



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Superfici cubiche in \mathbb{P}^3

Relatrice:
Prof.ssa Luisa Fiorot

Laureanda: Angelica Toniolo
Matricola: 2033885

Anno Accademico 2023/2024

19/07/2024

“Come per tutto il resto, così per una teoria
matematica: la bellezza può essere percepita,
ma non spiegata.” Arthur Cayley

Introduzione

Uno dei più importanti risultati nella geometria algebrica classica è stato ottenuto circa due secoli fa, più precisamente nel 1849 da Arthur Cayley e Thomas Paul Salmon che dimostrarono che nel piano proiettivo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ ogni superficie cubica non singolare contiene esattamente 27 rette. La chiave della loro dimostrazione fu l'uso di una forma normale per il polinomio omogeneo f che descrive la curva, le due forme più importanti per questo polinomio furono la forma di Cayley-Salmon e la forma di Sylvester; la prima di queste due forme scrive f come somma di due prodotti tripli di forme lineari dando accesso alla struttura combinatoria delle 27 rette, la seconda invece vede f come somma di cinque cubi di forme lineari.

Nonostante questo risultato sia esistente da quasi duecento anni è ancora un oggetto di studio importante nella geometria algebrica moderna in quanto nel dicembre del 2018 è stata compilata una lista di 27 domande aperte relative a questo teorema e su di esso vengono tenuti anche seminari in cui si prova a trovare una risposta a queste domande. In questa tesi daremo una dimostrazione basilare di tale teorema in un campo algebricamente chiuso e di caratteristica diversa da 2 che denoteremo con K senza trattare la possibile espansione di tale teorema ad un generico campo finito.

Procederemo per passi enunciando risultati noti e non sulle forme cubiche e quadratiche fino ad arrivare alla dimostrazione del Teorema di Cayley Salmon.

In particolare nel primo capitolo richiameremo alcune nozioni fondamentali per lo studio delle varietà algebriche tra cui le definizioni di risultante e di forma polare.

Nel secondo capitolo inizieremo poi a vedere alcuni risultati generali sulle superfici cubiche lisce come l'esistenza di almeno una retta su ognuna di queste superfici e daremo un accenno ad una possibile classificazione delle superfici cubiche riducibili in \mathbb{P}^3 .

Nel terzo capitolo faremo un ulteriore passo verso la dimostrazione del teorema concentrandoci sulle relazioni tra le rette e le superfici quadriche, dimostreremo ad esempio che date tre rette a due a due disgiunte esiste sempre una superficie quadrica non singolare contenente le tre rette, daremo delle condizioni per stabilire se una retta è contenuta o meno in una superficie quadrica e attraverso la mappa di Segre vedremo come sia possibile suddividere le rette contenute in una superficie quadrica in due famiglie con particolari proprietà.

Infine dopo aver trattato tutti i principali risultati relativi alle superfici cubiche e quadriche nell'ultimo capitolo inizieremo il vero e proprio conteggio delle rette, fissando una generica retta in una superficie cubica liscia dimostreremo che la superficie contiene esattamente 10 rette distinte che intersecano quella data e con delle proprietà di complanarità, vedremo inoltre che tale risultato vale anche per ogni altra retta contenuta nella superficie e disgiunta dalla retta già fissata; in questo modo arriveremo ad ottenere un insieme che verrà denotato con A e conterrà esattamente 17 rette di S , osserveremo poi che in S vi è anche un altro insieme di rette che denoteremo con B che conterrà 10 rette di S diverse da quelle di A date dalle possibili scelte di coefficienti $i, j, k \in \{1, \dots, 5\}$ in modo da trovare una retta di S non in A che intersechi r_i, r_j, r_k

e tali insiemi costituiranno il totale delle rette di S . Sempre in tale capitolo vedremo inoltre due esempi di applicazione del teorema dati dalle superfici di Clebsch e Fermat e vedremo un controesempio dato dalla superficie singolare di Cayley.

Si noti che esistono altre possibili dimostrazioni di tale teorema, ad esempio attraverso i Tripiani e che su esso si è svolto un vasto studio sugli invarianti, sulle possibili espressioni delle rette in una generica superficie cubica non singolare e sui possibili gruppi di automorfismi delle 27 rette, tali argomenti non sono però oggetto di studio di questa tesi.

Indice

1	Richiami	1
1	I polinomi omogenei	1
2	Le varietà algebriche	2
3	Irriducibilità e non singolarità	4
4	Risultante	5
5	La forma polare	5
2	Generalità sulle superfici cubiche lisce	7
1	Esistenza di una retta	7
2	Superfici riducibili in \mathbb{P}^3	15
3	Risultati preparatori	17
4	Le 27 rette	24
1	Conteggio	24
1.1	Possibile disposizione	28
2	Esempi	28
2.1	Superficie di Clebsch	28
2.2	Superficie di Fermat	30
2.3	Controesempio: Superficie di Cayley	31
	Bibliografia	32

Capitolo 1

Richiami

In questo capitolo, così come nei successivi supporremo sempre K un campo algebricamente chiuso e di caratteristica 0.

1 I polinomi omogenei

Definizione 1.1. Siano K un campo e x_0, x_1, \dots, x_N indeterminate. Un polinomio non nullo $f(x_0, x_1, \dots, x_N) \in K[x_0, x_1, \dots, x_N]$ si dice omogeneo se tutti i suoi monomi hanno lo stesso grado.

L'insieme costituito dal polinomio nullo e dai polinomi omogenei di grado d si denota con $K[x_0, x_1, \dots, x_N]_d$.

Osservazione 1.1. Per non appesantire la notazione l'insieme di tutti i polinomi omogenei di un dato grado verrà semplicemente denotato con $K[x_0, x_1, \dots, x_N]$.

Proposizione 1.1. Sia f un polinomio omogeneo di terzo grado in tre variabili e siano $\lambda, \mu \in K$, allora

$$f(\lambda P + \mu Q) = \lambda^3 f(P) + \lambda^2 \mu P_Q f(P) + \lambda \mu^2 P_P f(Q) + \mu^3 f(Q)$$

dove $P_x f$ è la forma polare che verrà definita nella sezione 5.

Dimostrazione. Siano $P = \underline{x} = [x_0 : x_1 : x_2]$ e $Q = \underline{y} = [y_0 : y_1 : y_2]$, in queste notazioni

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= \sum_{\substack{i+j+k=3 \\ i,j,k \geq 0}} a_{ijk} (\lambda x_0 + \mu y_0)^i \cdot (\lambda x_1 + \mu y_1)^j \cdot (\lambda x_2 + \mu y_2)^k \\ &= \sum_{\substack{i+j+k=3 \\ i,j,k \geq 0}} a_{ijk} \left(\sum_{\alpha=0}^i \binom{i}{\alpha} (\lambda x_0)^{i-\alpha} (\mu y_0)^\alpha \right) \cdot \left(\sum_{\beta=0}^j \binom{j}{\beta} (\lambda x_1)^{j-\beta} (\mu y_1)^\beta \right) \cdot \\ &\quad \left(\sum_{\gamma=0}^k \binom{k}{\gamma} (\lambda x_2)^{k-\gamma} (\mu y_2)^\gamma \right) \\ &= \left(\sum_{\alpha=0}^i \binom{i}{\alpha} x_0^{i-\alpha} y_0^\alpha \right) \cdot \left(\sum_{\beta=0}^j \binom{j}{\beta} x_1^{j-\beta} y_1^\beta \right) \cdot \left(\sum_{\gamma=0}^k \binom{k}{\gamma} x_2^{k-\gamma} y_2^\gamma \right) \cdot \\ &\quad \lambda^{3-\alpha-\beta-\gamma} \mu^{\alpha+\beta+\gamma}. \end{aligned}$$

Analizzando la casistica degli indici si osserva che per $\alpha = \beta = \gamma = 0$ si ottiene il primo termine dello sviluppo, ovvero $\lambda^3 f(P)$.

Analogamente sviluppando i coefficienti binomiali, moltiplicando e effettuando opportuni raccoglimenti si ottengono gli altri termini e quindi la tesi. \square

2 Le varietà algebriche

Definizione 2.1. Lo spazio proiettivo \mathbb{P}^n sul campo K è l'insieme quoziente $K^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ modulo la seguente relazione di equivalenza: se $x \in K^{n+1}$ è uno scalare non nullo multiplo di $y \in K^{n+1}$, allora x e y sono equivalenti. Scriveremo i punti di \mathbb{P}^n in coordinate omogenee, ovvero il punto denotato da $(x_0 : \dots : x_n)$ denoterà la classe del punto (x_0, \dots, x_n) .

Definizione 2.2. Sia C una collezione di polinomi omogenei in $K[x_0, x_1, \dots, x_n]$. La varietà proiettiva algebrica associata a C è

$$V(C) = \{p \in \mathbb{P}^n : \forall f \in C, f(p) = 0\}.$$

Più in generale, una varietà algebrica proiettiva è un sottoinsieme di \mathbb{P}^n della forma $V(D)$ per qualche collezione D di polinomi omogenei.

Definizione 2.3. Un'ipersuperficie di grado d è un sottoinsieme di \mathbb{P}^n descritta da un singolo polinomio omogeneo di grado d .

Un iperpiano è un'ipersuperficie di grado 1.

In \mathbb{P}^3 un iperpiano viene semplicemente chiamato piano.

Definizione 2.4. Il radicale di un ideale I in un anello R è definito come

$$\sqrt{I} = \{x \in R : x^n \in I \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\}$$

Definizione 2.5. Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva algebrica. L'ideale omogeneo di V è:

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in K[x_0, \dots, x_n] : \forall p \in V, f(p) = 0\}$$

Teorema 2.1 (Nullstellensatz omogeneo). *Supponiamo K algebricamente chiuso. Se I è un ideale radicale di $K[x_0, \dots, x_n]$ che ha un insieme omogeneo di generatori e se $I \neq (x_0, \dots, x_n)$ allora $\mathcal{I}(V(I)) = I$.*

Definizione 2.6. Il polinomio minimo di una curva algebrica piana è il polinomio monico di grado minimo che si annulla sulla curva. Ovvero è il più piccolo polinomio che include tutte le informazioni sul comportamento algebrico della curva.

Definizione 2.7. Siano $V \subseteq \mathbb{P}^m, W \subseteq \mathbb{P}^n$ varietà algebriche proiettive.

Una funzione $F: V \rightarrow W$ è un morfismo di varietà proiettive se per ogni $p \in V$ esistono dei polinomi omogenei $f_0(x), \dots, f_n(x) \in K[x_0, x_1, \dots, x_m]$ tutti dello stesso grado d e esiste un intorno aperto di Zariski $U \subseteq V$ di p tale che per ogni $x \in U$:

1. non tutti i polinomi $f_0(x), \dots, f_n(x)$ sono nulli
2. $F(x) = (f_0(x) : \dots : f_n(x))$

Esempio 2.1. Un cambio di coordinate proiettivo è una mappa $\phi: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ data da $\phi(x) = Ax$ dove $A \in GL_{n+1}(K)$ e x è considerato come un vettore colonna $(n+1) \times 1$

Ricordiamo che la mappa è ben definita: suppongo inanzitutto che un punto $p \in \mathbb{P}^n$ sia rappresentato da $x \in K^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Siccome la matrice A è invertibile ha nucleo banale, ovvero $\ker(A) = \{0\}$, questo implica che le coordinate di $\phi(x) = Ax$ in K^{n+1} non possono essere tutte nulle, essendo le entrate di x non tutte nulle, quindi $\phi(x)$ rappresenta un punto in \mathbb{P}^n . Si osserva inoltre che $\phi(kx) = A(kx) = k(Ax) = k\phi(x)$ per ogni $k \in K$, quindi ϕ manda ogni rappresentativa del punto p nello stesso punto p di \mathbb{P}^n perché $\phi(x)$ e $\phi(kx)$ sono equivalenti.

Osservazione 2.1. Con retta in \mathbb{P}^3 si intende una varietà proiettiva $r \subseteq \mathbb{P}^3$ che può essere rappresentata a meno di cambio di coordinate come $r = V(x_1, x_2)$, ovvero come l'intersezione tra il piano $\pi = V(x_1)$ e il piano $\sigma = V(x_2)$.

Proposizione 2.1. 1. In un piano proiettivo due rette distinte r_1 e r_2 si incontrano in un unico punto

2. In \mathbb{P}^3 se Π è un piano e r una retta tale che $r \not\subseteq \Pi$ allora r e Π si intersecano in un unico punto

Dimostrazione. 1. A meno di cambio di coordinate non è restrittivo supporre che il piano sia \mathbb{P}^2 . Siccome $r_1 \neq r_2$ a meno di un altro cambio di coordinate si può supporre $r_1: x_2 = 0$ e $r_2: x_1 = 0$. Si osserva quindi che il punto $p = (0: 0: 1)$ è comune ad entrambe le rette ed è unico.

