $v \in H_i$  per un qualche  $i \in \Gamma$  e  $w \in E^0$ , tali che esista  $\lambda \in \text{Path}(E)$  dove  $s(\lambda) = v$  ed  $r(\lambda) = w$ , ovvero  $w \in T(v)$ . Per la proprietà di assorbimento e per l'unicità di  $\lambda$  abbiamo

$$v = \lambda \lambda^* = \lambda w \lambda^* \in I(w) \quad \text{e} \quad w = \lambda^* \lambda = \lambda^* v \lambda \in I(v).$$

Quindi  $I(v) = I(w)$  e  $v \equiv w$ , in particolare  $w \in H_i$ .

Il resto delle condizioni sono immediate per come è stata scelta la famiglia  $\{H_i\}_{i \in \Gamma}$ .  $\square$

Ricordiamo che l'anello  $K[x^{-1}, x]$  dei polinomi di Laurent a coefficienti in un campo  $K$  non ha ideali sinistri e destri minimali. Infatti, l'anello  $K[x^{-1}, x]$  è semiprimo perché è isomorfo a una Leavitt path algebra per quanto visto nell'Esempio 1.2.6, e ogni Leavitt path algebra è un anello semiprimo per la Proposizione 2.3.24.

Se  $I$  fosse un ideale sinistro o destro minimale di  $K[x^{-1}, x]$ , allora per la Proposizione 2.3.23,  $I$  sarebbe generato da un elemento idempotente di  $K[x^{-1}, x]$ . Ma gli unici elementi idempotenti di  $K[x^{-1}, x]$  sono i polinomi costanti 0 e 1.

**Teorema 2.6.15.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo la decomposizione  $P_l(E) = \sqcup_{i \in \Gamma} H_i$  dell'insieme dei vertici lineari di  $E$  presentata nel Lemma 2.6.14. Allora lo zoccolo  $\text{Soc}(L_K(E))$  della Leavitt path algebra  $L_K(E)$  coincide con l'ideale bilatero  $I(P_l(E))$  di  $L_K(E)$ , generato dall'insieme dei vertici lineari di  $E$ . Inoltre vale il seguente omomorfismo di  $K$ -algebre:*

$$\text{Soc}(L_K(E)) \cong \bigoplus_{i \in \Gamma} M_{\Lambda_v}(K),$$

dove  $M_{\Lambda_v}(K)$  è la  $K$ -algebra delle matrici presentata nel Lemma 2.6.9.

*Dimostrazione.* Cominciamo con dimostrare l'uguaglianza  $\text{Soc}(L_K(E)) = I(P_l(E))$ . Per la Proposizione 2.6.13, ogni vertice lineare genera un ideale sinistro minimale di  $L_K(E)$ , quindi  $P_l(E) \subseteq \text{Soc}(L_K(E))$  e di conseguenza  $I(P_l(E)) \subseteq \text{Soc}(L_K(E))$ .

Per il punto (i) della Proposizione 2.3.23, ogni ideale minimale di  $L_K(E)$  è generato da un elemento idempotente. Quindi è sufficiente mostrare che ogni  $\alpha^2 = \alpha \in L_K(E)$  che genera un ideale sinistro minimale appartiene a  $I(P_l(E))$ . Per il Teorema di Riduzione 2.3.7, esistono  $\mu, \eta \in \text{Path}(E)$  tali che o  $\mu^* \alpha \eta = kv$ , per opportuni  $v \in E^0$  e  $k \in K^\times$ , oppure  $\mu^* \alpha \eta = p(c)$ , dove  $p(c)$  è un polinomio di Laurent non nullo a coefficienti in  $K$  valutato in un ciclo  $c$  di  $E$  senza uscite e con punto base  $w$ .

Supponiamo si verifichi il secondo caso, allora per il Lemma 2.3.2 abbiamo  $\mu^* \alpha \eta = p(c) \in wL_K(E)w \cong K[x^{-1}, x]$ . Consideriamo l'isomorfismo di anelli

$$\begin{aligned} K[x^{-1}, x] &\rightarrow wL_K(E)w \\ x &\mapsto c \\ x^{-1} &\mapsto c^* \\ 1 &\mapsto w, \end{aligned}$$

presentato nel Lemma 2.3.2.

L'ideale sinistro  $L_K(E)\mu^*\alpha$ , generato da  $\mu^*\alpha \in L_K(E)$ , è non nullo ed è contenuto nell'ideale sinistro  $L_K(E)\alpha$ . Per la minimalità di  $L_K(E)\alpha$  abbiamo  $L_K(E)\alpha = L_K(E)\mu^*\alpha$ .

Osserviamo che l'ideale sinistro  $L_K(E)\alpha\eta$ , generato da  $\alpha\eta \in L_K(E)$ , coincide con l'ideale sinistro  $L_K(E)\lambda$ , generato da  $\lambda := \mu^*\alpha\eta$ .

Consideriamo  $\rho_\eta : L_K(E)\alpha \rightarrow L_K(E)\alpha\eta = L_K(E)\lambda$ , omomorfismo non nullo di  $L_K(E)$ -moduli, tale che  $\rho_\eta = t\alpha\eta$  per ogni  $t \in L_K(E)$ . Per la minimalità di  $L_K(E)\alpha$ ,  $\rho_\eta$  è iniettivo. Dalla definizione di  $\rho_\eta$  è immediato verificare che è suriettivo. Quindi  $\rho_\eta$  è un isomorfismo, e in particolare possiamo affermare che l'ideale sinistro  $L_K(E)\lambda$  è minimale.

Consideriamo  $wL_K(E)\lambda$  l'ideale sinistro non nullo dell'anello  $wL_K(E)w$ . Mostriamo che anch'esso è minimale in  $wL_K(E)w$ . Supponiamo esista un ideale sinistro non nullo  $H = wHw \subseteq wL_K(E)\lambda \subseteq L_K(E)\lambda$ . Allora abbiamo che l'ideale sinistro di  $L_K(E)$  generato da  $H$  è non nullo e contenuto in  $L_K(E)\lambda$ . Per la minimalità di  $L_K(E)\lambda$  abbiamo  $L_K(E)H = L_K(E)\lambda$ . Dunque vale anche

$$\begin{aligned} wL_K(E)H &= wL_K(E)\lambda \\ wL_K(E)wH &= wL_K(E)\lambda \\ H &= wL_K(E)\lambda. \end{aligned}$$

Ora consideriamo  $\varphi^{-1}(wL_K(E)\lambda)$ , ideale sinistro di  $K[x^{-1}, x]$ . Tale ideale deve essere minimale in  $K[x^{-1}, x]$ , ma come già ricordato l'anello dei polinomi di Laurent non possiede ideali minimali. Quindi siamo arrivati a una contraddizione.

Per quanto appena dimostrato si deve verificare il primo caso:  $\mu^*\alpha\eta = kv$ , per opportuni  $v \in E^0$  e  $k \in K^\times$ . Siccome  $L_K(E)\mu^*\alpha \subseteq L_K(E)\alpha$ , per la minimalità di  $L_K(E)\alpha$  vale  $L_K(E)\mu^*\alpha = L_K(E)\alpha$ . Consideriamo ora l'omomorfismo non nullo di  $L_K(E)$ -moduli sinistri

$$\begin{aligned} \rho_\eta : L_K(E)\mu^*\alpha &\rightarrow L_K(E)v \\ \beta\mu^*\alpha &\mapsto \beta\mu^*\alpha\eta = k\beta v. \end{aligned}$$

Per la minimalità di  $L_K(E)\mu^*\alpha$  l'omomorfismo  $\rho_\eta$  è iniettivo. Mentre per ogni  $\beta v \in L_K(E)v$ , abbiamo  $\rho_\eta(\beta k^{-1}\mu^*\alpha) = \beta k^{-1}\mu^*\alpha\eta = \beta v$ , ovvero  $\rho_\eta$  è suriettivo. In particolare  $\rho_\eta$  è un isomorfismo e

$$L_K(E)\alpha = L_K(E)\mu^*\alpha \cong L_K(E)v.$$

Possiamo dedurre così la minimalità dell'ideale sinistro  $L_K(E)v$ . Per la Proposizione 2.6.13  $v$  è un vertice lineare di  $E$ . Ora grazie alla proprietà di assorbimento di  $I(P_l(E))$  abbiamo

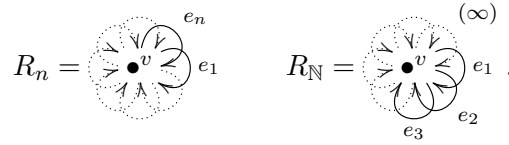
$$\alpha = \rho_\eta^{-1} \circ \rho_\eta(\alpha) = \rho_\eta^{-1}(\alpha\eta) = \rho_\eta^{-1}(\alpha\eta v) = \alpha\eta\rho_\eta^{-1}(v) = \alpha\eta v\rho_\eta^{-1}(v) \in I(P_l(E)).$$

L'ultima parte dell'enunciato si ottiene applicando la Proposizione 2.4.9, il Lemma 2.6.14 e il Lemma 2.6.9:

$$\begin{aligned} \text{Soc}(L_K(E)) &= I(P_l(E)) = I(\sqcup_{i \in \Gamma} H_i) \\ &= \bigoplus_{i \in \Gamma} I(H_i) = \bigoplus_{i \in \Gamma, u_i \in H_i} I(u) \cong \bigoplus_{i \in \Gamma} M_{\Lambda_v}(K). \quad \square \end{aligned}$$

**Esempi.** Proviamo a calcolare lo zoccolo di alcune Leavitt path algebre studiate in precedenza.

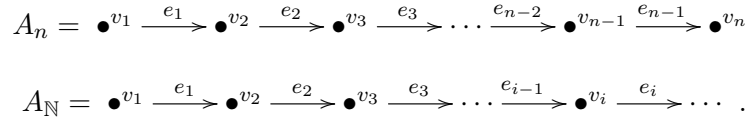
**Esempio 2.6.16.** Siano  $K$  un campo,  $R_n$  la rosa con  $n$  petali, dove  $n \in \mathbb{N}$  come nell'Esempio 1.1.3, e  $R_{\mathbb{N}}$  la rispettiva versione infinita come nell'Esempio 1.1.8:



Possiamo osservare che in entrambi i grafi non sono presenti vertici lineari. Quindi per il Teorema 2.6.15 abbiamo

$$\text{Soc}(L_K(R_n)) = I(P_l(R_n)) = \{0\} = I(P_l(R_{\mathbb{N}})) = \text{Soc}(L_K(R_{\mathbb{N}})).$$

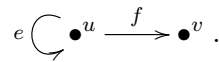
**Esempio 2.6.17.** Siano  $K$  un campo,  $A_n$  il grafo dell'Esempio 1.1.2, dove  $n \in \mathbb{N}$ , e  $A_{\mathbb{N}}$  la rispettiva versione infinita come nell'Esempio 1.1.8:



In entrambi i casi tutti i vertici sono lineari, dunque per il Teorema 2.6.15 abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Soc}(L_K(A_n)) &= I(P_l(A_n)) = I(A_n^0) = L_K(A_n) \\ \text{Soc}(L_K(A_{\mathbb{N}})) &= I(P_l(A_{\mathbb{N}})) = I(A_{\mathbb{N}}^0) = L_K(A_{\mathbb{N}}). \end{aligned}$$

**Esempio 2.6.18.** Siano  $K$  un campo ed  $E_T$  il grafo di Toeplitz come nell'Esempio 1.1.4:



L'insieme  $P_l(E_T)$  dei vertici lineari di  $E_T$  è formato dal vertice  $v$ . Quindi per il Teorema 2.6.15 abbiamo

$$\text{Soc}(L_K(E_T)) = I(P_l(E_T)) = I(\{v\}) = M_{\Lambda_v}(K),$$

dove  $\Lambda_v = \{v, f, e^n f \mid n \in \mathbb{N}\}$ .



**Teorema della Dimensione Finita.** In questo paragrafo ci proponiamo di descrivere Leavitt path algebre di dimensione finita. In particolare, dimostreremo il Teorema della Dimensione Finita, il quale ci permetterà di determinare la Leavitt path algebra di un grafo finito e aciclico con poco sforzo.

**Teorema 2.6.19** (Teorema della Dimensione Finita). *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $\text{Sink}(E) = \{v_1, \dots, v_m\}$ , con  $m \in \mathbb{N}$ , l'insieme dei vertici sink di  $E$ . Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (1) *la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è uno  $K$ -spazio vettoriale di dimensione finita;*
- (2) *il grafo  $E$  è aciclico e finito;*
- (3) *la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è isomorfa a  $\bigoplus_{i=1}^m M_{n_i}(K)$ , dove  $m \in \mathbb{N}$  è il numero di vertici sink di  $E$  ed  $n_i$  è il numero di cammini di  $E$  che termina nel sink  $v_i$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo (1)  $\Rightarrow$  (2). I vertici e i lati di  $E$  sono linearmente indipendenti in  $L_K(E)$ , quindi essendo  $L_K(E)$  di dimensione finita, l'insieme  $E^0 \cup E^1$  è finito, ovvero il grafo  $E$  è finito.

Se esiste un ciclo  $c$  in  $E$ , allora l'insieme  $\{c^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è infinito e i suoi elementi sono linearmente indipendenti. Ma ciò è una contraddizione con il punto (1). Quindi il grafo  $E$  deve essere aciclico.

Dimostriamo (2)  $\Rightarrow$  (3). Siccome il grafo  $E$  è finito e aciclico, l'insieme  $\text{Sink}(E)$  non è vuoto. Consideriamo l'ideale bilatero  $I(\text{Sink}(E))$  di  $L_K(E)$ , generato dall'insieme  $\text{Sink}(E)$ . Per la Proposizione 2.4.9 possiamo scrivere  $I(\text{Sink}(E)) = \bigoplus_{i=1}^m I(v_i)$ , dove  $I(v_i)$  è l'ideale bilatero di  $L_K(E)$  generato dal vertice sink  $v_i$ . Vogliamo dimostrare che  $L_K(E) = I(\text{Sink}(E))$ . L'inclusione  $I(\text{Sink}(E)) \subseteq L_K(E)$  è chiara. Dimostriamo che ogni elemento  $\lambda\mu^* \in L_K(E)$ , dove  $\lambda, \mu \in \text{Path}(E)$  ed  $r(\lambda) = r(\mu)$ , appartiene a  $I(\text{Sink}(E))$ . Se  $r(\lambda) \in \text{Sink}(E)$ , allora  $\lambda\mu^* = \lambda r(\lambda)\mu^* \in I(\text{Sink}(E))$ . Altrimenti, il vertice  $r(\lambda)$  è regolare e per la relazione (CK2) della Definizione 1.2.1 abbiamo

$$\lambda\mu^* = \lambda r(\lambda)\mu^* = \lambda \left( \sum_{e \in s^{-1}(r(\lambda))} ee^* \right) \mu^* = \sum_{e \in s^{-1}(r(\lambda))} \lambda ee^* \mu^*.$$

Se  $r(e) \in \text{Sink}(E)$  per ogni  $e \in s^{-1}(r(\lambda))$ , allora per la proprietà di assorbimento  $\lambda\mu^* \in I(\text{Sink}(E))$ . Altrimenti, si procede allo stesso modo. Essendo il grafo finito, dopo un numero finito di passi arriviamo alla conclusione.

Per il Lemma 1.2.5 gli elementi  $\lambda\mu^*$  generano  $L_K(E)$ , quindi  $L_K(E) \subseteq I(\text{Sink}(E))$ .

Grazie al Lemma 2.6.10 possiamo concludere:

$$L_K(E) = I(\text{Sink}(E)) = \bigoplus_{i=1}^m I(v_i) = \bigoplus_{i=1}^m M_{\Lambda_{v_i}}(K) = \bigoplus_{i=1}^m M_{n_i}(K),$$

dove  $\Lambda_{v_i}$  è l'insieme dei cammini di  $E$  che terminano nel sink  $v_i$ .

L'implicazione (3)  $\Rightarrow$  (1) è chiara.  $\square$

Ora introduciamo due nuove classi di algebre. Ricordiamo che con  $\mathcal{A}_K$  indichiamo la categoria delle  $K$ -algebre, dove  $K$  è un campo.

**Definizione 2.6.20.** Sia  $K$  un campo. Una  $K$ -algebra  $A$  è *matriciale* se esistono  $m, n_i \in \mathbb{N}$ , con  $i = 1, \dots, m$ , tale che

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^m M_{n_i}(K).$$

Una  $K$ -algebra  $A$  è *localmente matriciale* se è il limite diretto di algebre matriciali nella categoria  $\mathcal{A}_K$ .

Il Teorema della Dimensione Finita 2.6.19 ci permette di capire quali Leavitt path algebre rientrano nella classe delle algebre matriciali e localmente matriciali.

**Corollario 2.6.21.** Siano  $E$  un grafo finito e aciclico e  $K$  un campo. Allora la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è una  $K$ -algebra matriciale.

*Dimostrazione.* Per il punto (3) del Teorema della Dimensione Finita 2.6.19 esistono  $m, n_i \in \mathbb{N}$ , con  $i = 1, \dots, m$ , tale che  $L_K(E) \cong \bigoplus_{i=1}^m M_{n_i}(K)$ .  $\square$

**Corollario 2.6.22.** Siano  $E$  un grafo aciclico e  $K$  un campo. Allora la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è una  $K$ -algebra localmente matriciale.

*Dimostrazione.* Grazie al Corollario 1.4.10 possiamo scrivere  $L_K(E)$  come limite diretto:

$$L_K(E) = \varinjlim_{F \in \mathcal{F}} L_K(F(\text{Reg}(F) \cap \text{Reg}(E))).$$

Ricordiamo che ogni grafo  $F \in \mathcal{F}$  è un sottografo finito completo di  $E$ . In particolare, ogni  $F \in \mathcal{F}$  è aciclico e  $F(\text{Reg}(F) \cap \text{Reg}(E))$  è aciclico e finito (vedi Definizione 1.3.14). Quindi per il Corollario 2.6.21 ogni Leavitt path algebra  $L_K(F(\text{Reg}(F) \cap \text{Reg}(E)))$  è matriciale.  $\square$

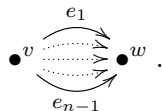
**Esempi.** Vediamo ora come il Teorema della Dimensione Finita 2.6.19 ci permette di calcolare in modo veloce Leavitt path algebre di grafi finiti e aciclici.

**Esempio 2.6.23.** Siano  $K$  un campo e  $A_n$  il grafo dell'Esempio 1.1.2, con  $n \in \mathbb{N}$ :

$$A_n = \bullet v_1 \xrightarrow{e_1} \bullet v_2 \xrightarrow{e_2} \bullet v_3 \xrightarrow{e_3} \dots \xrightarrow{e_{n-2}} \bullet v_{n-1} \xrightarrow{e_{n-1}} \bullet v_n .$$

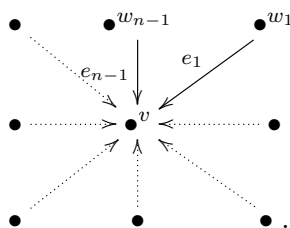
L'unico vertice sink di  $A_n$  è  $v_n$ , e ci sono esattamente  $n$  cammini che terminano in  $v_n$ . Dunque  $L_K(A_n) \cong M_n(K)$  per il punto (3) del Teorema della Dimensione Finita 2.6.19.

**Esempio 2.6.24.** Siano  $K$  un campo e  $D_n$  il grafo dell'Esempio 1.1.5, con  $n \in \mathbb{N}$ :



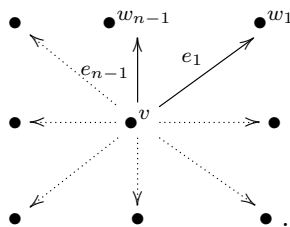
L'unico vertice sink di  $D_n$  è  $w$ , e ci sono esattamente  $n$  cammini che terminano in  $w$ . Dunque  $L_K(D_n) \cong M_n(K)$  per il punto (3) del Teorema della Dimensione Finita 2.6.19.

**Esempio 2.6.25.** Siano  $K$  un campo e  $B_n$  il grafo dell'Esempio 1.1.6, con  $n \in \mathbb{N}$ :



L'unico vertice sink di  $B_n$  è  $v$ , e ci sono esattamente  $n$  cammini che terminano in  $v$ . Dunque  $L_K(B_n) \cong M_n(K)$  per il punto (3) del Teorema della Dimensione Finita 2.6.19.

**Esempio 2.6.26.** Siano  $K$  un campo e  $C_n$  il grafo dell'Esempio 1.1.7, con  $n \in \mathbb{N}$ :



I vertici sink di  $C_n$  sono  $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ , e per ogni sink  $w_i$  ci sono esattamente due cammini che terminano in  $w_i$ . Dunque  $L_K(C_n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_2(K)$  per il punto (3) del Teorema della Dimensione Finita 2.6.19.



## Capitolo 3

# Ideali bilateri

In questo capitolo vogliamo indagare il reticolo degli ideali bilateri di una Leavitt path algebra. L'obiettivo principale di tale capitolo è la dimostrazione del Teorema di Struttura degli Ideali Bilateri e la classificazione delle Leavitt path algebre semplici, noetheriane e artiniane.

### 3.1 Proprietà degli ideali bilateri

**Risultati preliminari.** Per poter caratterizzare il reticolo degli ideali bilateri di una Leavitt path algebra e studiare i risultati che ne conseguono, abbiamo bisogno di alcune proposizioni preliminari.

**Proposizione 3.1.1.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $H$  un insieme di vertici di  $E$ . Allora l'ideale bilatero  $I(H)$  della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , generato dall'insieme  $H$ , è uguale a*

$$I(H) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i^* \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i, \mu_i \in \text{Path}(E), r(\lambda_i) = r(\mu_i) \in T(H) \right\}.$$

Ricordiamo che  $T(H) = \{ w \in E^0 \mid w \leq v \exists v \in H \}$ . Inoltre, vale l'uguaglianza  $I(H) = I(\overline{H})$ , dove  $I(\overline{H})$  è l'ideale bilatero di  $L_K(E)$ , generato dalla chiusura satura ereditaria di  $H$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo un generico elemento di  $I(H)$ . Allora può essere scritto come  $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \beta_i$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_i, \beta_i \in L_K(E)$ ,  $v_i \in H$  per  $i = 1, \dots, n$ . Ma per il Lemma 1.2.5, ogni elemento di  $L_K(E)$  si può scrivere come una  $K$ -combinazione lineare di monomi del tipo  $\lambda \mu^*$ , dove  $\lambda, \mu \in \text{Path}(E)$  ed  $r(\lambda) = r(\mu)$ . Quindi ogni elemento di  $I(H)$  può essere scritto come un  $K$ -combinazione lineare di elementi del tipo  $\lambda \mu^* v \gamma \kappa^*$ , dove  $\lambda, \mu, \gamma, \kappa \in \text{Path}(E)$ ,  $v \in H$ ,  $r(\lambda) = r(\mu)$ ,  $r(\gamma) = r(\kappa)$  ed  $s(\mu) = s(\gamma) = v$ . In particolare,  $r(\mu), r(\gamma) \in T(H)$ .

