

I B = J 9 F G = H 5 Ñ · 8 9 ; @ = · G H I 8 = · 8 = · D 5 8 C
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTALE DICEA
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA CIVILE



*Tesi di Laurea Magistrale in
Ingegneria Civile indirizzo Idraulica*

WHITE WATER PARKS: MODELLAZIONE IDRODINAMICA
BIDIMENSIONALE AI VOLUMI FINITI
WHITE WATER PARKS: 2D FINITE VOLUME HYDRODYNAMIC
MODELLING

Relatore: Prof. Andrea Defina

Correlatore: Ing. Daniele Viero

Laureando: MARCO VOLPATO

ANNO ACCADEMICO 2013-2014

Indice

INTRODUZIONE	1
1 WHITE WATER PARKS	3
1.1 PARAMETRI GEOMETRICI	3
1.2 SISTEMI DI IMMISSIONE D'ACQUA	4
1.3 CRITERI DI PROGETTAZIONE DEL TRACCIATO	4
1.4 MODELLI FISICI IN SCALA	5
2 MODELLO BIDIMENSIONALE AI VOLUMI FINITI	7
2.1 EQUAZIONI 2-D DELLE ONDE IN ACQUE BASSE.....	7
2.1.1 <i>Onda generata da rottura di una diga</i>	14
2.2 DEFINIZIONE FISICA E MATEMATICA DELLE ONDE ELEMENTARI	15
2.2.1 <i>Rarefraction Waves (onde negative)</i>	17
2.2.2 <i>Shear Waves (onde di contatto)</i>	18
2.2.3 <i>Generalized Riemann Problem</i>	19
2.3 SEMPLIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI : LINEARIZZAZIONE	24
2.3.1 <i>Il problema di Riemann</i>	29
2.4 RISOLUZIONE ESATTA DEL PROBLEMA DI RIEMANN (ER).....	31
2.5 METODI NUMERICI	45
2.5.1 <i>Il metodo di Godunov</i>	49
2.5.2 <i>Presentazione generale di altri metodi del primo ordine</i>	54
2.6 SOLUTORI APPROSSIMATI DI RIEMANN	57
2.6.1 <i>Calcolo approssimato di</i>	58
2.6.2 <i>Risolutore HLL di Riemann</i>	60
2.6.3 <i>Risolutore HLLC di Riemann</i>	61
2.7 TRANSIZIONE ASCIUTTO - BAGNATO	62
2.8 IMPLEMENTAZIONE DEL CODICE DI CALCOLO NUMERICO A VOLUMI FINITI	63
3 MODELLAZIONE NUMERICA	67
3.1 LEE VALLEY WHITEWATER PARK -CARATTERI GENERALI	68
3.2 FILES DI INPUT DEL MODELLO NUMERICO	69
3.2.1 <i>File della geometria (.geo)</i>	69
3.2.2 <i>File della simulazione (.sim)</i>	74
3.3 RISULTATI DELLA SIMULAZIONE	74

3.3.1	<i>Effetti legati alla dimensione degli elementi di calcolo</i>	84
3.3.2	<i>Risultati del modello su mesh con risoluzione 4x</i>	85
3.3.3	<i>Restituzioni grafiche 3D</i>	88
4	IL NUOVO DOLOMITI WATER PARK DI LONGARONE	97
4.1	GEOMETRIA DEL TRACCIA TO RELATIVO ALLA PRIMA PROPOSTA PROGETTUALE	97
4.2	COSTRUZIONE DEI FILE DI INPUT PER IL MODELLO	98
4.3	RISULTATI DELLA SIMULAZIONE	101
4.4	CONSIDERAZIONI SULLA SCELTA DELLA CONFIGURAZIONE PLANIMETRICA	109
4.4.1	<i>Ostacoli sormontati e restringimenti</i>	110
4.4.2	<i>Configurazione con salti di fondo</i>	115
4.4.3	<i>Osservazioni e soluzioni alternative</i>	124
4.5	ULTERIORI CONSIDERAZIONI SUI RISULTATI NUMERICI	133
4.5.1	<i>Risoluzione della mesh di calcolo</i>	133
4.5.2	<i>Coefficiente di scabrezza</i>	138
4.5.3	<i>Risolutori di Riemann</i>	140
4.5.4	<i>Coefficiente CFL</i>	145
4.6	RESTITUZIONI GRAFICHE 3D	145
4.7	MODIFICHE AL PROGETTO ORIGINALE	150
4.7.1	<i>File .geo e .sim</i>	152
4.7.2	<i>Risultati della simulazione</i>	153
4.7.3	<i>Restituzioni 3D</i>	156
5	CONCLUSIONI	165
	BIBLIOGRAFIA	169

con viste 3D, che permettono di confrontare i risultati locali, ottenuti in particolari zone del canale, con i risultati globali, ottenuti in particolare nel tratto centrale del canale. In particolare, sono state analizzate, da un punto di vista idrodinamico, le diverse configurazioni del nuovo White Water Park. A partire da un progetto originale, si sono presentate le riflessioni più significative che hanno portato a scegliere una precisa configurazione di ostacoli, sperimentata anche alla luce degli aspetti normativi imposti dalla Federazione Canoistica.

Infine, al progetto originale sono state apportate delle modifiche che riguardano in particolare il tratto centrale del canale. Sono state finalizzate due ulteriori sezioni di progetto con di fondo disposti in punti particolari del tratto centrale, significativamente diverso dai precedenti dal punto di vista altimetrico, sono stati introdotti quattro brevi tratti a forte pendenza nel tratto centrale del canale. I risultati ottenuti da queste simulazioni, confrontati con il progetto originale, fornendo indicazioni sui limiti e sui punti di forza delle diverse configurazioni.

1 WHITE WATER PARKS

Il termine deriva dalla lingua inglese e significa "acqua bianca". È un effetto che si può osservare varie occasioni verso valle, subisce divagazioni del filo della corrente dovute alla geometria variabile della sezione alla presenza di ostacoli di varia natura brusche variazioni di velocità trasversale sia longitudinale che trasversali non compatte, in cui la distribuzione delle velocità è fortemente disomogenea e alla condizione di moto uniforme è difficilmente applicabile. Questi caratteri fortemente particolari attività sportive acquatiche, come il kayaking e il rafting nascono su i Whitewater Parks o Hydro Stadium.

Le prime gare di slalom in Svizzera nel 1933. Solo recentemente, dai giochi Olimpici di Monaco del 1972 in cui le divennero disciplina olimpica, si cominciò a costruire canali artificiali in calcestruzzo, di varia e sezione naturale. Formazioni ondose in particolari sezioni del tracciato controllabile (ma non regolare!) possibile. In questo modo viene incontrate, lungo il percorso, caratteristiche idrauliche differenti, più o meno penalizzanti per gli atleti seconda del momento in cui si discende il canale. tutto generale i caratteri geometrici e idraulici della progettazione del White Water Park

1.1 Parametri geometrici

l'International Canoe Federation stabilisce per i tracciati una lunghezza compresa tra i 250 e 400 m, una pendenza media di circa il 2% e un dislivello tra monte e valle compreso tra i 5 e gli 8 m. La larghezza alla base del canale deve risultare inferiore a 8 m con una portata variabile

tra gli 8 i 18 m/s] h] f U b h Y ' X Ñ U We i U ' X Y in Negli anni sono stati a Y b c ' g realizzati canali artificiali dalle più differenti: la cassa adottata è quella ad anello aperto (o) ma non mancano anche esemplari a forma di *Silovka Whitewater Canal* (Russia) o di *Beleniko Whitewater Canal*, o semplicemente rettilinei. Nella fase di progettazione della forma del tracciato da tenere in considerazione è legato al fattore visibilità per gli spettatori. In pratica sportiva tutti gli spazi accessori ad essi complementari, dovrebbero essere realizzati al fine di garantire una buona visuale destinati al pubblico. Non meno particolari per soddisfare i passanti.

1.2 Sistemi di alimentazione del canale

Esistono diversi sistemi di alimentazione del canale

- ◀ sistema a sponda: un sistema di alimentazione del canale lungo la sponda di un deflusso regolare di una certa portata. Questo sistema è utilizzato per effetto della gravità.
- ◀ sistema a pompaggio: un sistema di alimentazione del canale di arrivo per pompa alla partenza. Questa modalità di approvvigionamento viene spesso impiegata per circuiti chiusi ad anello, e garantisce un flusso continuo.
- ◀ sistema misto: prevede una combinazione dei due sistemi descritti precedentemente, e viene adottato qualora la portata proveniente dal corso naturale non sia sufficiente a garantire il flusso continuo.
- ◀ sistema a marea: consiste nella realizzazione di due paratoie che durante le fasi di alta marea permettono di immagazzinare l'acqua e durante le fasi di bassa marea permettono di scaricare l'acqua.

1.3 Criteri di progettazione del tracciato

Questo è caratterizzato da vari fattori: dalla sezione trasversale del fondo e della sua pendenza, dalla presenza di ostacoli sormontati o meno. Tutto ciò comporta lo sviluppo di zone vorticose, con la direzione del

b c f a U` Y` X Y Z` i g g c` X Y` ` U` Wc f f Y b h Y ž` n c b Ydov]` WU` a
 ` N U We i U` U W W Y` Y f U`]` ` g i c` a c h c "

È possibile]rd f c X i f f Y` e i Y g h Y` Wc b X] n] c b]`] b` i b` h f U W
 particolari ostacoli molli tratta di dispositivi plastici, generalmente parallelepipedi, che, impilat

i b c` g i` ` N U` h f c ž` f Y U`] n n U Questi sono dotati di una struttura X]`

interna in acciaio zincato che garantisce una migliore permette un solido ancoraggio al

fondo. Per quegli ostacoli pensati sporgenti rispetto alle pareti del canale esistono par

elementi di ancoraggio capaci di garantire la continuità, sagomati in modo da aderire perfett

anche ad eventuali sponde inclinate (per esempio in caso di sezioni trapezoidali) protezione della

struttura interna è affidata ad un coperchio di plastica posto sulla parte superiore.

=` ` j U b h U [[] c` d f] b W] d U` Y` X Y di rici N]quadro de tracciato: e i Y g h

[`]` c g h U Wc`] ž` Wc` ` c W U h]`] b` d c g] n] c b]` X] j Y f g Y ž`

X Y Z` i g g c. Diventa così possibile utilizzare uno stesso tracciato per ricreare va

condizioni e variforme percorsi. Questi ostacoli non sono solo in grado di garantire

i b N U` h U` Z` Y g g] V]`] h {` X Y` ` U` Wc b Z] [i f U n] c b Y` X Y

f Y g] g h Y f Y` U` ` Y` Y` Y j U h Y` d f Y g g] c b]` d f e X a h Y` X U`

maggiormente sollecitate.

Non mancano però anche esempi di canali artificiali in cui una parte del percorso è realizzat

blocchi di pietra non visibili, in genere emergenti dal fondo, affiancano gli ostacoli di

generazione citata.

1.4 Modelli fisici in scala

Nella fase di progettazione diventa Y W Y g g U f] c` f Y U`] n n U f Y` X Y]` a c

Wc b` ` N c V] Y h h] j c` X]` g h i X] U f b Y`] b` X Y h f r u d e] c`]`

quello più utilizzato.