2. A meno di cambi di coordinate è possibile supporre $r = V(x_1, x_2)$.

Il piano Π ha equazione del tipo $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ ovvero $\Pi = V\left(\sum_{i=0}^3 a_ix_i\right)$, la retta e il piano formano quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \end{cases}$$

Che è equivalente a:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ a_0x_0 + a_3x_3 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema se confrontato con la richiesta $r \not\subseteq \Pi$ fornisce una condizione sui coefficienti dell'equazione del piano:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice completa associata al sistema è quindi data da:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \end{array} \right).$$

La matrice incompleta data dai soli coefficienti del sistema ha rango 3 così come la matrice completa quindi per il Teorema di Rouché Capelli il sistema ammette come soluzione un sottospazio di dimensione uno che corrisponde ad un punto in \mathbb{P}^3 che è l'unico punto di intersezione tra la retta e il piano.

□

Proposizione 2.2. *Sia $f \in K[x, y]$ un polinomio omogeneo non nullo di grado d . Allora f ha al più d zeri in \mathbb{P}^1 e se contati con molteplicità ne ha esattamente d quando K è algebricamente chiuso.*

3 Irriducibilità e non singolarità

Definizione 3.1. Sia V una varietà proiettiva. Diremo che V è riducibile se esistono delle sottovarietà non vuote $V_1, V_2 \subseteq V$ con $V_1 \neq V_2$ entrambe diverse da V e tali che $V = V_1 \cup V_2$. Altrimenti V è detta irriducibile.

Osservazione 3.1. Essendo $V(fg) = V(f) \cup V(g)$ se f e g non sono associati, allora l'ipersuperficie $V(fg)$ è riducibile.

Definizione 3.2. Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva e sia $p \in V$. Lo spazio tangente a V in p è la varietà proiettiva data da

$$T_p S = \bigcap_{f \in I(V)} V \left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot x_i \right).$$

Osservazione 3.2. Le varietà $V \left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot x_i \right)$ della Definizione 3.2 sono ben definite: se f è un polinomio omogeneo di grado d le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot x_i$ o sono identicamente nulle o sono polinomi omogenei di grado $d-1$. Quindi rappresentando p come $(cp_0 : \dots : cp_n)$ anziché come $(p_0 : \dots : p_n)$ si ottiene semplicemente un riscalamento del termine $\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot x_i$ di una costante c^{d-1} e questo non altera l'insieme degli zeri.

Esempio 3.1. *Una retta proiettiva r coincide con lo spazio tangente $T_p r$ per ogni $p \in r$.*

Dimostrazione. Attraverso un cambio di coordinate possiamo vedere una retta $r \subseteq \mathbb{P}^n$ come la varietà definita dall'annullarsi delle variabili x_2, \dots, x_n , ovvero $r = V(x_2, \dots, x_n) = V((x_2, \dots, x_n))$ dove quest'ultima è la varietà associata all'ideale generato da x_2, \dots, x_n . Per il Teorema del Nullstellensatz omogeneo si ha che $I(r) = I(V(x_2, \dots, x_n)) = (x_2, \dots, x_n)$. Quindi si ha:

$$T_p r = \bigcap_{f \in \{x_2, \dots, x_n\}} V \left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot x_i \right) = \bigcap_{j=2}^n V(x_j) = V(x_2, \dots, x_n) = r$$

□

Definizione 3.3. Sia $V = V(f)$ un'ipersuperficie irriducibile di \mathbb{P}^n . Diremo che V è singolare nel punto $p \in V$ se valgono tutte le seguenti:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(p) = 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0,$$

(in notazione più compatta $p \in V$ è singolare se $\nabla f(p) = \underline{0}$).

Se V è non singolare in ogni suo punto diremo semplicemente che V è non singolare.

4 Risultante

Definizione 4.1. Siano f, g due polinomi omogenei di gradi rispettivamente n ed m in una variabile X . Chiameremo risultante di f e g e lo denoteremo con $R(f, g)$ il determinante della matrice $(n+m) \times (n+m)$ seguente:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & b_0 & b_1 & \dots & \dots & \dots & b_m \end{pmatrix}$$

dove le prime m righe sono formate da a_0, \dots, a_n , coefficienti di f e le ultime n righe sono formate da b_0, \dots, b_m , coefficienti di g .

Teorema 4.1 (Fondamentale del risultante). *Siano f e g due polinomi omogenei, $f, g \in K[X]$ essi hanno un fattore non costante in comune se e solo se $R(f, g) = 0$*

Corollario 4.1.1. *Siano $f, g \in K[X]$ con $\deg f, \deg g \geq 1$, sono equivalenti:*

1. f e g hanno zeri comuni.
2. $R(f, g) = 0$.

5 La forma polare

Definizione 5.1. Sia $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva algebrica proiettiva con polinomio minimo f di grado $d \geq 2$. Sia $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in \mathbb{P}^2$ arbitrario e

$$D_q f := \sum_{i=0}^2 q_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Se il grado di $D_q f \geq 1$, allora $P_q C := V(D_q f)$ è detta forma polare di C rispetto al polo q .

Osservazione 5.1. Dalla definizione precedente si ha che un punto p appartiene alla polare alla curva C di polo q se e solo se $D_q f(p) = 0$

Proposizione 5.1. *Con le stesse notazioni della Definizione 5.1 e con $\deg f := n$ valgono le seguenti:*

1. La polare $P_q C$ è indipendente dalla scelta delle coordinate.
2. $D_q f = 0$ se e solo se C consiste in n rette per il punto q .
3. $\deg D_q f = n-1$ quando $D_q f \neq 0$.
4. C e $P_q C$ hanno componenti in comune se e solo se C contiene una retta per q .
5. Se $p \in C$ è singolare e $q \in \mathbb{P}^n$ è arbitrario allora $p \in P_q C$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione di tale risultato di veda il Capitolo 4 di [1]. □

Capitolo 2

Generalità sulle superfici cubiche lisce

In questa sezione $S \subset \mathbb{P}^3$ sarà una superficie cubica non singolare data da un polinomio omogeneo di terzo grado $f = f(X, Y, Z, T)$. Considereremo inoltre la retta r di \mathbb{P}^3 giacente su S .

1 Esistenza di una retta

Proposizione 1.1. 1. Per ogni punto $p \in S$ esistono al massimo 3 rette di S passanti per esso; se ce ne sono 2 o 3 allora devono essere complanari.



2. Ogni piano $\Pi \subset \mathbb{P}^3$ interseca S in una delle seguenti:

- (a) una cubica irriducibile
- (b) una conica più una retta
- (c) 3 rette distinte

Dimostrazione. 1. Se $r \subset S$ è passante per p allora $r = T_p r \subset T_p S$, quindi tutte le rette di S passanti per p sono contenute in $T_p S$; sono al massimo 3 per il punto successivo.

2. Dobbiamo dimostrare che non è possibile avere una retta multipla. Siano $\Pi: (T = 0)$ e $r: (Z = 0) \subset \Pi$ e r una retta multipla in $S \cap \Pi$. Cerchiamo di trovare una scrittura generale per f . Osserviamo che scrivendo un generico polinomio f di terzo grado esplicitandone la variabile T si ottiene un polinomio della forma:

$$f(X, Y, Z, T) = aT^3 + T^2 f_1(X, Y, Z) + T f_2(X, Y, Z) + f_3(X, Y, Z). \quad (2.1)$$

Dove con $f_i(X, Y, Z)$ si intende un polinomio omogeneo in $K[X, Y, Z]$ di grado i per $i \in \{1, 2, 3\}$.

Raccogliendo parzialmente dall'equazione (2.1) la variabile T si ottiene:

$$T(aT^2 + T f_1(X, Y, Z) + f_2(X, Y, Z)) + f_3(X, Y, Z) = T \cdot B(X, Y, Z) + f_3(X, Y, Z).$$

Dove $B(X, Y, Z)$ è una forma quadratica.

Imponendo inoltre che la molteplicità di r in $S \cap \Pi$ sia maggiore di 1 si ottiene che l'equazione di r divide quella di $S \cap \Pi$ almeno due volte, ovvero $Z^2 | f_3(X, Y, Z)$. Questo prova che $f_3(X, Y, Z)$ è della forma $f_3(X, Y, Z) = Z^2 \cdot A(X, Y, Z)$, con A forma lineare. Da cui si ottiene:

$$f = Z^2 \cdot A(X, Y, Z) + T \cdot B(X, Y, Z),$$

con A e B come sopra. Per ipotesi S è non singolare quindi $\nabla f(P) \neq 0 \forall P \in S$.

Cerchiamo le singularità di S trovando le condizioni di annullamento del gradiente di f .

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} Z^2 \cdot \partial_X A(X, Y, Z) + T \cdot \partial_X B(X, Y, Z) = 0 \\ Z^2 \cdot \partial_Y A(X, Y, Z) + T \cdot \partial_Y B(X, Y, Z) = 0 \\ 2Z \cdot A(X, Y, Z) + Z^2 \cdot \partial_Z A(X, Y, Z) + T \cdot \partial_Z B(X, Y, Z) = 0 \\ B(X, Y, Z) = 0 \end{cases}$$

Analizzando il sistema si ottiene che ponendo $Z = T = 0$ si ha l'annullamento delle prime tre equazioni e ponendo $B(X, Y, Z) = 0$ si annulla anche l'ultima equazione.

Quindi $S : (f = 0)$ è singolare nei punti in cui $T = Z = B = 0$; questo è un insieme non vuoto dato che è l'insieme delle radici di B sulla retta $r : (Z = T = 0)$.

Proposizione 1.2. *Esiste almeno una retta contenuta in S .*

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in quattro punti:

1. **Costruzione preliminare** Per ogni punto $P \in S$, l'intersezione di S con $T_P S$ è una cubica piana $C = S \cap T_P S$, come visto nel punto 2 della proposizione precedente, che è singolare in P , essendo $P \in S$ e $P \in T_P S$. Assumiamo che C sia irriducibile, altrimenti dal punto 2 della proposizione precedente sappiamo che C può essere solo una conica più una retta o tre rette distinte, quindi in ogni caso P appartiene a una retta contenuta in S e non c'è più nulla da dimostrare. Essendo singolare C è quindi una cubica nodale o cuspidale e le coordinate in \mathbb{P}^3 possono essere scelte in modo che $T_P S : \{T = 0\}$, $P = (0 : 0 : 1 : 0)$ e $C : (XYZ = X^3 + Y^3)$ o $(X^2Z = Y^3)$. Il fatto che C sia nodale o cuspidale dipende dagli invarianti del punto P , ovvero:

- (a) P è una cuspidale se ha invarianti $(1, (2), (1))$ ovvero se ha una retta tangente di molteplicità 2 e ordine 1
- (b) P è un nodo se ha invarianti $(2, (1, 1), (1, 1))$ ovvero se ha due rette tangenti di molteplicità 1 e ordine 1.

Quindi ci siamo ricondotti a $f = Tg + f_3$ con $g = g_2(X, Y, Z, T)$ forma quadratica e $f_3(X, Y, Z) \in \{X^2Z - Y^3, X^3 + Y^3 - XYZ\}$. Analizziamo l'eventuale necessità di imporre condizioni su g :

$$\nabla f(X, Y, Z, T) = \begin{pmatrix} 2XZ + T\partial_X g(X, Y, Z, T) \\ -3Y^2 + T\partial_Y g(X, Y, Z, T) \\ X^2 + T\partial_Z g(X, Y, Z, T) \\ g(X, Y, Z, T) + T\partial_T g(X, Y, Z, T) \end{pmatrix}$$

e calcolandolo in P si ha $\nabla f(P) = (0, 0, 0, g(P))$ quindi P è non singolare in S se e solo se $g(P) \neq 0$.

Assumiamo quindi di avere $f = X^3Z - Y^3 + gT$ dove $g = g_2(X, Y, Z, T)$ è una forma

quadratica tale che $g(0, 0, 1, 0) \neq 0$ per la non-singularità di S in P .

Osservo che non è restrittivo supporre $g(0, 0, 1, 0) = 1$ perché g , essendo una forma quadratica, si può scrivere nella forma

$$g = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dT^2 + eXY + fXZ + gXT + hYZ + iTY + jZT$$

e calcolandola in P si ottiene $g(0, 0, 1, 0) = c$ quindi l'unica condizione sui coefficienti è $c \neq 0$ in particolare possiamo scegliere $c = 1$.