Si possono presentare tre casi. Se  $\mu = \gamma\mu'$ , con  $\mu' \in \text{Path}(E)$ , allora

$$\lambda\mu^*\gamma\kappa^* = \lambda(\mu')^*\gamma^*\gamma\kappa^* = \lambda(\mu')^*\kappa^* = \lambda(\kappa\mu')^*,$$

dove  $r(\lambda) = r(\mu) \in T(H)$  ed  $r(\kappa\mu') = r(\mu') = r(\mu) \in T(H)$ . Se  $\gamma = \mu\gamma'$ , con  $\gamma' \in \text{Path}(E)$ , allora si procede in modo analogo al caso precedente. Altrimenti,  $\lambda\mu^*v\gamma\kappa^* = 0$ .

Passiamo alla seconda parte dell'enunciato. Siccome  $H \subseteq \overline{H}$  vale  $I(H) \subseteq I(\overline{H})$ .

Ora dobbiamo mostrare che  $\overline{H} \subseteq I(H)$ . Per prima cosa verifichiamo che  $T(H) \subseteq I(H)$ . Sia  $v \in T(H)$ , allora esiste  $\mu \in \text{Path}(E)$  tale che  $s(\mu) =: w \in H$  e  $r(\mu) = v$ . Quindi  $v = \mu^*\mu = \mu^*w\mu \in I(H)$ . Utilizzando la descrizione induttiva del Lemma 2.1.8, e procedendo in modo analogo al Lemma 2.4.1 si ottiene l'inclusione desiderata.  $\square$

**Lemma 3.1.2.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Sia  $c$  un ciclo senza uscite di  $E$  con punto base  $v$ . Indichiamo con  $\Lambda_v$  l'insieme dei cammini di  $E$  che terminano in  $v$ , ma non contengono tutti i lati del ciclo  $c$ . Allora l'ideale bilatero  $I(V_c)$ , generato dai vertici del ciclo  $c$ , e l'ideale bilatero  $I(v)$ , generato da  $v$ , entrambi ideali della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , coincidono. Inoltre, l'ideale bilatero  $I(v)$  è isomorfo alla  $K$ -algebra  $M_{\Lambda_v}(K[x^{-1}, x])$ .*

*Dimostrazione.* Cominciamo con dimostrare l'uguaglianza  $I(v) = I(V_c)$ . Sicuramente abbiamo  $I(v) \subseteq I(V_c)$  perché  $v \in V_c$ . Sia  $w \in V_c$ , allora esiste  $\lambda \in \text{Path}(E)$  tale che  $r(\lambda) = v$  ed  $s(\lambda) = w$ . Inoltre, siccome il ciclo  $c$  è senza uscite, vale  $w = \lambda\lambda^* = \lambda v\lambda^* \in I(v)$ . Quindi  $V_c \subseteq I(v)$  e di conseguenza  $I(V_c) \subseteq I(v)$ .

Passiamo ora alla seconda parte dell'enunciato. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{A} := \left\{ \gamma c^k \eta^* \mid \gamma, \eta \in \Lambda_v, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Vogliamo mostrare che  $\mathcal{A}$  è una base per l'ideale  $I(v)$ . Grazie al Corollario 1.3.9, possiamo osservare che gli elementi di  $\mathcal{A}$  sono linearmente indipendenti. Per la Proposizione 3.1.1, un elemento di  $I(v)$  si scrive come una  $K$ -combinazione lineare di monomi del tipo  $\lambda\mu^*$ , dove  $\lambda, \mu \in \text{Path}(E)$  ed  $r(\lambda) = r(\mu) \in T(v)$ . Essendo  $c$  un ciclo senza uscite, l'albero  $T(v)$  coincide con  $V_c$ . Per ognuno di questi monomi  $\lambda\mu^*$  esistono  $\lambda' := \gamma c^h$  e  $\mu' := \eta c^k$ , per opportuni  $\gamma, \eta \in \Lambda_v$  e  $h, k \in \mathbb{Z}^+$ , tali che  $\lambda\mu^* = \lambda'(\mu')^*$ . Di conseguenza  $\lambda\mu^* = \gamma c^{h-k} \eta^* \in \mathcal{A}$ .

Definiamo  $\varphi : I(v) \rightarrow M_{\Lambda_v}(K[x^{-1}, x])$  omomorfismo di  $K$ -spazi vettoriali, dove  $\varphi(\gamma c^k \eta^*) = x^k e_{\gamma, \eta}$  per ogni  $\gamma, \eta \in \Lambda_v$  e per ogni  $k \in \mathbb{Z}$ . Dalla definizione possiamo osservare che  $\varphi$  è un omomorfismo iniettivo e suriettivo, ovvero è un isomorfismo di  $K$ -spazi vettoriali.

Mostriamo che  $\varphi$  è un isomorfismo di  $K$ -algebre. Siano  $\gamma c^k \eta^*, \lambda c^h \mu^* \in \mathcal{A}$ . Se  $\eta = \lambda$ , allora

$$\begin{aligned}\varphi(\gamma c^k \eta^* \lambda c^h \mu^*) &= \varphi(\gamma c^{h+k} \mu^*) = x^{h+k} e_{\gamma, \mu} = x^k x^h e_{\gamma, \eta} e_{\lambda, \mu} \\ &= \varphi(\gamma c^k \eta^*) \varphi(\lambda c^h \mu^*).\end{aligned}$$

Se  $\eta \neq \lambda$ , allora  $\gamma c^k \eta^* \lambda c^h \mu^* = 0$  e

$$\varphi(\gamma c^k \eta^* \lambda c^h \mu^*) = 0 = x^k e_{\gamma, \eta} x^h e_{\lambda, \mu} = \varphi(\gamma c^k \eta^*) \varphi(\lambda c^h \mu^*).$$

L'isomorfismo  $\varphi$  rispetta il prodotto tra i generatori di  $I(v)$ , quindi è un isomorfismo di  $K$ -algebre.  $\square$

**Teorema 3.1.3.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Siano  $\{c_i\}_{i \in \Gamma}$  l'insieme dei cicli senza uscite di  $E$ , indicizzati da un insieme  $\Gamma$ . Con  $\Lambda_{v_i}$  indichiamo l'insieme dei cammini che terminano nel punto base  $v_i$  del ciclo  $c_i$ , che non contengono tutti i lati di  $c_i$ . Allora l'ideale bilatero  $I(P_c(E))$  della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , generato dall'insieme dei vertici di  $E$  appartenenti a un ciclo senza uscite, è isomorfo alla  $K$ -algebra*

$$\bigoplus_{i \in \Gamma} M_{\Lambda_{v_i}}(K[x^{-1}, x]),$$

dove  $K[x^{-1}, x]$  è la  $K$ -algebra dei polinomi di Laurent.

*Dimostrazione.* Ricordiamo che come già osservato nella Definizione 2.3.3, l'insieme  $P_c(E)$  può essere scritto come unione disgiunta  $\sqcup_{i \in \Gamma} V_{c_i}$ .

Grazie alla Proposizione 2.4.9 e al Lemma 3.1.2 possiamo scrivere

$$I(P_c(E)) = I(\sqcup_{i \in \Gamma} V_{c_i}) = \bigoplus_{i \in \Gamma} I(V_{c_i}) = \bigoplus_{i \in \Gamma} I(v_i) = \bigoplus_{i \in \Gamma} M_{\Lambda_{v_i}}(K[x^{-1}, x]). \quad \square$$

**Proposizione 3.1.4.** *Sia  $E$  un grafo. Consideriamo un insieme  $X$  di vertici di  $E$ . Se  $v$  è un vertice appartenente alla chiusura satura ereditaria di  $X$  ed è il vertice di un ciclo di  $E$ , allora  $v \leq u$  per un qualche  $u \in X$ .*

*Dimostrazione.* Ricordiamo che per il Lemma 2.1.8 possiamo scrivere  $\bar{X} = \bigcup_{n \geq 0} \Lambda_n(X)$ . Dimostriamo che se  $v \in \Lambda_n(X)$ , allora  $v \leq u$  per un qualche  $u \in X$ , per ogni  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Procediamo per induzione su  $n$ . Se  $n = 0$ , allora  $v \in \Lambda_0(X) = T(X)$  e per definizione di  $T(X)$  esiste  $u \in X$  tale che  $v \leq u$ . Supponiamo l'asserto vero per  $n \geq 0$  e dimostriamo che vale per  $n + 1$ . Supponiamo  $v \in \Lambda_{n+1}(X) \setminus \Lambda_n(X)$ , allora  $v$  è un vertice regolare tale che  $r(s^{-1}(v)) \subseteq \Lambda_n(X)$ . Per ipotesi  $v$  è un vertice di un ciclo di  $E$ . Sia  $c$  tale ciclo, allora esiste  $w \in V_c$  appartenente a  $\Lambda_n(X)$ . Per l'ipotesi induttiva esiste  $u \in X$  tale che  $w \leq u$ . Siccome vale anche  $v \leq w$  perché entrambi vertici di  $c$ , per la proprietà transitiva della relazione  $\leq$  possiamo concludere  $v \leq u$ .  $\square$

**Proposizione 3.1.5.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $I$  un ideale bilatero della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ . Siano  $H = I \cap E^0$  e  $S = \{v \in B_H \mid v^H \in I\}$ . Allora l'ideale bilatero  $I(H \cup S^H)$  di  $L_K(E)$ , generato dall'insieme  $H \cup S^H$ , è il più grande ideale graduato contenuto in  $I$ .*

*Dimostrazione.* Ricordiamo che l'insieme  $H = I \cap E^0$  è saturo ed ereditario per il Lemma 2.4.3 e l'ideale bilatero  $I(H \cup S^H)$  di  $L_K(E)$  è graduato per la Proposizione 2.2.8, essendo gli elementi di  $H \cup S^H$  omogenei di grado 0. Chiaramente  $I(H \cup S^H) \subseteq I$ .

Per dimostrare che  $I(H \cup S^H)$  è il più grande ideale graduato contenuto in  $I$ , dobbiamo mostrare che ogni altro ideale graduato contenuto in  $I$  è contenuto in  $I(H \cup S^H)$ . Sia  $J \subseteq I$  ideale graduato di  $L_K(E)$ . Per il Teorema 2.4.10, l'ideale  $J$  è generato dall'insieme  $K \cup T^K$ , dove  $K = J \cap E^0$  e  $T = \{v \in B_K \mid v^K \in J\}$ .

Osserviamo per prima cosa che  $K = J \cap E^0 \subseteq I \cap E^0 = H$ . Inoltre, se  $v \in T$  si presentano due casi. Se  $v \in B_H$ , allora

$$v^H = v^K + \sum_{e \in A(v,K), r(e) \in H \setminus K} ee^* \in I$$

perché  $v^K \in J \subseteq I$  ed  $ee^* = er(e)e^* \in I(H) \subseteq I$  per ogni  $e \in A(v, K)$  tale che  $r(e) \in H \setminus K$ . Quindi  $v \in S$ . Se  $v \notin B_H$ , ovvero  $r(s^{-1}(v)) \subseteq H$ , allora

$$v = v^K + \sum_{e \in A(v,K)} ee^* \in I \cap E^0 = H$$

perché  $v^K \in J \subseteq I$  e  $ee^* = er(e)e^* \in I(H) \subseteq I$  per ogni  $e \in A(v, K)$ . Quindi  $v^K = v - \sum_{e \in A(v,K)} ee^* \in I(H) \subseteq I(H \cup S^H)$ .

Dunque, abbiamo dimostrato che  $K \cup T^K \subseteq I(H \cup S^H)$ ; possiamo concludere che  $J = I(K \cup T^K) \subseteq I(H \cup S^H)$ .  $\square$

**Osservazione 3.1.6.** Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Sia  $I$  ideale bilatero della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ . Consideriamo  $c$  un ciclo di  $E$  con punto base  $v$  e definiamo l'insieme

$$Q_c := \{p(x) \in K[x] \mid \deg(p(x)) > 0, p(0) = 1, p(c) \in I\}.$$

Quando valuto  $p(x)$  in  $c$ , il termine di grado 0 è  $c^0 = v$ , il punto base di  $c$ .

Sia  $Q_c \neq \emptyset$ . Consideriamo  $p_v(x)$  il polinomio di grado minimo nell'insieme  $Q_c$ . Allora per ogni altro polinomio  $q(x) \in Q_c$ , il polinomio  $p_v(x)$  divide  $q(x)$ . Infatti, se  $p_v(x) \nmid q(x)$  utilizzando l'algoritmo di divisione tra polinomi si ha  $q(x) = p_v(x)h(x) + r(x)$ , per opportuni  $h(x), r(x) \neq 0 \in K[x]$  tali che  $\deg(r(x)) < \deg(p_v(x))$ . Per la proprietà di assorbimento abbiamo  $p_v(c)h(c) \in I$  e di conseguenza  $r(c) = q(c) - p_v(c)h(c) \in I$ . Scriviamo



$r(x) = \sum_{i=0}^n r_i x^i$ , dove  $r_0, \dots, r_n \in K$ . Sia  $j = 0, \dots, n$  il minimo intero per cui  $r_j \neq 0$ . Allora  $r'(c) := r_j^{-1}(c^*)^j r(c) \in I$ . In particolare, l'elemento  $r'(c)$  è la valutazione del polinomio  $r'(x) = \sum_{i=j}^n r_i r_j^{-1} x^{i-j} \in Q_c$  nel ciclo  $c$ . Ma  $\deg(r'(x)) = \deg(r(x)) < \deg(p_v(x))$ , contraddicendo la minimalità del grado di  $p_v(x)$ . Possiamo concludere che  $r(x) = 0$ .

**Proposizione 3.1.7.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $I$  ideale bilatero della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ . Supponiamo esistano  $g$  e  $h$  due cicli di  $E$  con punti base rispettivamente  $u$  e  $v$ , e due polinomi  $p(x), q(x) \in K[x]$  di grado positivo con  $p(0) = q(0) = 1$ , tali che  $p(g), q(h) \in I$  e i gradi di  $p(x)$  e  $q(x)$  sono i minimi possibili con questa proprietà. Se  $v \leq u$ , allora  $u \leq v$  e gli ideali bilateri  $I(p(g))$  e  $I(q(h))$  di  $L_K(E)$ , generati rispettivamente da  $p(g)$  e  $q(h)$ , coincidono.*

*Dimostrazione.* Sia  $g$  un ciclo di  $E$  con punto base  $u$ . Scriviamo  $g = e_1 \cdots e_n$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, \dots, e_n \in E^1$ , e poniamo  $w_i := r(e_i)$  per  $i = 1, \dots, n$ . In particolare,  $w_n = u$  è il punto base di  $g$ . Scriviamo  $p(x) = 1 + \sum_{j=1}^r k_j x^j$ , dove  $r \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, \dots, k_r \in K$ . Per ogni ciclo  $g_i := e_i \cdots e_n e_1 \cdots e_{i-1}$ , con  $i = 1, \dots, n$ , vale

$$\begin{aligned} e_{i-1}^* \cdots e_1^* p(g) e_1 \cdots e_{i-1} &= e_{i-1}^* \cdots e_1^* u e_1 \cdots e_{i-1} + \sum_{j=1}^r k_j e_{i-1}^* \cdots e_1^* g^j e_1 \cdots e_{i-1} \\ &= r(e_{i-1}) + \sum_{j=1}^r k_j g_i^j = p(g_i) \in I. \end{aligned}$$

Inoltre,  $p(x)$  è il polinomio di grado minimo tale che  $p(g_i) \in I$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

Sia  $\mu \in \text{Path}(E)$  tale che  $s(\mu) = u$  ed  $r(\mu) = v$ . Affermiamo che  $\mu$  è un tratto iniziale del ciclo  $g$ . Perché altrimenti,  $\mu^* g = 0$  e quindi  $\mu^* p(g) \mu = \mu^* u \mu + \sum_{j=1}^r k_j \mu^* g^j \mu = v \in I$ . Questo contraddice la minimalità del grado di  $q(x)$ . Quindi possiamo scrivere  $g = \mu \nu$ , dove  $\nu \in \text{Path}(E)$  tale che  $s(\mu) = r(\nu) = u$  ed  $r(\mu) = s(\nu) = v$ . Quindi  $u \leq v$ .

Affermiamo che  $h = \nu \mu$ . Infatti, se  $h$  contiene un lato  $f$  con  $s(f) = w_i$ , per un qualche  $i = 1, \dots, n$ , e  $f \neq e_{i+1}$  (se  $i = n$  poniamo  $e_{n+1} = e_1$ ), allora avremmo  $f^* g_{i+1} = 0$  e  $f^* p(g_{i+1}) f = f^* w_i f = w_{i+1} \in I$  (se  $i = n$  poniamo  $g_{n+1} = g_1$  e  $w_{n+1} = w_1$ ), contraddicendo la minimalità del grado di  $p(x)$ . Dunque  $h = \nu \mu$ . Da  $\mu^* g \mu = h$ , otteniamo  $\mu^* p(g) \mu = p(h) \in I$ . Per l'Osservazione 3.1.6  $q(x)$  è un divisore di  $p(x)$ . Analogamente si ricava che  $p(x)$  è un divisore di  $q(x)$ . Siccome  $p(0) = q(0) = 1$ , allora  $p(x) = q(x)$ . Dunque,  $q(h) = \mu^* p(g) \mu \in I(p(g))$  e  $p(g) = \nu^* q(h) \nu \in I(q(h))$ , ovvero  $I(p(g)) = I(q(h))$ .  $\square$

**Proposizione 3.1.8.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $C$  un insieme di cicli di  $E$  senza uscite e un insieme di polinomi  $P = \{p_c(x)\}_{c \in C}$  a*

coefficienti in  $K$ , di grado positivo e tali che  $p_c(0) = 1$  per ogni  $c \in C$ . Allora l'ideale bilatero  $I$  della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , generato dall'insieme  $P_C := \{p_c(c)\}_{c \in C}$ , non contiene vertici di  $E$ .

*Dimostrazione.* Per prima cosa vediamo che i vertici dei cicli in  $C$  non appartengono a  $I$ .

Osserviamo che dato un ciclo  $c \in C$ , possiamo scegliere come punto base di  $c$  un qualsiasi suo vertice senza alterare la definizione di  $I$ .

Supponiamo che esistano  $c \in C$  e  $v \in V_c$  tali che  $v \in I$ . Consideriamo  $c$  basato su  $v$ . Allora possiamo scrivere

$$v = \sum_{i=1}^n k_i a_i b_i^* p_i(g_i) c_i d_i^*,$$

dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, \dots, k_n \in K^\times$ ,  $p_1(g_1), \dots, p_n(g_n) \in P_C$ ,  $a_i, b_i, c_i, d_i \in \text{Path}(E)$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Moltiplicando ambo i membri di tale espressione a destra e a sinistra per  $v$ , gli addendi  $vk_i a_i b_i^* p_i(g_i) c_i d_i^* v$  sono non nulli per  $i = 1, \dots, n$ . Inoltre, possiamo supporre che  $g_i$  sia diverso da  $c$ , altrimenti  $v = k_i a_i b_i^* p_c(c) c_i d_i^*$ . Ma essendo  $c$  senza uscite, si ha  $a_i b_i^* = c_i d_i^* = v$  e  $v = p_c(c)$ ; ciò non è possibile perché il grado del polinomio  $p_c(x)$  è positivo. Ora si deve avere  $s(a_i) = v$ ,  $r(a_i) = r(b_i)$  ed  $s(b_i) = v_i$ , dove  $v_i$  è il punto base di  $g_i$ . Siccome  $c$  e  $g_i$  sono cicli senza uscite, il vertice  $r(a_i) = r(b_i)$  deve appartenere ad entrambi i cicli, ma questo non è possibile perché  $c \neq g_i$ .

Ora supponiamo che esista un vertice  $w$  appartenente ad  $I$ . Allora possiamo scrivere

$$w = \sum_{i=1}^m k_i a_i b_i^* p_i(g_i) c_i d_i^*,$$

dove  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, \dots, k_m \in K^\times$ ,  $p_1(g_1), \dots, p_m(g_m) \in P_C$ ,  $a_i, b_i, c_i, d_i \in \text{Path}(E)$  per ogni  $i = 1, \dots, m$ . Moltiplicando ambo i membri tale espressione a destra e a sinistra per  $w$ , gli addendi  $wk_i a_i b_i^* p_i(g_i) c_i d_i^* w$  sono non nulli per  $i = 1, \dots, m$ . Si deve avere  $s(a_i) = w$ ,  $r(a_i) = r(b_i)$  ed  $s(b_i) = v_i$ , dove  $v_i$  è il punto base di  $g_i$ . Ricordiamo che l'insieme  $I \cap E^0$  è ereditario per il Lemma 2.4.3. Quindi il vertice  $r(a_i) = r(b_i)$  appartiene a  $I$ . Ma  $r(b_i)$  è un vertice di  $g_i$  essendo un ciclo senza uscite, in particolare  $v_i \leq r(b_i)$ . Per l'ereditarietà di  $I \cap E^0$  concludiamo che anche il vertice  $v_i$  appartiene a  $I$  contraddicendo la prima parte della dimostrazione.  $\square$

**Generatori.** Qui di seguito vogliamo descrivere i generatori di un ideale bilatero di una Leavitt path algebra.

**Teorema 3.1.9.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Sia  $I$  un ideale bilatero della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ . Allora esiste un insieme di generatori di*

$I$  che consiste negli elementi di  $I$  della forma

$$\left( v + \sum_{i=1}^n k_i c^{r_i} \right) \left( v - \sum_{e \in X} e e^* \right), \quad (3.1)$$

dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v \in E^0$ ,  $k_1, \dots, k_n \in K$ ,  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  è un sottoinsieme finito e proprio di  $s^{-1}(v)$ , e se  $k_i \neq 0$  per qualche  $i = 1, \dots, n$ , allora  $c$  è l'unico ciclo con punto base  $v$ .

*Dimostrazione.* Sia  $J$  l'ideale bilatero di  $L_K(E)$ , generato dagli elementi di  $I$  aventi la forma descritta in (3.1). Chiaramente vale  $J \subseteq I$ . Osserviamo anche che  $I \cap E^0 \subseteq J$ , perché ponendo  $k_i = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$  e  $X = \emptyset$ , allora  $v \in I \cap E^0$  è un generatore di  $J$ .

Dimostriamo ora che ogni elemento di  $I$  della forma

$$\left( \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i \right) \left( v - \sum_{e \in X} e e^* \right), \quad (3.2)$$

dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v \in E^0$ ,  $k_1, \dots, k_n \in K^\times$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{Path}(E)$ ,  $X$  è un sottoinsieme finito e proprio di  $s^{-1}(v)$ , appartiene a  $J$ . Supponiamo per assurdo che esista un elemento  $x$  della forma descritta in (3.2) che appartenga a  $I \setminus J$ . Scegliamo tale elemento in modo che  $n$  sia minimale. Non è restrittivo supporre  $k_1 = 1$  e  $r(\alpha_i) = v$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

Sia  $S_x = \{ s(\alpha_i) \mid i = 1, \dots, n \}$ . Per ogni  $w \in S_x$  abbiamo  $wx \in I$ , ma  $x = \sum_{w \in S_x} wx$ , quindi  $wx \notin J$  per un qualche  $w \in S_x$ . Siccome  $wx$  è ancora della forma presentata in (3.2), possiamo assumere che  $s(\alpha_i) = s(\alpha_j)$  per ogni  $i, j = 1, \dots, n$ .