Spesso nei fenomeni idraulici le forze gravitazionali prevalgono sulle dovute alla viscosità, alla

h Y b g] c b Y` g i d Y f D i j n o v i a d i` s u c c e d e U l e` c o r r e n t i l a s u p e r W d i e p i e r a`

quali può essere interessante confrontare la forza con quelle gravitazionali (forza peso)

esse assumono rispettivamente le seguenti espressioni:

—

avendo indicato con` U` X Y b g] h {` X Y` ` N U d W e g i c U` / g d Y W] Z] Wc

` la massa;` una lunghezza significativa;` la velocità è` N U W W Y` Y f U n] c

Estraendo la radice quadrata del rapporto $\frac{V}{\sqrt{gH}}$, si ottiene il numero adimensionale di Froude. Esso è di fondamentale importanza per riprodurre, in un modello a scala ridotta, i processi idraulici governati dal campo gravitazionale. Attraverso il modello di similitudine possibile definire le scale delle grandezze coinvolte. Eguagliando infatti il Froude originale, indicato con il pedice o , con quello nel modello, distinto dal pedice

$$\frac{V_o}{\sqrt{gH_o}} = \frac{V_m}{\sqrt{gH_m}}$$

le scale sono:

velocità: $\frac{V_m}{V_o} = \frac{H_m}{H_o}$

portate:

tempi: $\frac{t_m}{t_o} = \frac{H_m}{H_o}$

In genere la scala delle lunghezze più utilizzata è $\frac{1}{10}$: le dimensioni del modello sono però pensate sempre in funzione della praticità e della disponibilità di spazio ed attrezzature laboratorio in cui saranno eseguiti gli esperimenti.

2 MODELLO BIDIMENSIONALE AI VOLUMI FINITI

La variabile trasversale è stata considerata costante, adottando uno schema di calcolo bidimensionale a fondo fisso. In questo caso, le equazioni del moto si riducono a un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, non lineari e di tipo iperbolico, dipendenti dal tempo, nelle due dimensioni spaziali. Tali equazioni prendono il nome di *Shallow Water Equations* (SWE) e descrivono le onde in acque basse.

Moltissimi fenomeni fisici, presenti in natura, sono governati da queste equazioni. In questa tesi ci si concentra però su una particolare classe di questi fenomeni: quelli cioè che coinvolgono le onde di marea degli oceani, onde di piena naturale o prodotte dalla rottura di uno sbarramento (diga).

2.1 Equazioni 2-D delle onde in acque basse

Il modello numerico si propone di risolvere le equazioni del moto bidimensionale di una corrente a superficie libera. Alla base vi è un sistema di equazioni di Saint Venant. Le SWE sono ottenute a partire dai principi di conservazione della massa e della quantità di moto per un fluido comprimibile.

(2.1)

$$\dots \tag{2.2}$$

Le variabili indipendenti sono il tempo t e lo spazio x, y, z , e quelle dipendenti sono invece la densità ρ e il vettore velocità u, v, w nelle tre direzioni spaziali definite dalla pressione, p .

$$\dots \tag{2.3}$$

$$\dots \tag{2.3}$$

con $h, Y, b, g, c, f, Y, X, Y, Y, h, Y, b, g, c, b, j, g, W, c, g, Y, X, Y, Z, b, h, c, U, h, h, f, U$.
 Le (21) e (22) possono essere espresse in forma integrale

$$\dots \tag{2.4}$$

$$\dots \tag{2.5}$$

Esprimendo le leggi in termini delle variabili fisiche, definite appropriate $h, Y, b, g, c, f, Y, X, Y, Y, h, Y, b, g, c, b, j, g, W, c, g, Y, X, Y, Z, b, h, c, U, h, h, f, U$, e trascurando le azioni viscosse, si ricavano le equazioni che descrivono il comportamento della superficie libera per i problemi che si andranno a trattare:

$$\dots \tag{2.6}$$

In un sistema di riferimento nelle tre dimensioni (direzione verticale rispetto al piano (x, y)) sono associate funzioni di variazione del fondo e della superficie, rispettivamente

con $\vec{U} = [u, v, w]^T$ e $\vec{c} = [c_x, c_y, c_z]^T$.
 Si semplifica il problema delle 4 eq. (2.6) assumendo che la densità del fluido sia costante, ottenendoci quindi le (2.7)

$$\begin{aligned} & - \\ & - \\ & - \end{aligned} \tag{2.7}$$

Il sistema così ottenuto delle 4 incognite u, v, w e η non è di facile risoluzione: il problema maggiore è legato alla definizione della superficie libera. Per la risoluzione è necessario porre le condizioni al contorno. Nel caso della superficie libera, tali condizioni di posizione del contorno non sono note a priori.

Esistono due teorie approssimate con le quali si può semplificare il problema rendendolo risolvibile. La prima è la teoria lineare, secondo la quale la variazione della superficie libera rispetto al livello medio è sufficientemente piccola da poter essere trascurata. Invece la seconda teoria (non lineare) considera la curvatura della superficie. Questo secondo approccio di per sé non è lineare e non è un problema del valore iniziale (non linear initial value problem). Nonostante il problema risulti notevolmente semplificato, rimane legato alla soluzione numerica delle equazioni. Posto per il contorno della superficie

Per la superficie libera per il fondo si hanno rispettivamente le:

$$(2.8)$$

$$(2.9)$$

su cui si impongono le seguenti condizioni cinematiche

$$- \tag{2.10}$$

$$(2.11)$$

Poste queste condizioni si ricorda che la prima ipotesi assunta imponeva di trascurare la
 $W_c a d c b Y b h Y \cdot j Y f h]$. W si traduce $\dot{N} U W W Y \cdot Y f U n] c b Y$

da cui si ottiene

Dato che e e z sono indipendenti e anche le componenti delle accelerazioni nelle due
 direzioni x e y lo sono, di conseguenza le componenti delle velocità \dot{x} e \dot{y} sono nulle. Le
 equazioni (2.7) nelle due direzioni perpendicolari all'asse z diventano allora:

$$(2.12)$$

$$(2.13)$$

Per ricavare la prima equazione delle acque basse si integra l'equazione di continuità

che porta alla

$$(2.14)$$

Derivando le equazioni della superficie libera e del (2.8) e (2.9) in funzione di z , si ottengono
 le seguenti

Queste ricordando la regola di Liebnitz:

sostituite nella (2.14) le equazioni di continuità lungo l'asse

$$(2.15)$$

e sono indipendenti da t che con \mathbf{u} , l'equazione di continuità diventa la legge di conservazione della massa scritta in forma differenziale:

$$(2.16)$$

Anche le leggi di conservazione delle quantità di moto possono essere riscritte in forma differenziale, sommando l'equazione (2.16) moltiplicata per \mathbf{e}_x con quella in direzione y (2.12) o z (2.13), moltiplicate per \mathbf{e}_y o \mathbf{e}_z si ricavano dunque le seguenti equazioni

$$- \quad (2.17)$$

$$- \quad (2.18)$$

Le tre equazioni differenziali (2.16), (2.17) e (2.18), delle onde lunghe in acque basse raccolte in forma vettoriale diventano

$$(2.19)$$

dove \mathbf{u} è definito vettore *variabili conservative* \mathbf{u} sono i vettori flusso e \mathbf{f} è il vettore dei termini sorgenti. La complessità dell'ultimo vettore deriva dal fatto che può contenere anche le forze di Coriolis, quelle legate al vento o all'attrito al fondo

La soluzione numerica del sistema (2.19) comporta la soluzione del cosiddetto Problema di Riemann, trattato nei successivi paragrafi, ossia la definizione dei flussi di massa e di quantità di moto che attraversano le interfacce definite preliminarmente, necessario definire alcune proprietà matematiche delle equazioni del sistema.

Il primo passo consiste nel calcolare i λ e \mathbf{e} da cui si ricavano i \mathbf{e} e \mathbf{e} autovalori e rispettivi autovettori nella definizione delle caratteristiche fisiche delle onde che si sviluppano nelle acque basse.

Il sistema di equazioni scritto in forma vettoriale nella forma quasi lineare

$$(2.20)$$

dove

$$\begin{matrix} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{matrix}$$

Le J_1 e J_2 sono le matrici Jacobiane dei vettori flusso \mathbf{F} . Le derivate parziali delle funzioni e sono calcolate rispetto alle componenti del vettore \mathbf{u} delle variabili conservative.

$$\begin{matrix} - & - \\ - & - \end{matrix}$$

Derivando in modo opportuno le matrici J_1 e J_2 rispetto alle componenti u_i si ottengono le matrici A e B le cui radici dei polinomi caratteristici

$$\dots$$

forniscono rispettivamente autovalori delle (2.21) e (2.22)

$$(2.21)$$

$$(2.22)$$

dove $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, $\mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3)^T$, $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^T$, $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)^T$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$

Per ciascun autovalore è possibile ricavare il corrispondente vettore destro e sinistro attraverso le relazioni:

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

In modo analogo è possibile esprimere il problema in funzione della λ .
 Dalle equazioni del bilancio della massa, per derivazione delle derivate parziali delle equazioni del momento lungo x otteniamo il sistema in forma non conservativa

$$(2.23)$$

Le 3 equazioni scritte in forma compatta vettoriale diventa

$$(2.24)$$

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Con gli stessi calcoli operati precedentemente, si ottengono i rispettivi autovettori di destra e sinistra di

$$\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots$$



2.1.1 *Onda generata da rottura di una diga*

G] ' U g g i a Y ' i b ' W U b U ` Y ' X] ' g Y n] c b Y ' f Y h h U b U e c ` U f Y ' W c g
 `] j Y ` `] ' U ' f] d c g c z ' i b c ' U ' X a Y e p u n f o l e s c h e m a t i z z a b i l e c o n] u b a] g h f U '
 paratola che separa il livello maggiore a sinistra da quello inferiore a destra. Si suppone ora
 W c ` ` U g g c ' X Y ` ` U ' d U f U h c] U . '] ` ' g] g h Y a U ' X] ' d Y f h i f V U
 viaggia verso U ` ` Y '] b b U ` n U b X c '] b ' a c X c ' f Y d Y b h] b c '] ` ` `] j Y
 monte riduce il livello della superficie libera. Allasso dello sbarramento è repentino le onde di
 destra e sinistra sono definite rispettivamente onde X. È rarefaction (onda
 negativa) sono entrambe ben approssimate dalle equazioni delle onde

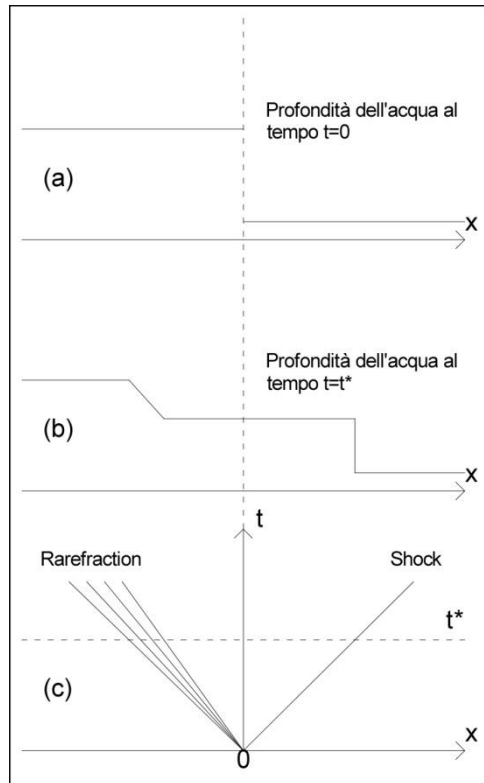


Figura 2.1 Propagazione nel tempo di due onde generate dalla rottura di una diga: (a) profondità
 f g n n ø c e s w c " c n " v g o r q " v " ? " 2 . " » 0 d + " " * r e t + q " h g a x p q f n k w v | « k " q f p g g n " n f ø g c n e n s ø w
 processo nel piano (x,t).

