Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA TULLIO LEVI-CIVITA
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Il calcolo infinitesimale e il concetto di derivata:

aspetti storici, logici e didattici nella scuola secondaria di secondo grado

Relatore:
Prof. Francesco Ciraulo
Correlatore:
Prof. Luigi Tomasi

Laureanda:
Giulia Galante
Matricola: **2018872**

Anno Accademico 2022/2023
21 Aprile 2023

"La matematica è la regina delle scienze."
(Carl Friedrich Gauss)

"È l'arte suprema dell'insegnante,
risvegliare la gioia della creatività
e della conoscenza."
(Albert Einstein)

Indice

Introduzione

In questo elaborato viene trattato il tema della derivata dal punto di vista storico e didattico, con un accenno anche alla sua definizione in Analisi Non Standard attraverso l'introduzione dei numeri iperreali.
La derivata è connessa alle *variazioni* di una funzione, dunque studiare come variano le grandezze diventa di fondamentale importanza per introdurre da un punto di vista didattico il concetto di derivata. L'universo che ci circonda è in continuo cambiamento, tutte le scienze hanno a che fare infatti con le variazioni: di popolazioni (in biologia), di prezzi (in economia), di parametri vitali (in medicina).
Le variazioni sono spesso le uniche grandezze rilevabili sperimentalmente in un fenomeno, basti pensare all'astronomia, dove possiamo rilevare le variazioni di luminosità di una stella o della posizione di un pianeta, o in fisica, dove possiamo vedere come variano le grandezze cinematiche, termodinamiche, elettromagnetiche [50].
Lo strumento matematico che ci consente di passare dalla conoscenza delle variazioni alla conoscenza dell'andamento di un fenomeno è il calcolo infinitesimale ed è proprio intorno ad esso che prenderà forma questa tesi.

Il *Capitolo 1* presenta un excursus storico, atto ad analizzare il percorso attraverso il quale si è giunti alla nascita del calcolo infinitesimale. In particolare protagoniste di questo capitolo sono le figure di *Isaac Newton* (1643-1727) e *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716), che ebbero un ruolo determinante in tale scoperta.
Si pone quindi l'attenzione su come il calcolo infinitesimale abbia trovato ragione di esistere a partire da una nozione euristica, restata a lungo al centro di un controverso dibattito, ossia quella di *infinitesimo*. Newton e Leibniz infatti ebbero il merito di dare il via a quella branca della matematica che prende il nome di calcolo infinitesimale, tuttavia nessuno dei due definì rigorosamente i propri concetti e ciò fu causa di non poche critiche. È proprio intorno a queste critiche che si sviluppa la seconda parte del primo capitolo: in particolare viene presentata la figura del vescovo anglicano *George Berkeley* (1685-1753), famoso per la sua aspra critica alle quantità infinitesime, definite come *"fantasmi di quantità defunte"*, e viene posto uno sguardo sui tentativi di portare rigore all'interno dell'Analisi, tentativi pienamente formalizzati con la figura di *Karl Weierstrass* (1815-1897) nell'Ottocento.
Si mostra dunque come, a discapito di Leibniz e dei suoi infinitesimi, si compì il processo sulla rifondazione rigorosa dell'Analisi Matematica: la nozione di limite andrà infatti a sostituire quella di infinitesimo, giungendo così ai risultati cercati senza contraddizioni.

Lo scopo del *Capitolo 2* è invece quello di mostrare che è possibile trovare una legittimazione al ragionamento di Leibniz attraverso un metodo introdotto dal logico matematico *Abraham Robinson* (1918-1974), il quale diede una nuova identità agli infinitesimi, rendendone rigoroso il loro utilizzo. Per fare ciò, Robinson considerò un nuovo insieme numerico, quello dei *numeri iperreali* $\mathbb{R}^*$, che sono alla base di quella che prende il nome di Analisi Non Standard, differenziandosi dall'Analisi Standard, ossia dall'approccio di Cauchy e Weierstrass, fondato sulla nozione di limite.
Questo capitolo non vuole essere una trattazione sistematica dell'Analisi Non Standard, bensì si propone di offrire una panoramica generale, in grado di mostrare una legittimazione ai risultati leibniziani. Nel capitolo inoltre si è fatta la scelta di riportare solo le dimostrazioni che aiuteranno a comprendere meglio i passaggi successivi, per le restanti si rimanda alla bibliografia correlata.
Dopo un breve accenno all'idea che sta alla base del pensiero di Robinson, si mostra nel dettaglio cosa si intende per numeri iperreali. In particolare viene descritto uno dei modi attraverso i quali è possibile costruire l'insieme dei numeri iperreali, ossia attraverso una relazione di equivalenza su successioni a valori reali definita attraverso il concetto matematico di ultrafiltro. Segue una descrizione più dettagliata di tali numeri, soffermandosi su proprietà che permettono di fornirne una descrizione generale. Particolare attenzione viene data al *principio di estensione* e al *principio di transfer* attraverso i quali, a partire da un linguaggio formale del primo ordine, è possibile passare da proprietà valide in $\mathbb{R}$ a proprietà valide in $\mathbb{R}^*$ e viceversa. Infine si mostra un modo per visualizzare i numeri iperreali e, nel farlo, si introduce il concetto di "microscopio ottico".