Inoltre, possiamo scegliere  $x$  con l'ulteriore condizione che la  $n$ -upla  $(\ell(\alpha_1), \dots, \ell(\alpha_n))$  sia la minima possibile rispetto all'ordine lessicografico di  $(\mathbb{Z}^+)^n$ .

Analizziamo tutti i casi possibili che si possono presentare e mostriamo che tutti portano a una contraddizione.

Come primo caso supponiamo che  $\ell(\alpha_i) > 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Consideriamo l'insieme finito

$$A = \{ f \in E^1 \mid f^* \alpha_i \neq 0 \text{ per qualche } i = 1, \dots, n \}.$$

Osserviamo che  $f^*x \in J$  per ogni  $f \in A$  perché l'elemento  $f^*x$  ha la stessa forma di  $x$ , ma o ha un numero di termini minore di  $x$ , oppure ha lo stesso numero di termini e la  $n$ -upla  $(\ell(f^* \alpha_1), \dots, \ell(f^* \alpha_n))$  è minore di  $(\ell(\alpha_1), \dots, \ell(\alpha_n))$ . Quindi  $f f^*x \in J$  per ogni  $f \in A$ , e di conseguenza  $\sum_{f \in A} f f^*x \in J$ . Ma quest'ultimo termine è precisamente  $x$ , che non può appartenere a  $J$  per come è stato scelto.

Supponiamo ora  $\ell(\alpha_i) = 0$  per qualche  $i = 1, \dots, n$ . Per la minimalità di  $(\ell(\alpha_1), \dots, \ell(\alpha_n))$  abbiamo  $\ell(\alpha_1) = 0$ , ovvero  $\alpha_1$  è un vertice e coincide con

$v$ . Siccome i cammini  $\alpha_i$  hanno lo stesso vertice iniziale e come vertice finale  $v$ , allora tutti sono dei cammini chiusi basati su  $v$ . Ora abbiamo tre sotto casi.

Supponiamo che non ci siano cammini chiusi semplici basati su  $v$ . Allora necessariamente non possono esistere dei cammini chiusi basati su  $v$ , ovvero si deve avere  $n = 1$ . Di conseguenza l'elemento  $x$  si riduce a

$$x = v \left( v - \sum_{e \in X} ee^* \right),$$

che è un generatore di  $J$ . Questo contraddice l'assunzione  $x \in I \setminus J$ .

Supponiamo che esista esattamente un cammino semplice basato su  $v$ . Necessariamente questo cammino chiuso semplice, che indichiamo con  $c$ , deve essere un ciclo. In particolare,  $c$  è l'unico ciclo basato su  $v$ . Di conseguenza ogni altro cammino chiuso  $\alpha_i$  deve essere una potenza di  $c$ . Ma questo ci porta ancora a concludere che  $x$  è un generatore di  $J$  contraddicendo l'assunzione  $x \in I \setminus J$ .

Supponiamo che esistano almeno due cammini chiusi semplici basati su  $v$ . Consideriamo l'insieme

$$F = \{ f \in E^1 \mid f^* \alpha_i \neq 0 \text{ per qualche } i = 2, \dots, n \}.$$

Si possono presentare due ulteriori sotto casi. Se  $F \cap X \neq \emptyset$ , allora per  $f \in F \cap X$  abbiamo

$$\begin{aligned} ff^*x &= ff^* \left( v + \sum_{i=2}^n k_i \alpha_i \right) \left( v - \sum_{e \in X} ee^* \right) \\ &= \left( ff^* + \sum_{i=2}^n k_i ff^* \alpha_i \right) \left( v - \sum_{e \in X} ee^* \right) \\ &= ff^* \left( v - \sum_{e \in X} ee^* \right) + \left( \sum_{i=2}^n k_i ff^* \alpha_i \right) \left( v - \sum_{e \in X} ee^* \right) \\ &= \left( \sum_{i=2}^n k_i ff^* \alpha_i \right) \left( v - \sum_{e \in X} ee^* \right). \end{aligned}$$

Si osservi che  $ff^* \alpha_i$  o è nullo oppure coincide con  $\alpha_i$ . Quindi  $ff^*x$  appartiene a  $J$  per la minimalità di  $n$ . Anche l'elemento

$$x - ff^*x = \left( v + \sum_{\{\alpha_i \mid f^* \alpha_i = 0\}} k_i \alpha_i \right) \left( v - \sum_{e \in X} ee^* \right)$$

appartiene a  $J$  per la minimalità di  $n$ . In conclusione, arriviamo a dire  $x = (x - ff^*x) + ff^*x \in J$  che contraddice nuovamente l'assunzione  $x \in I \setminus J$ .

Se  $F \cap X = \emptyset$ , allora il cammino  $\alpha_2$  è un cammino chiuso basato sul vertice  $v$  tale che  $e^*\alpha_2 = 0$  per ogni  $e \in X$ . Scriviamo  $\alpha_2 = f\alpha'_2$  per opportuni  $f \in F$  e  $\alpha'_2 \in \text{Path}(E)$ . Tra tutti i cammini chiusi di  $E$  con punto base  $v$  e lato iniziale  $f$ , sia  $g_1$  quello di lunghezza minima. Necessariamente  $g_1$  deve essere un ciclo, e siccome il suo lato iniziale è  $f$  vale  $e^*g_1 = 0$  per ogni  $e \in X$ . In particolare, abbiamo  $(v - \sum_{e \in X} ee^*)g_1 = g_1$ . Per quanto ipotizzato precedentemente, esiste un secondo cammino semplice  $g_2$ , diverso da  $g_1$ , basato su  $v$ . In particolare,  $g_2^*g_1 = 0$ . Consideriamo  $t$  un intero positivo tale che  $\ell(g_1^t) > \ell(\alpha_n)$ . Sia  $y$  l'elemento  $(g_1^t)^*xg_1^t$  di  $L_K(E)$ :

$$\begin{aligned} y &= (g_1^t)^*xg_1^t = (g_1^t)^*\left(v + \sum_{i=2}^n k_i\alpha_i\right)\left(v - \sum_{e \in X} ee^*\right)g_1^t \\ &= (g_1^t)^*\left(v + \sum_{i=2}^n k_i\alpha_i\right)g_1^t \\ &= v + \sum_{i=2}^n k_i(g_1^t)^*\alpha_i g_1^t. \end{aligned}$$

Siccome  $x \in I$ , per la proprietà di assorbimento  $y \in I$ .

Se  $(g_1^t)^*\alpha_i g_1^t \neq 0$ , allora  $(g_1^t)^*\alpha_i \neq 0$ . Siccome  $\ell(g_1^t) > \ell(\alpha_n) \geq \ell(\alpha_i)$ , il cammino  $\alpha_i$  coincide con il tratto iniziale del cammino  $g_1^t$ . Ma siccome  $\alpha_i$  è un cammino chiuso con punto base  $v$  e  $g_1$  è un ciclo, abbiamo  $\alpha_i = g_1^{r_i}$ , con  $r_i \in \mathbb{Z}^+$ . In particolare, ogni  $\alpha_i$  commuta con  $g_1^t$ , quindi ogni volta che un termine  $(g_1^t)^*\alpha_i g_1^t$  è non nullo, necessariamente è uguale ad  $\alpha_i$ . Possiamo scrivere

$$y = v + \sum_{i=2}^n \delta_i k_i g_1^{r_i},$$

dove  $\delta_i = 1$  se  $(g_1^t)^*\alpha_i g_1^t \neq 0$ , e  $\delta_i = 0$  altrimenti.

Ora  $g_2^*yg_2 = g_2^*vg_2 = v$  perché  $g_2^*g_1 = 0$ . Per la proprietà di assorbimento  $v \in I \cap E^0 \subseteq J$ , e di conseguenza  $x = vx \in J$ , che contraddice l'assunzione  $x \in I \setminus J$ .

Dimostriamo ora che ogni elemento di  $I$  appartiene a  $J$ . Supponiamo per assurdo che esista un elemento  $x$  appartenente a  $I \setminus J$ . Per il punto (ii) del Lemma 1.2.5 possiamo scrivere  $x = \sum_{i=1}^n k_i\alpha_i\beta_i^*$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \text{Path}(E)$ ,  $k_1, \dots, k_n \in K^\times$ . Scegliamo tale  $x$  in modo che  $n$  sia minimo, e che la  $n$ -upla  $(\ell(\beta_1), \dots, \ell(\beta_n))$  sia minima rispetto all'ordine lessicografico di  $(\mathbb{Z}^+)^n$ . Osserviamo che possiamo scrivere  $x = \sum_{v \in E^0} xv$ , dove la sommatoria a secondo membro è sicuramente finita. Siccome  $x \in I \setminus J$ , allora  $xv \notin I \setminus J$  per un qualche  $v \in E^0$ . Dunque possiamo supporre  $r(\beta_i^*) = v$  per ogni  $i = 1, \dots, n$  e per un opportuno  $v \in E^0$ , e  $k_1 = 1$ .

Per non ricadere nel caso precedente si ha  $\ell(\beta_i) > 0$  per un qualche  $i = 1, \dots, n$ .

Supponiamo  $\ell(\beta_i) > 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Denotiamo con  $e_i$  il lato iniziale di  $\beta_i$  e scriviamo  $\beta_i = e_i \beta'_i$  per un opportuno  $\beta'_i \in \text{Path}(E)$ . Osserviamo che per ogni  $f \in s^{-1}(v)$  abbiamo

$$xf = \left( \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i \beta_i^* \right) f = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i \beta_i^* f = \sum_{\{i \mid e_i=f\}} k_i \alpha_i (\beta'_i)^*.$$

L'elemento  $xf$  appartiene a  $I$  per la proprietà di assorbimento. Se  $xf$  ha un numero di addendi minore di  $n$ , per la minimalità di  $n$ ,  $xf \in J$ . Altrimenti, siccome  $(\ell(\beta'_1), \dots, \ell(\beta'_n)) < (\ell(\beta_1), \dots, \ell(\beta_n))$  rispetto l'ordine lessicografico, di nuovo  $xf \in J$ . Dunque  $xf \in J$  per ogni  $f \in s^{-1}(v)$ . In particolare,  $x e_j e_j^* \in J$  per ogni  $\beta_j$  che compare nell'espressione di  $x$ . Ma questo implica

$$x = \sum_{j=1}^n x e_j e_j^* \in J,$$

che contraddice l'assunzione  $x \in I \setminus J$ .

Supponiamo  $\ell(\beta_i) = 0$  per qualche  $i = 1, \dots, n$ . Allora  $\beta_i = v$ , e per la minimalità di  $(\ell(\beta_1), \dots, \ell(\beta_n))$  deve essere  $\beta_1 = v$ . Sia  $u \geq 1$  tale che  $\ell(\beta_1) = \dots = \ell(\beta_u) = 0$ , e  $\ell(\beta_j) > 0$  per  $j \geq u+1$ . Possiamo scrivere

$$x = \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_u \alpha_u + k_{u+1} \alpha_{u+1} \beta_{u+1}^* + \dots + k_n \alpha_n \beta_n^*.$$

Consideriamo l'insieme finito

$$T = \{ f \in E^1 \mid \beta_i^* f \neq 0 \text{ per qualche } i = u+1, \dots, n \}.$$

Analogamente a quanto fatto in precedenza, si verifica che  $xf \in J$  per ogni  $f \in T$ , quindi  $\sum_{f \in T} x f f^* \in J$ .

Per ogni  $i = u+1, \dots, n$  scriviamo come prima  $\beta_i = e_i \beta'_i$ . Allora per  $f \in T$  abbiamo  $\beta_j^* f f^* = 0$  oppure  $\beta_j^* f f^* = \beta_j^*$  se  $f = e_j$ . Quindi vale  $\beta_j^*(v - \sum_{f \in T} f f^*) = 0$  per ogni  $i = u+1, \dots, n$  e di conseguenza

$$x - \sum_{f \in T} x f f^* = x \left( v - \sum_{f \in T} f f^* \right) = (\alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_u \alpha_u).$$

Ma  $x - \sum_{f \in T} x f f^*$  appartiene a  $J$  per la prima parte della dimostrazione. Dunque  $x = (x - \sum_{f \in T} x f f^*) + \sum_{f \in T} x f f^* \in J$ , contraddicendo l'assunzione  $x \in I \setminus J$ .

In conclusione, siamo riusciti a dimostrare l'inclusione  $I \subseteq J$  e di conseguenza  $I = J$ .  $\square$

La seguente proposizione ci permette di descrivere i generatori di un ideale bilatero che non contiene vertici; in particolare, tali generatori sono dei polinomi valutati in cicli senza uscita.

**Proposizione 3.1.10.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Se  $I$  è un ideale bilatero non nullo della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , non contenente vertici di  $E$ , allora  $I$  non è graduato ed è generato da degli elementi del tipo*

$$y = v + \sum_{i=1}^n k_i c^{r_i} \in I, \quad (3.3)$$

dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v \in E^0$ ,  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, \dots, k_n \in K^\times$ ,  $c$  è un ciclo di  $E$  senza uscite con punto base  $v$ . Inoltre, dati due generatori  $v + \sum_{i=1}^n k_i c^{r_i}$  e  $v' + \sum_{i=1}^{n'} k'_i c'^{s_i}$  distinti, allora  $v \not\leq v'$  e  $v' \not\leq v$ .

*In particolare, i generatori risultano ortogonali tra loro.*

*Dimostrazione.* L'ideale  $I$  non può essere graduato perché altrimenti, per il Teorema 2.4.10, sarebbe generato dall'insieme  $H \cup S^H$ , dove  $H = I \cap E^0$  e  $S \subseteq B_H$ , ma per ipotesi  $I \cap E^0 = \emptyset$  e di conseguenza  $I = I(\emptyset) = \{0\}$ . Questo contraddice la nostra scelta  $I$  ideale non nullo.

Per il Teorema 3.1.9, sappiamo che l'ideale  $I$  è generato dagli elementi della forma

$$y = \left( v + \sum_{i=1}^n k_i c^{r_i} \right) \left( v - \sum_{e \in X} ee^* \right) \in I,$$

dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v \in E^0$ ,  $k_1, \dots, k_n \in K^\times$ ,  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  è un sottoinsieme finito e proprio di  $s^{-1}(v)$ , e  $c$  è l'unico ciclo con punto base  $v$ . Per ogni generatore  $y$  mostriamo che  $c$  è senza uscite in  $E$  e  $X = \emptyset$ .

Sia  $y = (v + \sum_{i=1}^n k_i c^{r_i})(v - \sum_{e \in X} ee^*)$  un generatore di  $I$ . Mostriamo per prima cosa che  $v + \sum_{i=1}^n k_i c^{r_i}$  appartiene a  $I$ . Consideriamo  $f \in s^{-1}(v) \setminus X$  e poniamo  $w := r(f)$ . Tale lato  $f$  deve essere il lato iniziale del ciclo  $c$ , altrimenti  $f^*c = 0$  e  $(\sum_{e \in X} ee^*)f = 0$  implicano

$$f^*yf = f^* \left( v + \sum_{i=1}^n k_i c^{r_i} \right) \left( v - \sum_{e \in X} ee^* \right) f = f^*vf = w \in I,$$

contraddicendo l'ipotesi  $I \cap E^0 = \emptyset$ . Dunque possiamo scrivere  $c = f\alpha$  per un opportuno  $\alpha \in \text{Path}(E)$ . Sia  $h$  il ciclo  $\alpha f$  con punto base  $w$ . Notiamo che

$$\begin{aligned} f^*yf &= f^* \left( v + \sum_{i=1}^n k_i c^{r_i} \right) \left( v - \sum_{e \in X} ee^* \right) f \\ &= f^* \left( v + \sum_{i=1}^n k_i c^{r_i} \right) f \\ &= f^*vf + \sum_{i=1}^n k_i f^*c^{r_i}f \\ &= w + \sum_{i=1}^n k_i h^{r_i} \in I. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}\alpha^* \left( w + \sum_{i=1}^n k_i h^{r_i} \right) \alpha &= \alpha^* w \alpha + \sum_{i=1}^n k_i \alpha^* h^{r_i} \alpha \\ &= v + \sum_{i=1}^n k_i c^{r_i} \in I,\end{aligned}$$

come desiderato.

Supponiamo per assurdo che il ciclo  $c$  abbia un'uscita  $e$  in un suo vertice  $u$ . Scriviamo il ciclo  $c$  come  $\beta\gamma$ , dove  $\beta, \gamma \in \text{Path}(E)$ ,  $s(\beta) = r(\gamma) = v$  e  $r(\beta) = s(\gamma) = u$ . Denotiamo con  $g$  il ciclo  $\gamma\beta$  con punto base  $u$ . Possiamo osservare che

$$\begin{aligned}e^* \beta^* \left( v + \sum_{i=1}^n k_i c^{r_i} \right) \beta e &= e^* \left( \beta^* v \beta + \sum_{i=1}^n k_i \beta^* c^{r_i} \beta \right) e \\ &= e^* \left( u + \sum_{i=1}^n k_i g^{r_i} \right) e \\ &= e^* u e = r(e) \in I.\end{aligned}$$

Questo contraddice l'ipotesi  $I \cap E^0 = \emptyset$ ; la contraddizione nasce dall'aver supposto l'esistenza di un'uscita nel ciclo  $c$ .

Siccome  $c$  non ha uscite, l'insieme  $s^{-1}(v)$  ha cardinalità uno. L'insieme  $X$  per essere un sottoinsieme proprio di  $s^{-1}(v)$  deve essere l'insieme vuoto.

Sia  $y = v + \sum_{j=1}^n k_j c^{r_j}$  un generatore di  $I$ . Se esiste un altro generatore  $y' = v + \sum_{j=1}^{n'} k'_j c'^{s_j}$  di  $I$ , allora siccome  $c$  è un ciclo senza uscite, è l'unico ciclo con punto base  $v$ . Dunque  $c = c'$  e  $y' = v + \sum_{j=1}^{n'} k'_j c^{s_j}$ . Ora facendo riferimento alle notazioni dell'Osservazione 3.1.6, consideriamo il polinomio  $p_v(x) \in Q_c$  di grado minimo. Possiamo affermare che  $y$  e  $y'$  sono multipli di  $p_v(c)$ . Quindi i generatori che coinvolgono lo stesso vertice possono essere sostituiti con  $p_v(c)$ .

Consideriamo  $p_v(c)$  e  $p_w(d)$ , due generatori di  $I$ , dove  $c$  e  $d$  sono cicli di  $E$  senza uscite basati rispettivamente sui vertici  $v$  e  $w$ , tali che  $c = \alpha\beta$  e  $d = \beta\alpha$  per opportuni  $\alpha, \beta \in \text{Path}(E)$ ,  $p_v(x) \in Q_c$  e  $p_w(x) \in Q_d$  di grado minimo. Allora  $\alpha^* p_v(c) \alpha = p_w(d)$ , ovvero il generatore  $p_w(d)$  può essere ommesso.

Inoltre, se  $v \leq w$  oppure  $w \leq v$ , per la Proposizione 3.1.7, gli ideali generati da  $p_v(c)$  e  $p_w(d)$  rispettivamente, coincidono. Quindi uno dei due generatori può essere ommesso.

Questo processo di rimozione e sostituzione dei generatori ci porta a trovare un insieme di generatori della forma descritta in (3.3); inoltre dati due generatori  $y = v + \sum_{j=1}^n k_j c^{r_j}$  e  $y' = v' + \sum_{j=1}^{n'} k'_j c'^{s_j}$  distinti di  $I$ ,  $v \neq v'$ , i lati dei cicli  $c$  e  $c'$  sono diversi e il grado di ciascun polinomio che definisce il



generatore è positivo ed è il minimo possibile. In particolare, tali generatori risultano ortogonali tra loro.  $\square$

**Definizione 3.1.11.** Sia  $E$  un grafo. Consideriamo  $H$  un insieme saturo ed ereditario di vertici di  $E$  ed  $S$  un sottoinsieme di vertici di rottura di  $H$ . Per ogni vertice  $v$  di  $E$  indichiamo con  $CSP(v)$  l'insieme dei cammini chiusi semplici di  $E$  basati su  $v$ .

Definiamo i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} C_u(E) &:= \{ c \mid c \text{ è un ciclo di } E \text{ per il quale } |CSP(v)| = 1 \text{ per ogni } v \in V_c \} \\ C_{ne}(E) &:= \{ c \mid c \text{ è un ciclo senza uscite di } E \} \\ C_{(H,S)}(E) &:= \{ c \mid V_c \cap (H \cup (B_H \setminus S)) = \emptyset \text{ e } r(e) \in H \text{ per ogni uscita } e \text{ di } c \}. \end{aligned}$$

**Osservazione 3.1.12.** Sia  $E$  un grafo. Consideriamo  $H$  un insieme saturo ed ereditario di vertici di  $E$  ed  $S$  un sottoinsieme di vertici di rottura di  $H$ . Vediamo alcune inclusioni relative agli insiemi della Definizione 3.1.11.

Se  $v$  appartiene a un ciclo senza uscite, allora tale ciclo è l'unico cammino chiuso semplice con punto base  $v$ . Ovvero vale  $C_{ne}(E) \subseteq C_u(E)$ .

Se  $c$  è un ciclo nell'insieme  $C_{(H,S)}(E)$ , per ogni uscita  $e$  di  $c$  vale  $T(r(e)) \subseteq H$  per l'ereditarietà di  $H$ , ma siccome  $V_c \cap H = \emptyset$ , il ciclo  $c$  è l'unico cammino chiuso semplice passante per i suoi vertici. Quindi  $C_{(H,S)}(E) \subseteq C_u(E)$ .

Sia  $E/(H, S)$  il grafo quoziente rispetto la coppia  $(H, S)$  come nella Definizione 2.4.18. Osserviamo che ogni ciclo senza uscite del grafo  $E/(H, S)$ , visto come ciclo di  $E$ , appartiene all'insieme  $C_{(H,S)}(E)$ . Inoltre, ogni ciclo appartenente all'insieme  $C_{(H,S)}(E)$  corrisponde a un ciclo senza uscite in  $E/(H, S)$ . Quindi vale  $C_{ne}(E/(H, S)) = C_{(H,S)}(E)$ .

Il seguente teorema ci permette di descrivere con maggiore precisione i generatori di un ideale bilatero di una Leavitt path algebra  $L_K(E)$  di un grafo  $E$  rispetto a un campo  $K$ . In particolare, sia  $I$  un ideale bilatero, allora i suoi generatori possono essere:

- un vertice di  $E$  appartenente a  $I$ ;
- elementi del tipo  $v - \sum_{e \in A(v,H)} ee^* \in I$ , dove  $v$  è un vertice di rottura dell'insieme  $H := I \cap E^0$  e  $A(v, H) = s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H)$ ;
- elementi del tipo  $u + \sum_{i=1}^n k_i c^{r_i} \in I$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, \dots, k_n \in K^\times$ ,  $u = c^0$ ,  $c$  è un ciclo di  $E$  i cui vertici non appartengono ad  $H$  e non sono vertici di rottura  $v$  di  $H$ , tali che  $v - \sum_{e \in A(v,H)} ee^* \in I$ , e i vertici finali di tutte le uscite di  $c$  appartengono ad  $H$ .