2.2 Definizione fisica e matematica delle onde elementari

Considerando le equazioni (2.19) nella sola direzione x , il problema si traduce nel seguente (2.25)

$$\begin{cases} \dots\dots\dots : \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots : \dots\dots\dots \end{cases} \quad (2.25)$$

Gli stati iniziali a sinistra e destra di $x=0$ sono descritti dai vettori delle variabili primitive

$$\dots\dots\dots$$

I tipi di onde che possono prodursi sono rappresentati in Figura 2.2. La Figura 2.2a mostra come le perturbazioni si propagano nel piano spazio-tempo (x, t) : le onde di destra e sinistra sono ottenute dalle equazioni delle acque basse nella sola direzione x . Nel piano (x, t) si può distinguere la regione di contatto (onda di contatto) attraverso di essa la componente della velocità u cambia in modo discontinuo. Ad ogni autovalore U si può associare una regione $U < u < U$ in cui le condizioni si mantengono costanti. La regione $U < u < U$ è distinta dalla regione $u < U$ a destra e sinistra.

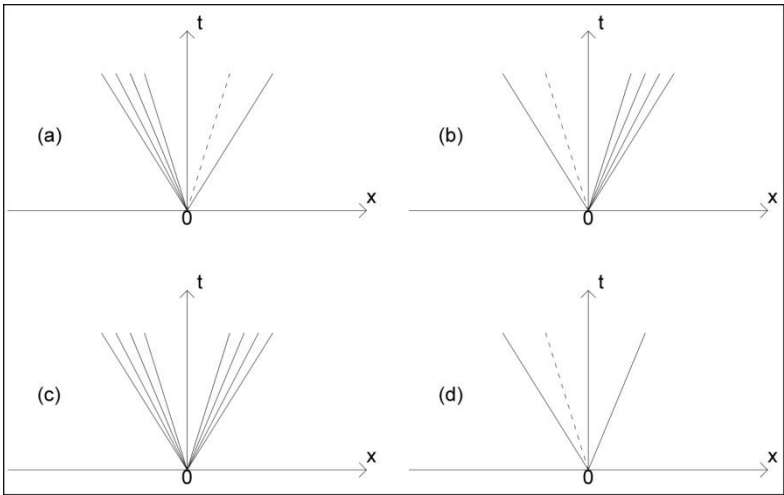


Figura 2.2 Possibili configurazioni di onde nella soluzione del Problema di Riemann.

Wc b'] 'alea X y W d' [g] '] b h Y b X c b c' ['] ' g h U h] ' f] g d Y h h] j
 U b W \ N Y g g] vettori originali conservative.

2.2.1 Rarefraction Waves (onde negative)

Queste onde connettono due stati diversi del campo di moto, ciascuno descritto dai ris
 vettori di variabili, attraverso una dolce transizione, in cui i valori dei vettori del flusso v
 continuamente in ogni istante. Solo attraverso Yef duYe esU Z Z] [i f U b h] ' I h
 X Y ^ ^ N c b X U ' g] ' \ U b b c ' X] g Wc b h] b i] h { * Y ^ ^ Y ' j U f] U V
 Le condizioni che caratterizzano una rarefraction wave sono:

- < costanza degli invarianti di Riemann $\int U b b' U h h f U j Y f g c' ^ N c b X U ' g h Y g g U$



- < autovalore sinistro inferiore del destro

La seconda condizione sta a significare che gli autovalori aumentano in modo mono
 b Y ^ ^ N U h h f U j Y f g U a Y b h c' X Y ^ ^ N c b X U ' X U ' g] b] g h f U ' j Y
 SiWc b g] X Y f U ' c f U '] ^ ' W U g c' X] ' i b U ' f] [\ h ' f U f Y Z f U W h
 , e divide il campo di moto in due regioni caratterizzati da due stati distinti:



Dato che anche Ma X U ' X , Y ^ U g c b W U U h U, esse producono nel campo di moto
 una velocità . Noto il corrispondente autovettore applicando gli invarianti di
 Riemann al vettore generico delle variabili primitive, si ha che



dalla cui ultima equazione si deduce che, attraverso la rarefraction wave, la variazione
 componente della velocità lungo y è nulla, quindi . Dalla prima uguaglianza invece,
 integrata nello spazio, si ottiene . Le due relazioni matematiche che definiscono
 quindi una right rarefraction wave sono

..... (2.28)

Le relazioni tra le variabili di testa e coda sono allora

$$\dots\dots\dots (2.29)$$

= b' a c X c' X Y`' h i h h c' U b U` c [c' g Y' g]' Wc b g] X Y f U' i b U
 , la cui coda procede nel campo di moto alla velocità , i due stati a sinistra e a destra della perturbazione sono descritti dai vettori

$$\dots\dots\dots$$

, ' ` Ñ U i h c j Y h h c f Y' Wc f fY]žg' d W c b X' Y b Ñ U d d`]` W U r i] h c b j U` & Y Y
 Riemann, si ha che

$$\text{---} \text{---} \text{---}$$

Con analoghe operazioni matematiche si giunge alle

$$\dots\dots\dots (2.30)$$

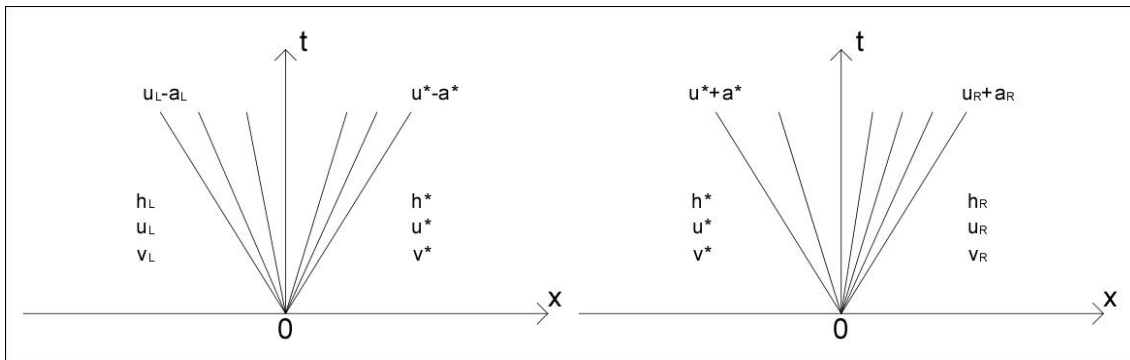


Figura 2.4 Rappresentazione nel piano (x,t) della left rarefaction wave (a sinistra) e right rarefaction wave a destra.

2.2.2 Shear Waves (onde di contatto)

Sono quelle onde attraverso cui la componente della velocità in direzione tangenziale, modo discontinuo non si mantiene costante, invece si ha in una rarefaction wave. Si suppone che a sinistra e a destra della perturbazione, gli stati siano distinti dai seguenti vettori di variabili primitive

$$\dots\dots\dots$$

La discontinuità è rappresentata da una curva caratteristica che separa due stati attraverso un salto di discontinuità. Per descrivere questa perturbazione dal punto di vista matematico non è necessario imporre la costanza degli invarianti (2.26), ma devono anche valere le Rankine Hugoniot condition (2.27). Inoltre si deve tenere in considerazione delle seguenti condizioni di parallelismo

dove con c_s si vuole indicare la velocità di propagazione della shear wave.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{u}{c_s} \right] = \left[\frac{v}{c_s} \right] \\ & \left[\frac{u}{c_s} \right] = \left[\frac{v}{c_s} \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Le condizioni sono dunque

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2.31)$$

Attraverso le shear waves, dunque, la profondità e la componente della velocità in direzione normale si mantengono costanti; solo la componente tangenziale della velocità cambia in modo discontinuo. Le caratteristiche matematiche di queste onde si adattano molto bene anche a descrivere i modelli per il trasporto di un inquinante.

2.2.3 Shock Waves $q, p, f, g, \dots, f, \phi, w, t, v, q, \dots$

Si assume ora che la soluzione al problema (2.25) sia una shock wave che viaggia alla velocità w e che connette due stati diversi, uno a sinistra e uno a destra, descritti dai vettori delle variabili conservative U e V . Valgono ancora una volta le Rankine Hugoniot conditions, per la

$$\left[\frac{U}{w} \right] = \left[\frac{V}{w} \right] \quad (2.32)$$

Il tipico carattere compressivo delle shock waves. In realtà le leggi di conservazione iperboliche forniscono due tipi di onde: le rarefaction shocks e le compression shocks. Nel campo di applicazione di interesse si considerano solo le seconde, che sono le shock waves. Come per le rarefaction, le shock waves si distinguono in left e right.

Si considera ora una left shock wave $W] U h U' U' \tilde{N}$ che separa due stati distinti nel campo di moto descritti dai vettori delle variabili primitive

.....

$X c j Y' g]' U g g i a Y' W \setminus Y' : P e c t i v e j c o n U r f a g g i o r e U f a c i l t a' l e j R a n k i n e W] h \{ ' H u g o n i o t c o n d i t i o n (2 . 2 7) z' g]' d f Y b X Y' i b' g] g h Y a U' X]' f] Z Y f] a Y b$
 velocità relative ai due stati sono quindi

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \end{aligned} \tag{2.33}$$

con i vettori delle variabili conservative

.....

Le (22), riadattate al nuovo sistema di riferimento attraverso le Rankine Hugoniot condition

$$- \quad - \quad \cdot$$

Dalla prima e terza equazione si ottiene che \quad ovvero che non si hanno variazioni della componente tangenziale della velocità attraverso la shock wave.

$$= \tilde{Z} \tilde{i} g g c' X]' a U g g U' U h h f U j Y f g c' \tilde{N} c b X U' , ' X U h c' X U' \tilde{N} \tag{2.34}$$

e dalla seconda equazione, si ottiene

$$- \quad \dots \quad \dots \quad - \quad \underline{\quad}$$

in cui, per sostituzione delle relazioni (234) si ha

$$\begin{aligned} & \underline{\quad} \\ & - \end{aligned} \tag{2.35}$$

Dalla (233), eguagliando le prime due equazioni si ottiene $U_x = \frac{U_y}{\tan \alpha}$. Esprimendo quindi la U_x in funzione delle altre variabili, ricordando che $\frac{U_x}{U_y} = \frac{h}{b}$ con U_x dato dalla (235), si ricava la componente della velocità in direzione normale:

$$U_y = \frac{g h^2 \tan \alpha}{U_x} \quad (2.36)$$

Dalle (233) e (234) si può scrivere $U_x = \frac{g h^2 \tan \alpha}{U_y}$, si può scrivere

$$U_y = \frac{g h^2 \tan \alpha}{U_x} \quad (2.37)$$

Introducendo i numeri di Froude

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g h}} \quad (2.38)$$

dato che $Fr > 1$, sarà sempre maggiore di 1

$$(2.39)$$

La funzione U_x della soluzione del problema, in particolare dipende dalla profondità h e dalla velocità U . Usando (237) si ricava la relazione che fornisce la profondità h e la velocità U si ottiene componendo le equazioni (236) e (239):

$$U_x = \frac{g h^2 \tan \alpha}{U_y} \quad (2.40)$$

I due stati a sinistra e a destra dello shock sono primitivi

.....
 G]`UXchhU`ib`g]ghYaU`X]`f]ZYf]aYbh`c`gc`]XU`Y`Wcb
 e destra dell'equazione sono descritte dalle relazioni

$$\begin{matrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{matrix} \quad (2.41)$$

con i vettori delle variabili conservative

.....