2. **Dimostrazione della proposizione** Ricordiamo che sia la cubica nodale che quella cuspidale sono razionali. Consideriamo il punto variabile $P_\alpha = (1, \alpha, \alpha^3, 0)$ di $C = V(g, \Pi) \subset S$. Ogni retta di \mathbb{P}^3 passante per P_α incontra il piano $\Pi = V(X)$ in un punto $Q = (0, \eta, \xi, \tau)$ per quanto visto nella Proposizione 2.1 del Capitolo 1. Scriveremo l'equazione della retta $P_\alpha \vee Q$ come $\lambda P + \mu Q$ e imponiamo che sia contenuta in S .

$$(Tg + f_3)(\lambda P_\alpha + \mu Q) = 0 \forall \lambda, \mu \Leftrightarrow P_\alpha \vee Q \subset S \Leftrightarrow A(0, \eta, \xi, \tau) = B(0, \eta, \xi, \tau) = C(0, \eta, \xi, \tau) = 0$$

dove A, B e C sono forme di grado 1, 2 e 3 in (Y, Z, T) i cui coefficienti dipendono da α e che saranno descritte nei punti successivi.

Claim *Esiste un risultante polinomiale, $R_{27}(\alpha)$, monico di grado 27 in α tale che*

$$R(\alpha) = 0 \Leftrightarrow A = B = C = 0 \text{ hanno uno zero comune } (\eta, \xi, \tau) \in \mathbb{P}^2$$

Questa affermazione prova la Proposizione 1.1 in quanto afferma che per ogni radice α di R esiste un punto $Q = (0, \eta, \xi, \tau)$ in Π per cui la retta $P_\alpha \vee Q$ è contenuta in S . Nei punti successivi della dimostrazione cercheremo di trovare una scrittura esplicita di A, B, C per provare il Claim.

3. **Forma polare** Abbiamo visto nell'Osservazione 5.1 del Capitolo 1 che la forma polare di f rispetto al polo P calcolata in Q è $D_P f(Q)$. Definendo la forma polare di f nei due insiemi di variabili (X, Y, Z, T) e $Q = (X', Y', Z', T')$ otteniamo

$$f_1(X, Y, Z, T; X', Y', Z', T') = \frac{\partial f}{\partial X} \cdot X' + \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot Y' + \frac{\partial f}{\partial Z} \cdot Z' + \frac{\partial f}{\partial T} \cdot T'.$$

Dalla definizione di spazio tangente e dalla Proposizione 5.1 del Capitolo 1 si osserva che essendo $P = (X, Y, Z, T)$ e $P \neq Q$, con $Q = (X', Y', Z', T') \in \mathbb{P}^3$, si ha:

$$\nabla f(P) \cdot Q = f_1(P; Q) = 0 \Leftrightarrow \text{la retta } P \vee Q \text{ è tangente a } S \text{ in } P$$

Per quanto dimostrato nella Proposizione 1.1 del Capitolo 1

$$f(P; Q) = \lambda^3 f(P) + \lambda^2 \mu f_1(P; Q) + \lambda \mu^2 f_1(Q; P) + \mu^3 f(Q),$$

quindi per $P \neq Q \in \mathbb{P}^3$ le 4 condizioni da imporre affinché la retta $P \vee Q$ sia contenuta in $S = V(f)$ sono:

$$f(P) = f_1(P; Q) = f_1(Q; P) = f(Q) = 0$$

Più geometricamente stiamo affermando che la retta r è tangente a S sia in P che in Q ,

quindi $f|_r$ ha radici doppie sia in P che in Q e quindi $r \subset S$.
La forma polare di $f = X^2Z - Y^3 + gT$ è:

$$\begin{aligned} \nabla f(P) \cdot Q &= \begin{pmatrix} T\partial_X g + \partial_X f_3 \\ T\partial_Y g + \partial_Y f_3 \\ T\partial_Z g + \partial_Z f_3 \\ T\partial_T g + g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ T' \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2XZ + T\partial_X h(X, Y, Z, T) \\ -3Y^2 + T\partial_Y h(X, Y, Z, T) \\ X^2 + 2ZT + T\partial_Z h(X, Y, Z, T) \\ Z^2 + h(X, Y, Z, T) + T\partial_T h(X, Y, Z, T) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ T' \end{pmatrix} = \\ &= f_1(P, Q) = 2XZ \cdot X' - 3Y^2 \cdot Y' + X^2 \cdot Z' + g(X, Y, Z, T) \cdot T' + Tg_1. \end{aligned}$$

Dove $g_1 = g_1(X, Y, Z, T, X', Y', Z', T')$ è la forma polare di g definita in modo analogo a quella di f ; siccome g è quadratica, g_1 è una forma bilineare simmetrica quindi $g_1(P; P) = 2g(P)$.

Sostituendo $P_\alpha = (1, \alpha, \alpha^3, 0)$ e $Q = (0, Y, Z, T)$ si ottiene l'equazione per $P_\alpha \vee Q \subset S$ nella forma $A = B = C = 0$, dove:

$$\begin{aligned} f_1(P, Q) = A &= Z' - 3\alpha^2 Y' + g(1, \alpha, \alpha^3, 0)T', \\ f_1(Q, P) = B &= -3\alpha Y'^2 + g_1(0, Y', Z', T'; 1, \alpha, \alpha^3, 0)T', \\ f(Q) = C &= -Y'^3 + g(0, Y', Z', T')T'. \end{aligned}$$

4. **Calcolo finale** Procediamo eliminando ora Y, Z, T dalle tre equazioni prestando attenzione alla massima potenza di α presente.

La condizione $g(0, 0, 1, 0) = 1$ implica che $g(X, Y, Z, T) = Z^2 + h(X, Y, Z, T)$ con $h \in K[X, Y, Z, T]$ e $\deg h = 2$ quindi sicuramente compare il termine in Z^2 e calcolando g in P_α si ha:

$$g(1, \alpha, \alpha^3, 0) = \alpha^6 + h(1, \alpha, \alpha^3, 0) \in K[\alpha]$$

dove $\deg_\alpha h < 6$, g è quindi un polinomio di grado 6 in α .

Essendo h un polinomio omogeneo di grado 2 si può scriverlo come $aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dT^2 + eXY + fXZ + gXT + hYZ + iYT + lZT$ e imponendo la condizione $g(0, 0, 1, 0) = 1$ si ha che in h non può comparire il termine Z^2 .

Imponendo l'equazione $A = 0$ si ottiene un'espressione lineare di Z in funzione di Y e T ,

$$Z' = 3\alpha^2 Y' - (\alpha^6 + h(1, \alpha, \alpha^3, 0))T'.$$

Sostituendo in B e sfruttando la bilinearità di g_1 si ottiene

$$\begin{aligned} B = f_1(Q, P) = \nabla f(Q) \cdot P &= \begin{pmatrix} \partial_X h(0, Y', Z', T') \\ -3Y'^2 + \partial_Y h(0, Y', Z', T')T' \\ 2Z'T' + \partial_Z h(0, Y', Z', T') \\ \partial_T h(0, Y', Z', T')T' + Z'^2 + h(0, Y', Z', T') \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= b_0 Y^2 + b_1 YT + b_2 T^2 \end{aligned}$$

dove,

$$\begin{aligned} b_0 &= -3\alpha \\ b_1 &= g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0; 0, 1, 3\alpha^2, 0) = 6\alpha^5 + h_1(\alpha) \\ b_2 &= g_1(1, \alpha, \alpha^3, 0; 0, 0, 3\alpha^2Y - \alpha^6 + h(1, \alpha, \alpha^3, 0), 1) = -2\alpha^9 + h_2(\alpha) \end{aligned}$$

e tale scrittura è ottenuta considerando le massime potenze di α presenti e effettuando opportuni raccoglimenti su $\nabla h(Q)$.

Quindi

$$B = (-3\alpha)Y'^2 + (6\alpha^5 + h_1(\alpha))Y'T' + (-2\alpha^9 + h_2(\alpha))T'^2$$

con $\deg_\alpha h_1 < 6$ e $\deg_\alpha h_2 < 9$. Analogamente sostituendo Z' in C ed espandendo la g si ottiene:

$$\begin{aligned} C &= f(Q) = -Y'^3 + g(0, Y', 3\alpha^2Y' - (\alpha^6T' + h(1, \alpha, \alpha^2, 0)), T')T' \\ &= -Y'^3 + Z^2T + h(0, Y', Z', T')T' \\ &= -Y'^3 + (3\alpha^2Y' - (\alpha^6 + h(1, \alpha, \alpha^3, 0)))T'^2T + h(0, Y', Z', T')T' \\ &= -Y'^3 + 9\alpha^4T'Y'^2 + (\alpha^6 + h(1, \alpha, \alpha^3, 0))T'^3 - 6\alpha^2Y'T'^2(\alpha^6 + h(1, \alpha, \alpha^3, 0)) = \\ &= c_0Y'^3 + c_1Y^2T + c_2Y'T'^2 + c_3T'^3 \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} c_0 &= -1, \\ c_1 &= g(0, 1, 3\alpha^2, 0) = 9\alpha^4 + i \\ c_2 &= g_1(0, 1, 3\alpha^2, 0; 0, -a^{(6)}, 1) = -6\alpha^8 + h_1(\alpha) \\ c_3 &= g(0, 0, -a^{(6)}, 1) = \alpha^{12} + h_2(\alpha). \end{aligned}$$

Possiamo quindi considerare C come

$$C = (-1)Y'^3 + (9\alpha^4 + i)Y'^2T' + (-6\alpha^8 + h_1(\alpha))Y'T'^2 + (\alpha^{12} + h_2(\alpha))T'^3$$

dove $\deg h_1 < 8$ e $\deg h_2 < 12$ e si è usato che $h(Q) = h(0, Y', 3\alpha^2Y' - (\alpha^6 + h(1, \alpha, \alpha^3, 0))T', T')$ è un polinomio di grado 2 nelle sole variabili Y' e T' e il termine i che compare in c_1 è il coefficiente del termine YT in h .

Quindi B e C hanno uno zero in comune in $(\eta: \tau)$ se e solo se $R(B, C) = 0$, ovvero se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} -3\alpha & 6\alpha^5 + \dots & -2\alpha^9 + \dots & 0 & 0 \\ 0 & -3\alpha & 6\alpha^5 + \dots & -2\alpha^9 + \dots & 0 \\ 0 & 0 & -3\alpha & 6\alpha^5 + \dots & -2\alpha^9 + \dots \\ -1 & 9\alpha^4 + \dots & -6\alpha^8 + \dots & \alpha^{12} + \dots & 0 \\ 0 & -1 & 9\alpha^4 + \dots & -6\alpha^8 + \dots & \alpha^{12} + \dots \end{pmatrix} = 0$$

Questo determinante è polinomiale in α e risolvendolo si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \det \begin{pmatrix} -3\alpha & 6\alpha^5 + \dots & -2\alpha^9 + \dots & 0 & 0 \\ 0 & -3\alpha & 6\alpha^5 + \dots & -2\alpha^9 + \dots & 0 \\ 0 & 0 & -3\alpha & 6\alpha^5 + \dots & -2\alpha^9 + \dots \\ -1 & 9\alpha^4 + \dots & -6\alpha^8 + \dots & \alpha^{12} + \dots & 0 \\ 0 & -1 & 9\alpha^4 + \dots & -6\alpha^8 + \dots & \alpha^{12} + \dots \end{pmatrix} = \\
& = \alpha^{27} \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 2 \\ -1 & 9 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & -6 & 1 \end{pmatrix} + \dots = \\
& = \alpha^{27} + \dots
\end{aligned}$$

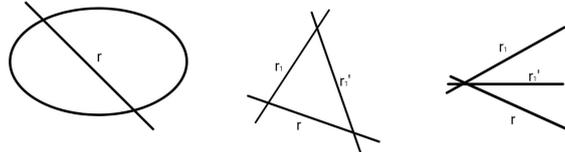
Quindi vi sono 27 possibili valori di α se contati con molteplicità per cui esiste una retta r_α passante per P_α e contenuta in S . Questo termina la dimostrazione del claim.