**Teorema 3.1.13.** Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $I$  un ideale bilatero della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ . Siano  $H := I \cap E^0$  ed  $S = \{ v \in B_H \mid v^H \in I \}$ . Allora esistono un sottoinsieme  $C \subseteq C_{(H,S)}(E)$  e un insieme  $P = \{ p_c(x) \}_{c \in C}$  di polinomi a coefficienti in  $K$ , con grado

positivo e  $p_c(0) = 1$  per ogni  $c \in C$ , tali che l'ideale  $I$  è generato dall'insieme  $H \cup S^H \cup P_C$ , dove  $P_C$  è l'insieme  $\{p_c(c)\}_{c \in C}$ .

*Dimostrazione.* Per la Proposizione 3.1.5, l'ideale bilatero  $I(H \cup S^H)$  di  $L_K(E)$ , generato dall'insieme  $H \cup S^H$ , è il più grande ideale graduato contenuto in  $I$ . Supponiamo che tale inclusione sia stretta, altrimenti non c'è niente da provare. Per il Teorema 2.4.21 esiste un isomorfismo  $\varphi : L_K(E)/I(H \cup S^H) \rightarrow L_K(E/(H, S))$ , dove  $L_K(E/(H, S))$  è la Leavitt path algebra associata al grafo quoziente  $E/(H, S)$  rispetto alla coppia  $(H, S)$  (vedi Definizione 2.4.18). L'ideale  $I/I(H \cup S^H)$  di  $L_K(E)/I(H \cup S^H)$  è isomorfo a un ideale  $J$  di  $L_K(E/(H, S))$ .

Vogliamo mostrare ora che l'ideale  $J$  non contiene vertici di  $E/(H, S)$ . Ricordiamo quanto detto nell'Osservazione 2.4.22 e che  $(E/(H, S))^0 = (E^0 \setminus H) \cup \{v' \mid v \in B_H \setminus S\}$ . Quindi l'intersezione  $J \cap (E/(H, S))^0$  può essere scritta come

$$J \cap (E/(H, S))^0 = (J \cap (E^0 \setminus H)) \cup (J \cap \{v' \mid v \in B_H \setminus S\}).$$

Affermiamo che l'intersezione  $J \cap (E^0 \setminus H)$  è vuota. Infatti, supponiamo esista  $v \in J \cap (E^0 \setminus H)$ , allora si possono presentare due casi. Se  $v \in (E^0 \setminus H) \setminus (B_H \setminus S)$ , allora  $\varphi^{-1}(v) = v + I(H \cup S^H) \in I/I(H \cup S^H)$ . In particolare, deve valere  $v \in I \cap E^0 = H$  che contraddice  $v \in E^0 \setminus H$ . Se  $v \in B_H \setminus S$ , allora  $\varphi^{-1}(v) = v - v^H + I(H \cup S^H)$ . In particolare, abbiamo  $v - v^H \in I$ . Sia  $f \in A(v, H)$ , per la proprietà di assorbimento di  $I$  possiamo scrivere

$$(v - v^H)f = \left( \sum_{e \in A(v, H)} ee^* \right) f = f \in I.$$

Allora  $f^*f = r(f) \in I \cap E^0 = H$ . Questo è una contraddizione perché i vertici finali dei lati appartenenti all'insieme  $A(v, H)$  non appartengono ad  $H$ .

Affermiamo che l'intersezione  $J \cap \{v' \mid v \in B_H \setminus S\}$  è vuota. Infatti, se esiste  $v' \in J \cap \{v' \mid v \in B_H \setminus S\}$ , allora  $\varphi^{-1}(v') = v^H + I(H \cup S^H) \in I/I(H \cup S^H)$ . In particolare,  $v^H \in I$  e di conseguenza  $v \in S$ . Ciò contraddice  $v \in B_H \setminus S$ .

Applicando la Proposizione 3.1.10 possiamo concludere che esistono un sottoinsieme  $C \subseteq C_{ne}(E/(H, S))$  e un insieme  $P = \{p_c(x)\}_{c \in C}$  di polinomi a coefficienti in  $K$ , con grado positivo e  $p_c(0) = 1$  per ogni  $c \in C$ , tali che l'ideale  $J$  è generato dall'insieme  $P_C = \{p_c(c)\}_{c \in C}$ . Ricordiamo che per quanto detto nell'Osservazione 3.1.12, l'insieme  $C_{ne}(E/(H, S))$  coincide con l'insieme  $C_{(H, S)}(E)$ . Per ogni ciclo  $c \in C_{(H, S)}(E)$  abbiamo  $\varphi^{-1}(c) = c + I(H \cup S^H)$ , quindi l'ideale  $I/I(H \cup S^H)$  è generato dall'insieme  $\{p_c(c) + I(H \cup S^H)\}_{c \in C}$ . Questo ci permette di concludere che  $I$  coincide con  $I(H \cup S^H) + I(P_C) = I(H \cup S^H \cup P_C)$ , dove  $I(P_C)$  e  $I(H \cup S^H \cup P_C)$  sono gli ideali bilateri di  $L_K(E)$ , generati rispettivamente dagli insiemi  $P_C$  e  $H \cup S^H \cup P_C$ .  $\square$

## 3.2 Il Teorema di Struttura degli Ideali bilateri

**Il reticolo  $\mathcal{Q}_E$ .** Per poter dare una descrizione del reticolo degli ideali bilateri di una Leavitt path algebra, introduciamo il reticolo  $\mathcal{Q}_E$ .

Ricordiamo il reticolo  $\mathcal{T}_E$  e l'ordine parziale  $\leq$  su esso definito nella Definizione 2.5.1.

**Definizione 3.2.1.** Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Definiamo l'insieme  $\mathcal{Q}_E$  formato dalle terne in cui la prima componente è un elemento  $(H, S) \in \mathcal{T}_E$ ; la seconda componente è un sottoinsieme  $C$  di  $C_{(H,S)}(E)$ ; la terza componente è un insieme  $P = \{p_c(x)\}_{c \in C}$ , dove per ogni  $c \in C$ ,  $p_c(x)$  è un polinomio di grado positivo a coefficienti in  $K$  e tale che  $p_c(0) = 1$ .

Sull'insieme  $\mathcal{Q}_E$  definiamo la relazione  $\preceq$ : consideriamo  $((H_1, S_1), C_1, P_1)$  e  $((H_2, S_2), C_2, P_2)$  in  $\mathcal{Q}_E$ , dove  $P_i = \{p_c^{(i)}(x)\}_{c \in C_i}$  e  $V_{C_i} = \cup_{c \in C_i} V_c$ , allora

$$((H_1, S_1), C_1, P_1) \preceq ((H_2, S_2), C_2, P_2) \quad \text{se, e solo se,}$$

$$(H_1, S_1) \leq (H_2, S_2), \quad V_{C_1} \subseteq H_2 \cup V_{C_2}, \quad p_c^{(2)}(x) | p_c^{(1)}(x) \quad \forall c \in C_1 \cap C_2.$$

Verifichiamo che  $\preceq$  è un ordine parziale. La proprietà riflessiva di  $\preceq$  è immediata dalla riflessività di  $\leq$ .

Siano  $((H_1, S_1), C_1, P_1), ((H_2, S_2), C_2, P_2) \in \mathcal{Q}_E$ , tali che

$$\begin{aligned} ((H_1, S_1), C_1, P_1) &\preceq ((H_2, S_2), C_2, P_2) \quad \text{e} \\ ((H_2, S_2), C_2, P_2) &\preceq ((H_1, S_1), C_1, P_1). \end{aligned}$$

Allora  $(H_1, S_1) \leq (H_2, S_2)$  e  $(H_2, S_2) \leq (H_1, S_1)$ ; per la proprietà antisimmetrica di  $\leq$  abbiamo  $(H_1, S_1) = (H_2, S_2)$ . Sappiamo anche che  $V_{C_1} \subseteq H_2 \cup V_{C_2} = H_1 \cup V_{C_2}$  e  $V_{C_2} \subseteq H_1 \cup V_{C_1} = H_2 \cup V_{C_1}$ . Quindi  $V_{C_1} \subseteq V_{C_2}$  e  $V_{C_2} \subseteq V_{C_1}$ , ovvero  $V_{C_1} = V_{C_2}$ . Siccome i cicli appartenenti a  $C_i$ , per  $i = 1, 2$ , sono senza uscite nel grafo quoziente  $E/(H_1, S_1) = E/(H_2, S_2)$ , allora possiamo concludere  $C_1 = C_2$ . Ora è immediata  $P_1 = P_2$  perché  $p_c^{(1)}(x) | p_c^{(2)}(x)$ ,  $p_c^{(2)}(x) | p_c^{(1)}(x)$  e  $p_c^{(1)}(0) = p_c^{(2)}(0) = 1$  per ogni  $c \in C_1 = C_2$ . In conclusione,  $((H_1, S_1), C_1, P_1) = ((H_2, S_2), C_2, P_2)$  e  $\preceq$  è antisimmetrica.

Siano  $((H_1, S_1), C_1, P_1), ((H_2, S_2), C_2, P_2), ((H_3, S_3), C_3, P_3) \in \mathcal{Q}_E$ , tali che

$$\begin{aligned} ((H_1, S_1), C_1, P_1) &\preceq ((H_2, S_2), C_2, P_2) \quad \text{e} \\ ((H_2, S_2), C_2, P_2) &\preceq ((H_3, S_3), C_3, P_3). \end{aligned}$$

Allora  $(H_1, S_1) \leq (H_2, S_2)$  e  $(H_2, S_2) \leq (H_3, S_3)$ ; per la proprietà transitiva di  $\leq$  abbiamo  $(H_1, S_1) \leq (H_3, S_3)$ . In particolare,  $H_1 \subseteq H_3$ . Inoltre, vale anche  $V_{C_1} \subseteq H_2 \cup V_{C_2}$  e  $V_{C_2} \subseteq H_3 \cup V_{C_3}$ , quindi  $V_{C_1} \subseteq H_3 \cup V_{C_3}$ . Infine, se  $c \in C_1 \cap C_3$ , allora  $V_{C_1} \cap H_2 = \emptyset$  e di conseguenza  $V_{C_1} \subseteq V_{C_2}$ ; per forza si deve avere  $c \in C_2$ . Per ogni  $c \in C_1 \cap C_3$  vale  $p_c^{(3)}(x) | p_c^{(2)}(x)$  e  $p_c^{(2)}(x) | p_c^{(1)}(x)$ , che implicano  $p_c^{(3)}(x) | p_c^{(1)}(x)$ . In conclusione,  $((H_1, S_1), C_1, P_1) \preceq ((H_3, S_3), C_3, P_3)$  e  $\preceq$  è transitiva.

**Osservazione 3.2.2.** Siano  $(H_1, S_1), (H_2, S_2) \in \mathcal{T}_E$  tali che  $(H_1, S_1) \leq (H_2, S_2)$ . Allora  $V_{C_{(H_1, S_1)}} \subseteq H_2 \cup V_{C_{(H_2, S_2)}}$ . Infatti, sia  $c \in C_{(H_1, S_1)}$ . Ricordiamo che  $V_c \cap (H_1 \cup (B_{H_1} \setminus S_1)) = \emptyset$  ed  $r(e) \in H_1$  per ogni uscita  $e$  di  $c$ .

Se  $V_c \cap H_2 \neq \emptyset$ , allora per l'ereditarietà di  $H_2$  vale  $V_c \subseteq H_2$ .

Altrimenti, mostriamo che vale  $V_c \cap (B_{H_2} \setminus S_2) = \emptyset$ . Supponiamo esista  $v \in V_c \cap (B_{H_2} \setminus S_2)$ . Osserviamo che esiste  $e \in s^{-1}(v)$  tale che  $r(e) \notin H_1 \cup (B_{H_1} \setminus S_1)$  e per ogni  $f \in s^{-1}(v) \setminus \{e\}$  abbiamo  $r(f) \in H_1$ . Grazie a questo possiamo concludere che  $v$  è un vertice di rottura di  $H_1$ . Siccome  $v \notin B_{H_1} \setminus H_1$  dobbiamo avere  $v \in S_1 \subseteq S_2 \cup H_2$ . Siccome  $v \notin H_2$  l'unica possibilità che rimane è  $v \in S_2$ , ma ciò contraddice la scelta di  $v$ . In conclusione  $V_c \cap (H_2 \cup (B_{H_2} \setminus S_2)) = \emptyset$  e  $c \in C_{(H_2, S_2)}$ . Abbiamo così ottenuto l'inclusione desiderata  $V_c \subseteq V_{C_{(H_2, S_2)}}$ .

Con la seguente proposizione definiamo una struttura di reticolo sull'insieme parzialmente ordinato  $(\mathcal{Q}_E, \preceq)$ .

Richiamiamo la Definizione 2.5.4 di  $S$ -saturazione di un insieme di vertici ereditario.

Dati due polinomi  $p(x)$  e  $q(x)$  a coefficienti in un campo  $K$ , allora con  $\text{g.c.d.}(p(x), q(x))$  indichiamo il loro massimo comun divisore, mentre con  $\text{l.c.m.}(p(x), q(x))$  indichiamo il loro minimo comune multiplo.

**Proposizione 3.2.3.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. L'insieme parzialmente ordinato  $(\mathcal{Q}_E, \preceq)$  è un reticolo dove gli estremi superiore  $\vee$  e inferiore  $\wedge$  sono così definiti: dati  $((H_1, S_1), C_1, P_1), ((H_2, S_2), C_2, P_2) \in \mathcal{Q}_E$ , allora*

$$((H_1, S_1), C_1, P_1) \vee ((H_2, S_2), C_2, P_2) \quad (3.4)$$

$$= \left( \overline{(H_1 \cup H_2 \cup V_C^{S_1 \cup S_2})}, (S_1 \cup S_2) \setminus \overline{H_1 \cup H_2 \cup V_C^{S_1 \cup S_2}}, C_1 \vee C_2, \{ \text{g.c.d.}(p_c^1(x), p_c^2(x)) \}_{c \in C_1 \vee C_2} \right),$$

dove

$$C = \left\{ c \in C_1 \cap C_2 \mid \text{g.c.d.}(p_c^{(1)}(x), p_c^{(2)}(x)) = 1 \right\}$$

$$C_1 \vee C_2 = (C_1 \cup C_2) \setminus \left\{ c \in C_1 \cup C_2 \mid V_c \subseteq \overline{H_1 \cup H_2 \cup V_C^{S_1 \cup S_2}} \right\}$$

(poniamo  $p_c^{(i)}(x) = 0$  se  $c \notin C_i$  per  $i = 1$  o  $2$ );

$$((H_1, S_1), C_1, P_1) \wedge ((H_2, S_2), C_2, P_2) \quad (3.5)$$

$$= \left( (H_1, S_1) \wedge (H_2, S_2), C_1 \wedge C_2, \left\{ \text{l.c.m.}(p_c^{(1)}(x), p_c^{(2)}(x)) \right\}_{c \in C_1 \wedge C_2} \right)$$

dove

$$C_1 \wedge C_2 = (C_1 \cap C_2) \cup C_1^{H_2} \cup C_2^{H_1}$$

$$\text{con } C_1^{H_2} = \{ c \in C_1 \mid V_c \subseteq H_2 \} \text{ e } C_2^{H_1} = \{ c \in C_2 \mid V_c \subseteq H_1 \}$$

(poniamo  $p_c^{(i)}(x) = 1$  se  $c \notin C_i$  per  $i = 1$  o  $2$ ).

*Dimostrazione.* Siano  $((H_1, S_1), C_1, P_1), ((H_2, S_2), C_2, P_2) \in \mathcal{Q}_E$ . Indichiamo con  $((\tilde{H}, \tilde{S}), \tilde{C}, \tilde{P})$  l'elemento della formula (3.4). Per prima cosa mostriamo che  $((\tilde{H}, \tilde{S}), \tilde{C}, \tilde{P}) \in \mathcal{Q}_E$  e  $((H_i, S_i), C_i, P_i) \preceq ((\tilde{H}, \tilde{S}), \tilde{C}, \tilde{P})$  per  $i = 1, 2$ . Osserviamo subito che

$$\begin{aligned} H_i &\subseteq \overline{H_1 \cup H_2 \cup V_C}^{S_1 \cup S_2} \quad \text{e} \\ S_i &\subseteq \overline{H_1 \cup H_2 \cup V_C}^{S_1 \cup S_2} \cup \left( (S_1 \cup S_2) \setminus \overline{H_1 \cup H_2 \cup V_C}^{S_1 \cup S_2} \right) = S_1 \cup S_2 \end{aligned}$$

per  $i = 1, 2$ . Ovvero,  $(H_i, S_i) \leq (\tilde{H}, \tilde{S})$  per  $i = 1, 2$ .

Sia  $c \in C_1 \vee C_2$ . Allora  $c \in C_1$  o  $c \in C_2$ , e  $V_c \cap \tilde{H} = \emptyset$ . Per l'Osservazione 3.2.2  $c \in C_{(\tilde{H}, \tilde{S})}$ .

Osserviamo anche che

$$V_{C_i} \subseteq V_{C_1 \vee C_2} \cup \overline{H_1 \cup H_2 \cup V_C}^{S_1 \cup S_2} = V_{C_1} \cup V_{C_2}$$

per  $i = 1, 2$ .

Infine, usando la convenzione  $i, j = 1, 2$  e  $i \neq j$ , sia  $c \in (C_1 \vee C_2) \cap C_i$ . Se  $c \notin C_j$ , allora  $p_c^{(j)}(x) = 0$  e g.c.d. $(0, p_c^{(i)}(x)) = p_c^{(i)}(x) | p_c^{(i)}(x)$ . Se  $c \in C_j$ , allora g.c.d. $(p_c^{(i)}(x), p_c^{(j)}(x)) | p_c^{(i)}(x)$ .

Sia  $((H', S'), C', P') \in \mathcal{Q}_E$  tale che  $((H_i, S_i), C_i, P_i) \preceq ((H', S'), C', P')$  per  $i = 1, 2$ . Dobbiamo mostrare che  $((\tilde{H}, \tilde{S}), \tilde{C}, \tilde{P}) \preceq ((H', S'), C', P')$ . Proviamo per prima cosa  $(\tilde{H}, \tilde{S}) \leq (H', S')$ . Notiamo che  $H_1 \cup H_2 \subseteq H'$  e  $S_1 \cup S_2 \subseteq H' \cup S'$ . Dobbiamo provare  $V_C \subseteq H'$ . Prima verifichiamo che  $C \cap C' = \emptyset$ . Sia  $c \in C \cap C'$ , allora  $c \in C_1 \cap C_2$  e g.c.d. $(p_c^{(1)}(x), p_c^{(2)}(x)) = 1$ . Siccome  $((H_i, S_i), C_i, P_i) \preceq ((H', S'), C', P')$  e  $c \in C_i \cap C'$  per  $i = 1, 2$ , abbiamo  $p'_c(x) | p_c^{(i)}$  per  $i = 1, 2$ , dove  $P' = \{p'_c(x)\}_{c \in C'}$ . Questo implica che  $p'_c(x) = 1$ , contraddicendo la scelta di  $p'_c(x)$  come polinomio di grado positivo. Come desiderato, si deve avere  $C \cap C' = \emptyset$  e in particolare  $V_C \cap V_{C'} = \emptyset$ . Grazie a  $V_C \subseteq V_{C_1} \subseteq H' \cup V_{C'}$  e  $V_C \cap V_{C'} = \emptyset$ , abbiamo  $V_C \subseteq H'$  e  $H_1 \cup H_2 \cup V_C \subseteq H'$ . Ora utilizzando la descrizione induttiva dell'insieme  $\overline{H_1 \cup H_2 \cup V_C}^{S_1 \cup S_2}$  descritta nel Lemma 2.5.5, e procedendo in modo analogo a quanto fatto nella Proposizione 2.5.6, si dimostra che  $\overline{H_1 \cup H_2 \cup V_C}^{S_1 \cup S_2} \subseteq H'$ .

Chiaramente valgono  $(S_1 \cup S_2) \setminus \overline{H_1 \cup H_2 \cup V_C}^{S_1 \cup S_2} \subseteq H' \cup S'$  e  $V_{C_1 \vee C_2} \subseteq V_{C_1} \cup V_{C_2} \subseteq H' \cup V_{C'}$ .

Infine, se  $c \in (C_1 \vee C_2) \cap C'$ , abbiamo  $p'_c(x) | p_c^{(i)}(x)$  per  $i = 1, 2$ . Quindi per ogni  $c \in (C_1 \vee C_2) \cap C'$  vale  $p'_c(x) | \text{g.c.d.}(p_c^{(1)}(x), p_c^{(2)}(x))$ .

Possiamo concludere che  $((\tilde{H}, \tilde{S}), \tilde{C}, \tilde{P}) \preceq ((H', S'), C', P')$ , ovvero la terna  $((\tilde{H}, \tilde{S}), \tilde{C}, \tilde{P})$  corrisponde all'estremo superiore di  $((H_1, S_1), C_1, P_1)$  e  $((H_2, S_2), C_2, P_2)$ .

Siano  $((H_1, S_1), C_1, P_1), ((H_2, S_2), C_2, P_2) \in \mathcal{Q}_E$ . Indichiamo con  $((\overline{H}, \overline{S}), \overline{C}, \overline{P})$  l'elemento della formula (3.5). Per prima cosa mostriamo che  $((\overline{H}, \overline{S}), \overline{C}, \overline{P}) \in$

$\mathcal{Q}_E$  e  $((\overline{H}, \overline{S}), \overline{C}, \overline{P}) \preceq ((H_i, S_i), C_i, P_i)$  per  $i = 1, 2$ . Ricordiamo che per la Proposizione 2.5.6

$$\begin{aligned} (H_1, S_1) \wedge (H_2, S_2) &= (H_1 \cap H_2, (S_1 \cap S_2) \cup ((S_1 \cup S_2) \cap (H_1 \cup H_2))) \\ &= (H_1 \cap H_2, (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap H_2) \cup (S_2 \cap H_1)) \end{aligned}$$

è l'estremo inferiore delle coppie  $(H_1, S_1)$  e  $(H_2, S_2)$  nel reticolo  $\mathcal{T}_E$ . Quindi vale  $(\overline{H}, \overline{S}) = (H_1, S_1) \wedge (H_2, S_2) \leq (H_i, S_i)$  per  $i = 1, 2$ .

Verifichiamo che per ogni ciclo nell'insieme  $C_1 \wedge C_2$ , i suoi vertici non appartengono all'insieme  $B_{H_1 \cap H_2} \setminus ((S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap H_2) \cup (S_2 \cap H_1))$ . Sia  $c \in C_1 \cap C_2$ . Supponiamo esista  $v \in V_c \cap B_{H_1 \cap H_2}$ . Siccome  $V_c \cap (H_1 \cup H_2) = \emptyset$ , esiste  $e \in s^{-1}(v)$  tale che  $r(e) \notin (H_1 \cup H_2)$ . Ovvero  $v$  è anche un vertice di rottura degli insiemi  $H_1$  e  $H_2$ . Siccome  $V_c \cap (B_{H_1} \setminus S_1 \cup B_{H_2} \setminus S_2) = \emptyset$ , allora  $v \in S_1 \cap S_2$ .