Le Rankine Hugoniot condiz. (2.23) adattate al nuovo sistema di riferimento portano alle

$$- \quad - \quad \cdot$$

dalla cui prima equazione segue immediatamente che

$$= \text{` ` } Z \text{ ` } i \text{ } g \text{ } g \text{ } c \text{ } X \text{] } \text{ ` } a \text{ } U \text{ } g \text{ } g \text{ } U \text{ ` } U \text{ } h \text{ } h \text{ } f \text{ } U \text{ } j \text{ } Y \text{ } f \text{ } g \text{ } c \text{ } \text{ ` } \text{ ` } \tilde{N} \text{ } c \text{ } b \text{ } X \text{ } U \text{ ` } , \quad (2.42)$$

Attraverso passaggi matematici analoghi a quelli sviluppati in precedenza si ricavano le equazioni per la componente Y $\text{ ` } \text{ ` } U \text{ ` } j \text{ } Y \text{ ` } c \text{ } W \text{] } h \text{ \{ } \text{ ` } \text{ ` } b \text{ ` } X \text{] } f \text{ } Y \text{ } n \text{] } c \text{ } b \text{ } Y \text{ ` } \text{ ` } \text{ ` } \text{ ` } a \text{ ` } U \text{ ` } Y \text{ ` } \text{ ` } \text{ ` } Y \text{ ` } \text{ ` } \text{ ` } :$

$$\frac{\text{-----}}{\text{-----}} \quad (2.43)$$

$$\frac{\text{-----}}{\text{-----}} \quad (2.44)$$

Nota lo shock Froude number si hanno le seguenti relazioni per il calcolo della profondità

$$\begin{aligned} & \text{-----} \\ & \text{-----} \\ & \text{-----} \end{aligned} \tag{2.45}$$

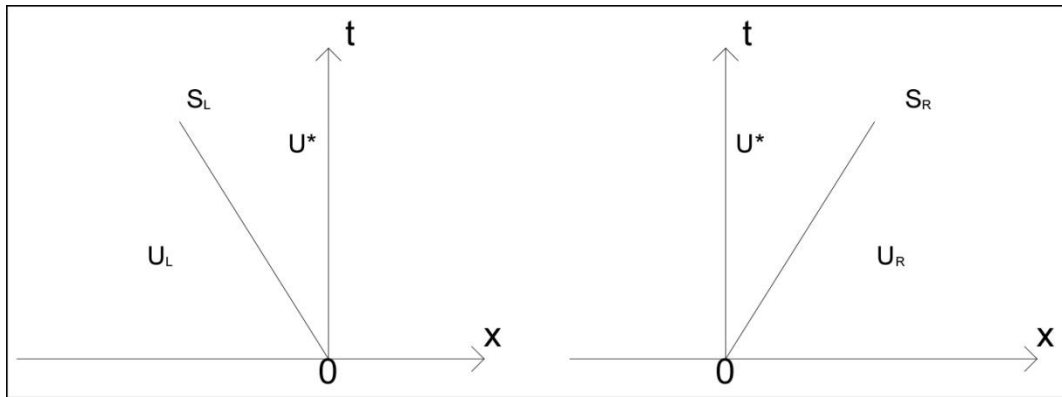


Figura 2.5 Rappresentazione nel piano (x,t) di una left shock wave (a sinistra) e una right shock wave (a destra)

Un secondo modo di esprimere dal punto di vista matematico le shock wave potrebbe essere il seguente.

Si considerano le equazioni delle acque a base di unione per il caso omogeneo con il vettore dei termini sorgenti (2.19) diventa

$$\text{-----} \tag{2.46}$$

le derivate si ottiene il sistema in due equazioni

dove, sostituendo il prodotto con - si può scrivere come segue

$$\text{-----} \tag{2.47}$$

Il sistema così ricavato matematicamente esprime la conservazione della massa, pur essendo fisicamente corretto, ma anche la conservazione della componente in direzione normale, che fisicamente non ha alcun senso. In presenza di shock, quindi, la formulazione

potenzialità di questi metodi è possibile applicarli anche ai casi più complessi, ricavando soluzione esatta del problema di Riemann o una soluzione approssimata data da una linearizzazione delle equazioni.

Si considera il sistema di equazioni non lineari nelle due dimensioni, descritto dalla

che in forma vettoriale e quasi lineare risulta

Per linearizzare queste equazioni esistono due metodi. Il primo consiste nel considerare come somma di soluzioni un termine piccolo di perturbazione per il quale sono derivate le equazioni lineari. Il secondo approccio, invece, consiste nel porre dei coefficienti al posto dei termini non lineari, in modo da costituire un sistema di equazioni lineari. Nella seguente trattazione si seguirà il secondo approccio, applicato alle equazioni del flusso in direzione, per un canale di sezione rettangolare costante. Esse sono:

$$(2.49)$$

In forma vettoriale quasi lineare si ha

$$(2.50)$$

dove la matrice è funzione del vettore delle variabili primitive

Il sistema è non lineare per la presenza dei termini contenuti nella matrice. Affrontando il problema di linearizzare il sistema, si sostituiscono i termini non lineari con i loro valori in un punto, ottenendo così un sistema di equazioni lineari. Sostituendoli con i coefficienti si ottiene il seguente sistema lineare

$$(2.51)$$

La scelta dei variabili dipende dagli scopi delle applicazioni che si vogliono condurre. Per procedere nella linearizzazione è necessario, analogamente a come era stato fatto per il sistema non lineare, si calcolano gli autovalori e gli autovettori della matrice attraverso i radici del polinomio caratteristico. Trattandosi di caso monodimensionale le radici sono 2:

.....

con _____.

I corrispondenti vettori destri sono

.....

.....

ponendo e e _____.

Ora per trasformare il problema dal set di variabili dipendenti nel vettore caratteristico v si diagonalizza il sistema di equazioni lineari. Inizialmente si costruisce la matrice P , le cui colonne sono gli autovettori destri calcolati e la sua inversa

:

$$(2.52)$$

La matrice si può allora scrivere anche come

.....

$$(2.53)$$

La diagonalizzazione è però possibile solo se la matrice è iperbolica: per questo motivo un sistema iperbolico è talvolta anche definito diagonalizzabile.

È possibile introdurre due set di variabili, dette variabili caratteristiche, ottenute dalla trasformazione

in termini di equazioni parziali differenziali (PDEs), è ora espresso in modo più semplice in un sistema di equazioni disaccoppiate la cui risoluzione è più facile e diretta. Ciò significa che le derivate parziali di u e v , che, scritte in funzione delle variabili caratteristiche diventano u_x e v_x . Il sistema (2.51) si traduce quindi nel

che moltiplicato per diventa

$$(2.54)$$

è chiamata *forma caratteristica* e scritta in forma vettoriale.

Assumendo che il vettore sorgente si ricade nel caso omogeneo in cui ciascuna delle due componenti non noto è la componente del vettore delle variabili caratteristiche. A questo punto queste equazioni parziali differenziali (PDE) sono associate le seguenti due equazioni differenziali ordinarie (ODE)

$$(2.55)$$

che valgono lungo le curve che descrivono nel piano (x, y) . Il problema del valore iniziale a coefficienti costanti, ricavate nel paragrafo precedente. Si tratta di un problema (ODE) e le rispettive condizioni iniziali (IC):

$$(2.56)$$

$$(2.57)$$

dove la (2.57) $f U d d f Y g Y b h U \cdot \cdot U \cdot j Y \cdot c W] h \{ \cdot X \} \cdot d f c d U [U n] c b Y \cdot X Y$
 Si considera ora che le curve che descrivono la propagazione delle onde nel piano (x, t) sono (2.58) funzione del tempo t , ne segue allora che anche U .
 @ $\tilde{N} Y e i U n] c b Y \cdot d U f n] U \cdot Y \cdot X$ può allora essere scritto come una equazione differenziale ordinaria (ODE):

$$\dots \dots \dots (2.58)$$

La (2.58) mostra che la variazione della variabile caratteristica lungo le linee caratteristiche è nulla, in accordo con la prima (2.59) che è chiamata velocità caratteristica e nel piano (x, t) è il valore della pendenza della curva. Tutte le curve con pendenza appartengono alla stessa famiglia, in cui, un membro particolare è definito dalla condizione iniziale al tempo t_0 per esempio in (x_0, t_0) . Quindi, in accordo con (2.55), la curva che al tempo t attraversa il punto nel piano (x, t) , è data dalla relazione

Dato che rimane costante lungo tutta la linea caratteristica C , noto $U \cdot \cdot \tilde{N}] g$ è possibile ricavare attraverso (2.57) il valore di U .
 8 $U \cdot \cdot d i b h c \cdot X] \cdot j] g h U \cdot d f U h] W c \cdot \cdot X U h \cdot \tilde{N} Y] e i \cdot U h f c \cdot Z] Y \cdot \cdot d \cdot U X Y \cdot]$
 differenziale permette di traslare tale profilo verso destra (se $U > 0$) o verso sinistra (se $U < 0$), mantenendo però immutata la forma stessa della perturbazione.

Si applica ora la soluzione al problema del valore iniziale al caso omogeneizzato scritto in termini di variabili primitive

$$\dots \dots \dots (2.59)$$

La soluzione di questo sistema è fornita attraverso le variabili caratteristiche e il vettore diventa quindi

$$\dots \dots \dots (2.60)$$

Così facendoci giungere la soluzione di un problema analogo a quello descritto (2.54) dalla differenza che ora si sta operando un sistema di due equazioni. Le soluzioni in termini di componenti del vettore delle variabili caratteristiche è un caso generico

$$(2.61)$$

Ricordando che u o v le componenti u e v sono date dalla

$$—$$

Inserendo le soluzioni (2.61) si ottengono le componenti del vettore caratteristico al generico tempo:

$$—$$

$$(2.62)$$

$$—$$

Ora, note (2.62) il sistema in termini di variabili primitive

$$(2.63)$$

da cui si ottengono

che in forma completa sono raccolte

$$—$$

$$—$$

$$—$$

$$—$$

$$(2.64)$$

Il sistema (2.64) rappresenta la soluzione generale del problema in funzione delle variabili primitive ed è funzione delle componenti iniziali del vettore

2.3.1 Il problema di Riemann

Il problema di Riemann consiste nella soluzione per via integrale di equazioni parziali differenziali (2.19), in cui le condizioni iniziali assumono una particolare forma. In particolare, nel caso monodimensionale, di un sistema 2×2 dipendente dal tempo, le condizioni di partenza fra due stati costanti U e V nei due vettori U e V nelle variabili primitive, separati da una discontinuità nel punto x_0 .

$$\dots\dots\dots \tag{2.67}$$

In modo analogo la soluzione, nel caso ci si trovi nella regione e , fa riferimento allo stato destro:

$$\dots\dots\dots \tag{2.68}$$

La regione che suscita maggior interesse è quella chiamata *star region* in cui le soluzioni sono:

$$\dots\dots \hat{E} \dots\dots \tag{2.69}$$

Le (2.69) inserite nella (2.67) per ricavare e forniscono rispettivamente i valori della profondità e nella star region:

$$\begin{matrix} - & - \\ - & - \end{matrix} \tag{2.70}$$

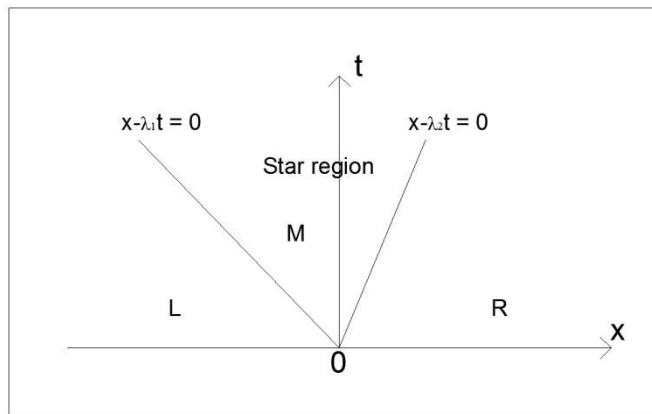


Figura 2.8 Struttura della soluzione del Problema di Riemann per il sistema 2x2.