□

Proposizione 1.3. *Data una retta $r \subseteq S$ esistono esattamente cinque coppie non ordinate di rette (r_i, r'_i) contenute in S che intersecano r tali che:*

1. per $i = 1, \dots, 5$ r, r_i, r'_i sono complanari e
2. per $i \neq j$ $(r_i \cup r'_i) \cap (r_j \cup r'_j) = \emptyset$

Dimostrazione. Se Π è un piano in \mathbb{P}^3 contenente r allora $\Pi \cap S = r + \text{conica}$ perché $r \subseteq S$. La conica può essere singolare o non singolare: ma dalla Proposizione 1.1 del Capitolo 2 sappiamo che non ci sono rette multiple. Le possibili configurazioni geometriche sono le seguenti:



Dobbiamo dimostrare che ci sono esattamente 5 piani distinti $\Pi_i \supset r$ per i quali si trova una conica singolare. Il punto b) sarà una conseguenza del primo punto della Proposizione 1.1. Supponiamo $r = V(Z, T)$. Essendo $r \subseteq S$ non possono comparire i termini del tipo X^2Y, XY^2, X^3 e Y^3 , quindi separando le variabili X, Y, f si può scrivere come

$$f = AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F \quad (2.2)$$

dove $A, B, C, D, E, F \in K[Z, T]$ con A, B e C forme lineari, D ed E forme quadratiche, e F forma cubica. Se consideriamo l'equazione della conica nelle variabili X, Y , essa è singolare se e solo se

$$\Delta(Z, T) = \det \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{pmatrix} = ACF + \frac{BDE}{4} - \frac{AE^2}{4} - \frac{CD^2}{4} - \frac{AE^2}{4} = 0.$$

Ovvero se e solo se:

$$4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - AE^2 = 0.$$

Ricordiamo che ogni piano contenente r ha la forma $\Pi: \mu Z = \lambda T$ perché la sua equazione è soddisfatta da tutti i punti con $Z = T = 0$ ovvero da tutti i punti di r . Se $\mu \neq 0$, possiamo supporre $\mu = 1$ allora $Z = \lambda T$. Quindi in termini di coordinate omogenee su Π , $f|_{\Pi} = T \cdot Q(X, Y, T)$ dove

$$Q = A(\lambda, 1)X^2 + B(\lambda, 1)XY + C(\lambda, 1)Y^2 + D(\lambda, 1)XT + E(\lambda, 1)YT + F(\lambda, 1)T^2.$$

Ovvero sostituiamo $Z = \lambda T$ nell'equazione (2.2) e sfruttando il fatto che $A(\lambda T, T) = TA(\lambda, 1)$ perché A è lineare, $D(\lambda T, T) = T^2D(\lambda, 1)$ perché D è quadratica e $F(\lambda T, T) = T^3F(\lambda, 1)$ perché F è una forma cubica raccolgo la variabile T dai termini in $K[Z, T]$.

Ora $\Delta(Z, T)$ è un polinomio omogeneo quindi è prodotto di cinque fattori lineari. Rimane da dimostrare che non ci sono radici multiple; questo è anche una conseguenza della non singolarità di S .

Claim $\Delta(Z, T)$ ha solo radici semplici.

Supponiamo a meno di cambiare nome alle variabili o di effettuare traslazioni che $Z = 0$ sia una radice di Δ , e sia $\Pi = V(Z)$ il piano corrispondente; dobbiamo dimostrare che Δ non è divisibile per Z^2 . Dall'immagine $\Pi \cap S$ è un insieme di tre rette, e attraverso un cambio di coordinate, possiamo ricondurci ai seguenti due casi:

- i. $r = V(T, Z), r_1 = V(X, Z), r'_1 = V(Y, Z)$. Queste tre rette sono tutte contenute nel piano Π disposte secondo la seconda configurazione nell'immagine sopra.

In questo caso una possibile scelta per la scrittura di f è $f = XYT + Zg$, con g quadratica, questa equazione è soddisfatta dalle equazioni di tutte e tre le rette. E in termini dell'equazione (2.2) si ha $B = Z +$ eventuale termine dipendente solo da T ovvero $B = T + bZ$ in quando B è lineare della forma $b'T + bZ$ e a meno di riscalarle le variabili è possibile supporre $b' = 1$ e $Z|A, C, D, E, F$ in modo da poter raccogliere Z dagli altri termini che si presentano quindi nelle seguenti forme: $A = aZ, C = cZ, D = dZ^2 + d'TZ, E = eZ^2 + e'TZ, F = fZ^3 + f'TZ^2 + f''T^2Z$ perché se in tali forme comparissero anche termini del tipo T, T^2, T^3 Z non sarebbe radice di Δ .

Quindi considerando i termini divisi per Z si ha:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 = \\ &= 4acZ^2(fZ^3 + f'TZ^2 + f''T^2Z) + (T + bZ)deZ^4 - ae^2Z^5 - cd^2Z^5 - (fZ^3 + f'TZ^2 + \\ &\quad f''T^2Z)(T + bZ)^2 \end{aligned}$$

Quindi considerando i termini divisi modulo Z^2 si ottiene:

$$\Delta \equiv -T^2F \pmod{Z^2}.$$

In aggiunta, il punto $p = (0, 0, 0, 1) \in S$, e la non singolarità si S in p significa che F deve contenere il termine ZT^2 con coefficiente non nullo perché:

$$\begin{cases} 2XA + BY + D = 0 \\ BX + 2CY + E = 0\partial_Z AX^2 + \partial_Z BXY + \partial_Z CY^2 + \partial_Z DX + \partial_Z EY + \partial_Z F = 0 \\ \partial_T AX^2 + \partial_T BXY + \partial_T CY^2 + \partial_T DX + \partial_T EY + \partial_T F = 0 \end{cases}$$

$\neq \underline{0}$ se calcolata in $(0, 0, 0, 1)$.

Quindi

$$\begin{cases} D(0, 1) \\ E(0, 1) \\ \partial_Z F(0, 1) \\ \partial_T F(0, 1) \end{cases} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi essendo che $Z|D$ e $Z|E$ le uniche opzioni per non avere il vettore nullo sono $\partial_Z F(0, 1) \neq 0$ oppure $\partial_T F(0, 1) \neq 0$ e questo avviene se e solo se F contiene il termine ZT^2 . In particolare Z^2 non divide F . Quindi $(Z = 0)$ è una radice semplice di Δ .

ii. $r = V(T, Z), r_1 = (X, Z), r'_1 = V(X - T, Z)$.

In questo caso $f = X(X - T)T + Zg$ con g quadrica, quindi deve essere $A = T + aZ$, $D = -T^2 + Z \cdot r$, dove r è lineare per poter effettuare tali raccoglimenti. Quindi $Z|B, C, E, F$ e non divide D , inoltre la non singolarità di S in $(0, 1, 0, 0)$ implica che $\nabla f(0, 1, 0, 0) \neq 0$ ovvero

$$\begin{cases} 2XA + BY + D = 0 \\ BX + 2CY + E = 0\partial_Z AX^2 + \partial_Z BXY + \partial_Z CY^2 + \partial_Z DX + \partial_Z EY + \partial_Z F = 0 \\ \partial_T AX^2 + \partial_T BXY + \partial_T CY^2 + \partial_T DX + \partial_T EY + \partial_T F = 0 \end{cases}$$

$\neq \underline{0}$ se calcolata in $(0, 1, 0, 0)$.

Quindi

$$\begin{cases} B(0, 0) + D(0, 0) \\ 2C(0, 0) + E(0, 0) \\ \partial_Z C(0, 0) + \partial_Z E(0, 0) + \partial_Z F(0, 0) \\ \partial_T C(0, 0) + \partial_T E(0, 0) + \partial_T F(0, 0) \end{cases} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui si ottiene che è possibile supporre $C = cZ$ con $c \neq 0$ perché $B(0, 0) = D(0, 0) = 0$ per costruzione di D e essendo B della forma $aZ + bT$ così come $\partial_Z E(0, 0), \partial_Z F(0, 0), \partial_T E(0, 0), \partial_T F(0, 0)$ essendo queste ultime forme quadratiche. L'unica possibilità per non avere il vettore nullo è quindi imporre $\partial_Z C(0, 0) \neq 0$ oppure $\partial_T C(0, 0) \neq 0$ ma avendo imposto la condizione $Z|C$ si ha come unica possibilità quella considerata, ovvero $C = cZ$ con $c \neq 0$. Quindi si ha:

$$\begin{aligned} \Delta &= ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 = A(Z^2 \dots) + Z^2 D \dots - Z^2 Z \dots - AZ^2 \dots \\ &\quad - cZD^2 \equiv -cZ(-T^2 + Z \cdot r)^2 = -cZ(T^4 - 2T^2 Zr + Z^2 r^2) \end{aligned}$$

ovvero

$$\Delta \equiv -cZ \cdot T^4 \pmod{Z^2}.$$

E con una motivazione analoga a quella del primo caso si conclude che anche in questa configurazione $Z = 0$ è una radice semplice Δ .

Osserviamo che dal punto 2 della Proposizione 1.3 si ha che le rette r_i, r'_i sono a due a due distinte quindi data $r \subseteq S$ esistono esattamente 10 rette contenute in S che intersecano r . \square

Questo termina anche la dimostrazione del secondo punto della Proposizione 1.1. \square

Definizione 1.1. Una varietà V si dice razionale se esiste un aperto denso $V_0 \subset V$ che sia isomorfo ad un aperto denso V_0 di \mathbb{A}^n . Ovvero V è parametrizzabile con n parametri indipendenti.

Corollario 1.0.1. a. *Esistono due rette disgiunte $l, m \subset S$.*

b. *S è razionale.*

Dimostrazione. a. Basta considerare r_1 e r_2 della Proposizione 1.3 punto 2.

b. Consideriamo due rette distinte $l, m \subset S$ e definiamo le mappe razionali

$$\phi: S \dashrightarrow l \times m \text{ e } \psi: l \times m \dashrightarrow S$$

come segue. Se $P \in \mathbb{P}^3 \setminus (l \cup m)$ allora esiste un'unica retta $n = (l \vee P) \cap (m \vee P)$ per P che interseca sia l che m :

$$P \in n, \text{ e } l \cap n \neq \emptyset, m \cap n \neq \emptyset$$

tale retta è unica perché stiamo imponendo due condizioni in uno spazio di dimensione 4. Ponendo $\Phi(P) = (l \cap n, m \cap n) \in l \times m$ si definisce un morfismo

$$\Phi: \mathbb{P}^3 \setminus (l \cup m) \rightarrow l \times m,$$

la cui antimmagine di $(Q, R) \in l \times m$ è data da $\Phi^{-1}(Q, R) = \Phi^{-1}(l \cap n, m \cap n) =$ unica retta per che interseca l in Q e m in R , ovvero è la retta $Q \vee R$ di \mathbb{P}^3 .

Definiamo $\phi: S \dashrightarrow l \times m$ come la restrizione di Φ a $S \cap (\mathbb{P}^3 \setminus (l \cup m))$.

Viceversa, per $(Q, R) \in l \times m$, sia $n = Q \vee R$ in \mathbb{P}^3 . Dalla Proposizione 1.3, ci sono solo finite rette di S che incontrano l , in modo che per quasi tutte le possibili scelte di (Q, R) , n interseca S in tre punti $\{P, Q, R\}$, dove Q e R sono i punti dati su l e m . Questo a sua volta definisce $\psi: l \times m \dashrightarrow S$ come $(Q, R) \mapsto P$; quindi ψ è una mappa razionale poiché i rapporti delle coordinate di P sono funzioni razionali di quelle di Q, R perché il punto P si può ottenere intersecando S con la retta $Q \vee R$.

Si ha inoltre che ϕ e ψ sono l'una l'inversa dell'altra:

$$\phi(\psi(Q, R)) = \phi(P) = \Phi|_S(P) = (l \cap n, m \cap n) = (Q, R)$$

$$\psi(\phi(P)) = \psi(\Phi|_S(P)) = \psi(l \cap n, m \cap n) = \psi(Q, R) = P.$$

Ricordiamo inoltre che $l \times m$ è razionale. □

2 Superfici riducibili in \mathbb{P}^3

Sia S una superficie cubica descritta da un polinomio di terzo grado $f = f(X, Y, Z, T)$ che supponiamo riducibile. Vediamo quali sono le possibili configurazioni per la superficie.

1. Supponiamo $f = g^3$ con $\deg g=1$, ovvero S è data da un piano di molteplicità 3.
2. Supponiamo che f sia prodotto di un polinomio di primo grado g di molteplicità 2 e di un polinomio di primo grado h con $(g, h) = 1$, ovvero $f = g^2 h$.
In questo caso la superficie S consiste di un piano di molteplicità 1 e di un piano doppio, ovvero di molteplicità 2 incidenti in una retta i cui punti hanno molteplicità 3.
3. Supponiamo che f sia prodotto di tre fattori lineari a due a due coprimi, ovvero $f = ghk$ quindi $S = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3$. A meno di cambiare il sistema di riferimento possiamo supporre $g = X$, $h = Y$ e $K = a_0 X + a_1 Y + a_2 Z + a_3 T$. Abbiamo quindi i seguenti casi:

- (a) Se $(a_2, a_3) = (0, 0)$ allora $f = XY(a_0X + a_1Y)$ e $S = V(X) \cup V(Y) \cup V(a_0X + a_1Y)$, in particolare ogni punto del tipo $(0: 0: Z: T)$ appartiene a tutti e tre i piani, dunque i tre piani appartengono al fascio di sostegno la retta $t = V(X, Y)$ i cui punti saranno tripli.
- (b) Se $(a_2, a_3) \neq (0, 0)$ allora i tre piani si intersecano in un unico punto che risulterà triplo. Infatti supponendo ad esempio $a_2 \neq 0$ quindi considerando $a_2 = 1$ si ha che $f = XY(a_0X + a_1Y + Z)$ e $S = V(X) \cup V(Y) \cup V(a_0X + a_1Y + Z)$ quindi l'intersezione dei tre piani è data dal punto $(0: 0: 0: T)$.
4. Supponiamo $f = gh$ con g polinomio irriducibile di grado 2 e h lineare, ovvero $S = C \cup \Pi$ con C quadrica irriducibile e Π piano.
Allora C è proiettivamente equivalente ad un cono irriducibile $C_1 = V(X^2 + Y^2 + Z^2)$ oppure C è proiettivamente equivalente ad una quadrica non degenera $C_2 = V(X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2)$. Perché dalla classificazione delle quadriche C essendo irriducibile non può essere unione di due piani o un cono degenera quindi si presentano solo due casi possibili:
- (a) se C è singolare deve necessariamente essere un cono irriducibile;
- (b) se C è liscia essendo anche irriducibile, per definizione, deve essere una quadrica non degenera.