Nel *Capitolo 3* si vuole invece affrontare l'argomento da un punto di vista didattico e, in particolare, si vogliono dare le basi per la costruzione di un progetto ideato per la scuola secondaria di secondo grado con il fine di introdurre il concetto di derivata in classe. Dopo aver messo in evidenza quali sono i contenuti specifici ed i suggerimenti proposti dalle *Indicazioni Nazionali*(2010) e *Linee Guida*(2010,2012) relativamente all'insegnamento delle derivate, si analizzano alcune delle problematiche didattico-metodologiche relative allo sviluppo della teoria delle derivate in classe. Inizialmente viene sottolineata l'importanza della storia all'interno dell'insegnamento e apprendimento della matematica. Come sostenuto dal didatta della matematica trevigiano *Giorgio Tomaso Bagni* (1958-2009) [2], è fondamentale che un insegnante si confronti con la storia della propria disciplina ed è importante sapere come essa possa essere utilizzata sia per motivare e stimolare gli studenti, sia come vero e proprio strumento cognitivo e pedagogico. Attraverso la letteratura esistente, vengono poi analizzate le principali misconcezioni presenti negli studenti che si accingono ad affrontare la teoria delle derivate. È in tale occasione che si definiscono le nozioni di *concept image* e *concept definition*, introdotte dai didatti della matematica *David Tall* e *Shlomo Vinner* come strumenti teorici per analizzare i processi di apprendimento delle definizioni in matematica. L'esempio a cui viene data maggiore importanza è la definizione di tangente, problema che dà l'avvio allo studio del concetto di derivata. Infine si mostrano quali sono le potenzialità di un software di geometria dinamica per l'apprendimento e l'insegnamento dell'Analisi Matematica, soffermandoci sull'importanza della visualizzazione dinamica che, come sostenuto dal matematico *David Tall* [45], fornisce una nuova forma di intuizione al calcolo.

Il *Capitolo 4* e il *Capitolo 5* si propongono di descrivere un progetto didattico che ho implementato in prima persona in una classe quinta Liceo Scientifico Scienze Applicate del Liceo Scientifico "E.Fermi" di Padova. La sperimentazione ha avuto luogo da fine novembre 2022 a fine gennaio 2023, coprendo tutte le ore di matematica in modo continuativo, alternando lezioni frontali ad attività in laboratorio di informatica con l'uso del software GeoGebra e ad attività collettive con lavori di gruppo.
In particolare nel Capitolo 4 vengono esposti obiettivi, modalità, tempi e contenuti delle varie lezioni, nonché viene descritta la loro implementazione in classe, mentre nel Capitolo 5 viene fatto un bilancio generale dell'intera attività.
Per la progettazione delle lezioni di fondamentale importanza sono state le fonti bibliografiche [11, 13, 33, 49]. Nell'ultimo capitolo è presente uno studio dei questionari somministrati agli studenti a inizio e fine sperimentazione, con l'obiettivo di evidenziare eventuali progressi e, in generale, le note positive e negative tratte dal progetto, anche alla luce di un confronto fatto con un'altra classe dell'istituto, che si è gentilmente prestata come classe di controllo per la sperimentazione.