2.4 Risoluzione esatta del Problema di Riemann (ER)

Il problema descritto finora è affrontato mediante un risolutore esatto secondo Riemann. Il problema è risolto attraverso il metodo iterativo di Newton Raphson. Le rimanenti variabili sono poi successivamente deducibili in modo diretto grazie alla struttura del metodo di Riemann.

Studiare la soluzione esatta di Riemann comporta notevoli vantaggi. Partendo dal più semplice problema del valore iniziale per un set di equazioni non lineari e dipendenti dal tempo si ricava la soluzione attraverso cui possono essere descritti tutti i tipi di onde, dalle rarefraction alle shock e alle shear waves. Inoltre, una risoluzione esatta del problema, permette di capire non solo il modo di propagazione delle perturbazioni ma anche di fornire le basi per la soluzione del problema dei valori generali iniziali al contorno. Il problema di Riemann è anche il punto di partenza di metodi approssimati, come quello di Godunov.

Un'altra ragione per cui il metodo di Riemann si dimostra particolarmente importante risiede nel fatto che attraverso di esso possono essere testati i metodi numerici per valutare non solo le loro performance ma anche ottenere le fasi iniziali dello studio dei dati sulle modalità di propagazione delle perturbazioni nel campo di moto.

Saranno di seguito trattati i due casi di calcolo della soluzione esatta di Riemann dapprima per un fondo bagnato, successivamente per uno asciutto

Si vuole ricavare la soluzione esatta del problema di Riemann per il sistema di equazioni omogenee delle onde lunghe in acque basse nelle due dimensioni

$$\begin{aligned}
 & \dots \\
 & \dots \\
 & \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.71}$$

In generale il problema individua tre tipi di onde, ciascuna associata al proprio autovalore, suddividendo il campo di moto in 4 regioni, i cui stati sono descritti in termini di variabili primitive dai vettori $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$ e \vec{U}_4 . I vettori con \vec{U}_1 e \vec{U}_2 nel caso di $\vec{U}_1 = [X, Y, U, V]^T$ e $\vec{U}_2 = [X, Y, U, V]^T$ sono le incognite del problema. Si ricorda che il generico vettore delle variabili primitive è del tipo

Si ricorda inoltre che

- < \vec{U}_1 e \vec{U}_2 sono definite shear wave;
- < attraverso le rarefraction o le shock waves la componente tangenziale del vettore velocità, rimane costante, mutano invece la profondità e la velocità in direzione normale attraverso la shear wave, invece, si osserva discontinuità di U e V , ma valori costanti di X e Y .

$$\dots \dots \dots (2.72)$$

Se invece si ha una right rarefraction wave, dagli invarianti di (2.19) si ha anche

che, riscritta attraverso la funzione a

$$\dots \dots \dots (2.73)$$

Con una left shock wave la relazione tra lo stato sinistro sono data (2.36)

$$\dots \dots \dots (2.74)$$

mentre con una right rarefraction wave si (2.43) danno le

$$\dots \dots \dots (2.75)$$

Componendo due di queste equazioni (a sinistra rarefraction waves o entrambe shock waves) descrivono la relazione tra gli stati destro e sinistro, eliminando le

$$(2.76)$$

$$\dots \dots \dots (2.77)$$

dove la (2.77) segue direttamente da una media tra lo stato sinistro e destro, note le funzioni \dots e \dots , e quindi una volta nota la profondità

La determinazione deve essere però affidata ad un procedimento iterativo in quanto non esiste una soluzione in forma chiusa. Tale tecnica permette così di ricavare la soluzione

Una buona tecnica iterativa è quella basata su Newton-Raphson per il quale si ha

$$\dots$$

ottenuto da (276) e supponendo in prima approssimazione che il campo di moto sia caratterizzato dalla presenza di due rarefraction waves una a destra e una a sinistra, si ha

Ponendo \bar{h} si ricava che

$$\frac{d\bar{h}}{dx} = \frac{1}{c} \left(\frac{dU}{dx} - \frac{dV}{dx} \right) \quad (2.78)$$

La (278) rappresenta, in definitiva, il valore di prima approssimazione della profondità da inserire nel metodo iterativo di Newton per ricavare il successivo valore. Si procede nel calcolo fino a quando

sostanza affidata alla precisione numerica del computer che interrompe le iterazioni quando raggiunta una determinata tolleranza.

Si vuole ora studiare la funzione di profondità in modo da capire se esista effettivamente una soluzione di \bar{h} e se essa sia unica.

Le derivate prime di \bar{h} sono

$$\frac{d\bar{h}}{dx} = \frac{1}{c} \left(\frac{dU}{dx} - \frac{dV}{dx} \right)$$

Le derivate seconde sono negative, la funzione è quindi concava verso il basso. La funzione è suddivisa in due rami: se \bar{h} si ricade in una shock wave, in caso opposto, con \bar{h} si ha una rarefraction wave. Si osserva inoltre che, dato un fissato valore di \bar{h} , con \bar{h} , i valori delle due funzioni U e V , calcolate esattamente in \bar{h} , coincidono. Allo stesso modo si comportano per derivate prime e seconde:

$$(2.79)$$

Si vogliono ora studiare gli stati adiacenti alla star region, si vogliono determinare le componenti dei vettori delle variabili primitive e le velocità di spostamento delle perturbazioni ricordato innanzitutto che la star region è composta da due stati separati da una shock wave

$$U^* = U^* \begin{bmatrix} g \\ g \\ c \\ W \end{bmatrix} \quad U^* = U^* \begin{bmatrix} h \\ c \\ j \\ U^* \end{bmatrix} \quad U^* = U^* \begin{bmatrix} c \\ f \\ Y^* \end{bmatrix}$$

Se la velocità della shock wave è data dalla relazione

$$\frac{U^*}{U^*} = \frac{U^*}{U^*}$$

Se, invece, nel campo di moto si osserva una left rarefaction per la quale la velocità di testa e di coda sono rispettivamente

$$(2.80)$$

Per determinare la soluzione interna alla rarefaction wave si considerano le coordinate (X, Y) e (U, W) in (X, Y) e (U, W) è

$$(2.81)$$

dove e e f sono rispettivamente la velocità delle particelle in direzione normale e la velocità tangenziale. Applicando però le relazioni degli invarianti di Riemann (2.79), e sostituendo dapprima e successivamente le ricavate dalla (2.81), si ottiene la soluzione per il ventaglio di onde contenute nella rarefaction wave

$$(2.82)$$

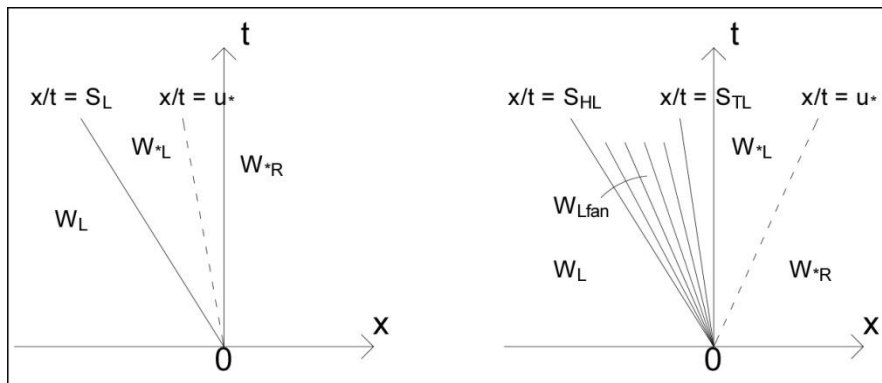


Figura 2.11 A sinistra della shear wave possono formarsi due tipi di onde: una left shock wave (a sinistra) o una left rarefaction wave (a destra).

In modo analogo trovano le soluzioni della right shock wave, analoga alla

$$\begin{aligned} & \text{---} \\ & \text{---} \end{aligned}$$

e della right rarefaction wave

$$\begin{aligned} & \text{---} \quad \text{---} \\ & \text{---} \quad \text{---} \end{aligned} \tag{2.83}$$

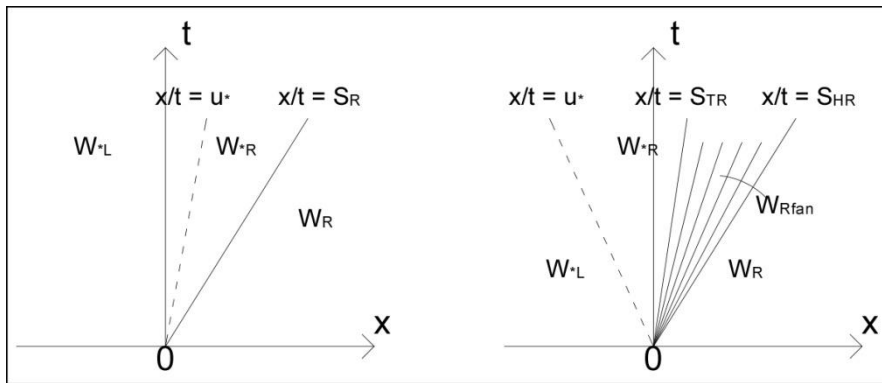


Figura 2.12 A destra della shear wave possono formarsi due tipi di onde: una right shock wave (a sinistra) o una right rarefaction wave (a destra).

Si vuole ora campionare la soluzione ad un tempo t in termini diettore delle variabili primitive corrispondenza della star region. Questa procedura di campionamento diventa particolarmente utile quando si cominciano ad applicare i metodi numerici successivamente presentati. Nel caso di una left shock wave \downarrow come è raffigurato nella prima immagine della Figura 2.11 le soluzioni nel lato sinistro della shear wave sono date dalla

calcolando iterativamente un valore della profondità non avrebbe più senso: non esiste più nel campo di moto una star riga di regolamento da impostare è quindi diverso.

Il primo passo è quello di stabilire i dati che possono svilupparsi nel contatto con le zone asciutte ipotizzando di osservare una left shock wave confinante con lo stato asciutto, il problema può essere descritto attraverso i vettori delle variabili primitive

.....