Inoltre essendo g di grado 2 irriducibile e h lineare essi possono essere secanti o tangenti, in ogni caso i punti di intersezione tra il piano e la quadrica risultano punti doppi per S .

Capitolo 3

Risultati preparatori

In questo capitolo K sarà un campo algebricamente chiuso di caratteristica diversa da 2.

Ricordiamo che se $f \in K[X, Y, Z, T]$ è una forma quadratica che definisce una superficie quadratica Q in \mathbb{P}^3 allora esiste una matrice $m \in M_4(K)$ tale che per ogni $X \in K^4$ si abbia $f(X) = X^T M X$. Inoltre Q è singolare se e solo se M è singolare.

Lemma 0.0.1. *Sia Q una superficie quadratica in \mathbb{P}^3 , assumiamo $Q = V(f)$ per qualche $f \in K[X, Y, Z, T]$ omogeneo di grado 2. Sia r una retta in \mathbb{P}^3 . Allora r interseca Q . Inoltre $r \subseteq Q$ se e solo se $r \cap Q$ contiene almeno 3 punti di \mathbb{P}^3 .*

Dimostrazione. Attraverso un cambio di coordinate possiamo assumere $r = V(Z, T)$. Allora $Q \cap r$ è una sottovarietà di r definita dall'annullarsi del polinomio omogeneo f modulo l'ideale generato da Z e T ovvero è un polinomio omogeneo nelle sole variabili X e Y in quanto le altre variabili sono nulle; quindi $Q \cap r$ può essere considerato come una sottovarietà in $r \cong \mathbb{P}^1$ definita dall'annullarsi del polinomio $g \in K[X, Y]$ ottenuto da f ponendo $Z = T = 0$ ovvero ottenuto dal sistema $Q \cap r = f \cap \{Z = T = 0\}$. Dato che f è omogeneo di grado 2 si hanno due casi possibili:

- i. g è il polinomio nullo ovvero $Q \cap r = r$
- ii. g è un polinomio omogeneo di grado 2 non nullo.

Nel secondo caso g ha 2 radici in \mathbb{P}^1 se contate con molteplicità essendo il campo K algebricamente chiuso. Quindi in ogni caso esiste un punto $(x : y : 0 : 0) \in \mathbb{P}^3$ in $Q \cap r$ ma al massimo ve ne sono due. Quindi se $Q \cap r$ contiene tre punti distinti non possiamo che essere nel secondo caso, ovvero $r \subseteq Q$.

In particolare $|Q \cap r| \leq 2$ ed è uguale a 1 se si ha un punto di molteplicità due ed è uguale a 2 se i due punti sono distinti. \square

Lemma 0.0.2. *Siano r_1, r_2, r_3 rette a due a due disgiunte in \mathbb{P}^3 . Allora esiste una superficie quadrica non singolare $Q \subseteq \mathbb{P}^3$ che contiene tutte e tre le rette.*

Dimostrazione. Per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$, siano p_i, p'_i, p''_i tre punti distinti di r_i . Quindi $p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2, p'_3, p''_1, p''_2, p''_3$ costituiscono un insieme di 9 punti distinti perché le tre rette sono a due a due disgiunte. Indicheremo questi punti come $(x_1, y_1, z_1, t_1) \dots (x_9, y_9, z_9, t_9)$.

Dobbiamo inanzitutto provare che tale quadrica esiste. Ogni superficie quadrica è definita da un polinomio omogeneo di grado 2, ovvero un polinomio della forma

$$f(X, Y, Z, T) = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + DT^2 + EXY + FXZ + GXT + HYZ + IYT + JZT$$

con $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ non tutti nulli. Pertanto, esiste una superficie quadrica contenente tutti e 9 i punti se e solo se esiste almeno una scelta dei coefficienti $A; \dots; J$ in K (non tutti nulli) tale per cui tutte e 9 le equazioni ottenute imponendo l'appartenenza dei punti alla quadrica hanno soluzione

$$\begin{aligned} Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 + Dt_1^2 + Ex_1y_1 + Fx_1z_1 + Gx_1t_1 + Hy_1z_1 + Iy_1t_1 + Jz_1t_1 &= 0 \\ &\vdots \\ Ax_9^2 + By_9^2 + Cz_9^2 + Dt_9^2 + Ex_9y_9 + Fx_9z_9 + Gx_9t_9 + Hy_9z_9 + Iy_9t_9 + Jz_9t_9 &= 0. \end{aligned}$$

Questo è un sistema di 9 equazioni lineari omogenee in 10 variabili: i coefficienti $A; \dots; J$ sono le variabili, mentre x_1, \dots, t_9 sono elementi fissi di K . Quindi, dato che il numero delle incognite è maggiore del numero delle equazioni per il Teorema di Rouché-Capelli, esiste una soluzione non banale del sistema; cioè, si possono trovare dei coefficienti A, \dots, J non tutti nulli che risolvono le 9 equazioni. Questo prova l'esistenza di una superficie quadrica per i 9 punti.

Rimane da provare che Q contiene le tre rette e che è non singolare. Per ogni fissato $i \in \{1, 2, 3\}$ abbiamo che Q contiene 3 distinti punti delle r_i , e dal Lemma 0.0.2 si ottiene che questo avviene se e solo se $r_i \subseteq Q$.

Notiamo ora che Q non può contenere alcun piano proiettivo e quindi è irriducibile. Supponiamo infatti per assurdo che Q contenga un piano Π , cioè supponiamo che il polinomio che definisce Π divida f . Allora poiché f ha grado 2, esso si può scomporre solo come due forme lineari non necessariamente distinte, ovvero le uniche possibilità sono $f = g^2$ o $f = gh$ con g, h forme lineari. Quindi Q può essere unione di due piani in \mathbb{P}^3 coincidenti o non, chiamiamoli Π_1 e Π_2 .

Dal momento che $r_1, r_2, r_3 \subseteq Q$. Senza perdere di generalità possiamo assumere:

- i. $r_1, r_2 \subseteq \Pi_1$ e $r_3 \subseteq \Pi_2$. Oppure
- ii. $r_1, r_2, r_3 \subseteq \Pi_1$.

In ogni caso troviamo un piano proiettivo che contiene almeno due delle tre rette. Ma per ipotesi le tre rette sono a due a due disgiunte, quindi avremmo trovato un piano contenente due rette disgiunte, e questa è una contraddizione perché in un piano proiettivo due rette devono necessariamente essere incidenti per la Proposizione 2.1

Ora per dimostrare che Q non è singolare, supponiamo per assurdo che lo sia. Per il Lemma 0.0.1 esiste una matrice simmetrica $M \in M_4(K)$ tale che per ogni $x \in K^4$ si abbia $f(x) = x^T M x$. In particolare essendo che Q singolare implica M singolare, ovvero $\ker M \neq \{\underline{0}\}$, esiste un vettore $y \in K^4$ non nullo tale che $My = \underline{0}$ e, dato che M è simmetrica (ovvero $M = M^T$), questo implica anche che $y^T M = \underline{0}^T$. Quindi per ogni $x \in K^4$ abbiamo $x^T M y = 0 = y^T M x$. Notiamo che essendo r_1, r_2, r_3 disgiunte, deve esistere un $i \in \{1, 2, 3\}$ tale che $y \notin r_i$ (in questo caso trattiamo y come un punto in \mathbb{P}^3 invece che come un vettore in K^4). A meno di rinominare le rette assumiamo $y \notin r_1$. Poi osserviamo che per ogni punto $x \in K^4$ la cui la classe di equivalenza (cioè il cui punto corrispondente in \mathbb{P}^3) è in r_1 e per ciascun $a, b \in K$ non entrambi nulli abbiamo che $f(ax + by) = 0$. Sappiamo che:

$$f(ax + by) = (ax + by)^T M (ax + by) = ax^T M ax + ax^T M by + by^T M ax + by^T M by.$$

Il primo termine del membro di destra è zero poiché è uguale a $f(ax)$ e qualsiasi multiplo scalare di x soddisfa f poiché la classe di equivalenza di x è in r_1 . I restanti termini sono pari a zero per l'assunzione fatta su y , ovvero $My = \underline{0}$.

Notiamo che l'insieme di tutte le classi di equivalenza dei punti della forma $ax + by$ con $x \in r_1$ è

l'unico piano proiettivo contenente y e r_1 perché per una retta e un punto non appartenente ad essa passa un unico piano. Quindi f è nulla sull'unico piano proiettivo contenente y e r_1 . Ma Q non può contenere piani proiettivi per quanto dimostrato sopra. Questa contraddizione deriva dall'aver assunto che Q fosse singolare.

Questo prova che Q è non singolare e quindi soddisfa tutte le condizioni per essere la quadrica cercata. \square

Abbiamo studiato nel corso di Geometria 2 la classificazione delle quadriche. In un campo algebricamente chiuso con caratteristica diversa da 2 tutte le quadriche non singolari sono proiettivamente equivalenti a $V(X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2)$ e quindi anche a $V(XY - ZT)$. Richiamiamo qui la dimostrazione.

Lemma 0.0.3. *Sia $Q = V(f)$ una superficie quadrica non singolare in \mathbb{P}^3 . Attraverso un cambio di coordinate è sempre possibile avere $Q = V(xy - zt)$.*

Dimostrazione. Dal Lemma 0.0.1 sappiamo che esiste una matrice non singolare $M \in M_4(K)$ tale per cui per ogni $x \in K^4$ si abbia $f(x) = x^T M x$. Attraverso un cambio di coordinate possiamo ricondurci ad una matrice M' diagonale che sia congruente ad M ottenendo:

$$\begin{aligned} f(X, Y, Z, T) &= (X, Y, Z, T) M' (X, Y, Z, T)^t = (X, Y, Z, T) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = \\ &= aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dT^2 = \\ &= (\sqrt{a}X + i\sqrt{b}Y) \cdot (\sqrt{a}X - i\sqrt{b}Y) - i(\sqrt{c}Z + i\sqrt{d}T) \cdot (\sqrt{c}Z - i\sqrt{d}T) \end{aligned}$$

dove si usa il fatto che K è algebricamente chiuso per permettere che \sqrt{a} denoti lo zero del polinomio $X^2 - a$ e i denota uno zero del polinomio $X^2 + 1$.

Ponendo

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & i\sqrt{b} & 0 & 0 \\ \sqrt{a} & -i\sqrt{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{c} & -\sqrt{d} \\ 0 & 0 & i\sqrt{c} & \sqrt{d} \end{pmatrix}$$

si ha :

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} \sqrt{a} & i\sqrt{b} & 0 & 0 \\ \sqrt{a} & -i\sqrt{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{c} & -\sqrt{d} \\ 0 & 0 & i\sqrt{c} & \sqrt{d} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sqrt{a} & i\sqrt{b} \\ \sqrt{a} & -i\sqrt{b} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} i\sqrt{c} & -\sqrt{d} \\ i\sqrt{c} & \sqrt{d} \end{pmatrix} = \\ &= -2i\sqrt{ab} \cdot 2i\sqrt{cd} = 4\sqrt{abcd} \neq 0 \end{aligned}$$

(dato che $a, b, c, d \neq 0$ per ipotesi e K non ha caratteristica 2).