Dopo le *Conclusioni*, in cui propongo un breve resoconto di questo lavoro di tesi e una riflessione di carattere personale, l'elaborato si conclude con tre appendici.
L'*Appendice A* raccoglie i materiali utilizzati nel corso della sperimentazione.
L'*Appendice B* è un piccolo approfondimento relativo alla quarta attività del progetto didattico, ossia l'attività riguardante l'approccio sperimentale alla pendenza di un grafico, in cui si mostra cosa significa da un punto di vista geometrico utilizzare uno zoom con il software [49].
L'*Appendice C* è una breve introduzione all'ottimizzazione, tratta da alcune conferenze di Alessio Figalli [17, 18], utilizzata, previa trasposizione didattica, all'interno della quinta attività del progetto in classe.
Segue infine la *Bibliografia*, in cui sono riportati i libri e gli articoli cui ho fatto riferimento nella stesura del presente elaborato.

Capitolo 1

La nascita del calcolo infinitesimale

Il Calcolo Infinitesimale rappresenta tutt'oggi una delle branche fondamentali dell'Analisi Matematica. I contributi decisivi per lo sviluppo del calcolo arrivarono nel Seicento dai grandi matematici *Isaac Newton* e *Gottfried Wilhelm Leibniz*, anche se possiamo già riconoscere le origini dei principali concetti dell'analisi in problemi e metodi dell'antichità (per citare un esempio, basti pensare al *metodo di esaustione* di Eudosso, che può essere considerato il primo strumento per il calcolo integrale).
Il calcolo infinitesimale in origine era poi fondato su una nozione euristica, rimasta per lungo tempo imprecisata e controversa, quella di infinitesimo, da cui poté liberarsi soltanto più di cent'anni dopo la nascita, con l'aritmetizzazione dell'analisi intrapresa da *Karl Weierstrass*.
Ciò che vogliamo fare in questo capitolo è dare quindi una breve panoramica storica, con lo scopo di comprendere come sia nato il calcolo e, in particolare, in questo lavoro di tesi, ci concentreremo su come si sia sviluppato il concetto di derivata.

1.1 Le ragioni del calcolo infinitesimale

L'introduzione del concetto di funzione e i principali problemi scientifici che si svilupparono nel Seicento rappresentarono terreno fertile per l'invenzione del calcolo infinitesimale.Vediamo quindi più nel dettaglio quali siano stati questi problemi.
Il primo era di natura meccanica, ossia consisteva nel ricavare velocità e accelerazione istantanea data la formula che fornisce lo spazio percorso da un corpo in funzione del tempo e viceversa. La difficoltà principale in questo caso stava nel trattare il concetto di *velocità istantanea*: non era più possibile, come per la velocità media, limitarsi a dividere lo spazio percorso per il tempo impiegato, in quanto, prendendo l'istante come un intervallo nullo, si incorreva nel rapporto indeterminato $\frac{0}{0}$.
Anche ragionare all'inverso conduceva a un problema non da poco: supporre di conoscere la velocità e richiedere lo spazio percorso non poteva limitarsi a moltiplicare il valore della velocità per il tempo impiegato, in quanto la velocità poteva variare istante per istante.
Non di minore importanza fu poi il secondo problema, questa volta di natura geo-

metrica, ossia la determinazione delle tangenti a una curva.
Il problema delle tangenti, che fin dalla matematica greca era studiato come un problema essenzialmente geometrico, nel Seicento acquistò rilevanza dal punto di vista fisico, poiché la direzione del moto di un corpo in un determinato punto della sua traiettoria coincide con la direzione della tangente alla traiettoria nel punto dato.
Il terzo problema consisteva nel trovare massimi e minimi di una funzione e, ancora una volta, questa richiesta nasceva da esigenze pratiche: tale richiesta infatti scaturiva dallo studio delle traiettorie dei proiettili, e soprattutto dalla necessità di stabilire quali altezze massime avrebbero raggiunto se lanciate in aria con angoli di volta in volta differenti. Problemi di massimo e minimo permisero anche lo sviluppo degli studi astronomici, basti pensare all'analisi del moto dei pianeti e in particolare delle distanze massime e minime di un pianeta dal Sole.
L'ultimo problema riguardava invece la ricerca di tecniche per trovare la lunghezza di curve, le aree limitate da esse, nonché i volumi limitati da superfici.
I padri fondatori del Calcolo infinitesimale furono *Newton* e *Leibniz* che, contemporaneamente e indipendentemente, elaborarono le loro teorie.
Ma prima di arrivare a loro, vediamo brevemente alcuni risultati rilevanti che li precedettero.