Sia  $c \in C_1^{H_2}$ . Supponiamo esista  $v \in V_c \cap B_{H_1 \cap H_2}$ . Siccome  $v \in H_2$ , ma non appartiene a  $H_1$ , è un vertice di rottura di  $H_1$ . Ma  $v$  non può appartenere a  $B_{H_1} \setminus S_1$ , quindi  $v \in S_1$ . In particolare  $v \in S_1 \cap H_2$ .

Il caso in cui  $c \in C_2^{H_1}$  è analogo al precedente.

Grazie a quanto appena dimostrato possiamo affermare che l'insieme dei vertici dei cicli in  $C_1 \wedge C_2$  è contenuto in  $V_{C_i} \cup H_i$  per  $i = 1, 2$ .

Sia  $c \in (C_1 \wedge C_2) \cap C_i$ , allora  $p_c^{(i)}(x) | \text{l.c.m.}(p_c^{(1)}(x), p_c^{(2)}(x))$  per  $i = 1, 2$ .

Sia  $((H', S'), C', P') \in \mathcal{Q}_E$  tale che  $((H', S'), C', P') \preceq ((H_i, S_i), C_i, P_i)$  per  $i = 1, 2$ . Dobbiamo mostrare che  $((H', S'), C', P') \preceq ((\overline{H}, \overline{S}), \overline{C}, \overline{P})$ . In particolare, vale  $(H', S') \leq (H_i, S_i)$  per  $i = 1, 2$ , quindi per la definizione di estremo inferiore  $(H', S') \leq (\overline{H}, \overline{S}) = (H_1, S_1) \wedge (H_2, S_2)$ .

Da  $V_{C'} \subseteq V_{C_i} \cup H_i$  per  $i = 1, 2$ , abbiamo

$$V_{C'} \subseteq (V_{C_1} \cup H_1) \cap (V_{C_2} \cup H_2) = (V_{C_1} \cap V_{C_2}) \cup (V_{C_1} \cap H_2) \cup (H_1 \cap V_{C_2}) \cup (H_1 \cap H_2).$$

Da questo è chiaro che  $V_{C'} \subseteq (H_1 \cap H_2) \cup V_{C_1 \wedge C_2} = \overline{H} \cup V_{\overline{C}}$ .

Ora per ogni  $c \in C_i \cap C'$  e  $i = 1, 2$ , abbiamo  $p_c^{(i)}(x) | p'_c(x)$  (ricordiamo la convenzione adottata nell'enunciato). Quindi possiamo concludere che  $\text{l.c.m.}(p_c^{(1)}(x), p_c^{(2)}(x)) | p'_c(x)$  per ogni  $c \in (C_1 \wedge C_2) \cap C'$ . Ovvero  $((H', S'), C', P') \preceq ((\overline{H}, \overline{S}), \overline{C}, \overline{P})$ , mostrando così che la terna  $((\overline{H}, \overline{S}), \overline{C}, \overline{P})$  coincide con l'estremo inferiore di  $((H_1, S_1), C_1, P_1)$  e  $((H_2, S_2), C_2, P_2)$ .  $\square$

**Il Teorema di Struttura degli Ideali Bilateri.** Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Consideriamo  $(\mathcal{L}(L_K(E)), \subseteq)$ , il reticolo degli ideali bilateri della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , e il reticolo  $(\mathcal{Q}_E, \preceq)$  della Definizione 3.2.1.

Consideriamo le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathcal{Q}_E &\rightarrow \mathcal{L}(L_K(E)) \\ ((H, S), C, P) &\mapsto I(H \cup S^H \cup P_C), \end{aligned} \tag{3.6}$$

dove  $P = \{p_c(x)\}_{c \in C}$ ,  $P_C = \{p_c(c)\}_{c \in C}$  e  $I(H \cup S^H \cup P_C)$  è l'ideale bilatero di  $L_K(E)$  generato dall'insieme  $H \cup S^H \cup P_C$ ;

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{L}(L_K(E)) &\rightarrow \mathcal{Q}_E \\ I &\mapsto ((H, S), C, P), \end{aligned} \quad (3.7)$$

dove  $H = I \cap E^0$ ,  $S = \{v \in B_H \mid v^H \in I\}$  e le componenti  $C$  e  $P$  sono definiti come nel Teorema 3.1.13.

Vogliamo mostrare che  $\Phi$  e  $\Psi$  sono biiezioni.

**Proposizione 3.2.4.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Sia  $((H, S), C, P) \in \mathcal{Q}_E$ . Consideriamo l'ideale bilatero  $I(H \cup S^H \cup P_C)$  di  $L_K(E)$ , generato dall'insieme  $H \cup S^H \cup P_C$ . Allora vale  $H = I \cap E^0$  e  $S = \{v \in B_H \mid v^H \in I\}$ . In particolare, le funzioni  $\Phi$  e  $\Psi$ , definite rispettivamente in (3.6) e (3.7), sono due biiezioni.*

*Dimostrazione.* Siano  $((H, S), C, P) \in \mathcal{Q}_E$  e  $I := I(H \cup S^H \cup P_C)$  ideale bilatero di  $L_K(E)$ , generato dall'insieme  $H \cup S^H \cup P_C$ . Notiamo che l'ideale graduato  $I(H \cup S^H)$  di  $L_K(E)$ , generato da  $H \cup S^H$ , è contenuto in  $I$ . Richiamiamo la Definizione 2.4.18 e ricordiamo che l'insieme dei vertici di  $E/(H, S)$  è  $((E/(H, S))^0 = (E^0 \setminus H) \cup \{v' \mid v \in B_H \setminus S\}$ .

Consideriamo l'ideale  $I/I(H \cup S^H) = I(P_C) + I(H \cup S^H)$  dell'algebra quoziente  $L_K(E)/I(H \cup S^H)$ . Per il Teorema 2.4.21, possiamo affermare che l'ideale  $I(P_C) + I(H \cup S^H)$  è isomorfo all'ideale  $J$  della Leavitt path algebra  $L_K(E/(H, S))$ , generato dall'insieme  $P_C$ . Ricordiamo che per l'Osservazione 3.1.12, i cicli in  $C$  corrispondono a cicli senza uscite di  $E/(H, S)$ . Per la Proposizione 3.1.8, l'ideale  $J$  non contiene vertici di  $E/(H, S)$ .

Supponiamo esista  $v \in E^0 \setminus H$  appartenente ad  $I$ . Facciamo riferimento a quanto detto nell'Osservazione 2.4.22. Se  $v \in (E^0 \setminus H) \setminus (B_H \setminus S)$ , allora  $v + I(H \cup S^H)$  corrisponde a un vertice in  $J$ . Se  $v \in B_H \setminus S$ , allora  $v + I(H \cup S^H)$  corrisponde all'elemento  $v + v' \in J$ . Per la proprietà di assorbimento di  $J$  abbiamo  $v(v + v') = v \in J$ .

Supponiamo esista  $v \in B_H \setminus S$  tale che  $v^H \in I$ . Allora  $v^H$  corrisponde al vertice  $v' \in J$  sempre grazie all'Osservazione 2.4.22.

In ogni caso arriviamo a concludere che  $J$  contiene dei vertici. Quindi  $H = I \cap E^0$  e  $S = \{v \in B_H \mid v^H \in I\}$ .

Sia  $((H, S), C, P) \in \mathcal{Q}_E$  e poniamo  $\Phi(((H, S), C, P)) = I$ . Vogliamo mostrare che  $\Psi \circ \Phi(((H, S), C, P)) = \Psi(I) = ((H, S), C, P)$ . Grazie a quanto dimostrato precedentemente, la prima componente della terna  $\Psi(I)$  è la coppia  $(H, S)$ . Per il Teorema 3.1.13 i generatori di  $I$  sono esattamente gli elementi dell'insieme  $H \cup S^H \cup P_C$ . Infatti, se esistono un ciclo  $h \in C_{(H, S)}$  e un polinomio  $g(x)$  a coefficienti in  $K$ , di grado positivo e con termine noto 1, tali che  $g(h) + I(H \cup S^H) \in I/I(H \cup S^H)$ , allora possiamo scrivere  $g(h) = \sum_{i=1}^n k_i a_i b_i^* p(g_i) c_i d_i^*$ , dove  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, \dots, k_n \in K$ ,

$a_i, b_i, c_i, d_i \in \text{Path}(E)$  per ogni  $i = 1, \dots, n$  e  $p_1(g_1), \dots, p_n(g_n) \in P_C$ . Moltiplicando tale uguaglianza ambo i membri a destra e a sinistra per  $v$ , punto base di  $h$ , abbiamo  $vg(h)v = g(h)$  e gli addendi  $vk_i a_i b_i^* p(g_i) c_i d_i^* v$  sono non nulli per  $i = 1, \dots, n$ . Quindi  $s(a_i) = v$ ,  $r(a_i) = r(b_i)$ , ed  $s(b_i) = v_i$ , dove  $v_i$  è il punto base di  $g_i$ . Siccome i cicli  $h$  e  $g_i$  sono senza uscite in  $E/(H, S)$ , allora  $r(a_i) = r(b_i)$  è un vertice sia di  $h$  che di  $g_i$ , ma ciò non è possibile a meno che  $g_i = c$ . Questo mostra che  $\Psi(I) = ((H, S), C, P)$ . Per l'arbitrarietà della terna  $((H, S), C, P)$  la funzione  $\Psi \circ \Phi$  è l'identità dell'insieme  $\mathcal{Q}_E$ .

Sia  $I \in \mathcal{L}(L_K(E))$ . Per come è stata definita la funzione  $\Phi$  in (3.6) abbiamo  $\Phi(I) = ((H, S), C, P) \in \mathcal{Q}_E$  in modo che l'insieme  $H \cup S^H \cup P_C$  generi l'ideale  $I$ . Quindi

$$\Psi(\Phi(I)) = \Psi(((H, S), C, P)) = I(H \cup S^H \cup P_C) = I.$$

Per l'arbitrarietà di  $I$  possiamo concludere che la funzione  $\Psi \circ \Phi$  è l'identità dell'insieme  $\mathcal{L}(L_K(E))$ .  $\square$

Ora siamo pronti a dimostrare il Teorema di Struttura degli Ideali Bilateri di una Leavitt path algebra.

**Teorema 3.2.5** (Teorema di Struttura degli Ideali Bilateri). *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora il reticolo  $(\mathcal{Q}_E, \preceq)$  della Definizione 3.2.1 e il reticolo  $(\mathcal{L}(L_K(E)), \subseteq)$  degli ideali bilateri della Leavitt path algebra  $L_K(E)$  sono isomorfi.*

*Dimostrazione.* Consideriamo le funzioni biettive

$$\Phi : \mathcal{Q}_E \rightarrow \mathcal{L}(L_K(E)) \quad \text{e} \quad \Psi : \mathcal{L}(L_K(E)) \rightarrow \mathcal{Q}_E$$

definite rispettivamente in (3.6) e (3.7). Dimostriamo che tali funzioni sono isomorfismi di insiemi parzialmente ordinati.

Iniziamo a dimostrare che  $\Phi$  rispetta l'ordine parziale  $\preceq$  di  $\mathcal{Q}_E$ . Siano  $((H_1, S_1), C_1, P_1), ((H_2, S_2), C_2, P_2) \in \mathcal{Q}_E$  tali che  $((H_1, S_1), C_1, P_1) \preceq ((H_2, S_2), C_2, P_2)$ . In particolare, vale  $(H_1, S_1) \leq (H_2, S_2)$ ,  $V_{C_1} \subseteq V_{C_2} \cup H_2$  e  $p_c^{(2)}(c) | p_c^{(1)}(c)$  per ogni  $c \in C_1 \cap C_2$ . Siano  $I_1 := \Phi(((H_1, S_1), C_1, P_1))$  e  $I_2 := \Phi(((H_2, S_2), C_2, P_2))$ . Per la Proposizione 2.5.3 abbiamo  $I(H_1 \cup S^{H_1}) \subseteq I(H_2 \cup S^{H_2}) \subseteq I_2$ .

Ora mostriamo che  $(P_1)_{C_1} \subseteq I_2$ . Sia  $c \in C_1$ . Se  $c \in C_2$ , allora  $p_c^{(2)}(c) | p_c^{(1)}(c)$  e quindi  $p_c^{(1)}(c) \in I_2$ . Se  $c \notin C_2$ , allora  $V_c \subseteq H_2$  e  $p_c^{(1)}(c) \in I_2$ . In conclusione abbiamo  $I_1 = I(H_1 \cup S^{H_1}) + I((P_1)_{C_1}) \subseteq I_2$ .

Proseguiamo a dimostrare che  $\Psi$  rispetta l'ordine parziale  $\subseteq$  di  $\mathcal{L}(L_K(E))$ . Siano  $I_1, I_2 \in \mathcal{L}(L_K(E))$  tali che  $I_1 \subseteq I_2$ . Siano  $\Psi_1(I_1) = ((H_1, S_1), C_1, P_1)$  e  $\Psi_2(I_2) = ((H_2, S_2), C_2, P_2)$ . Siccome l'ideale graduato  $I(H_1 \cup S^{H_1})$  è contenuto in  $I_2$  e per la Proposizione 3.1.5, l'ideale  $I(H_2 \cup S^{H_2})$  è il più grande ideale graduato contenuto in  $I_2$ , abbiamo  $I(H_1 \cup S^{H_1}) \subseteq I(H_2 \cup S^{H_2})$ . Per la Proposizione 2.5.3 vale  $(H_1, S_1) \leq (H_2, S_2)$ .



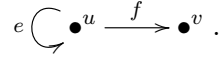
Ricordiamo che per l'Osservazione 3.2.2 vale  $V_{C_{(H_1, S_1)}} \subseteq H_2 \cup V_{C_{(H_2, S_2)}}$ . Sia  $c \in C_1$ . Se  $V_c \cap H_2 \neq \emptyset$ , allora per l'ereditarietà di  $H_2$  abbiamo  $V_c \subseteq H_2$ . Altrimenti, se  $V_c \cap H_2 = \emptyset$ , allora  $c \in C_{(H_2, S_2)}$ . Siccome  $p_c^{(1)}(c) \in I_2$ , abbiamo  $c \in C_2$ . In particolare,  $V_c \subseteq V_{C_2}$ .

Per l'Osservazione 3.1.6 è immediato concludere  $p_c^{(2)}(c) | p_c^{(1)}(c)$  per ogni  $c \in C_1 \cap C_2$ . Quindi  $((H_1, S_1), C_1, P_1) \preceq ((H_2, S_2), C_2, P_2)$ .

Per verificare che gli isomorfismi  $\Phi$  e  $\Psi$  rispettano gli estremi superiori e inferiori dei reticoli  $(\mathcal{L}(L_K(E)), \subseteq)$  e  $(\mathcal{Q}_E, \preceq)$  basta procedere analogamente a quanto visto nel Teorema di struttura degli Ideali Graduati 2.5.9.  $\square$

Ora mostriamo un esempio di applicazione del Teorema di Struttura degli Ideali Bilateri 3.2.5.

**Esempio 3.2.6.** Siano  $K$  un campo ed  $E_T$  il grafo di Toeplitz come nell'Esempio 1.1.4:



Gli insiemi di vertici saturi ed ereditari di  $E_T$  sono:

$$\mathcal{H}_{E_T} = \{ \emptyset, \{ v \}, \{ u, v \} \}.$$

L'unico ciclo appartenente all'insieme  $C_u(E_T)$  è il loop  $e$ .

Per il Teorema di Struttura degli Ideali Bilateri 3.2.5, gli ideali bilateri della Leavitt path algebra  $L_K(E_T)$  sono:

$$I(\emptyset) = \{ 0 \}, \quad I(\{ v \}), \quad I(\{ u, v \}) = L_K(E_T),$$

$$\left\{ I(\{ v \} \cup \{ p(e) \}) \left| p(x) = 1 + \sum_{i=1}^n k_i x^i \in K[x], \text{ con } k_n \neq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N} \right. \right\}.$$

Consideriamo una Leavitt path algebra  $L_K(E)$  di un grafo  $E$  rispetto a un campo  $K$ . L'insieme  $\mathcal{L}(L_K(E))$  degli ideali bilateri dotato dell'usuale prodotto tra ideali, che indichiamo con  $\cdot$ , è un monoide con identità  $L_K(E)$ . Vediamo come caratterizzare questo monoide tramite l'insieme  $\mathcal{Q}_E$  definito in 3.2.1.

**Definizione 3.2.7.** Sia  $\mathcal{Q}_E$  l'insieme della Definizione 3.2.1. Per ogni  $q_1 = ((H_1, S_1), C_1, P_1)$  e  $q_2 = ((H_2, S_2), C_2, P_2)$  in  $\mathcal{Q}_E$  definiamo

$$q_1 \cdot q_2 = \left( (H_1, S_1) \wedge (H_2, S_2), C_1 \wedge C_2, \left\{ p_c^{(1)}(x) p_c^{(2)}(x) \right\}_{c \in C_1 \wedge C_2} \right) \quad (3.8)$$

dove

$$C_1 \wedge C_2 = (C_1 \cap C_2) \cup C_1^{H_2} \cup C_2^{H_1}$$

$$\text{con } C_1^{H_2} = \{ c \in C_1 \mid V_c \subseteq H_2 \} \text{ e } C_2^{H_1} = \{ c \in C_2 \mid V_c \subseteq H_1 \}$$

(poniamo  $p_c^{(i)}(x) = 1$  se  $c \notin C_i$  per  $i = 1$  o  $2$ ).

Tale prodotto è associativo perché l'estremo inferiore  $\wedge$  del reticolo  $\mathcal{T}_E$  è associativo, e per ogni  $C_1 \subseteq C_{(H_1, S_1)}(E)$ ,  $C_2 \subseteq C_{(H_2, S_2)}(E)$ ,  $C_3 \subseteq C_{(H_3, S_3)}(E)$  abbiamo che

$$\begin{aligned}
(C_1 \wedge C_2) \wedge C_3 &= ((C_1 \cap C_2) \cup C_1^{H_2} \cup C_2^{H_1}) \wedge C_3 = \\
&= ((C_1 \cap C_2 \cap C_3) \cup (C_1^{H_2} \cap C_3) \cup (C_2^{H_1} \cap C_3)) \\
&\quad \cup ((C_1 \cap C_2) \cup C_1^{H_2} \cup C_2^{H_1})^{H_3} \cup C_3^{H_1 \cap H_2} = \\
&= ((C_1 \cap C_2 \cap C_3) \cup (C_1 \cap C_3)^{H_2} \cup (C_2 \cap C_3)^{H_1}) \\
&\quad \cup ((C_1 \cap C_2)^{H_3} \cup C_1^{H_2 \cap H_3} \cup C_2^{H_1 \cap H_3}) \cup C_3^{H_1 \cap H_2}
\end{aligned}$$

è uguale a

$$\begin{aligned}
C_1 \wedge (C_2 \wedge C_3) &= C_1 \wedge ((C_2 \cap C_3) \cup C_2^{H_3} \cup C_3^{H_2}) = \\
&= ((C_1 \cap C_2 \cap C_3) \cup (C_1 \cap C_2^{H_3}) \cup (C_1 \cap C_3^{H_2})) \\
&\quad \cup C_1^{H_2 \cap H_3} \cup ((C_2 \cap C_3) \cup C_2^{H_3} \cup C_3^{H_2})^{H_1} = \\
&= ((C_1 \cap C_2 \cap C_3) \cup (C_1 \cap C_2)^{H_3} \cup (C_1 \cap C_3)^{H_2}) \\
&\quad \cup C_1^{H_2 \cap H_3} \cup ((C_2 \cap C_3)^{H_1} \cup C_2^{H_3 \cap H_1} \cup C_3^{H_2 \cap H_1}).
\end{aligned}$$

Inoltre, possiamo osservare che il prodotto definito nella formula 3.8 è commutativo e l'elemento neutro è  $((E^0, \emptyset), \emptyset, \emptyset)$ . Quindi  $(\mathcal{Q}_E, \cdot)$  è un monoide commutativo.

**Proposizione 3.2.8.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora il monoide  $(\mathcal{L}(L_K(E)), \cdot)$  degli ideali bilateri della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , dotato dell'usuale prodotto tra ideali, è isomorfo al monoide  $(\mathcal{Q}_E, \cdot)$  della Definizione 3.2.7. In particolare, il prodotto tra ideali bilateri di una Leavitt path algebra è commutativo.*

*Dimostrazione.* Siano  $I_1$  e  $I_2$  due ideali bilateri di  $L_K(E)$ . Consideriamo la funzione  $\Psi : \mathcal{L}(L_K(E)) \rightarrow \mathcal{Q}_E$  definita in 3.7. Ricordiamo che questa funzione è biettiva per la Proposizione 3.2.4. Scriviamo

$$\begin{aligned}
\Psi(I_1) &= ((H_1, S_1), C_1, P_1) \\
\Psi(I_2) &= ((H_2, S_2), C_2, P_2) \\
\Psi(I_1 \cdot I_2) &= ((H_3, S_3), C_3, P_3).
\end{aligned}$$

Dobbiamo mostrare che  $\Psi(I_1 \cdot I_2) = \Psi(I_1) \cdot \Psi(I_2)$ .

Per prima cosa mostriamo che  $(H_3, S_3) = (H_1, S_1) \wedge (H_2, S_2)$ . Ricordiamo che per la proprietà di assorbimento abbiamo  $I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$ . Per la Proposizione 3.1.5, gli ideali graduati  $I(H_1 \cup S^{H_1})$  e  $I(H_2 \cup S^{H_2})$  sono i più grandi ideali graduati contenuti rispettivamente in  $I_1$  e  $I_2$ . Grazie alla Proposizione 2.5.11 vale  $I(H_1 \cup S^{H_1}) \cdot I(H_2 \cup S^{H_2}) = I(H_1 \cup S^{H_1}) \cap I(H_2 \cup S^{H_2})$ . Inoltre, l'ideale graduato  $I(H_1 \cup S^{H_1}) \cap I(H_2 \cup S^{H_2})$  è il più grande ideale graduato contenuto in  $I_1 \cap I_2$ , quindi anche in  $I_1 \cdot I_2$ . Però, sempre per la Proposizione 3.1.5 l'ideale graduato  $I(H_3 \cup S^{H_3})$  è il più grande ideale graduato contenuto in  $I_1 \cdot I_2$ . Quindi  $I(H_3 \cup S^{H_3}) = I(H_1 \cup S^{H_1}) \cap I(H_2 \cup S^{H_2})$ . Per il Teorema di Struttura degli Ideali Graduati 2.5.9, l'ideale graduato  $I(H_1 \cup S^{H_1}) \cap I(H_2 \cup S^{H_2})$  corrisponde a  $(H_1, S_1) \wedge (H_2, S_2)$ , ottenendo così l'uguaglianza desiderata.