A è invertibile e definisce un cambio di coordinate ϕ in \mathbb{P}^3 . Più precisamente il cambio di

coordinate è:

$$\begin{aligned} X &\mapsto \sqrt{a}X + i\sqrt{b}Y \\ Y &\mapsto \sqrt{a}X - i\sqrt{b}Y \\ Z &\mapsto i(\sqrt{c}Z + i\sqrt{d}T) \\ T &\mapsto i(\sqrt{c}Z - i\sqrt{d}T) \end{aligned}$$

quindi attraverso il cambio di coordinate ϕ^{-1} dato da

$$\begin{aligned} X &\mapsto \frac{X+Y}{2\sqrt{a}} \\ Y &\mapsto \frac{X-Y}{2i\sqrt{b}} \\ Z &\mapsto \frac{Z+T}{2i\sqrt{c}} \\ T &\mapsto \frac{-Z+T}{2\sqrt{d}} \end{aligned}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} f \circ \phi^{-1}(X, Y, Z, T) &= a \left(\frac{X+Y}{2\sqrt{a}} \right)^2 + b \left(\frac{X-Y}{2i\sqrt{b}} \right)^2 + c \left(\frac{Z+T}{2i\sqrt{c}} \right)^2 + d \left(\frac{T-Z}{2\sqrt{d}} \right)^2 = \\ &= \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4} + \frac{XY}{2} - \frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} + \frac{XY}{2} - \frac{Z^2}{4} - \frac{T^2}{4} - \frac{ZT}{2} + \frac{Z^2}{4} + \frac{T^2}{4} - \frac{ZT}{2} = \\ &= XY - ZT. \end{aligned}$$

□

Osservazione 0.1. Fissiamo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Sia $V_i = V(x_i)$. Il complementare di V_i in \mathbb{P}^n è l'insieme $U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) : x_i \neq 0\}$ che è un aperto nella topologia di Zariski. Essendo $x_i \neq 0$ in U_i possiamo dividere per x_i e otteniamo:

$$U_i = \left\{ \left(\frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i} \right) \text{ tali che } x_0, \dots, x_n \in K, x_i \neq 0 \right\}.$$

Osserviamo che ogni punto in U_i ha un unico rappresentante in K^{n+1} della forma $(y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n)$ con $y_0, \dots, y_n \in K$. Con questa assunzione possiamo identificare U_i con l'insieme dei punti in K^{n+1} con la coordinata i -esima uguale a 1.

Più precisamente ogni U_i si può identificare con un \mathbb{A}^n , ma è sufficiente considerare \mathbb{P}^n ricoperto dagli $n+1$ aperti U_0, \dots, U_n .

Lemma 0.0.4. Sia Q una quadrica non singolare di \mathbb{P}^3 . L'insieme delle rette di \mathbb{P}^3 contenute in Q è contenuto in due famiglie disgiunte, F_1 e F_2 tali che:

1. due rette distinte della stessa famiglia non si intersecano
2. se $r_1 \in F_1$ e $r_2 \in F_2$ allora $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$
3. $\bigcup_{r_1 \in F_1} r_1 = Q = \bigcup_{r_2 \in F_2} r_2$

Dimostrazione. Dal Lemma 0.0.4 possiamo scrivere $Q = V(XY - ZT)$. Consideriamo ora la mappa di Segre $g: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ data da $g((p: q), (r: s)) = ((pr: qs: qr: ps))$. Questa mappa è ben definita perché non dipende dalla scelta dei rappresentanti per $(p: q)$ e $(r: s)$ essendo essi definiti a meno di moltiplicazione per costanti non nulle così come la loro immagine e dato che nessuna delle coordinate dell'immagine si annulla se non sono nulli p, q, r, s . Si verifica inoltre che l'immagine della mappa è $Q = V(XY - ZT)$: sfruttando le notazioni dell'osservazione precedente abbiamo che $g(U_0 \times U_0) = g((1: q), (r: 1)) = \{(1: qs: q: s): q, s \in K\} = Q \cap U_0$, $g(U_1 \times U_1) = g((p: 1), (r: 1)) = \{(pr: 1: r: p): p, r \in K\} = Q \cap U_1$ e analogamente per tutte le altre possibili combinazioni dei prodotti di U_0 e U_1 che vengono mandate nelle altre possibili intersezioni di Q con U_0, U_1, U_2, U_3 ovvero $g(U_0 \times U_1) = g((1: q), (r: 1)) = \{(r: q: qr: 1): q, r \in K\} = Q \cap U_3$ e $g(U_1 \times U_0) = g((p: 1), (1: s)) = \{(p: s: 1: ps): p, s \in K\} = Q \cap U_2$.

In aggiunta g ha un'inversa per ognuno degli insiemi $Q \cap U_0, \dots, Q \cap U_3$: ad esempio per $Q \cap U_0$ l'inversa è la mappa che a $(1: qs: q: s)$ associa $((1: q), (1: s))$. La mappa g è quindi un isomorfismo tra $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e Q .

Per quanto visto nel punto b della Proposizione 1.1 del Capitolo 2 sappiamo che per ogni punto $p \in Q$ e per ogni retta $r \subseteq Q$ passante per p la retta r è contenuta nel piano $T_p Q$. In aggiunta Q è ottenuta da una quadrica in \mathbb{P}^3 , sappiamo dalla Proposizione 1.1 del Capitolo 2 parte a che l'intersezione di Q con un piano forma una conica. Da questo segue che per ogni punto $p \in Q$ l'intersezione $Q \cap T_p Q$ contiene al massimo due rette: ho due rette se la conica è degenera altrimenti nessuna. Abbiamo quindi che per ogni punto $p \in Q$ passano al massimo due rette contenute in Q .

Sia $p = g(p_1, q_1)$ per qualche $p_1, q_1 \in \mathbb{P}^1$. Essendo la funzione g un isomorfismo si ha che $g(\mathbb{P}^1 \times \{q_1\})$ e $g(\{p_1\} \times \mathbb{P}^1)$ sono due rette distinte in Q passanti per p .

Vediamo dunque che le rette in Q sono divise in due famiglie disgiunte $F_1 = \{g(\{p_1\} \times \mathbb{P}^1): p_1 \in \mathbb{P}^1\}$ e $F_2 = \{g(\mathbb{P}^1 \times \{q_1\}): q_1 \in \mathbb{P}^1\}$. Inoltre due rette della stessa famiglia non possono intersecarsi: se per assurdo esistessero due punti distinti di \mathbb{P}^1 in F_1 , chiamiamoli p_1 e p'_1 allora $\{p_1\} \times \mathbb{P}^1$ e $\{p'_1\} \times \mathbb{P}^1$ sono disgiunte dato che lo sono le loro immagini attraverso l'isomorfismo g .

Inoltre se $r_1 \in F_1$ e $r_2 \in F_2$ abbiamo che r_1 deve intersecare r_2 : siano $r_1 = g(\{p_1\} \times \mathbb{P}^1)$ e $r_2 = g(\{p_2\} \times \mathbb{P}^1)$ abbiamo che $g(p_1, q_1) \in r_1 \cap r_2$. Questo prova il secondo punto del lemma. Per provare il terzo punto scegliamo $p = g(p_1, q_1) \in Q$ e si osserva che $p \in g(\{p_1\} \times \mathbb{P}^1) \cap g(\mathbb{P}^1 \times \{q_1\})$. \square

Osservazione 0.2. La mappa di Segre può essere definita in una versione più generale

$$\phi: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$$

tale per cui $\phi((x_0: \dots: x_n), (y_0: \dots: y_m)) = (x_0 y_0: x_0 y_1: \dots: x_i y_j: \dots: x_n y_m)$ e nel caso particolare considerato nel lemma precedente con $m = n = 1$ si ha un'immersione del prodotto della retta proiettiva con se stessa in \mathbb{P}^3 . L'immagine risulta essere una quadrica contenente due famiglie di rette. In generale in un campo algebricamente chiuso si ottiene una quadrica non singolare. Essendo $(x_0: x_1: x_2: x_3)$ le coordinate omogenee su \mathbb{P}^3 questa quadrica ha come polinomio definente

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} = x_0 x_3 - x_1 x_2.$$

Ovvero la quadrica ottenuta è definita da $V(x_0 x_3 - x_1 x_2)$.

Lemma 0.0.5. *Siano r_1, r_2, r_3, r_4 rette a due a due disgiunte in \mathbb{P}^3 tali da non appartenere tutte alla stessa superficie quadrica non singolare in $Q \subseteq \mathbb{P}^3$. Allora ci sono una o due rette di \mathbb{P}^3 che intersecano tutte le rette r_1, r_2, r_3, r_4 .*

Dimostrazione. Per il Lemma 0.0.3 possiamo costruire una superficie quadrica Q non singolare contenente r_1, r_2, r_3 , allora per ipotesi $r_4 \notin Q$. Quindi per il Lemma 0.0.2 sappiamo che $|r_4 \cap Q| \in \{1, 2\}$. Scriviamo quindi $r_4 \cap Q = \{p, q\}$ con la possibilità di avere $p = q$. Siano inoltre F_1, F_2 le famiglie di rette del Lemma 0.0.5.

Ritorniamo ora al fatto che r_1, r_2, r_3 sono rette disgiunte in Q . Dato che tutte le rette di Q sono in F_1 o in F_2 , perché altrimenti dovrebbero intersecarsi, possiamo assumere senza perdere di generalità che $r_1, r_2, r_3 \in F_1$. Ora ogni retta m di \mathbb{P}^3 che interseca r_1, r_2, r_3 deve contenere almeno tre punti di Q (perché $r_1, r_2, r_3 \subseteq Q$ e r_1, r_2, r_3 non hanno punti in comune), quindi dal Lemma 0.0.2 m deve essere contenuta in Q . Inoltre ogni retta m può intersecare r_4 solo in p o in q perché essendo $m \in Q$ se essa intersecasse r_4 in un punto $a \neq p$ e $a \neq q$ dovrebbe essere $a \in Q$ quindi ci sarebbero tre punti di r_4 contenuti in Q e quindi anche l'intera retta apparterebbe a Q contro l'ipotesi che le quattro rette non appartengano tutte alla stessa superficie quadrica. Denotiamo con N il numero di rette di \mathbb{P}^3 che interseca tutte le rette r_1, r_2, r_3, r_4 , notiamo inoltre che N coincide anche con il numero di rette di Q che intersecano tutte le r_1, r_2, r_3 e passano per p o q .

Ora ogni retta m di Q sta in F_1 o in F_2 . Se m è in F_1 non può intersecare nessuna delle rette r_1, r_2, r_3 ; se invece m è in F_2 , deve intersecare tutte le rette r_1, r_2, r_3 . Quindi N è esattamente il numero di elementi di F_2 che passano per p o q . Siccome esiste un unico elemento di F_2 che passa per un punto di Q dato abbiamo che $N = 1$ o $N = 2$. Infatti se esistessero due rette in F_2 passanti per lo stesso punto di Q esse si intersecherebbero, contro l'ipotesi del lemma precedente. \square

Osservazione 0.3. Nel lemma precedente si ha che:

- i. $N = 1$ se $p \neq q$ e l'unica retta per p e q è contenuta in Q
- ii. $N = 2$ se $p = q$.

Capitolo 4

Le 27 rette

1 Conteggio

Ricordiamo che per la Proposizione 1.3 del Capitolo 2 data una retta r contenuta in S . Allora ci sono esattamente 10 rette su S che intersecano r . Possiamo scrivere queste rette come $\{r_1, \dots, r_5, r'_1, \dots, r'_5\}$ in modo che per ogni $i \in \{1, \dots, 5\}$

1. r, r_i e r'_i giacciono tutte in dei piani Π_i ; e
2. se $j \in \{1, \dots, 5\} \setminus \{i\}$ allora $(r_i \cup r'_i) \cap (r_j \cup r'_j) = \emptyset$.

Dal Corollario 1.0.1 del Capitolo 2 possiamo fissare una coppia di rette r, s di S tali che $r \cap s = \emptyset$. Dal Lemma 1.0.1 sappiamo che le uniche altre rette di S che intersecano r corrispondono alle 10 rette $r_1, \dots, r_5, r'_1, \dots, r'_5$. Per ora abbiamo quindi ottenuto che S contiene 10 rette oltre a quella data. Quindi abbiamo ottenuto che S contiene almeno 12 rette a due a due distinte: $r, s, r_1, \dots, r_5, r'_1, \dots, r'_5$. Rimane quindi da capire se ci sono altre rette contenute in S che non intersecano r .

Notiamo inanzitutto che per il Lemma 1.0.1 s non può appartenere a tutti i piani Π_1, \dots, Π_5 perché essendo tali piani appartenenti al medesimo fascio di centro r dovrei avere s coincidente con l'unica retta in comune a tutti i piani, ovvero r e tale coincidenza non è possibile avendo assunto le rette disgiunte.

Inoltre s non può essere contenuta in Π_i con $i \in \{1, \dots, 5\}$ perché per la Proposizione 1.1 del Capitolo 2 $s \in \{r, r_i, r'_i\}$ ci sarebbe una contraddizione a $s \cap r = \emptyset$ essendo che per costruzione r_i e r'_i intersecano r . Questo implica che s deve intersecare ciascuno dei piani Π_1, \dots, Π_5 in esattamente un punto perché se intersecasse un piano in due punti o più allora dovrebbe essere contenuta in esso per l'Osservazione 0.2 del Lemma 0.0.6 del capitolo precedente. Denotiamo con P_i il punto di intersezione tra s e Π_i .