7 c b '] ' ' d Y X] WY ' Î \$ Î ' g] ' , '] b X] Awd hoc supposto che Ultra c du e g W] i h h stati si sviluppi una shock wave] Wc f X U b X c ' W \ Y ' ' Ñ c Ñ U X d U ' X] W U g n \ cc W _ Y ' , X ' Y Rankine Hugoniot conditions porta al sistema di equaz

$$- \quad -$$

Dalla prima si ottiene che , cioè che la velocità della shock wave è pari a quella delle particelle nello stato sinistro. Sostituendo tale valore nella seconda, però, si ottiene che ancora deduce quindi che una shock wave non può esistere in prossimità di una zona asciutta.

In base a dove si colloca la regione rispetto alla zona bagnata si sviluppano 3 possibili casi qui di seguito presentati.

Con fronte asciutto a destra] si i d d U ' i b U ' ' Y Z h ' f U f Y Z f U W h] c b ' k U j Y ' , e il problema di Riemann è descritto dai seguenti dati iniziali

$$\dots \dots \dots \quad (2.89)$$

@ Ñ U g g Y b n U ' X] ' U W e i U ' g i ' ' U ' X Y g h f U ' [] i g h] Z] W U '] ' ' Z U ' ' Ñ U i h c j U ' È d Y f ' ' d f Y g Y b h Y ' i b Ñ c b X U ' X] ' X] g W c b h] b i rarefraction wave: si tratta proprio di fronte asciutto bagnato

$$-$$

X c j Y ' Wc b '] ' ' d Y X] WY ' Î W Î ' g] ' , ' j c ' i h c '] U b X d o W U f Y ' ' U ' ' gli invarianti di Riemann e ricordando che quindi anche la celerità è nulla si ricava

$$(2.90)$$

La soluzione completa è quindi data dalla

$$\dots \dots \dots \quad (2.94)$$

con dato dall'eq. (2.83).

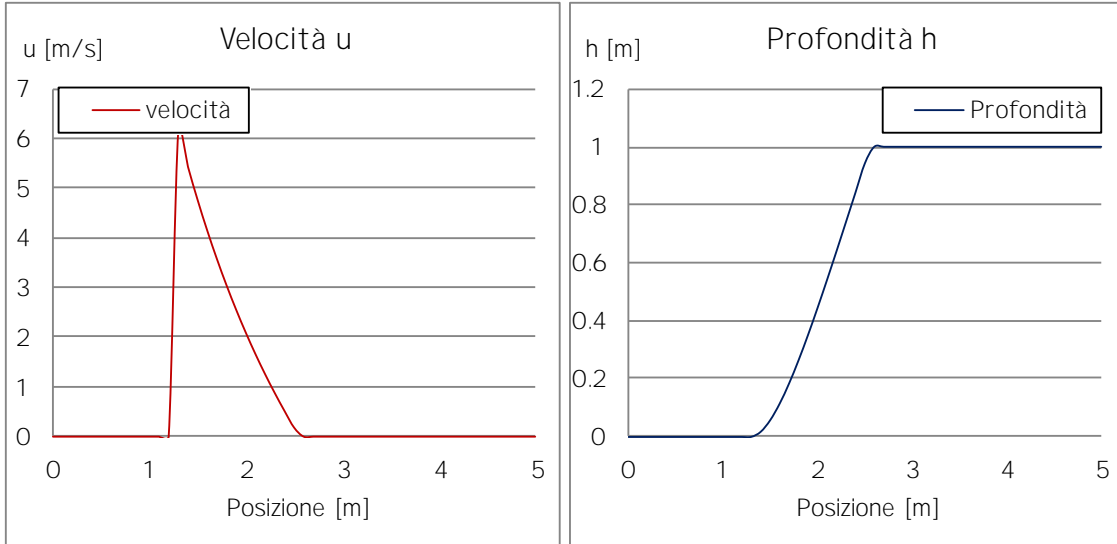


Figura 2.14 Soluzione del Problema di Riemann con fondo asciutto per una right rarefaction wave. I dati iniziali sono $h_R=1$ m e $u_R=0$ m/s al tempo finale $t=0.6$ s.

Se non si verifica alcuno dei due casi precedenti, è possibile che le velocità delle particelle e celerità di due perturbazioni, una destra ed una sinistra, interagendo tra loro, producano nel campo di moto una zona asciutta ancora una volta di due rarefaction waves associate agli autovalori $u \pm \sqrt{gh}$ e $u \mp \sqrt{gh}$, le cui code rappresentano i due fronti base. La soluzione completa del problema è data da una combinazione delle soluzioni dei due casi precedenti:

$$\dots \dots \dots \quad (2.95)$$

Affinché si verifichi questa condizione è necessario che

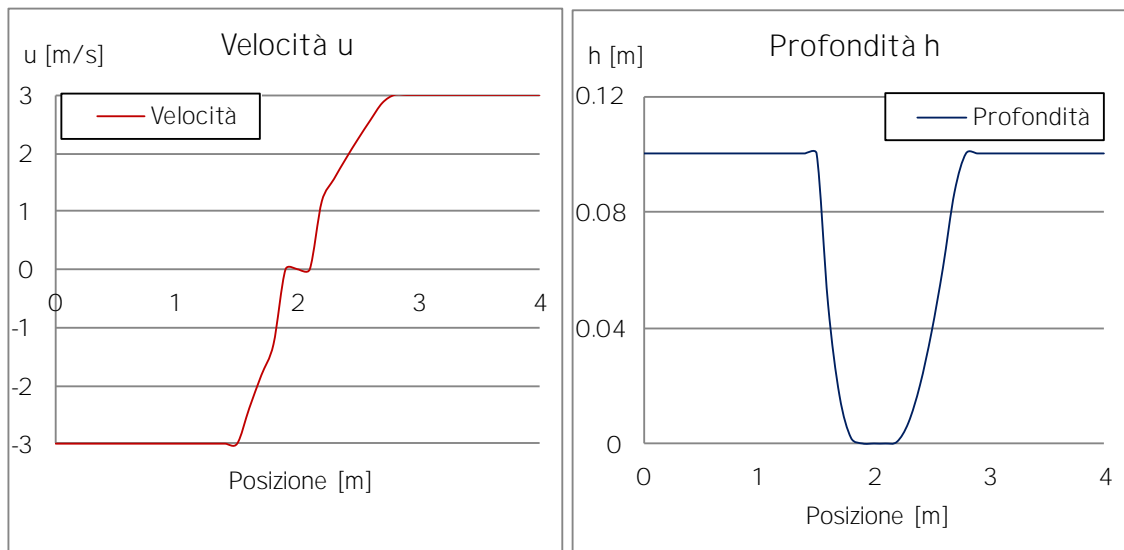


Figura 2.15 Soluzione del Problema di Riemann con fondo asciutto centrale e bagnato laterale. I dati iniziali sono $h_L=h_R=0.1$ m, $u_L=-3$ m/s, $u_R=3$ m/s al tempo finale $t=0.5$ s.

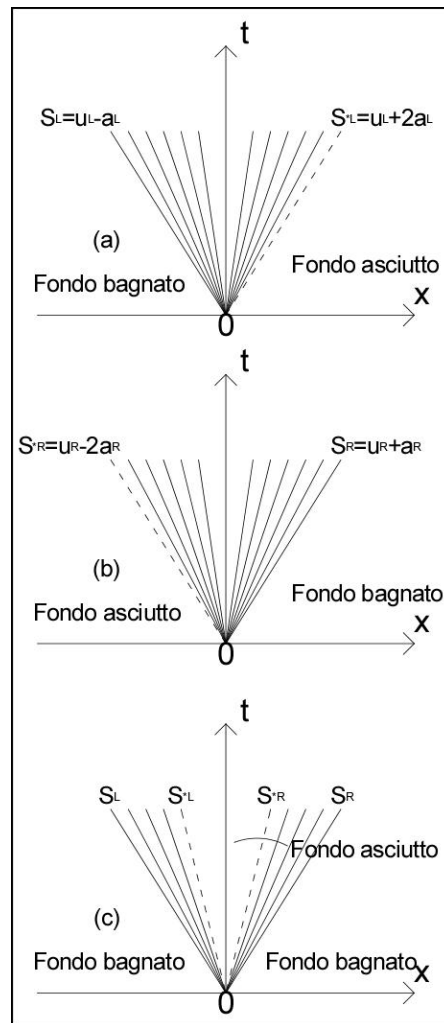


Figura 2.16 Soluzione del Problema di Riemann con fondo asciutto: (a) left rarefaction wave, con fondo asciutto sulla destra; (b) right rarefaction wave con fondo asciutto sulla sinistra; (c) fondo asciutto nella regione centrale.

In conclusione, in questo paragrafo è stata presentata la soluzione esatta del Problema bidimensionale di Riemann che prevede di considerare anche la componente tangenziale della velocità, grazie alla quale è possibile riconoscere nel campo di moto. Per il fondo bagnato possono prodursi due configurazioni: a partire da una shear wave possono prodursi, sulla destra o sulla sinistra, o una shock o una rarefaction wave. Nel caso di fondo asciutto, invece, possibili configurazioni sono per ciascuna di esse, compaiono shocks ma solo rarefaction waves. Si può osservare il caso di una left rarefaction wave con fondo asciutto a destra, o right rarefaction wave con fondo asciutto sulla sinistra, o left e right rarefaction waves con fondo asciutto nella regione centrale. Questo particolare caso richiede per il quale, sostituite le velocità dei fronti di contatto definite in precedenza, si ottiene

in completo accordo con (279) si è infatti analizzato il caso di fondo asciutto, per il quale la profondità della corrente nella star region è inferiore o al più uguale a zero.

Le soluzioni esatte del Problema di Riemann sono spesso impiegate per valutare le prestazioni dei metodi numerici per costruire i metodi di Godunov, nei quali sono calcolate localmente, in prossimità dei bordi di confine tra un elemento ed il successivo. Questi metodi sono presentati nei paragrafi successivi.

2.5 Metodi numerici

Ci si concentra ora sullo studio di metodi numerici per sistemi generali di equazioni parziali iperboliche di conservazione. In particolare sono fornite le conoscenze per applicare i metodi ai volumi finiti alle equazioni di conservazione. Separatamente si analizzano i casi monodimensionale e bidimensionale.

Nel caso monodimensionale si ha un sistema 2x2 di equazioni parziali differenziali dato dalla

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

che vale però solo nel caso in cui la soluzione vari dolcemente in tutto il dominio. Per soluzioni discontinue si ha

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \mathbf{G} \, dV \tag{2.96}$$

calcolato seguendo il verso antiorario nel contorno di dominio del volume di controllo nel tempo t , i cui estremi sono dati da

Il volume di controllo V è chiamato anche cella, mentre t è il tempo in cui sono elaborati i calcoli. Le dimensioni della mesh di celle sono date da Δx e Δt . La forma integrale (2.96) diventa

(2.97)

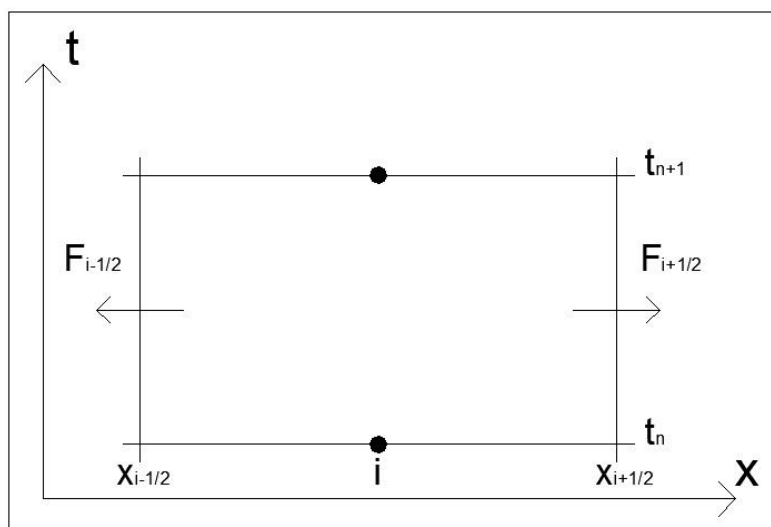


Figura 2.17 Volume di controllo nel piano (x,t) .