Grazie alla formula 3.8 possiamo scrivere

$$\Psi(I_1) \cdot \Psi(I_2) = \left( (H_1, S_1) \wedge (H_2, S_2), C_1 \wedge C_2, \left\{ p_c^{(1)}(x) p_c^{(2)}(x) \right\}_{c \in C_1 \wedge C_2} \right).$$

Dimostriamo che vale  $\Psi(I_1) \cdot \Psi(I_2) \preceq \Psi(I_1 \cdot I_2)$ . A tale scopo invochiamo il Teorema di Struttura degli Ideali bilateri 3.2.5 e mostriamo che l'ideale associato alla terna  $\Psi(I_1) \cdot \Psi(I_2)$  è contenuto in  $I_1 \cdot I_2$ . Per la prima parte della dimostrazione è sufficiente mostrare che per ogni  $c \in C_1 \wedge C_2$  si ha  $p_c(c) \in I_1 \cdot I_2$ . Infatti, se  $c \in C_1^{H_2}$ , indicando con  $v$  il punto base di  $c$ , allora  $p_c^{(2)}(c) = 1$  e  $p_c^{(1)}(c) = p_c^{(1)}(c)v \in I_1 \cdot I_2$ . Se  $c \in C_2^{H_1}$ , si procede in modo analogo al caso precedente. Se  $c \in C_1 \cap C_2$ , allora è chiaro che  $p_c^{(1)}(c) p_c^{(2)}(c) \in I_1 \cdot I_2$ .

Viceversa, mostriamo che  $\Psi(I_1 \cdot I_2) \preceq \Psi(I_1) \cdot \Psi(I_2)$ . Come ricordato all'inizio,  $I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$ , quindi per il Teorema di Struttura degli Ideali bilateri 3.2.5 abbiamo  $\Psi(I_1 \cdot I_2) \preceq \Psi(I_1) \wedge \Psi(I_2) \preceq \Psi(I_j)$  per  $j = 1, 2$ . In particolare, deve valere  $V_{C_3} \subseteq (H_1 \cap H_2) \cup V_{C_1 \wedge C_2}$ . Inoltre, per ogni  $c \in C_3 \cap (C_1 \wedge C_2)$  abbiamo  $p_c^{(j)}(x) | p_c^{(3)}(x)$ , e di conseguenza  $p_c^{(1)}(x) p_c^{(2)}(x) | p_c^{(3)}(x)$ .

Per la proprietà antisimmetrica di  $\preceq$  vale l'uguaglianza desiderata.

Per la Definizione 3.2.7, il monoide  $(\mathcal{Q}_E, \cdot)$  è commutativo, quindi per l'isomorfismo tra  $(\mathcal{L}(L_K(E)), \cdot)$  e  $(\mathcal{Q}_E, \cdot)$  appena mostrato, abbiamo  $I \cdot J = J \cdot I$  per ogni  $I$  e  $J$  ideali bilateri di  $L_K(E)$ .  $\square$

### 3.3 Leavitt path algebre semplici, artiniane e noetheriane

In questa sezione vogliamo caratterizzare le Leavitt path algebre semplici, artiniane e noetheriane. In particolare, vedremo come le caratteristiche del grafo di partenza influiscono su queste proprietà.

**Leavitt path algebre semplici.** Cominciamo con caratterizzare le Leavitt path algebre semplici.

Ricordiamo la definizione di algebra semplice.

**Definizione 3.3.1.** Sia  $K$  un campo. Allora una  $K$ -algebra  $A$  è *semplice* se gli unici ideali bilateri che possiede sono  $\{0\}$  e  $A$ .

**Teorema 3.3.2** (Teorema di Semplicità). *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è semplice se, e solo se, sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

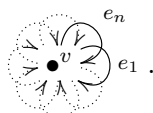
- (i) *gli unici insiemi di vertici saturi ed ereditari di  $E$  sono l'insieme vuoto ed  $E^0$ ;*
- (ii) *il grafo  $E$  soddisfa la condizione (L), ovvero ogni ciclo di  $E$  ha un'uscita.*

*Dimostrazione.* Richiamiamo le notazioni della Definizione 3.1.11. Supponiamo che  $L_K(E)$  sia semplice. Per assurdo, se esiste un insieme di vertici  $H \subset E^0$  non vuoto, saturo ed ereditario, allora l'ideale bilatero  $I(H)$  di  $L_K(E)$ , generato dall'insieme  $H$ , è diverso da  $\{0\}$  ed è proprio perché non contiene tutti i vertici di  $E$ . Questo contraddice la semplicità di  $L_K(E)$ , quindi l'insieme  $H$  non può esistere.

Inoltre, se  $c$  è un ciclo senza uscite di  $E$  con punto base  $v$ , allora  $c \in C_{(\emptyset, \emptyset)}(E)$ . Per il Teorema di Struttura degli Ideali Bilateri 3.2.5, l'ideale bilatero  $I(v+c)$  di  $L_K(E)$ , generato da  $v+c \in L_K(E)$ , non è banale e non contiene vertici, in particolare, è proprio. Questo contraddice la semplicità di  $L_K(E)$ . La contraddizione nasce dalla supposizione dell'esistenza di un ciclo senza uscite.

Ora supponiamo che valgano le condizioni (i) e (ii) e mostriamo che non esistono ideali bilateri oltre a  $\{0\}$  e  $L_K(E)$ . Per assurdo, supponiamo che esista  $I$  ideale bilatero di  $L_K(E)$  proprio. Per il Teorema 3.1.13 esistono  $H$  insieme di vertici di  $E$  saturo ed ereditario,  $S$  sottoinsieme di vertici di rottura di  $H$ ,  $C$  sottoinsieme di  $C_{(H,S)}(E)$  e  $P = \{p_c(x)\}_{c \in C}$  insieme di polinomi a coefficienti in  $K$  di grado positivo con termine noto uguale a 1, tali che l'insieme  $H \cup S^H \cup P_C$ , dove  $P_C = \{p_c(c)\}_{c \in C}$ , genera l'ideale  $I$ . In particolare, l'insieme  $H$  coincide con  $I \cap E^0$ . Per la condizione (i) e siccome  $I$  è proprio, si deve avere  $H = \emptyset$ . Di conseguenza  $S \subseteq B_H = \emptyset$ , e  $C \subseteq C_{(H,S)}(E) = C_{(\emptyset, \emptyset)}(E) = \emptyset$  per la condizione (ii). L'ideale  $I$  risulta coincidere con  $I(\emptyset) = \{0\}$ . Per l'arbitrarietà di  $I$  possiamo concludere che  $L_K(E)$  è semplice.  $\square$

**Esempio 3.3.3.** Sia  $R_n$  la rosa con  $n$  petali come nell'Esempio 1.1.3, con  $n \geq 2$ :



Il grafo  $R_n$  soddisfa le richieste (i) e (ii) del Teorema di Semplicità 3.3.2, quindi la Leavitt path algebra  $L_K(R_n)$  è semplice per  $n \geq 2$ .

Introduciamo ora dei nuovi strumenti che ci permetteranno di dedurre nuovamente il Teorema di Semplicità 3.3.2.

**Definizione 3.3.4.** Sia  $E$  un grafo. Un *cammino infinito* di  $E$  è una sequenza  $\gamma = (e_i)_{i \in \mathbb{N}} = e_1 e_2 e_3 \cdots$  di lati di  $E$  tali che  $r(e_i) = s(e_{i+1})$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ . Un vertice di un cammino infinito  $\gamma = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  è un vertice della forma  $s(e_i)$  per qualche  $i \in \mathbb{N}$ . L'insieme dei vertici di un cammino infinito  $\gamma$  viene indicato con  $V_\gamma$ .

Con  $E^\infty$  indichiamo l'insieme dei cammini infiniti di  $E$  e con  $E^{\leq \infty}$  l'insieme  $E^\infty$  unito all'insieme di tutti i cammini di  $\text{Path}(E)$  che terminano con un vertice singolare.

Un vertice  $v$  di  $E$  è detto *cofinito* se per ogni  $\gamma \in E^{\leq \infty}$ , esiste un vertice  $w$  di  $\gamma$  tale che  $w \leq v$ . Inoltre, diremo che il grafo  $E$  è *cofinito* se ogni suo vertice è cofinito.

**Osservazione 3.3.5.** Sia  $E$  un grafo cofinito. Sia  $c$  un ciclo di  $E$ , allora il cammino  $ccc \cdots$  è un cammino infinito e ogni vertice di  $E$  si connette, tramite un cammino, a ogni ciclo di  $E$  e a ogni vertice sink.

**Lemma 3.3.6.** *Sia  $E$  un grafo cofinito. Se esiste un vertice sink  $v$  di  $E$ , allora*

- (i) *l'unico vertice singolare di  $E$  è  $v$ ;*
- (ii) *per ogni vertice  $w$  di  $E$ ,  $v \in T(w)$ ;*
- (iii) *il grafo  $E$  non contiene cammini infiniti, in particolare non contiene cicli.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo (i). Supponiamo esista un vertice  $u \in E^0$  singolare. In particolare,  $u \in E^{\leq \infty}$ . Siccome il grafo  $E$  è cofinito, il vertice  $v$  è cofinito. Quindi  $u \leq v$ . Questo contraddice l'ipotesi  $v$  vertice sink. Possiamo concludere che non possono esistere altri vertici singolari oltre a  $v$ .

Dimostriamo (ii). Sia  $w \in E^0$ , allora  $w$  è cofinito. Siccome  $v \in E^{\leq \infty}$ , si deve avere  $v \leq w$ , ovvero  $v \in T(w)$ .

Dimostriamo (iii). Supponiamo esista un cammino infinito  $\gamma$ . Allora esiste  $u$  vertice di  $\gamma$  tale che  $w \leq v$  perché  $v$  è cofinito. Questo contraddice ancora una volta l'ipotesi  $v$  vertice sink. Possiamo concludere che non possono esistere cammini infiniti. In particolare, non possono esistere cicli in  $E$ , altrimenti come spiegato nell'Osservazione 3.3.5, da ogni ciclo si può costruire un cammino infinito.  $\square$

**Lemma 3.3.7.** *Sia  $E$  un grafo. Allora  $E$  è cofinito se, e solo se, gli unici insiemi di vertici di  $E$ , saturi ed ereditari, sono l'insieme vuoto ed  $E^0$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $E$  grafo cofinito. Per assurdo, supponiamo esista  $\emptyset \neq H \subset E^0$ , saturo ed ereditario. Ci proponiamo di costruire un

cammino  $\gamma \in E^{\leq \infty}$ , tale che non contenga nessun vertice di  $H$ . Consideriamo  $v_1 \in E^0 \setminus H$ . Se  $v_1$  è un vertice singolare di  $E$ , allora basta prendere  $\gamma = v_1 \in E^{\leq \infty}$ . Se  $v_1$  è un vertice regolare, allora esiste  $e_1 \in s^{-1}(v_1)$  tale che  $v_2 := r(e_1) \notin H$ , altrimenti  $r(s^{-1}(v_1)) \subseteq H$  implicherebbe  $v_1 \in H$ , essendo  $H$  saturo. Ma questo contraddice la scelta di  $v_1$ . Procedendo allo stesso modo per ogni passo  $n \in \mathbb{N}$ , troviamo un vertice  $v_n$  singolare, oppure  $v_n \in E^0 \setminus H$  regolare. Se per un  $i \in \mathbb{N}$ ,  $v_i$  è singolare, allora basta prendere  $\gamma = e_1 \cdots e_{i-1} \in E^{\leq \infty}$ . Altrimenti, se per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n$  è regolare, allora si considera il cammino infinito  $\gamma = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . In entrambi i casi, il cammino  $\gamma$  costruito non contiene vertici di  $H$ .

L'esistenza del cammino  $\gamma$  contraddice l'ipotesi  $E$  cofinito, perché dato un vertice  $v \in H$ , non può esistere un cammino con vertice di partenza  $v$  e vertice di arrivo un vertice di  $\gamma$ .

La contraddizione nasce dall'esistenza dell'insieme  $H$ , quindi gli unici insiemi di vertici di  $E$ , saturi ed ereditari, sono l'insieme vuoto ed  $E^0$ .

Supponiamo che gli unici insiemi di vertici di  $E$ , saturi ed ereditari, siano l'insieme vuoto ed  $E^0$ . Dobbiamo mostrare che il grafo  $E$  è cofinito. Siano  $v \in E^0$  e  $\gamma = (e_i)_{i \in \mathbb{N}} \in E^{\leq \infty}$ . Supponiamo che  $v$  non sia un vertice di  $\gamma$ , altrimenti non c'è niente da mostrare. Per ipotesi, la chiusura satura ereditaria dell'insieme  $\{v\}$  coincide con  $E^0$ , quindi per il Lemma 2.1.8 possiamo scrivere  $E^0 = \bigcup_{n \geq 0} \Lambda_n(\{v\})$ . Consideriamo  $m$ , il minimo  $n \geq 0$  tale che  $V_\gamma \cap \Lambda_n(\{v\}) \neq \emptyset$ , e sia  $w \in V_\gamma \cap \Lambda_m(\{v\})$ . Se  $m > 0$ , per la minimalità di  $m$ , il vertice  $w$  è regolare e vale  $r(s^{-1}(w)) \subseteq \Lambda_{m-1}(\{v\})$ . Siccome  $w \in V_\gamma$  ed è regolare, esiste  $i \in \mathbb{N}$  tale che  $s(e_i) = w$  e  $r(e_i) = w' \in V_\gamma$ . In particolare,  $w' \in r(s^{-1}(w)) \subseteq \Lambda_{m-1}(\{v\})$ , contraddicendo la minimalità di  $m$ . Di conseguenza, deve essere  $m = 0$  e  $w \in V_\gamma \cap \Lambda_0(\{v\}) = V_\gamma \cap T(v)$ . Grazie a  $w \in T(v)$  possiamo concludere.  $\square$

**Teorema 3.3.8.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è semplice se, e solo se, sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

- (i) il grafo  $E$  è cofinito;
- (ii) il grafo  $E$  soddisfa la condizione (L).

*Dimostrazione.* Supponiamo  $L_K(E)$  semplice. In particolare,  $L_K(E)$  è anche graduata semplice, quindi per il Corollario 2.5.19 gli unici insiemi di vertici di  $E$ , saturi ed ereditari, sono l'insieme vuoto ed  $E^0$ . Grazie al Lemma 3.3.7 segue  $E$  grafo cofinito.

Supponiamo  $E$  non soddisfi la condizione (L), ovvero esiste un ciclo  $c$  senza uscite. L'ideale bilatero  $I(P_c(E))$  di  $L_K(E)$ , generato dall'insieme  $P_c(E)$ , non è nullo e per la semplicità abbiamo  $I(P_c(E)) = L_K(E)$ . Ma per il Teorema 3.1.3,  $I(P_c(E))$  non è una  $K$ -algebra semplice. Possiamo concludere che non possono esistere cicli di  $E$  senza uscite, ovvero  $E$  soddisfa la condizione (L).

Ora supponiamo siano soddisfatte le condizioni (i) e (ii). Sia  $I$  un ideale bilatero non nullo di  $L_K(E)$ . Per la Proposizione 2.3.10, l'ideale  $I$  contiene un vertice di  $E$ . Quindi per ipotesi  $I \cap E^0 = E^0$  e  $I = L_K(E)$ . Questo significa che  $L_K(E)$  è semplice.  $\square$

**Leavitt path algebre noetheriane e artiniane.** Richiamiamo la definizione di algebra noetheriana e artiniana.

**Definizione 3.3.9.** Sia  $K$  un campo. Allora una  $K$ -algebra  $A$  è detta *noetheriana* se il reticolo  $(\mathcal{L}(A), \subseteq)$  degli ideali bilateri di  $A$  è un insieme noetheriano (vedi Definizione 2.5.12).

Mentre  $A$  è detta *artiniana* se il reticolo  $(\mathcal{L}(A), \subseteq)$  è un insieme artiniano (vedi Definizione 2.5.13).

Ora vogliamo studiare quando il reticolo degli ideali bilateri di una Leavitt path algebra risulta un insieme ordinato noetheriano o artiniano.

Ricordiamo che  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  è il reticolo formato dagli insiemi di vertici di un grafo  $E$ , saturi ed ereditari, ordinato dall'inclusione insiemistica.

**Teorema 3.3.10.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è un'algebra noetheriana se, e solo se, il reticolo  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  è noetheriano e per ogni  $H \in \mathcal{H}_E$ , l'insieme dei vertici di rottura  $B_H$  è finito.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $L_K(E)$  sia una  $K$ -algebra noetheriana. Allora, per definizione, il reticolo  $(\mathcal{L}(L_K(E)), \subseteq)$  degli ideali bilateri di  $L_K(E)$  è noetheriano. In particolare, il sottoreticolo  $(\mathcal{L}_{gr}(L_K(E)), \subseteq)$  degli ideali graduati di  $L_K(E)$  è anch'esso noetheriano. Allora per la Proposizione 2.5.17,  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  è noetheriano e per ogni  $H \in \mathcal{H}_E$ , l'insieme dei vertici di rottura  $B_H$  è finito.

Supponiamo ora che  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  sia noetheriano e per ogni  $H \in \mathcal{H}_E$ , l'insieme dei vertici di rottura  $B_H$  sia finito. Per prima cosa mostriamo che ogni ideale bilatero di  $L_K(E)$  è finitamente generato. Sia  $I$  un ideale bilatero di  $L_K(E)$ . Consideriamo  $H = I \cap E^0$  e  $S = \{v \in B_H \mid v^H \in I\}$ . Per il Teorema 3.1.13, esistono un sottoinsieme  $C \subseteq C_{(H,S)}(E)$  e un insieme  $P = \{p_c(x)\}_{c \in C}$  di polinomi a coefficienti in  $K$ , con grado positivo e  $p_c(0) = 1$  per ogni  $c \in C$ , tali che l'ideale  $I$  è generato dall'insieme  $H \cup S^H \cup P_C$ , dove  $P_C$  è l'insieme  $\{p_c(c)\}_{c \in C}$ . In particolare, possiamo scrivere  $I = I(H \cup S^H \cup P_C) = I(H) + I(S^H) + I(P_C)$ . Mostriamo che questi tre ideali sono finitamente generati, così ne consegue che  $I$  è finitamente generato.

Siccome  $S \subseteq B_H$  è finito, l'insieme  $S^H$  è finito. Quindi  $I(S^H)$  è finitamente generato.

Affermiamo che l'ideale  $I(H)$  è anch'esso finitamente generato. Se  $H = \emptyset$  o finito, allora possiamo concludere immediatamente. Se  $H$  è infinito, mostriamo che esiste un sottoinsieme finito  $X \subseteq H$ , tale che la chiusura

satura ereditaria  $\overline{X}$  coincida con  $H$ . Supponiamo per assurdo che per ogni  $Y \subseteq H$  finito, valga  $\overline{Y} \neq H$ . Allora costruiamo una catena ascendente non stazionaria di  $\mathcal{H}_E$ . Sia  $v_1 \in H$ . Consideriamo l'insieme  $M_1 = \{v_1\}$ . Per la nostra assunzione  $N_1 := \overline{M_1} \neq H$ . Ora possiamo scegliere  $v_2 \in H \setminus \overline{M_1}$ . Consideriamo l'insieme  $M_2 = \{v_1, v_2\}$ . Sempre per la nostra assunzione  $N_2 := \overline{M_2} \neq H$  e  $N_1 \subset N_2$ . Procedendo in modo analogo, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , l'insieme  $N_k$  è un insieme saturo ed ereditario, diverso da  $H$  e tale che  $N_{k-1} \subset N_k$ . Quindi la catena  $N_1 \subset N_2 \subset \dots$  non è stazionaria. Ciò contraddice l'ipotesi  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  noetheriano.

Ora possiamo considerare  $X \subset H$  finito tale che  $\overline{X} = H$ . Allora  $I(H) = I(\overline{X}) = I(X)$ , dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la Proposizione 3.1.1, ovvero  $I(H)$  è un ideale finitamente generato.

Ora mostriamo che l'insieme  $P_C$  è finito. Consideriamo un insieme numerabile di generatori  $\{v_k + \sum_{i=1}^{n_k} a_i c_k^{r_i}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq P_C$ . Ricordiamo per come vengono scelti i generatori dell'insieme  $P_C$ , dati due vertici  $v_i$  e  $v_j$ , con  $i, j \in \mathbb{N}$ , allora  $v_i \not\leq v_j$  e  $v_j \not\leq v_i$  (vedi Proposizione 3.1.10 e Teorema 3.1.13).

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , consideriamo  $T_n = \{v_1, \dots, v_n\}$ . La catena  $\overline{T_1} \subseteq \overline{T_2} \subseteq \dots$  di  $\mathcal{H}_E$  deve essere stazionaria. Quindi deve esistere  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $T_m = T_n$  per ogni  $n \geq m$ . In particolare,  $v_{m+1} \in \overline{T_{m+1}} = \overline{T_m}$ . Per la Proposizione 3.1.4, esiste  $v_j \in \{v_1, \dots, v_m\}$  tale che  $v_{m+1} \leq v_j$ . Questo è una contraddizione per quanto ricordato all'inizio.

Possiamo concludere che anche l'insieme  $P_C$  è finito e dunque l'ideale  $I(P_C)$  è finitamente generato.

Consideriamo una catena ascendente arbitraria  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$  di ideali bilateri di  $L_K(E)$  e mostriamo che è stazionaria. Poniamo  $I := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ . Tale insieme è ancora un ideale bilatero di  $L_K(E)$ , e per quanto dimostrato precedentemente è finitamente generato. Siano  $x_1, \dots, x_t \in L_K(E)$  i generatori di  $I$ . Deve esistere  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $\{x_1, \dots, x_t\} \subseteq I_m$ . Quindi per ogni  $n \geq m$  abbiamo  $I \subseteq I_n$  e  $I_n \subseteq I$ , ovvero la catena di ideali è stazionaria.  $\square$

**Corollario 3.3.11.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Supponiamo che l'insieme dei vertici di  $E$  sia finito. Allora la Leavitt path algebra di  $E$  è un'algebra noetheriana.*

*Dimostrazione.* Grazie all'ipotesi  $E^0$  insieme finito possiamo concludere che il reticolo  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  è finito, in particolare è noetheriano, e per ogni  $H \in \mathcal{H}_E$  l'insieme dei vertici di rottura di  $H$  è anch'esso finito. Il Teorema 3.3.10 ci permette di concludere che  $L_K(E)$  è un'algebra noetheriana.  $\square$

Ricordiamo che per ogni insieme di vertici  $H$  saturo ed ereditario,  $B_H$  è l'insieme dei vertici di rottura di  $H$  e la Definizione 2.4.18 di grafo quoziente.

**Proposizione 3.3.12.** *Sia  $E$  un grafo. Supponiamo che  $E$  soddisfi la condizione (L), ma non soddisfi la condizione (K). Allora esistono  $H$  insieme di vertici di  $E$ , saturo ed ereditario, ed  $S \subseteq B_H$  tali che il grafo quoziente  $E/(H, S)$  rispetto alla coppia  $(H, S)$ , non soddisfa la condizione (L).*



*Dimostrazione.* Siccome la condizione (K) non è soddisfatta da  $E$ , allora esiste  $v \in E^0$  il quale è punto base di un solo cammino chiuso semplice, che indichiamo con  $c = e_1 \cdots e_n$ , dove  $n \in \mathbb{N}$  ed  $e_1, \dots, e_n \in E^1$ . In particolare, per l'unicità il cammino  $c$  deve essere un ciclo. Grazie alla condizione (L) possiamo affermare che  $c$  ha un'uscita.