Dato che $s \subseteq S$ e dato che per ogni $i \in \{1, \dots, 5\}$ sappiamo che $P_i \in S \cap \Pi_i = r \cup r_i \cup r'_i$ e si ha che per ogni $i \in \{1, \dots, 5\}$ P_i appartiene a r_i o r'_i perché non appartiene a r .

Osserviamo quindi che per ogni $i \in \{1, \dots, 5\}$ vi è un unico elemento di $\{r_i, r'_i\}$ intersecato da s . A meno di rinominare le rette possiamo assumere che per ogni $i \in \{1, \dots, 5\}$ s intersechi r_i e non intersechi r'_i .

Applicando quindi il Lemma 1.0.1 alla retta s sappiamo che vi sono esattamente 10 rette distinte di S che intersecano s . Abbiamo già contato 5 rette r_1, \dots, r_5 e sappiamo che se $i \neq j$ allora le rette r_i e r_j non possono essere complanari dato che $r_i \cap r_j = \emptyset$.

Dal Lemma 1.0.1 con s in funzione di r sappiamo che per ogni $i \in \{1, \dots, 5\}$ deve esistere una

retta, che denotiamo con r''_i , diversa dalle rette r_1, \dots, r_5 che è complanare con s e r_i . Più nello specifico abbiamo ottenuto il seguente risultato:

Corollario 1.0.1. *Ci sono esattamente 10 rette di S che intersecano s . Cinque di esse sono r_1, \dots, r_5 ; le altre cinque sono r''_1, \dots, r''_5 . Abbiamo quindi che per ogni $i \in \{1, \dots, 5\}$,*

1. s, r_i e r''_i giacciono tutte nello stesso piano Γ_i
2. se $j \in \{1, \dots, 5\} \setminus \{i\}$ allora $(r_i \cup r''_i) \cap (r_j \cup r''_j) = \emptyset$.

Osserviamo inoltre che non esistono $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ tali per cui $r''_i = r''_j$. Dimostriamolo: supponiamo $i \neq j$ e supponiamo per assurdo che $r''_i = r''_j$ per qualche $i, j \in \{1, \dots, 5\}$. Per il Lemma 1.0.1 sappiamo che $r_i \cap r''_j = \emptyset$ e che r''_j non può essere complanare a r_i . Quindi r''_i non può essere complanare a r_i . Ma sappiamo che il piano Γ_i contiene sia r_i che r''_i quindi abbiamo una contraddizione. Supponiamo adesso $i = j$, ovvero $r''_i = r'_i$. Dato che r''_i interseca s sappiamo anche che r'_i interseca s . Ma questo contraddice il fatto che, chiamando le rette $r_1, \dots, r_5, r'_1, \dots, r'_5$, per ogni $i \in \{1, \dots, 5\}$, s interseca r_i ma non r'_i . Possiamo quindi concludere che nessuna retta r''_i coincide con una retta r'_i . Unendo questo con quanto affermato nel Corollario 1.0.2, ovvero che ogni retta r''_i è disgiunta da ogni retta r_j quando $i \neq j$ e che ogni retta r''_i è diversa da ogni retta r_i , possiamo osservare che ogni retta nella lista $r, s, r_1, \dots, r_5, r'_1, \dots, r'_5, r''_1, \dots, r''_5$ è distinta da ogni altra retta della lista. Quindi l'insieme

$$A := \{r, s, r_1, \dots, r_5, r'_1, \dots, r'_5, r''_1, \dots, r''_5\}$$

ha esattamente 17 elementi.

Corollario 1.0.2. *Siano $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ tali per cui $i \neq j$. Allora $r''_j \cap r = \emptyset$ e $r''_j \cap r_i = \emptyset$. Tuttavia, r''_j deve intersecare r'_i .*

Dimostrazione. Inanzitutto se r''_j interseca r allora dal Lemma 1.0.1 abbiamo che $r''_j \in \{r_1, \dots, r_5, r'_1, \dots, r'_5\}$ una contraddizione al fatto che l'insieme A ha esattamente 17 elementi dato che r''_j è diversa da tutte le rette dell'insieme per quanto dimostrato in precedenza. Poi il fatto che $r''_j \cap r_i = \emptyset$ segue dal corollario precedente. Infine dato che r''_j non interseca r , con la stessa argomentazione usata per dimostrare che s interseca esattamente una tra le r_i e r'_i per ogni $i \in \{1, \dots, 5\}$ vediamo che r''_j deve intersecare esattamente una retta tra r_i e r'_i per ogni $i \in \{1, \dots, 5\}$. Quindi, dato che $r''_j \cap r_i = \emptyset$, abbiamo che r''_j deve intersecare r'_i . \square

Lemma 1.0.1. *Sia $A := \{r, s, r_1, \dots, r_5, r'_1, \dots, r'_5, r''_1, \dots, r''_5\}$. Sia n una retta in S che non appartiene ad A . Allora n interseca esattamente tre delle rette r_1, \dots, r_5 .*

Dimostrazione. Osserviamo inanzitutto che date quattro rette disgiunte qualsiasi in S esse non possono appartenere tutte alla stessa superficie quadrica Q . Supponiamo per assurdo che le rette, che denotiamo con t_1, \dots, t_4 appartengano tutte alla stessa quadrica non singolare Q . Mostriamo che $Q \subseteq S$. Quindi se $S = V(f)$ vogliamo provare che $f|_Q$ è identicamente nulla. Essendo Q non singolare dal Lemma 0.0.5 del capitolo precedente sappiamo che le sue rette sono divise in due famiglie F_1 e F_2 ed essendo le rette t_1, \dots, t_4 disgiunte esse devono appartenere alla stessa famiglia, assumiamo quindi che tali rette siano in F_1 . Sempre dallo stesso lemma sappiamo che $Q = \bigcup_{m \in F_2} m$ quindi per dimostrare che f si annulla in Q è sufficiente dimostrare che si annulla lungo ognuna delle rette della famiglia F_2 . Sia quindi m una retta in F_2 . Attraverso un cambio di coordinate possiamo supporre che $m = V(Z, T)$ quindi $f|_m = f(X, Y, 0, 0)$ è una cubica nelle variabili X, Y e quindi è una cubica in \mathbb{P}^1 . Questo perché f ha di grado 3 e scrivendola

separando le variabili Z, T ha la forma: $aZf_2(X, Y) + bTf_2(X, Y) + cZ^2f_1(X, Y) + dT^2f_1(X, Y) + eZ^3 + fT^3 + f_3(X, Y)$ dove $f_i(X, Y)$ sono polinomi di grado i nelle variabili X, Y . Restringendola alla retta m si considera il seguente sistema:

$$\begin{cases} Z = 0 \\ T = 0 \\ aZf_2(X, Y) + bTf_2(X, Y) + cZ^2f_1(X, Y) + dT^2f_1(X, Y) + eZ^3 + fT^3 + f_3(X, Y) = 0 \end{cases}$$

Che restituisce l'equazione $f|_m$ del tipo $f_3(X, Y) = 0$.

Ora essendo $t_1, \dots, t_4 \subseteq S = V(f)$ sappiamo che $f|_{t_i}$ è nulla per ogni $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Inoltre dal Lemma 0.0.5 del Capitolo precedente sappiamo che m interseca ciascuna delle rette t_1, \dots, t_4 vediamo quindi che f_m ha almeno quattro zeri distinti e l'unica possibilità per un polinomio di grado 3 di avere 4 zeri distinti è di essere il polinomio nullo. Abbiamo quindi mostrato che $f|_m$ è identicamente nullo. Quindi $Q \subseteq S$.

Possiamo quindi dividere f per il polinomio definiente di Q , sia esso g , questo significa che $f = gh$ con $\deg(g) = 2$ quindi S è data dall'unione di Q con il piano definito da $V(h)$ e questo contraddice il fatto che S è irriducibile. Quindi non possono esserci 4 rette di S nella stessa superficie quadrica non singolare.

Notiamo ora che r e m sono rette distinte in \mathbb{P}^3 che intersecano ognuna delle rette tra le r_1, \dots, r_5 . Quindi se n è una retta che interseca almeno quattro delle rette r_1, \dots, r_5 dal Lemma 0.0.6 del capitolo precedente sappiamo che $n \in \{m, r\}$, una contraddizione al fatto che $n \notin A$. Dobbiamo quindi escludere solo il caso in cui n interseca 2 o meno delle rette r_1, \dots, r_5 .

Analogamente a quanto visto con la retta s nella prefazione al Corollario 1.0.2 abbiamo che n interseca esattamente una tra le r_i, r'_i per ogni indice $i \in \{1, \dots, 5\}$. Vediamo quindi che n interseca al massimo due tra le r_1, \dots, r_5 quindi interseca necessariamente 3 tra le r'_1, \dots, r'_5 . Supponiamo a meno di riordino che n intersechi r'_1, r'_2 e r'_3 . Deve dunque valere una delle seguenti:

1. n interseca r_4 e r_5
2. n interseca r'_4 e r'_5
3. n interseca r'_4 e r_5
4. n interseca r_4 e r'_5

Dal Lemma 1.0.1 si ha che r interseca tutte le rette r'_1, \dots, r'_5 e la retta r_5 . Inoltre dal Corollario 1.0.2 r''_5 interseca r_5 poiché queste due rette appartengono entrambe al piano Q_5 . E dal Corollario 1.0.3 r''_5 interseca anche tutte le r'_1, \dots, r'_4 . Quindi dal Lemma 0.0.6 del capitolo precedente sappiamo che se n interseca almeno 4 tra le rette r'_1, \dots, r'_4, r_5 quindi $n \in \{r, r''_5\}$. Nei primi tre casi sopraelencati si ottiene $n \in \{r, r''_5\}$, una contraddizione al fatto che $n \notin A$. Rimane solo il quarto caso: sappiamo che r e r''_4 intersecano tutte le r'_1, \dots, r'_5 . Quindi dal Lemma 1.0.1 dobbiamo avere $n \in \{r, r''_4\}$ e questo contraddice il fatto che $n \notin A$. \square

Lemma 1.0.2. *i. Qualsiasi retta di S che non sia in A interseca esattamente tre delle rette r_1, \dots, r_5 ed è determinata in modo univoco dalle tre che interseca. Inoltre,*

- ii. per ogni possibile scelta di distinti $i, j, k \in \{1, \dots, 5\}$ esiste una sola retta di S , che denoteremo con r_{ijk} , non appartenente ad A e che interseca r_i, r_j e r_k*

Dimostrazione. Dal lemma precedente sappiamo che ogni retta di S non contenuta in A interseca esattamente tre delle rette r_1, \dots, r_5 . Siano ora $i, j, k \in \{1, \dots, 5\}$ a due a due distinti. Per

provare il primo punto del lemma dobbiamo mostrare che se n_1, n_2 sono rette di S che non appartengono ad A e che intersecano r_i, r_j, r_k devono coincidere. A meno di riordinare possiamo assumere $i, j, k = \{1, 2, 3\}$.

Sappiamo che sia n_1 che n_2 intersecano r'_4 e r'_5 : ogni retta n che non interseca r deve intersecare un unico elemento di $\{r_i, r'_i\}$ per ogni $i \in \{1, \dots, 5\}$ e tale retta n deve intersecare esattamente tre rette tra le r_1, \dots, r_5 . In particolare ognuna delle rette r, n_1, n_2 interseca tutte e quattro le rette r_1, r_2, r_3, r'_4 che sono a due a due disgiunte.

Dalla dimostrazione del lemma precedente sappiamo che r_1, r_2, r_3, r'_4 non possono appartenere tutte alla stessa superficie quadrica. Quindi dal Lemma 0.0.6 del capitolo precedente sappiamo che al più due rette di \mathbb{P}^3 possono intersecare tutte le r_1, r_2, r_3, r'_4 , ma l'insieme $\{r, n_1, n_2\}$ contiene tre elementi, quindi due di essi devono coincidere. Dall'assunzione che $n_1, n_2 \notin A$ e $r \in A$ sappiamo che $n_1, n_2 \neq r$, deve allora essere $n_1 = n_2$.

Proviamo ora il secondo punto. Fissiamo $i \in \{1, \dots, 5\}$, è sufficiente mostrare che scelti altri due indici $j, k \in \{1, \dots, 5\}$ diversi tra loro e diversi da i esiste una retta di S non appartenente ad A che interseca r_i, r_j e r_k .

Osserviamo che esistono $\binom{4}{2} = 6$ scelte per gli indici j, k con le caratteristiche richieste. Tali possibili scelte corrispondono alle 6 rette di S che non sono in A e che intersecano r_i . Ciascuna di queste rette interseca esattamente due tra le rette $r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_5$ e ogni retta è univocamente determinata dalle due rette che interseca, quindi se ci sono esattamente 6 di queste rette, queste 6 rette devono soddisfare tutte le possibili scelte di r_j e r_k da intersecare.