Dividendo gli integrali dei vettori delle variabili conservative per Δx e Δt si ottengono le medie integrali di U ai tempi t_n e t_{n+1} :

$$\bar{U}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t_n) dx$$

$$\bar{U}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t_{n+1}) dx$$

In modo analogo se si dividono gli integrali del flusso, si ottengono le medie integrali di F nelle posizioni $x_{i-1/2}$ e $x_{i+1/2}$:

$$\bar{F}_{i-1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F_{i-1/2}(x, t) dt$$

$$\bar{F}_{i+1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F_{i+1/2}(x, t) dt$$

La (297) in un dominio discretizzato diventa, in forma numerica

$$\dots - \dots \quad (2.98)$$

sono i flussi tra le due celle i ed $i+1$ in corrispondenza della posizione

La relazione (298) è numericamente definita solo una volta noti i flussi. I metodi numerici applicati su equazioni conservative godono della proprietà telescopica: i flussi calcolati per la cella i -esima devono eguagliare i flussi calcolati invece per la cella $(i+1)$ -esima. Ovvero i flussi uscenti da una cella sono uguali a quelli entranti nella cella successiva.

Si considera ora il caso bidimensionale di equazioni differenziali parziali, che nella forma generale è del tipo (2.99)

$$\dots - \dots - \dots$$

La forma integrale corrispondente, tralasciando i termini del vettore \mathbf{v} è sorgente

$$\dots \quad (2.99)$$

con V il volume di controllo, ∂V il suo contorno, il tensore dei flussi dato dalla (2.98) e \mathbf{n} il vettore normale rispetto la superficie del volume di controllo con direzione uscente da esso. In genere il volume di controllo è un elemento del mesh per il quale è calcolato il vettore medio delle variabili conservative \mathbf{u} .

La (299) diventa quindi

$$\dots - \dots \quad (2.100)$$

con N il numero di bordi di una cella, e il nodo della cella da cui comincia il bordo

Nei metodi numerici in genere il volume, indicato con V , è una N U f Y U $\Delta x \Delta y$, indicata con ΔV , prodotta dalla discretizzazione del dominio in elementi, in termini discreti diventa

$$(2.101)$$

con Δx e Δy sono indicati rispettivamente i lati orizzontale e verticale della cella. Si può considerare il caso di un volume di controllo in due dimensioni in cui i lati della cella formano un quadrilatero di area ΔV , come rappresentato in figura 2.18. La relazione (2.101) diventa allora

Per determinare le caratteristiche del campo di moto nello stato quindi è necessario conoscere dal principio i flussi \mathbf{F}_i e \mathbf{F}_j .

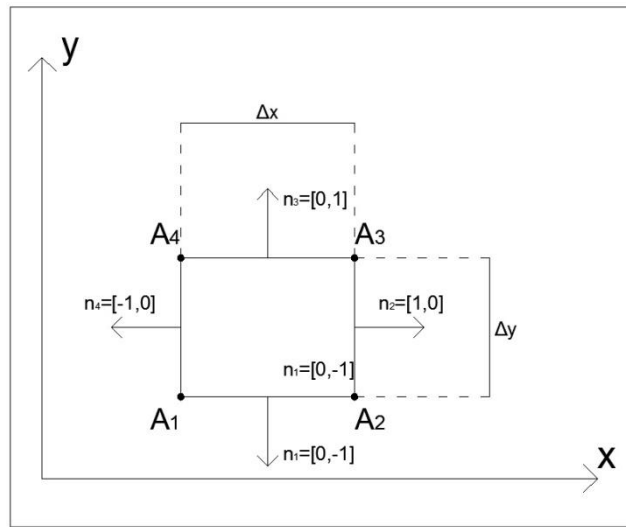


Figura 2.18 Volume di controllo nel piano cartesiano (x,y).

Il valore iniziale delle equazioni in acque basse. Esistono due tipi distinti di metodi, differenti per schemi impiegati nel calcolo della soluzione

Nel primo tipo rientra il metodo di Godunov, che attraverso la conoscenza di alcune proprietà delle equazioni differenziali parziali, questo costruisce lo schema numerico da risolvere partendo da informazioni note circa il modo di propagazione delle perturbazioni. Il secondo metodo di Godunov può calcolare la soluzione esatta del problema di Riemann proprio

da una minima informazione sulle direzioni delle onde. Ad esempio, il metodo di Rusanov, è un caso particolare di un metodo di tipo Lax-Wendroff, che richiede la conoscenza di una stima della velocità di una perturbazione. Il metodo di Godunov, invece, ricade nella seconda categoria e non richiede alcuna informazione particolare per costruire gli schemi numerici. Si tratta di un metodo molto semplice e per questo è impiegato qualora il sistema di equazioni risulti particolarmente complesso. In genere questo metodo non è utilizzato per risolvere le equazioni in acque basse, che, già da per sé, sono molto semplici e facili da maneggiare.

Si tratterà ora brevemente il metodo di Godunov per la risoluzione delle equazioni in acque basse.

2.5.1 Il metodo di Godunov

È uno schema numerico che approssima la soluzione esatta (o approssimata, descritta nel paragrafo successivo) del problema di Riemann. La precisione si ferma al primo ordine spaziale e temporale. Per descrivere il metodo è sufficiente concentrarsi sul caso monodimensionale omogeneo del sistema 2x2 di equazioni con il solito, vettore delle variabili conservative e il vettore dei flussi.

Assumendo la direzione orientata perpendicolarmente alla superficie del volume di controllo, la relazione computazionale per aggiornare agli istanti successivi il vettore delle variabili conservative è data dall'equazione (2.98)



Per risolvere numericamente il problema è necessario conoscere il vettore dei flussi calcolati in ogni cella. Il flusso è dato dalla relazione (2.99). Il volume di controllo è scelto in modo che questa sia costante per pezzi di dominio. In considerazione di una piccola porzione di dominio compresa tra i valori x_i e x_{i+1} , localmente, in corrispondenza del confine tra le due celle i ed $i+1$, si osserva una discontinuità di stato di sinistra e quello di destra. Il problema iniziale diventa quindi il seguente:

$$\begin{aligned}
 & \dots \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

la cui soluzione è indicata con il vettore U^* .

In modo analogo prendendo in considerazione nella parte sinistra la porzione di dominio $\Omega_{i-1/2}$, si ottiene il secondo problema locale di Riemann

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \dots \end{aligned} \tag{2.103}$$

la cui soluzione è indicata con il vettore $\mathbf{U}_{i-1/2}$.

Si hanno così due problemi locali di Riemann, ciascuno dei quali dotato del proprio sistema di riferimento centrato in $\tilde{x} = 0$. In particolare quest'ultimo è collocato nel bordo di confine tra due celle adiacenti.

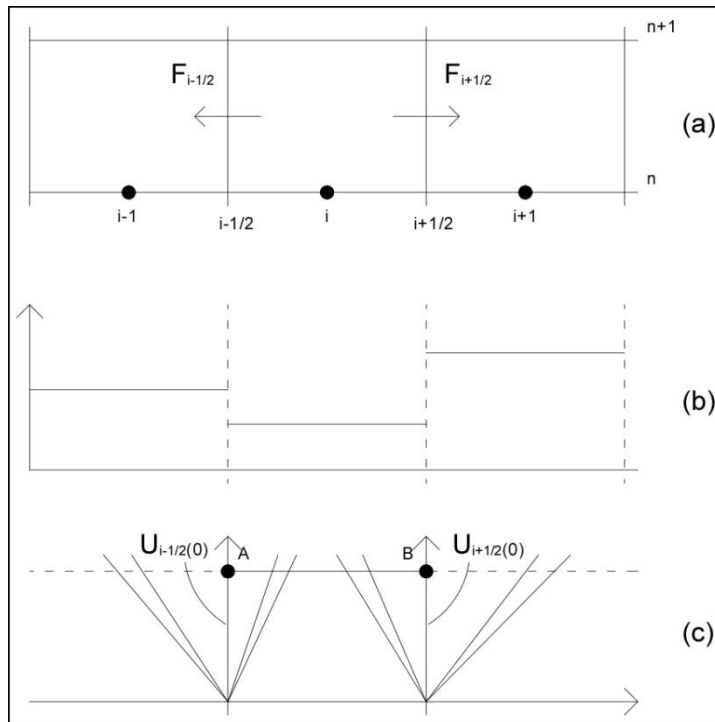


Figura 2.19 Metodo di Godunov per il caso monodimensionale: (a) volume di controllo nel piano (x,t) ; (b) medie integrali del vettore delle variabili conservative, costanti per pezzi; (c) soluzione del Problema di Riemann sui bordi di due celle adiacenti.

I flussi di Godunov sono funzione della soluzione del problema e quindi calcolati rispettivamente in $\tilde{x} = 0$ e in $\tilde{x} = 0$. Ciò significa che, essendo ora i sistemi di riferimento centrati ognuno sulla soluzione locale del problema, i flussi sono $\mathbf{F}_{i-1/2}$ e $\mathbf{F}_{i+1/2}$ del tempo, quindi

.....

Per valutare il flusso di Godunov sono necessari:

- < la soluzione del problema di Riemann, $U(x, t)$, con gli stati a sinistra e a destra noti e dati rispettivamente dai vettori U_L e U_R ;
- < una procedura di campionamento della soluzione per riconoscere il valore richiesto $U(x^*, t^*)$.