Consideriamo l'insieme  $A = \{ f \in E^1 \mid f \text{ è un'uscita di } c \}$ , e sia  $B = \{ r(f) \mid f \in A \}$ . Con  $H$  indichiamo la chiusura satura ereditaria di  $B$ . Affermiamo che  $H \cap V_c = \emptyset$ . Se esiste  $w \in H \cap V_c$ , per la Proposizione 3.1.4, esiste  $u \in B$  tale che  $w \leq u$ . Questo implica l'esistenza un altro cammino chiuso semplice basato su  $v$ , contraddicendo la scelta di  $v$  e  $c$ .

Sia  $S = V_c \cap B_H$ . Se consideriamo il grafo quoziente  $E/(H, S)$  rispetto alla coppia  $(H, S)$ , abbiamo  $V_c \subseteq (E/(H, S))^0$  e  $\{ e_1, \dots, e_n \} \subseteq (E/(H, S))^1$ , ovvero  $c$  è un ciclo di  $E/(H, S)$ . Siccome  $V_c \cap (B_H \setminus S) = \emptyset$  e le uscite di  $c$  terminano in  $H$ , in  $E/(H, S)$  il ciclo  $c$  è senza uscite. Questo mostra che il grafo  $E/(H, S)$  non soddisfa la condizione (L) come desiderato.  $\square$

**Proposizione 3.3.13.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Supponiamo  $\mathcal{P}$  sia una proprietà tale che:*

- (i) *se una  $K$ -algebra  $A$  soddisfa la proprietà  $\mathcal{P}$ , allora ogni algebra quoziente  $A/I$ , dove  $I$  è un ideale bilatero di  $A$ , soddisfa  $\mathcal{P}$ ;*
- (ii) *per ogni Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , se  $L_K(E)$  soddisfa  $\mathcal{P}$ , allora  $E$  soddisfa la condizione (L).*

*Allora per ogni Leavitt path algebra  $L_K(E)$  che soddisfa  $\mathcal{P}$ , il grafo  $E$  soddisfa la condizione (K).*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $L_K(E)$  soddisfi la proprietà  $\mathcal{P}$ . In particolare, per (ii) il grafo  $E$  soddisfa la condizione (L). Per la Proposizione 3.3.12, se  $E$  non soddisfa la condizione (K), esistono  $H \subseteq E^0$  saturo ed ereditario, ed  $S \subseteq B_H$  tali che il grafo quoziente  $E/(H, S)$  non soddisfi la condizione (L). Ma per il Teorema 2.4.21, la Leavitt path algebra  $L_K(E/(H, S))$  è isomorfa all'algebra quoziente  $L_K(E)/I(H \cup S^H)$ , dove  $I(H \cup S^H)$  è l'ideale bilatero di  $L_K(E)$  generato da  $H \cup S^H$ . Per l'ipotesi (i),  $L_K(E/(H, S))$  soddisfa  $\mathcal{P}$ , mentre per l'ipotesi (ii),  $E/(H, S)$  soddisfa la condizione (L). Questa è una contraddizione per come abbiamo scelto  $H$ . Possiamo concludere che  $E$  deve soddisfare la condizione (K).  $\square$

Prima di proseguire, vediamo come la validità della condizione (K) su un grafo  $E$  implichi che il reticolo degli ideali bilateri della Leavitt path algebra associata a  $E$  e a un certo campo, coincida con il suo sottoreticolo degli ideali graduati.

**Proposizione 3.3.14.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Il grafo  $E$  soddisfa la condizione (K) se, e solo se, ogni ideale bilatero della Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è graduato.*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $E$  soddisfi la condizione (K). Sia  $I$  un ideale bilatero di  $L_K(E)$ . Consideriamo  $H = I \cap E^0$  ed  $S = \{v \in B_H \mid v^H \in I\}$ . Per il Teorema 3.1.13, esistono un sottoinsieme  $C \subseteq C_{(H,S)}(E)$  e un insieme  $P = \{p_c(x)\}_{c \in C}$  di polinomi a coefficienti in  $K$ , con grado positivo e  $p_c(0) = 1$  per ogni  $c \in C$ , tali che l'ideale  $I$  è generato dall'insieme  $H \cup S^H \cup P_C$ , dove  $P_C$  è l'insieme  $\{p_c(c)\}_{c \in C}$ . Ricordiamo che per l'Osservazione 3.1.12, abbiamo  $C_{(H,S)}(E) \subseteq C_u(E)$ , dove per la condizione (K) risulta  $C_u(E) = \emptyset$ . Quindi  $C = \emptyset$  e  $I$  è della forma  $I(H \cup S^H)$ . Ricordiamo che gli elementi dell'insieme  $H \cup S^H$  sono omogenei di grado 0, quindi per la Proposizione 2.2.8,  $I(H \cup S^H)$  è graduato.

Per l'arbitrarietà di  $I$  possiamo concludere che ogni ideale bilatero di  $L_K(E)$  è graduato.

Viceversa, supponiamo che ogni ideale bilatero di  $L_K(E)$  sia graduato e che  $E$  soddisfi la condizione (L). Per assurdo, supponiamo che il grafo  $E$  non soddisfi la condizione (K). Per la Proposizione 3.3.12, esistono  $H \subseteq E^0$  saturo ed ereditario, ed  $S \subseteq B_H$  tali che il grafo quoziente  $E/(H, S)$  non soddisfi la condizione (L). Sia  $c$  un ciclo senza uscite di  $E/(H, S)$ , e con  $v$  indichiamo il suo punto base. Per l'Osservazione 3.1.12,  $c$  appartiene a  $C_{(H,S)}(E)$ . L'ideale bilatero  $I(H \cup \{v + c\})$  di  $L_K(E)$ , generato dall'insieme  $H \cup \{v + c\}$ , per il Teorema di Struttura degli Ideali Bilateri 3.2.5 è l'immagine tramite  $\Psi$  della terna  $((H, \emptyset), \{c\}, \{1 + x\})$ ; quindi non è un ideale graduato di  $L_K(E)$  contraddicendo la nostra ipotesi. Questo ci permette di concludere che la condizione (K) deve valere.

Supponiamo che ogni ideale bilatero di  $L_K(E)$  sia graduato e che  $E$  non soddisfi la condizione (L). Sia  $c$  un ciclo senza uscite di  $E$ . Osserviamo che  $c \in C_{(\emptyset, \emptyset)}$ . L'ideale bilatero  $I(\{v + c\})$  di  $L_K(E)$ , generato dall'insieme  $\{v + c\}$ , per il Teorema di Struttura degli Ideali Bilateri 3.2.5 è l'immagine tramite  $\Psi$  della terna  $((\emptyset, \emptyset), \{c\}, \{1 + x\})$ ; quindi non è un ideale graduato di  $L_K(E)$  contraddicendo la nostra ipotesi. Questo ci permette di concludere nuovamente che la condizione (K) deve valere.  $\square$

**Teorema 3.3.15.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è artiniana se, e solo se,  $E$  soddisfa la condizione (K), il reticolo  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  è artiniano e per ogni  $H \in \mathcal{H}_E$ , l'insieme dei vertici di rottura  $B_H$  è finito.*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $E$  soddisfa la condizione (K), il reticolo  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  è artiniano e per ogni  $H \in \mathcal{H}_E$ , l'insieme dei vertici di rottura  $B_H$  è finito. Per la Proposizione 3.3.14, il reticolo  $(\mathcal{L}(L_K(E)), \subseteq)$  degli ideali graduati di  $L_K(E)$  coincide con il suo sottoreticolo  $(\mathcal{L}_{gr}(L_K(E)), \subseteq)$ , formato dagli ideali graduati di  $L_K(E)$ . Ora grazie al punto (ii) della Proposizione 2.5.17, possiamo concludere che  $(\mathcal{L}(L_K(E)), \subseteq) = (\mathcal{L}_{gr}(L_K(E)), \subseteq)$  è artiniano.

Supponiamo ora che  $L_K(E)$  sia un'algebra artiniana. In particolare, il sottoreticolo  $(\mathcal{L}_{gr}(L_K(E)), \subseteq)$  di  $(\mathcal{L}(L_K(E)), \subseteq)$  è un insieme artiniano.

Per il punto (ii) della Proposizione 2.5.17, il reticolo  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  è artiniiano e per ogni  $H \in \mathcal{H}_E$ , l'insieme dei vertici di rottura  $B_H$  è finito.

Ci manca mostrare la validità della condizione (K). Per prima cosa però mostriamo che  $E$  soddisfa la condizione (L). Supponiamo che (L) non sia soddisfatta. Allora esiste un ciclo  $c$  di  $E$  con almeno un'uscita. Sia  $v$  il punto base di  $c$  e consideriamo la seguente catena discendente di ideali bilateri:

$$I(v - c) \supseteq I(v - c^2) \supseteq \dots \supseteq I(v - c^{2^n}) \supseteq \dots,$$

dove  $n \in \mathbb{N}$  e con  $I(v - c^{2^n})$  è l'ideale bilatero di  $L_K(E)$  generato da  $v - c^{2^n}$ . Tale catena deve risultare stazionaria per ipotesi. In particolare, esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $I(v - c^{2^k}) = I(v - c^{2^{k+1}})$ . Dunque possiamo scrivere

$$v - c^{2^k} = \sum_{i=1}^m k_i \alpha_i \beta_i^* (v - c^{2^{k+1}}) \gamma_i \delta_i^*,$$

dove  $k_i \in K$ ,  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \text{Path}(E)$  per  $i = 1, \dots, m$ . Moltiplichiamo entrambe le espressioni a sinistra e a destra per  $v$ ; concludiamo che se un termine  $v \alpha_i \beta_i^* (v - c^{2^{k+1}}) \gamma_i \delta_i^* v \neq 0$ , allora  $v = s(\alpha_i) = s(\beta_i) = s(\gamma_i) = s(\delta_i)$ ,  $r(\alpha_i) = r(\beta_i)$  ed  $r(\gamma_i) = r(\delta_i)$ . Siccome  $c$  non ha uscite, abbiamo  $\alpha_i \beta_i^* = c^{t_i}$  e  $\gamma_i \delta_i = c^{u_i}$  per qualche  $t_i, u_i \in \mathbb{Z}$ . In particolare, tutti i fattori commutano e possiamo scrivere

$$v - c^{2^k} = \sum_{i=1}^m k_i (v - c^{2^{k+1}}) c^{w_i},$$

con  $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{Z}$ . Ma argomentando sul minimo e massimo grado in entrambe le espressioni, si può concludere che  $w_i = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, m$ . Quindi  $v - c^{2^k} = k(v - c^{2^{k+1}})$  per un opportuno  $k \in K$ , che è ancora impossibile confrontando i gradi dei termini omogenei. In conclusione, il grafo  $E$  deve soddisfare la condizione (L).

Consideriamo la proprietà  $\mathcal{P}$ ="essere un'algebra artiniana". Siccome se  $L_K(E)$  soddisfa  $\mathcal{P}$ , allora  $E$  soddisfa la condizione (L), e l'algebra quoziente di un'algebra artiniana è ancora artiniana, possiamo applicare la Proposizione 3.3.13 e concludere che  $E$  soddisfa la condizione (K).  $\square$

Il Teorema 3.3.10 e la Proposizione 2.5.17 ci permettono di concludere che una Leavitt path algebra è graduata noetheriana se, e solo se, è noetheriana. Lo stesso non si può dire per algebre artiniane e graduate artiniane; per il Teorema 3.3.15 e la Proposizione 2.5.17, se una Leavitt path algebra è artiniana, allora è graduata artiniana, mentre non vale il viceversa. Ad esempio, consideriamo la rosa con un petalo, come nell'Esempio 1.1.3 con  $n = 1$ :

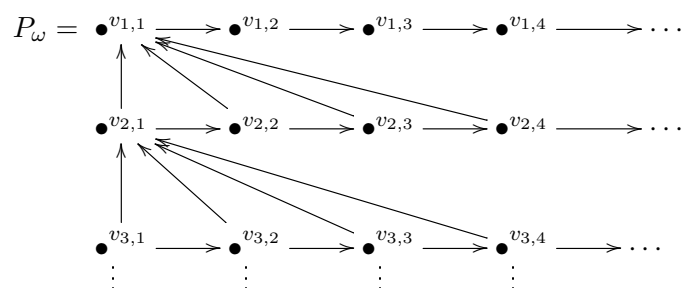
$$R_1 = \bullet^v \curvearrowright e.$$

Essendo  $R_1$  un grafo finito e row-finite, il reticolo  $(\mathcal{H}_E, \subseteq)$  è finito, e per ogni  $H \in \mathcal{H}_E$  l'insieme dei vertici di rottura di  $H$  è vuoto. Ma  $R_1$  non soddisfa la condizione (K), quindi per il Teorema 3.3.15 la Leavitt path algebra  $L_K(R_1)$  non è artiniana, ma per la Proposizione 2.5.17 è graduata artiniana.

Possiamo affermare anche che una Leavitt path algebra noetheriana non è necessariamente artiniana. Infatti, se consideriamo sempre la rosa con un petalo  $R_1$ , la Leavitt path algebra  $L_K(R_1)$  è noetheriana, ma non artiniana.

Analogamente, una Leavitt path algebra artiniana non è necessariamente noetheriana; per verificare ciò consideriamo il seguente esempio.

**Esempio 3.3.16.** Consideriamo un campo  $K$  e il grafo



L'insieme dei vertici del grafo  $P_\omega$  si può scrivere come  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n^0$ , dove  $P_n$  è il grafo che ha per vertici le prime  $n$  righe del grafo  $P_\omega$  e come lati quelli emessi dai vertici scelti. Possiamo osservare che gli insiemi  $P_n^0$  sono tutti gli insiemi saturi ed ereditari di  $P_\omega$  e che  $P_\omega$  soddisfa la condizione (K). Grazie a questo, per i Teoremi 3.3.15 e 3.3.10, possiamo concludere che la Leavitt path algebra  $L_K(P_\omega)$  è artiniana, ma non è noetheriana.

### 3.4 Principi di Dicotomia e Tricotomia

L'ultima sezione è dedicata ai Principi di Dicotomia e Tricotomia. Essi ci permettono di partizionare le Leavitt path algebre semplici e quelle graduate semplici rispettivamente in due e tre tipi.

**Elementi idempotenti infiniti.** Introduciamo ora la definizione di elemento idempotente infinito di un anello, e studiamo le caratteristiche che devono avere tali elementi in una Leavitt path algebra.

**Definizione 3.4.1.** Sia  $R$  un anello. Un elemento  $e \in R$  non nullo e idempotente è detto *infinito* se esistono  $f, g \in R$  idempotenti e ortogonali tra loro, tali che  $g \neq 0$ ,  $e = f + g$  ed  $Rf \cong Re$  come  $R$ -moduli sinistri.

Equivalentemente, possiamo dire che un elemento  $e \in R$  idempotente è infinito se l'ideale sinistro  $Re$ , generato da  $e$ , è isomorfo a un suo addendo diretto. Infatti, se  $e = f + g$ , dove  $f$  e  $g$  sono elementi idempotenti di  $R$

ortogonali tra loro tali che  $Re \cong Rf$ , vale  $Re = Rf \oplus Rg \cong Re \oplus Rg$ , ovvero  $Re$  è isomorfo a un suo addendo diretto.

Viceversa, supponiamo che  $Re$  si scriva come  $P \oplus Q$ , dove  $P$  e  $Q$  sono due ideali sinistri di  $R$  tali che  $Re \cong P$ . Ricordiamo che per il punto (ii) della Proposizione 2.6.3, l'anello con unità  $eRe$  è isomorfo all'anello  $\text{Hom}(Re, Re)$ , dove  $Re$  è pensato come  $R$ -modulo sinistro. L'unità  $e$  di  $eRe$  corrisponde all'endomorfismo identità di  $Re$ . Esso si può scrivere come somma di  $\pi_1 : Re \rightarrow P$  e  $\pi_2 : Re \rightarrow Q$ , che sono le proiezioni rispettivamente rispetto a  $P$  e a  $Q$ . Tali endomorfismi corrispondono rispettivamente agli elementi di  $eRe$

$$e_1 := \pi_1(e)e = \pi_1(e^2) = \pi_1(e) \quad e \quad e_2 := \pi_2(e)e = \pi_2(e^2) = \pi_2(e).$$

Siccome  $\pi_1$  e  $\pi_2$  sono idempotenti e ortogonali tra loro in  $\text{Hom}(Re, Re)$ , anche  $e_1$  ed  $e_2$  sono idempotenti e ortogonali tra loro. Inoltre  $e = e_1 + e_2$ .

Ci manca mostrare che gli ideali sinistri  $P$  e  $Q$  sono generati rispettivamente da  $e_1$  ed  $e_2$ . Verifichiamo l'asserto solo per  $P$ ; nel caso di  $Q$  si procede in modo analogo. Ricordiamo che  $\pi_1(Re) = P$ , quindi per ogni  $x \in P$  esiste  $r \in R$  tale che  $x = \pi_1(re) = r\pi_1(e) = re_1$ .

**Proposizione 3.4.2.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Sia  $\mu \in \text{Path}(E)$ , dove  $v := s(\mu)$  e  $w := r(\mu)$ . Allora*

(i) *l'ideale sinistro  $L_K(E)v$  della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , generato da  $v$ , si può decomporre in somma diretta:*

$$L_K(E)v = L_K(E)\mu\mu^* \oplus L_K(E)(v - \mu\mu^*),$$

*dove  $L_K(E)\mu\mu^*$  ed  $L_K(E)(v - \mu\mu^*)$  sono ideali sinistri di  $L_K(E)$ , generati rispettivamente da  $\mu\mu^*$  e  $v - \mu\mu^*$ ;*

(ii) *gli ideali sinistri  $L_K(E)w$  e  $L_K(E)\mu\mu^*$  di  $L_K(E)$ , generati rispettivamente da  $w$  e  $\mu\mu^*$ , sono isomorfi come  $L_K(E)$ -moduli sinistri.*

*In particolare, esiste  $T$  ideale sinistro di  $L_K(E)$  tale che  $L_K(E)v \cong L_K(E)w \oplus T$  come  $L_K(E)$ -moduli sinistri.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il punto (i). Osserviamo che l'elemento  $\mu\mu^* \in L_K(E)$  è idempotente e commuta con  $v$ . Inoltre, vale

$$(v - \mu\mu^*) + \mu\mu^* = v \quad e \quad (v - \mu\mu^*)\mu\mu^* = \mu\mu^* - \mu\mu^* = 0 = \mu\mu^*(v - \mu\mu^*).$$

Questo ci permette di concludere che la somma  $L_K(E)\mu\mu^* + L_K(E)(v - \mu\mu^*)$  è diretta.

Osserviamo che valgono le seguenti inclusioni:

$$\begin{aligned} L_K(E)\mu\mu^* &= L_K(E)\mu\mu^*v \subseteq L_K(E)v \\ L_K(E)(v - \mu\mu^*) &= L_K(E)(v - \mu\mu^*)v \subseteq L_K(E)v \\ L_K(E)v &= L_K(E)(v - \mu\mu^* + \mu\mu^*) \subseteq L_K(E)(v - \mu\mu^*) + L_K(E)\mu\mu^*. \end{aligned}$$

Quindi vale  $L_K(E)v = L_K(E)\mu\mu^* \oplus L_K(E)(v - \mu\mu^*)$ .

Dimostriamo il punto (ii). Consideriamo  $\rho_{\mu^*} : L_K(E)w \rightarrow L_K(E)\mu\mu^*$  omomorfismo di  $L_K(E)$ -moduli sinistri, dove  $\rho_{\mu^*}(\alpha w) = \alpha w\mu^*$  per ogni  $\alpha \in L_K(E)$ . L'immagine  $\rho_{\mu^*}(\alpha w)$  appartiene all'ideale sinistro  $L_K(E)\mu\mu^*$  per ogni  $\alpha \in L_K(E)$  perché  $\alpha w\mu^* = \alpha w\mu^*\mu\mu^* = (\alpha\mu^*)\mu\mu^* \in L_K(E)\mu\mu^*$ .

Consideriamo  $\rho_{\mu} : L_K(E)\mu\mu^* \rightarrow L_K(E)w$  omomorfismo di  $L_K(E)$ -moduli sinistri, dove  $\rho_{\mu}(\alpha\mu\mu^*) = \alpha\mu\mu^*\mu$  per ogni  $\alpha \in L_K(E)$ . L'immagine  $\rho_{\mu}(\alpha\mu\mu^*)$  appartiene all'ideale sinistro  $L_K(E)w$  per ogni  $\alpha \in L_K(E)$  perché  $\alpha\mu\mu^*\mu = \alpha\mu r(\mu) = \alpha\mu w \in L_K(E)w$ .

Verifichiamo che gli omomorfismi  $\rho_{\mu^*}$  e  $\rho_{\mu}$  sono uno l'inverso dell'altro:

$$\begin{aligned}\rho_{\mu^*} \circ \rho_{\mu}(\alpha\mu\mu^*) &= \rho_{\mu^*}(\alpha\mu\mu^*\mu) = \rho_{\mu^*}(\alpha\mu w) = \alpha\mu w\mu^* = \alpha\mu\mu^* \\ \rho_{\mu} \circ \rho_{\mu^*}(\alpha w) &= \rho_{\mu}(\alpha w\mu^*) = \alpha w\mu^*\mu = \alpha w,\end{aligned}$$

per ogni  $\alpha \in L_K(E)$ . Quindi  $L_K(E)w$  e  $L_K(E)\mu\mu^*$  risultano isomorfi come  $L_K(E)$ -moduli sinistri.

Grazie ai punti (i) e (ii) abbiamo

$$L_K(E)v \cong L_K(E)\mu\mu^* \oplus L_K(E)(v - \mu\mu^*) \cong L_K(E)w \oplus L_K(E)(v - \mu\mu^*).$$

Ponendo  $T = L_K(E)(v - \mu\mu^*)$  otteniamo l'ultima parte dell'enunciato.  $\square$

**Esempio 3.4.3.** Sia  $R_2$  la rosa con due petali come nell'Esempio 1.1.3 con  $n = 2$ :

$$e_2 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowleft \end{array} v \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowleft \end{array} e_1 .$$

Mostriamo che l'unico vertice di  $R_2$  è un elemento idempotente infinito della Leavitt path algebra  $L_K(R_2)$ . Siano  $L_K(R_2)v, L_K(R_2)e_1e_1^*$  e  $L_K(R_2)e_2e_2^*$  ideali sinistri di  $L_K(R_2)$ , generati rispettivamente da  $v, e_1e_1^*$  ed  $e_2e_2^*$ . Per la relazione (CK2) della Definizione 1.2.1, abbiamo  $v = e_1e_1^* + e_2e_2^*$ . Gli elementi  $e_1e_1^*, e_2e_2^* \in L_K(R_2)$  sono idempotenti e ortogonali tra loro ed  $e_2e_2^* \neq 0$ . In particolare, vale  $L_K(R_2)v = L_K(R_2)e_1e_1^* \oplus L_K(R_2)e_2e_2^*$ . Per il punto (ii) della Proposizione 3.4.2 abbiamo  $L_K(R_2)v \cong L_K(R_2)e_1e_1^*$  come  $L_K(R_2)$ -moduli sinistri. Grazie alla Definizione 3.4.1 possiamo concludere che  $v$  è un elemento idempotente infinito.