Proviamo che le rette sono esattamente 6. Sappiamo che tutte le rette r, s, r'_i e r''_i intersecano r_i : r'_i interseca r_i perché sono complanari, analogo per r''_i . In aggiunta per il Lemma 1.0.1 sappiamo che per ogni $i \neq j$ le rette r_i e r'_j non intersecano r_i . Quindi r, s, r'_i e r''_i sono tutti gli elementi di A che non intersecano r_i e ci sono 10 elementi di A che intersecano r_i . Inoltre dal Lemma 1.0.1 ci sono esattamente 10 rette di S che intersecano r_i .

Ci sono quindi $10 - 6 = 4$ rette di S che non sono in A e che intersecano r_i . □

Teorema 1.1 (Cayley-Salmon). *Ci sono esattamente 27 rette in S .*

Dimostrazione. L'insieme delle rette di S è suddiviso in due sottoinsiemi:

$$A := \{r, s, r_1, \dots, r_5, r'_1, \dots, r'_5, r''_1, \dots, r''_5\}$$

e l'insieme B delle rette di S che non sono contenute in A . Dal Lemma 1.0.2 sappiamo che ogni elemento di B interseca esattamente tre tra le rette r_1, \dots, r_5 . E dal Lemma 1.0.3 i diversi elementi di B corrispondono alle diverse scelte delle tre rette distinte $r_i, r_j, r_k \in \{r_1, \dots, r_5\}$ da intersecare; che corrisponde alle diverse scelte degli indici $i, j, k \in \{1, \dots, 5\}$. Quindi ci sono esattamente $\binom{5}{3} = 10$ scelte dei tre possibili elementi nell'insieme $\{r_1, \dots, r_5\}$, quindi in B ci sono esattamente 10 elementi.

Il numero di rette in S è quindi: $|A| + |B| = 10 + 17 = 27$. □

1.1 Possibile disposizione

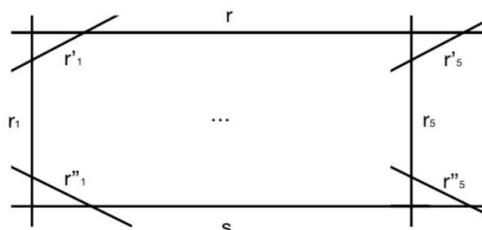


Figura 1.1: Disposizione delle rette su $S \subset \mathbb{P}^3$

Un'alternativa è che le rette di S siano $r, r_1, \dots, r_5, r'_1, \dots, r'_5$ e altre 16 rette che incontrano un numero dispari di rette r_1, \dots, r_5 :

$$\begin{aligned} r''_i &\text{ incontra solo } r_i \\ r_{ijk} &\text{ incontra solo } r_i, r_j, r_k \\ s &\text{ incontra tutte le } r_1, \dots, r_5. \end{aligned}$$

Le incidenze tra le rette sono quindi:

r incontra $r_1, \dots, r_5, r'_1, \dots, r'_5$

r_1 incontra r, s, r'_1, r''_1 e r_{1jk} per sei scelte di $\{j, k\} \subset \{2, 3, 4, 5\}$

r'_1 incontra r, r_1, r''_j per quattro scelte di $j \neq 1$ e r_{ijk} per quattro scelte di $\{i, j, k\} \subset \{2, 3, 4, 5\}$

r''_1 incontra m, r_1, r'_1 per quattro scelte di $j \neq 1$ e r_{ijk} per quattro scelte di $\{i, j, k\} \subset \{2, 3, 4, 5\}$

$r_{1,2,3}$ incontra $r_1, r_2, r_3, r_{145}, r_{245}, r_{345}, r'_4, r'_5, r''_4, r''_5$.

2 Esempi

2.1 Superficie di Clebsch

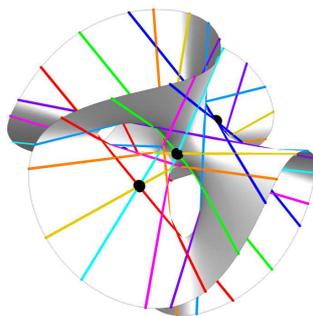


Figura 2.1 : Superficie di Clebsch

In questa sezione presentiamo un esempio di superficie cubica non singolare soddisfacente al Teorema di Cayley-Salmon in cui le 27 rette sono tutte reali.

In \mathbb{P}^4 la rappresentazione più simmetrica di tale superficie è data da:

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

dove x_0, \dots, x_4 sono variabili complesse.

Queste due equazioni definiscono un sottoinsieme $S \subset \mathbb{C}^5$ con dimensione complessa 3. Notiamo che se il punto $(x_0, \dots, x_4) \in \mathbb{C}^5$ è soluzione delle equazioni (4.1), allora anche ogni suo multiplo del tipo (cx_0, \dots, cx_4) è soluzione delle medesime equazioni perché essendo tali equazioni omogenee è possibile raccogliere e la costante moltiplicativa; possiamo quindi considerare S come una varietà algebrica proiettiva 2-dimensionale di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$.

Possiamo inoltre eliminare x_0 dalle due equazioni (4.1) e ottenere la seguente equazione omogenea:

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)^3 \quad (4.2)$$

nelle variabili x_0, x_1, x_2, x_3 . Proiettivizzandola otteniamo una superficie cubica liscia in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$.

Per la Superficie di Clebsch le 27 rette sono facilmente esprimibili come sottospazi bidimensionali di \mathbb{C}^5 . Definiamo innanzitutto

$$\xi = e^{2\pi i/5}.$$

I 27 sottospazi 2-dimensionali sono:

1. I 15 sottospazi ottenuti da quello contenente $(1, -1, 0, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, -1, 0)$ permutando le 5 coordinate arbitrariamente.
2. I 12 sottospazi ottenuti da quello contenente $(1, \xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ e $(1, \xi, \xi^{-2}, \xi^{-3}, \xi^{-4})$ permutando le 5 coordinate arbitrariamente.

Osservazione 2.1. La permutazione di tali coordinate può essere considerata come una permutazione del gruppo S_5 .

Come accennato la particolarità della Superficie di Clebsch è dovuta al fatto che tutte le 27 rette sono visibili anche quando ci si limita alle soluzioni reali, facendo ciò si ottiene una superficie reale bidimensionale non singolare che può essere rappresentata come nella Figura (2.1). Per tale rappresentazione Greg Egan ha considerato lo spazio delle soluzioni reali dell'equazione (4.2) e ne ha proiettivizzato le soluzioni nello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Per disegnare la superficie in \mathbb{R}^3 ha scelto, seguendo Bruce Hunt, il seguente piano di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ come piano all'infinito

$$x_0 + x_1 + x_2 + 4x_3 = 0.$$

Omettiamo per non appesantire le notazioni i pedici e denotiamo le variabili con $X = x_0, Y = x_1, Z = x_2, T = x_3$, escludendo i punti appartenenti al piano $X + T + Z + 4T = 0$ ovvero i punti del tipo $(X : Y : Z : -\frac{X+Y+Z}{4})$, supponendo quindi che $X + T + Z + 4T = 1$ otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} (X + Y + Z + T)^3 = X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 \\ X + Y + Z + 4T = 1 \end{cases}$$

esplicitando la variabile T dalla seconda equazione e sostituendola nella prima si ottiene il sistema equivalente:

$$\begin{cases} (X + Y + Z - \frac{X+Y+Z-1}{4})^3 = X^3 + Y^3 + Z^3 + (-\frac{X+Y+Z-1}{4})^3 \\ T = -\frac{X+Y+Z}{4} + \frac{1}{4} \end{cases}$$

sviluppando i cubi nella prima equazione si ha

$$\begin{aligned} 3X^2Y + 3XY^2 + 3X^2Z + 6XYZ + 3Y^2Z - \frac{3}{4}X^2(X + Y + Z - 1) - \frac{3}{2}XY(X + Y + Z - 1) - \frac{3}{4}Y^2(X \\ + Y + Z - 1) + 3XZ^2 + 3YZ^2 - \frac{3}{4}Z^2(X + Y + Z - 1) + \frac{3}{16}X(X + Y + Z - 1)^2 + \frac{3}{16}Y(X + Y + Z \\ - 1)^2 + \frac{3}{16}Z(X + Y + Z - 1)^2 - \frac{3}{2}XZ(X + Y + Z - 1) - \frac{3}{4}YZ(X + Y + Z - 1) = 0. \end{aligned}$$

Raccogliendo i coefficienti e facendo il denominatore comune si ottiene la superficie risultante in \mathbb{R}^3 che ha equazione:

$$\begin{aligned} &81(X^3 + Y^3 + Z^3) - 189(X^2Y + X^2Z + XY^2 + XZ^2 + Y^2Z + YZ^2) \\ &+ 54XYZ + 126(XY + XZ + YZ) - 9(X^2 + Y^2 + Z^2) \\ &- 9(X + Y + Z) + 1 = 0. \end{aligned}$$

Questa superficie omette alcuni punti della Superficie di Clebsch in quanto essi diventano punti all'infinito.

Definizione 2.1. Un punto di Eckardt è il punto di intersezione di tre rette su una superficie cubica.

Nella Figura (2.1) si osserva inoltre che:

1. La superficie contiene 10 punti di Eckardt, di cui tre all'infinito.
2. Ci sono 3 linee di ciascuno dei 9 colori e ciascuna tripla ha una simmetria rotazionale di ordine 3.

Osservazione 2.2. I tre punti Eckardt all'infinito sono i 3 punti all'infinito dove si incontrano le rette parallele rossa, verde e blu.

2.2 Superficie di Fermat

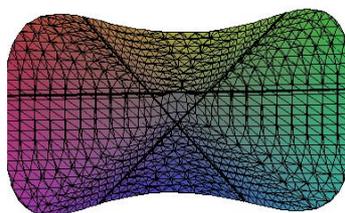


Figura 2.2 : Superficie di Fermat

La Superficie di Fermat è una superficie cubica non singolare e come tale contiene esattamente 27 rette. Diversamente da quanto visto nell'esempio precedente però non ha tutte rette reali: ne ha 3 reali e 24 immaginarie.

Procedendo analogamente all'esempio precedente possiamo descrivere tale superficie attraverso un polinomio omogeneo

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0. \quad (4.3)$$

Analizzando l'equazione (4.3) osserviamo che le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_0^3 + x_1^3 = 0 \\ x_2^3 + x_3^3 = 0 \end{cases}$$

sono del tipo $[x_0: \xi x_0: x_3: \eta x_3]$ con $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ radici cubiche di -1.

Le 27 rette che giacciono sulla cubica di Fermat sono quindi facili da descrivere in modo esplicito: sono le 9 rette della forma $[x_0: \xi x_0: x_3: \eta x_3]$ e i loro 18 coniugati sotto permutazioni di coordinate, con $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ radici cubiche di -1.

Le tre rette reali sono $[x_0: -x_0: x_3: -x_3]$ e le permutazioni sulle coordinate.

Osservazione 2.3. La Superficie di Fermat contiene 18 punti di Eckardt.

2.3 Controesempio: Superficie di Cayley

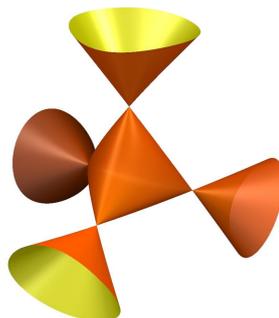


Figura 2.3 : Superficie di Cayley

La superficie di Cayley è definita da:

$$x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 + x_1x_2x_3 = 0 \quad (4.4)$$

Calcolandone il gradiente e annullandolo si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0 \\ x_0x_2 + x_0x_3 + x_2x_3 = 0 \\ x_0x_1 + x_0x_3 + x_1x_3 = 0 \\ x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

e si può osservare che si annulla nei punti $[1: 0: 0: 0]$, $[0: 1: 0: 0]$, $[0: 0: 1: 0]$, $[0: 0: 0: 1]$. Questa è quindi una superficie singolare a cui non è possibile applicare il Teorema di Cayley-Salmon. Sulla rappresentazione reale, vediamo che i quattro punti singolari formano un tetraedro e che c'è un cono in ciascun vertice. Questa superficie contiene esattamente 9 contraddicendo il teorema.

Bibliografia

- [1] Gerd Fischer. *Plane algebraic curves*. Vol. 15. American Mathematical Soc., 2001.
- [2] SIMON Lazarus. *Basic algebraic geometry and the 27 lines on a cubic surface*. 2014.
- [3] Kristian Ranestad e Bernd Sturmfels. «Twenty-seven questions about the cubic surface». In: *arXiv preprint arXiv:1912.07347* (2019).
- [4] Miles Reid e Miles A Reid. *Undergraduate algebraic geometry*. 12. Cambridge University Press, 1988.
- [5] Edoardo Sernesi. *Geometria 1: programma di matematica fisica elettronica*. Bollati Boringhieri, 2000.