Per trovare il valore di $U(x^*, t^*)$ si considerano le possibili configurazioni per le quali le onde di sinistra e destra possono essere solo rarefaction waves, shock waves o shear waves. Godunov richiede due passaggi: il primo permette di ricavare la profondità e la velocità nella star region; il secondo consiste nel campionare la soluzione a seconda del caso, tra quelli descritti in figura 2.20 si presenta il caso (a1) in cui la presenza di una shock wave sulla sinistra e di una rarefaction wave sulla destra, si ha una shear wave (una discontinuità di velocità) che si muove verso destra. La soluzione è invece contenuta nella regione di rarefaction waves e quindi descritta, per esempio, dai vettori delle variabili primitive

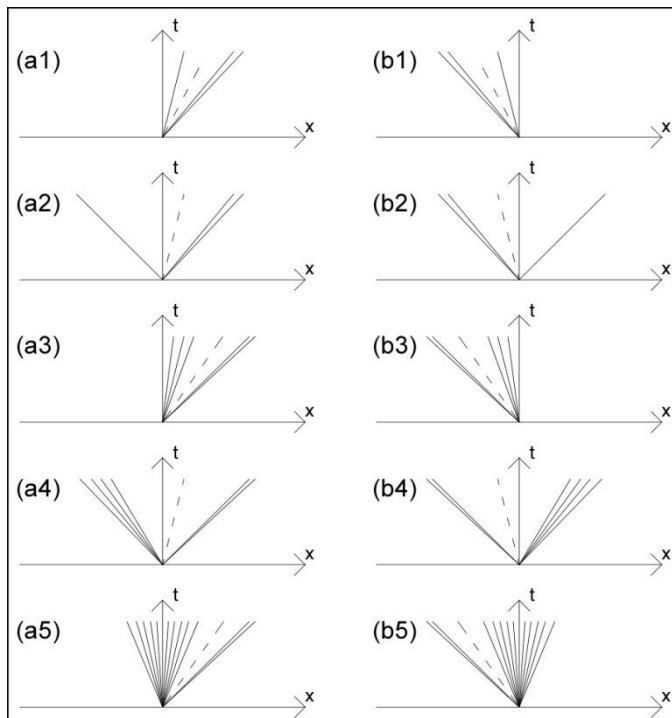


Figura 2.20 Dieci possibili configurazioni di onde per la stima del flusso di Godunov nel caso 1D.

La soluzione del problema iniziale di Riemann è del tipo

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{2.104}$$

La soluzione U^i è sempre nel bordo di confine tra due celle adiacenti,

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

quindi il flusso di Godunov è

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Sostituendo il valore del flusso numerico nella formula (2.98) si ottiene che la componente del vettore delle variabili è dato dal

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{2.105}$$

$$\text{---} \quad \text{---} \tag{2.106}$$

La (2.106) definisce il Courant number (CFL): matematicamente il rapporto tra la velocità di $d f c d U [U n] c b$, e la velocità \tilde{U} dove $\tilde{U} = \max(U, \tilde{U})$. Se questo rapporto è maggiore di 1 significa che la velocità con cui viaggia $\tilde{U} c b X U^i$, $\tilde{U} a U [[] c f Y^i X]^i$ e $\tilde{U} i Y^i \tilde{U} a U g g] a U^i W \setminus Y^i X c j f Y V V W Y^i \tilde{U} X Y^i X c a] b] c^i U^i \tilde{U}$. Le condizioni di stabilità per il metodo di Godunov sono raggiunte se $\tilde{U} c j j Y f c^i e i U b X c^i g]^i U a a Y h h Y^i W \setminus Y^i \tilde{U}$ velocità, in qualsiasi intervallo temporale non è in grado di attraversare completamente nessuna cella del dominio, solo andando nella successione $\tilde{U} a h f U j Y f g U h U^i X U^i i b \tilde{U} c$ le condizioni di stabilità sono quindi raggiunte quando la cella non è attraversata totalmente da nessuna onda $b Y^i \tilde{U} \tilde{U}] b h Y f j$. Sotto questo aspetto si può definire anche attraverso la seguente relazione

$$(2.107)$$

dove $U^i = U^i(x, y, z, t)$ è la soluzione del problema di Riemann locale, $U^i = U^i(x, y, z, t)$ è la soluzione del problema globale, $U^i = U^i(x, y, z, t)$ è la soluzione del problema globale, $U^i = U^i(x, y, z, t)$ è la soluzione del problema globale.

Per i problemi in una dimensione, applicando la soluzione del problema locale di Riemann si ottiene una stima abbastanza buona della massima velocità. Una stima errata, invece, farebbe saltare lo schema, indipendentemente da quale metodo numerico per il calcolo del flusso si utilizza. Una buona stima della velocità massima è espressa da

$$(2.108)$$

con $U^i = U^i(x, y, z, t)$ è la soluzione del problema locale, $U^i = U^i(x, y, z, t)$ è la soluzione del problema globale, $U^i = U^i(x, y, z, t)$ è la soluzione del problema globale, $U^i = U^i(x, y, z, t)$ è la soluzione del problema globale. In questo caso, usando (2.108), risulta abbastanza semplice e veloce stimare la massima velocità. Per i problemi in due dimensioni, invece, come per esempio la generazione della crollata di una diga, applicando (2.108) si sottostimerebbe notevolmente la massima velocità, in realtà molto elevata, producendo un modello non adeguato.

Si è quindi visto che la formula conservativa discreta (2.99) applicata sui bordi delle celle. In particolare, dato un dominio costituito da n celle, con n nodi, la relazione è applicata solo alla cella i . Per aggiornare i vettori delle variabili conservative delle celle i ed m in corrispondenza dei limiti esterni del dominio, è necessario porre le condizioni al contorno.

Per aggiornare la cella 1, per esempio, è richiesto il flusso e la definizione degli stati iniziali nel problema di Riemann a sinistra, e destra. La difficoltà sta nel fatto che per la cella 1 lo stato sinistro non appartiene al dominio, e quindi non può essere utilizzato per imporre le condizioni iniziali del problema. Dal punto di vista numerico, allora, si assume uno stato fittizio in modo che dal problema di Riemann si ottenga una soluzione, espressa anche in termini di variabili primitive, che soddisfi le condizioni fisiche presenti in (2.108). Si crea lo stato $U^i = U^i(x, y, z, t)$ e $U^i = U^i(x, y, z, t)$. Altre condizioni al contorno sono così raccolte:

$$\begin{aligned} & \langle U^i = U^i(x, y, z, t) \rangle \\ & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

< per simulare contorni di riflettonsi si ha

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

< infine per simulare dei contorni riflettonsi che si muovono ad una certa velocità si usano le

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

dove con v_l e v_r sono stati indicati rispettivamente le velocità di spostamento del contorno sinistro e destro.

2.5.2 Presentazione generale di altri metodi del primo ordine

Come precedentemente anticipato, i metodi del primo ordine, dove i primi richiedono informazioni iniziali da cui sviluppare i calcoli del flusso. Tra questi ultimi rientra il Random Choice Method (RCM, ovvero metodo del campionamento casuale della soluzione) una particolare versione del modello di calcolo fatto di un metodo che aggiorna gli stati e, descritti nelle variabili conservative, in due passi successivi

< si risolve inizialmente il Problema di Riemann sinistro nelle variabili primitive () e il destro nelle () per trovare rispettivamente u^* e v^* . La

Figura 2.21 mostra un tipico schema di onde generate in corrispondenza di celle adiacenti, nelle posizioni $i-1$ e $i+1$;

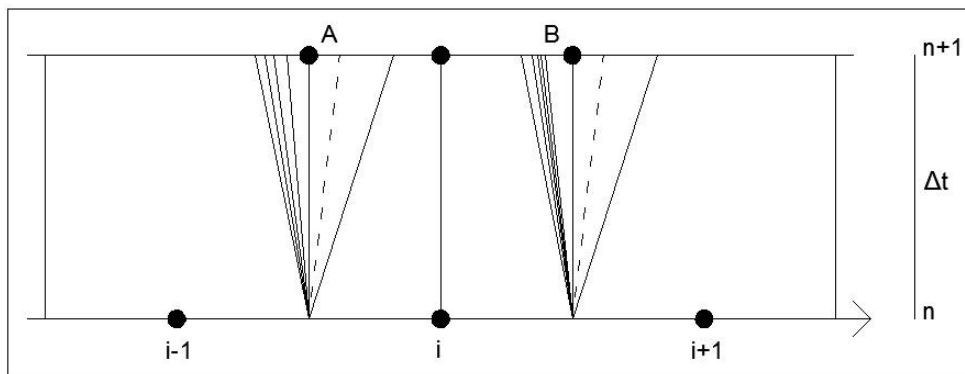


Figura 2.21

< u^* e v^* , ricavando così lo stato, descritto da un vettore di variabili, da assegnare alla cella i a tempo $n+1$. Il campionamento della soluzione e descritto dalla linea orizzontale di Figura 2.21. Tale procedura è legata ad un valore Δt che deve essere scelto in modo che Δt sia minore della velocità di propagazione delle onde.

tempo $n+1$ successivo il vettore delle variabili primarie lo stato nella cella i -esima è dato dalla

$$\dots\dots\dots (2.109)$$

Nella Figura 2.22 è mostrato il primo caso (2.109) in cui la soluzione U^* assegnata alla cella i -esima, proviene dalla soluzione sinistra del Problema di Riemann. Lo stato della cella i -esima al tempo $n+1$ è poi utilizzato per aggiornare nei tempi successivi le soluzioni del problema.

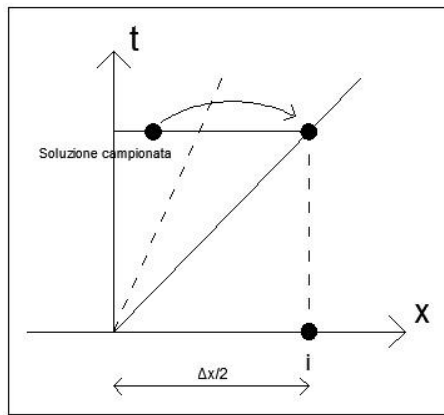


Figura 2.22 Campionamento della soluzione sinistra del Problema di Riemann e sua assegnazione al centro della cella i -esima.

Nel calcolo della soluzione (2.98) si assume che la soluzione del Problema di Riemann lungo la linea AB (Figura 2.22) è data dalla soluzione sinistra. La condizione di stabilità del metodo è data da

$$-$$

la quale assicura che non ci sia interazione tra le onde destra e sinistra del Problema di Riemann. In genere si assume che il metodo di Godunov (2.98) sia stabile. Il metodo di Godunov, ovvero il modello che necessitano un minimo di informazione sulle condizioni iniziali di propagazione delle onde.

Tra i centri di metodi qui presentati tre modelli: il FORCE, ed il metodo centrale di Godunov.

Il primo usa la formula conservativa (2.98) attribuendo al flusso un valore dato dalla

(2.110)

Non sono qui presenti Problemi di Riemann da risolvere: non è infatti necessario conoscere nessuno dei flussi in corrispondenza del bordo tra due celle adiacenti, perché esso è direttamente calcolato attraverso (2.110).

Si tratta di uno schema molto semplice da implementare: questo motivo è molto utilizzato. È monotono e raggiunge le condizioni di stabilità ponendo

Anche lo schema FORCE significa Flux-Centered, rientra appunto nei centered method. Il flusso è definito come la mediana aritmetica tra il flusso di Lax e quello di-Lax Wendroff a due step (LW2):

(2.111)

È monotono e stabile, con condizioni di stabilità date dal coefficiente

Sostituendo il flusso nella relazione (2.98) si ottiene uno schema con precisione di secondo ordine spaziale e temporale se si pone $\tau = \Delta t$ ma a differenza degli altri schemi non è monotono. Questo produce delle oscillazioni se si è in prossimità di frontiere irregolari, c'è vicino alle shock waves.

Anche la necessità di passare attraverso le soluzioni del problema di Riemann. Il flusso di Godunov è

(2.112)

Si nota con facilità una somiglianza tra la soluzione vettoriale delle variabili conservative della (2.111) e quello della (2.112): entrambe applicano la forma integrale delle leggi di conservazione in un volume di controllo definito nello spazio e centrato nel bordo di controllo delle celle.

Mentre però, il metodo di Wendroff a due step, il metodo di Godunov è impiegato.

Il metodo centrale di Godunov è stabile se il Courant number