**Osservazione 3.4.4.** Sia  $R$  un anello. Supponiamo che  $e \in R$  sia idempotente infinito e che  $g \in R$  sia un elemento idempotente tale che  $Rg \cong Re \oplus Q$  per qualche ideale sinistro  $Q$ . Allora anche  $g$  è infinito. Infatti, per la Definizione 3.4.1 abbiamo  $Re \cong Re \oplus P$  per qualche ideale sinistro  $P$ , quindi

$$Rg \cong Re \oplus Q \cong (Re \oplus P) \oplus Q \cong (Re \oplus Q) \oplus P \cong Rg \oplus P.$$

**Osservazione 3.4.5.** Sia  $R$  un anello, non necessariamente unitario. Sia  $I$  un ideale bilatero di  $R$ . Supponiamo che un elemento  $e \in I$  sia idempotente infinito in  $R$ . Allora  $e$  è un elemento idempotente infinito di  $I$ .

Per la Definizione 3.4.1 esistono due elementi idempotenti  $f, g \in R$  ortogonali tra loro, tali che  $e = f + g$  e  $Re \cong Rf$  come  $R$ -moduli sinistri. Per la proprietà di assorbimento di  $I$  abbiamo

$$\begin{aligned} fe &= f(f + g) = f^2 + fg = f \in I \\ ge &= g(f + g) = gf + g^2 = g \in I. \end{aligned}$$

Ora è immediato verificare che  $Ie \cong If$ .

Vediamo ora il collegamento tra elementi idempotenti infiniti di una Leavitt path algebra e cicli aventi uscita.

**Lemma 3.4.6.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Supponiamo  $c$  sia un ciclo di  $E$  con punto base  $w$ , ed  $e \in E^1$  sia un'uscita di  $c$  in  $w$ . Allora esistono due ideali sinistri della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , tali che l'ideale sinistro  $L_K(E)w$ , generato da  $w$ , si scrive come somma diretta  $P \oplus Q$ , e  $L_K(E)w \cong P$  come  $L_K(E)$ -moduli sinistri. In particolare, il vertice  $w$  è un elemento infinito idempotente di  $L_K(E)$ .*

*Dimostrazione.* Applichiamo il punto (i) della Proposizione 3.4.2 otteniamo l'uguaglianza  $L_K(E)w = L_K(E)cc^* \oplus L_K(E)(w - cc^*)$  tra ideali sinistri di  $L_K(E)$ . Ma siccome  $r(c) = w$ , per il punto (ii) della Proposizione 3.4.2 l'ideale sinistro  $L_K(E)w$  è isomorfo a  $L_K(E)cc^*$ .

L'elemento  $w - cc^* \in L_K(E)$  è non nullo, altrimenti da  $c^*e = 0$  avremmo  $e = (w - cc^*)e = 0$ . Ponendo  $P = L_K(E)cc^*$  e  $Q = L_K(E)(w - cc^*)$  otteniamo il risultato desiderato.

Per la Definizione 3.4.1 il vertice  $w$  è un elemento idempotente infinito di  $L_K(E)$ .  $\square$

**Proposizione 3.4.7.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Sia  $v \in E^0$ . Se  $v$  si connette a un ciclo di  $E$  con uscite, allora  $v$  è un elemento idempotente infinito in  $L_K(E)$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $v$  si connetta a un ciclo  $c$  di  $E$  con uscite. Sia  $e \in E^1$  un'uscita di  $c$ , e indichiamo con  $w$  il suo vertice iniziale. Siccome  $v$  si connette a  $c$ , esiste  $\mu \in \text{Path}(E)$  tale che  $s(\mu) = v$  e  $r(\mu) = w$ . Per la Proposizione 3.4.2 abbiamo  $L_K(E)v \cong L_K(E)w \oplus T$  per qualche ideale sinistro  $T$  di  $L_K(E)$ . Per il Lemma 3.4.6, il vertice  $w$  è un elemento idempotente infinito di  $L_K(E)$ . Grazie all'Osservazione 3.4.4 possiamo concludere che anche  $v$  è un elemento idempotente infinito di  $L_K(E)$ .  $\square$

**Anelli semplici puramente infiniti.** Sia  $R$  un anello, non necessariamente unitario. Due elementi  $e, f \in R$  idempotenti sono equivalenti se esistono  $x \in eRf$  e  $y \in fRe$ , tali che  $xy = e$  e  $yx = f$ . Questo è equivalente a richiedere che gli ideali destri  $eR$  ed  $fR$  di  $R$ , generati rispettivamente da  $e$  ed  $f$ , siano isomorfi come  $R$ -moduli destri.

Supponiamo esistano  $\varphi : eR \rightarrow fR$  e  $\psi : fR \rightarrow eR$  isomorfismi di  $R$ -moduli destri, uno l'inverso dell'altra. Scriviamo  $\varphi(e) = fr$  e  $\psi(f) = es$  per opportuni  $r, s \in R$ . Osserviamo che  $\psi \circ \varphi(e) = e$  e  $\psi \circ \varphi(f) = f$ , quindi  $e(sr) = e$  e  $f(rs) = f$ . Inoltre, siccome  $e$  ed  $f$  sono elementi idempotenti, abbiamo  $\varphi(e^2) = \varphi(e) = \varphi(e)e = (fr)e = fr \in fRe$  e  $\psi(f^2) = \psi(f) = \psi(f)f = (es)f = es \in eRf$ .

Consideriamo  $x = es$  e  $y = fr$ . Allora

$$\begin{aligned} xy &= (es)(fr) = (es)fr = (es)r = e(sr) = e \\ yx &= (fr)(es) = (fr)es = (fr)s = f(rs) = f. \end{aligned}$$

Ora supponiamo che esistano  $x \in eRf$  e  $y \in fRe$ , tali che  $xy = e$  e  $yx = f$ . Consideriamo i seguenti omomorfismi di  $R$ -moduli destri:  $\rho_y : eR \rightarrow fR$  e  $\rho_x : fR \rightarrow eR$ , dove  $\rho_y(e) = ye$  e  $\rho_x(f) = xf$ . Tali omomorfismi sono uno l'inverso dell'altra perché  $\rho_x \circ \rho_y(e) = (xy)e = e$  e  $\rho_y \circ \rho_x(f) = (yx)f = f$ . Quindi  $eR$  è isomorfo a  $fR$  come  $R$ -modulo destro.

Analogamente si può dimostrare che l'equivalenza tra  $e$  ed  $f$  è equivalente a richiedere che gli ideali sinistri  $Re$  ed  $Rf$  di  $R$ , generati rispettivamente da  $e$  ed  $f$ , sono isomorfi come  $R$ -moduli sinistri.

Introduciamo la nozione di anello semplice puramente infinito.

**Proposizione 3.4.8.** *Sia  $R$  un anello, non necessariamente unitario. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (1) per ogni  $x \in R$  non nullo, esistono  $s, t \in R$  tale che  $sxt$  è un elemento infinito idempotente di  $R$ ;
- (2) ogni ideale destro di  $R$  contiene un elemento idempotente infinito;
- (3) ogni ideale sinistro di  $R$  contiene un elemento idempotente infinito.

*Dimostrazione.* Dimostriamo (1)  $\Rightarrow$  (2). Sia  $a \in R$  non nullo. Allora esistono  $s, t \in R$  tali che  $e := sat$  è idempotente e infinito. Osserviamo che possiamo assumere  $s = es$  e  $t = te$ .

L'elemento  $ats \in R$  è idempotente:  $(ats)(ats) = a(tsat)s = a(te)s = ats$ .

Consideriamo gli elementi  $x := at = ats(at)e$  e  $y := s = e(s)ats$  e osserviamo che  $xy = ats$  e  $yx = e$ . Ovvero  $e$  ed  $ats$  sono elementi idempotenti equivalenti, quindi  $eR \cong (ats)R$ . In particolare, l'elemento  $ats$  è idempotente infinito.

Questo ci permette di concludere che ogni ideale destro contiene un elemento idempotente infinito.

Dimostriamo (2)  $\Rightarrow$  (1). Sia  $x \in R$  non nullo. Allora esiste  $t \in R$  tale che  $xt$  è un elemento idempotente infinito. Quindi  $e = ext$  è un elemento idempotente infinito.

Analogamente a quanto visto in precedenza si dimostra (1)  $\Leftrightarrow$  (3).  $\square$



**Definizione 3.4.9.** Un anello  $R$  semplice è detto *puramente infinito* se soddisfa le condizioni equivalenti della Proposizione 3.4.8.

Prima di proseguire abbiamo bisogno della seguente definizione e del seguente risultato.

**Definizione 3.4.10.** Sia  $E$  un grafo. Denotiamo con  $P_{b\infty}(E)$  l'insieme di tutti i vertici di  $E$  tali che il loro albero o contiene infinite biforcazioni, oppure contiene almeno un infinite emitter. Mentre indichiamo con  $P_{ne}(E)$  l'insieme dei vertici di  $E$  tali che il loro albero non contiene cicli con uscita.

**Proposizione 3.4.11.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Denotiamo con  $H$  l'insieme  $P_l(E) \cup P_c(E)$ , dove  $P_l(E)$  è l'insieme dei vertici lineari di  $E$  (vedi Definizione 2.6.7), e  $P_c(E)$  è l'insieme dei vertici che appartengono a un ciclo senza uscite (vedi Definizione 2.3.3). Allora l'ideale bilatero  $I(H)$  della Leavitt path algebra  $L_K(E)$ , generato da  $H$ , è isomorfo alla  $K$ -algebra*

$$\left( \bigoplus_{i \in \Gamma_1} M_{\Lambda_{v_i}}(K) \right) \oplus \left( \bigoplus_{i \in \Gamma_2} M_{\Lambda_{v_i}}(K[x^{-1}, x]) \right), \quad (3.9)$$

dove  $\Gamma_1$  è l'insieme delle classi di equivalenza di  $P_l(E)$  descritte nel Lemma 2.6.14,  $M_{\Lambda_{v_i}}(K)$  è la  $K$ -algebra di matrici descritta nel Lemma 2.6.9,  $\Gamma_2$  è l'insieme dei cicli senza uscita di  $E$ , e  $M_{\Lambda_{v_i}}(K[x^{-1}, x])$  è la  $K$ -algebra descritta nel Lemma 3.1.2. In particolare, se  $E$  è un grafo finito e aciclico, allora gli insiemi  $\Gamma_1$  e  $\Lambda_{v_i}$  sono finiti per ogni  $v_i \in H$  e  $\Gamma_2$  è vuoto.

Inoltre, se  $v \in P_{ne}(E) \setminus P_{b\infty}(E)$ , allora l'ideale bilatero  $I(v)$  di  $L_K(E)$ , generato da  $v$ , è contenuto in  $I(H)$ .

*Dimostrazione.* Siccome  $P_l(E)$  e  $P_c(E)$  sono due insiemi ereditari e disgiunti tra loro, per la Proposizione 2.4.9 abbiamo  $I(H) = I(P_l(E) \sqcup P_c(E)) = I(P_l(E)) \oplus I(P_c(E))$ . Grazie ai Teoremi 3.1.3 e 2.6.15, l'ideale  $I(H)$  è isomorfo come  $K$ -algebra a 3.9. Chiaramente se  $E$  è un grafo finito e aciclico, gli insiemi  $\Gamma_1$  e  $\Lambda_{v_i}$  sono finiti per ogni  $v_i \in H$  e  $\Gamma_2$  è vuoto.

Sia  $v \in P_{ne}(E) \setminus P_{b\infty}(E)$ . In particolare, i vertici di  $T(v)$  emettono un numero finito di lati, e sono presenti un numero finito di biforcazioni. Per dimostrare  $I(v) \subseteq I(H)$  mostriamo che  $v$  appartiene alla chiusura satura ereditaria di  $H$ .

Procediamo per induzione sul numero di biforcazioni nell'albero  $T(v)$  di  $v$ . Se  $T(v)$  non contiene biforcazioni, allora in  $T(v)$  non sono nemmeno presenti cicli con uscite e senza uscite. Dunque  $v$  è un vertice lineare e appartiene a  $P_l(E) \subseteq H$ .

Sia  $n \in \mathbb{N}$ . Assumiamo che  $w \in \overline{H}$  per ogni vertice  $w$  tale che  $T(w)$  ha un numero di biforcazioni minore di  $n$ . Sia  $v$  un vertice tale che  $T(v)$  ha esattamente un numero  $n$  di biforcazioni. Consideriamo  $v_1$  la prima biforcazione. Per la proprietà (CK2) della Definizione 1.2.1 possiamo scrivere

$v_1 = \sum_{e \in s^{-1}(v_1)} ee^*$ . Ora i vertici  $r(e)$  hanno meno di  $n$  biforcazioni nel loro albero per ogni  $e \in s^{-1}(v_1)$ . Osserviamo che per ogni cammino che parte da  $r(e)$  termina in  $H$ . Per l'ipotesi induttiva  $r(s^{-1}(v_1)) \subseteq \overline{H}$ . Siccome  $\overline{H}$  è un insieme saturo si deve avere  $v_1 \in \overline{H}$  e di conseguenza anche  $v \in \overline{H}$ .

È immediato concludere  $I(v) \subseteq I(H)$  da  $v \in \overline{H}$ , perché  $I(H) = I(\overline{H})$  per il Lemma 2.4.1.  $\square$

Caratterizziamo le Leavitt path algebre semplici puramente infinite in termini di proprietà del grafo da cui derivano.

**Teorema 3.4.12.** *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Allora la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è semplice puramente infinita se, e solo se, sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

- (i) *gli unici insiemi di vertici saturi ed ereditari di  $E$  sono l'insieme vuoto ed  $E^0$ ;*
- (ii)  *$E$  soddisfa la condizione (L), ovvero ogni ciclo ha almeno un'uscita;*
- (iii) *ogni vertice di  $E$  si connette a un ciclo.*

*Equivalentemente, la condizione (iii) può essere sostituita con*

- (iii')  *$E$  contiene almeno un ciclo.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che valgano le condizione (i), (ii) e (iii). Per il Teorema di Semplicità 3.3.2, (i) e (ii) implicano che  $L_K(E)$  è semplice. Notiamo che (ii) e (iii) ci permettono di affermare che ogni vertice si connette a un ciclo con uscite. Per la Proposizione 3.4.7 ogni vertice di  $E$  è idempotente infinito in  $L_K(E)$ . Ora sia  $\alpha \in L_K(E)$  non nullo. Ricordando che  $E$  soddisfa la condizione (L), per il Teorema di Riduzione 2.3.7 esistono  $\mu, \eta \in \text{Path}(E)$  e  $k \in K^\times$  tali che  $k^{-1}\mu^*\alpha\eta = v$  per qualche vertice  $v$ . Come osservato in precedenza ogni vertice è un elemento idempotente infinito, quindi  $L_K(E)$  soddisfa la condizione (1) della Proposizione 3.4.8. In conclusione,  $L_K(E)$  è semplice puramente infinita.

Viceversa, supponiamo  $L_K(E)$  sia semplice puramente infinita. Per il Teorema di Semplicità 3.3.2 devono essere soddisfatte (i) e (ii).

Supponiamo per assurdo che non valga (iii'), ovvero  $E$  è aciclico. Verifichiamo che ogni vertice di  $E$  è un elemento idempotente infinito. Sia  $v \in E^0$ . Consideriamo l'ideale sinistro  $L_K(E)v$ , generato da  $v$ . Per la condizione (3) della Proposizione 3.4.8, esiste  $\beta \in L_K(E)$  tale che  $y := \beta v$  è idempotente infinito. In particolare  $y$  è un elemento non nullo. Sia  $x := v\beta v$ ; esso è idempotente:  $x^2 = (v\beta v)(v\beta v) = v(\beta v)(\beta v) = vy^2 = vy = v\beta v = x$ . L'elemento  $x$  non può essere nullo, altrimenti  $\beta x = \beta(v\beta v) = (\beta v)(\beta v) = y = 0$ . Siccome  $x$  è un elemento idempotente in  $L_K(E)v$  che commuta con  $v$ , possiamo scrivere  $L_K(E)v = L_K(E)x \oplus L_K(E)(v-x)$ . Ma  $L_K(E)x = L_K(E)y$ ; l'inclusione  $\subseteq$  è vera perché  $x = vy$ , mentre l'inclusione  $\supseteq$  è vera perché

$y = yy = \beta x$ . Quindi  $L_K(E)v = L_K(E)y \oplus L_K(E)(v - x)$ . Siccome  $y$  è idempotente infinito, per l'Osservazione 3.4.4 anche  $v$  è idempotente infinito.

Sia  $v \in E^0$ . Per il Corollario 1.4.10, esiste  $F$  sottografo completo finito di  $E$ , tale che  $v$  è un elemento idempotente infinito della Leavitt path algebra  $L_K(F(\text{Reg}(E) \cap \text{Reg}(F)))$ , dove il grafo  $G := F(\text{Reg}(E) \cap \text{Reg}(F))$  si costruisce come nella Definizione 1.3.14. Osserviamo che  $G$  è un grafo finito e aciclico. In particolare,  $v$  appartiene a  $P_{ne}(G) \setminus P_{b\infty}(G)$ . Per la Proposizione 3.4.11  $I(v)$  è contenuto in  $I(H)$ , dove  $H = P_l(G) \cup P_c(G)$ . Essendo  $G$  finito e aciclico  $I(H)$  è isomorfo a

$$\bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}(K), \quad (3.10)$$

per opportuni  $r, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ . Osserviamo che l'anello in 3.10 è noetheriano sinistro, ovvero il reticolo degli ideali sinistri soddisfa le condizioni equivalenti della Definizione 2.5.12. Il vertice  $v$  risulta essere un elemento idempotente infinito di  $I(H)$  per l'Osservazione 3.4.5. Ma un anello noetheriano sinistro non può contenere elementi idempotenti infiniti. La contraddizione nasce dall'aver supposto  $E$  aciclico. Quindi deve valere la condizione (iii').

Concludiamo la dimostrazione verificando l'equivalenza di (iii) e (iii') in presenza di (i) e (ii). Supponiamo valga (iii), allora è chiaro che deve valere (iii'). Viceversa, se vale (iii'), per il Lemma 3.3.7 il grafo  $E$  è cofinito, in particolare per l'Osservazione 3.3.5 ogni vertice deve essere collegato a un ciclo.  $\square$

**Principi di Dicotomia e Tricotomia.** Siamo pronti a enunciare i Principi di Dicotomia e Tricotomia.

**Teorema 3.4.13** (Principio di Dicotomia). *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Se la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è semplice, allora  $L_K(E)$  è localmente matriciale o è semplice puramente infinita.*

*Dimostrazione.* Siccome  $L_K(E)$  è semplice, per il Teorema di Semplicità 3.3.2, sono soddisfatte le condizioni (i) e (ii) del Teorema 3.4.12. Se esiste almeno un ciclo in  $E$ , allora è soddisfatta anche la condizione (iii') del Teorema 3.4.12. Quindi  $L_K(E)$  è semplice puramente infinita. Altrimenti, il grafo  $E$  è aciclico, quindi per il Corollario 2.6.22,  $L_K(E)$  è localmente matriciale.  $\square$

**Esempio 3.4.14.** Sia  $K$  un campo. Per ogni insieme  $\Lambda$  infinito, la Leavitt path algebra  $L_K(E_\Lambda) \cong M_\Lambda(K)$ , studiata nel Corollario 2.6.11, è un'algebra localmente matriciale.

Consideriamo il grafo infinito



Essendo un grafo aciclico, la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è localmente matriciale. Ma  $L_K(E)$  non è isomorfa a  $L_K(E_\Lambda)$  perché per il Teorema 2.6.15, lo zoccolo di  $L_K(E)$  è  $\{0\}$ , mentre lo zoccolo di  $L_K(E_\Lambda)$  coincide con  $L_K(E_\Lambda)$ .

**Teorema 3.4.15** (Principio di Tricotomia). *Siano  $E$  un grafo e  $K$  un campo. Se la Leavitt path algebra  $L_K(E)$  è graduata semplice, allora o  $L_K(E)$  è localmente matriciale, o  $L_K(E)$  è isomorfa alla  $K$ -algebra  $M_\Lambda(K[x^{-1}, x])$  dove  $\Lambda$  è un insieme e  $K[x^{-1}, x]$  è l'anello dei polinomi di Laurent, o  $L_K(E)$  è semplice puramente infinita.*

*Dimostrazione.* Per il Corollario 2.5.19 e il Lemma 3.3.7, richiedere che  $L_K(E)$  è graduata semplice è equivalente a richiedere che  $E$  sia cofinito.

Si possono presentare tre casi: (1)  $E$  non contiene cicli; (2)  $E$  contiene esattamente un ciclo; (3)  $E$  contiene due o più cicli.

Se vale (1), allora per il Corollario 2.6.22,  $L_K(E)$  è localmente matriciale.

Se vale (2), allora l'unico ciclo di  $E$ , che indichiamo con  $c$ , non ha uscite; altrimenti il punto finale dell'uscita dovrebbe collegarsi a un vertice di  $c$  per la proprietà  $E$  cofinito, producendo così un altro ciclo. Quindi l'insieme  $P_c(E)$  è non vuoto, in particolare l'ideale graduato  $I(P_c(E))$  di  $L_K(E)$ , generato da  $P_c(E)$ , è un ideale non banale. Siccome  $L_K(E)$  è graduata semplice si deve avere  $L_K(E) = I(P_c(E))$ . Grazie al Teorema 3.1.3 possiamo concludere che  $L_K(E) \cong M_\Lambda(K[x^{-1}, x])$  per un opportuno insieme  $\Lambda$ .

Se vale (3), ogni ciclo deve avere un'uscita perché essendo  $E$  cofinito, ogni vertice si deve collegare a ogni ciclo di  $E$ . In particolare, è soddisfatta la condizione (L). Questo vuol dire che sono soddisfatte le condizioni (i),(ii) e (iii') del Teorema 3.4.12, quindi  $L_K(E)$  è semplice puramente infinita.  $\square$

# Bibliografía

- [1] G. Abrams. *Leavitt path algebras: the first decade*. Bulletin of Mathematical Sciences **120** (2015), pg. 59 – 120.
- [2] G. Abrams, P. Ara, M. Siles Molina. *Leavitt path algebras. A primer and handbook*. Lecture Notes in Mathematics vol. 2191. Springer Verlag, London (2017).
- [3] G. Abrams, J. P. Bell, P. Colak, K. M. Rangaswamy. *Two-sided chain condition in Leavitt path algebras over arbitrary graphs*. Journal of Algebra and Its Applications **11** (2012), pg 801 – 809.
- [4] P. Ara, K. R. Goodearl, E. Pardo.  *$K_0$  of purely infinite simple regular rings*. *K-Theory* **26** (2002), pg. 69 – 100.
- [5] G. Aranda Pino, D. Martín Barquero, C. Martín González, M. Siles Molina. *The socle of a Leavitt path algebra*. Journal of Pure and Applied Algebra **2012** (2008), pg. 500 – 509.
- [6] G. W. Leavitt. *The Module Type of a Ring*. American Mathematical Society **103** (1962), pg. 113 – 130.
- [7] K. M. Rangaswamy. *On generators of two-sided ideals of Leavitt path algebras over arbitrary graphs*. Communications in Algebra **42** (2014), pg. 2859 – 2868.