1.1.1 Dalla *Géométrie* di Descartes al calcolo

Abbiamo già precedentemente accennato come trovare la tangente a una curva in un suo punto sia un problema nato dallo studio del moto di un corpo. Tale problema non ha origine però solamente dalla cinematica, ma, ad esempio, fu di fondamentale importanza anche per l'ottica.
Nel Seicento lo studio dell'ottica fu infatti di forte interesse scientifico, e matematici come Fermat, Descartes, Huygens, Newton si dedicarono allo studio delle lenti. Per applicare ad esempio la legge di rifrazione era indispensabile ricavare l'angolo con cui i raggi di luce attraversano una lente, ossia l'angolo costituito dal raggio e dalla perpendicolare alla retta tangente (retta normale).
In questo periodo poi si cominciarono a scoprire nuove curve, più complesse rispetto alle coniche conosciute fino a quel momento, quindi diventò un problema anche definire la tangente stessa: non si poteva più vedere la tangente come quella retta che tocca la curva in un solo punto o la retta rispetto alla quale la curva occupa una stessa parte di piano, e c'era dunque bisogno di una nuova definizione.
Il primo a fornire una definizione differente di retta tangente fu il matematico e fisico francese *Gilles Personne de Roberval* (1602-1675) il quale, nel suo *Traité des indivisibles*, collegò geometria pura e dinamica, definendo la tangente come quella retta avente la stessa direzione della velocità risultante in un punto.
Secondo Roberval infatti, una curva non era altro che il luogo di un punto mosso dall'azione della velocità, quest'ultima scomponibile in due componenti,

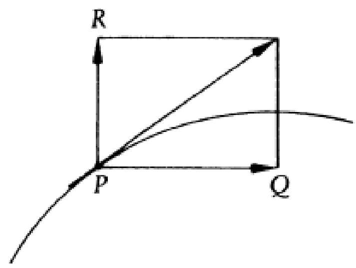


Figura 1.1

una orizzontale e una verticale (Figura 1.1).

Tale definizione era però criticabile in quanto, essendo strettamente legata alla fisica, non era applicabile in situazioni non ricollegabili al moto di un corpo.
Ci fu quindi l'esigenza di sviluppare nuovi metodi per la ricerca della tangente e, in tal senso, vale la pena citare i contributi forniti da Descartes e Fermat, considerati in qualche modo i fondatori della geometria analitica moderna.

Nel 1637 **René Descartes** (italianizzato in Renato Cartesio) (1596-1650) pubblicò il *Discours de la methode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences Plus la Dioptrique, les Météores, et la Géométrie qui sont des essais de cete Methode* (Discorso sul metodo per un retto uso della propria ragione e per la ricerca della verità nelle scienze più la diottrica, le meteore e la geometria che sono saggi di questo metodo).
Come spiegato nel titolo, tale opera era fornita di tre appendici:*la Dioptrique*, nella quale fu pubblicata per la prima volta la legge di rifrazione, *les Météores*, che presentavano, tra le altre cose, la prima speigazione soddisfacente dell'arcobaleno e *la Géométrie*, su cui soffermeremo la nostra attenzione.
La Géométrie è composta di tre libri, nel secondo dei quali è affrontato il problema delle tangenti, definito da Descartes con queste parole:

"Sarò sicuro di aver fornito qui tutto ciò che è necessario per lo studio elementare delle linee curve, quando avrò dato il metodo generale per tracciare linee rette che cadono ad angolo retto su questo o quel punto scelto di tali curve. Oserei dire che questo è il problema più utile e più generale, non solo che io conosca, ma addirittura che io abbia mai desiderato di conoscere nella geometria"

Vediamo quindi brevemente come affrontò il problema Descartes.
Data una curva e un suo punto P_0 di coordinate $(x_0,\ y_0)$, Descartes considerò la circonferenza tangente alla curva in tale punto: una volta trovata, il raggio per P_0 doveva necessariamente essere normale alla curva e ricavare la tangente si riduceva a prendere la perpendicolare al raggio.

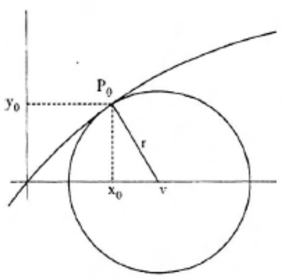


Figura 1.2

Si consideri la circonferenza di equazione

$$(x-v)^2 + y^2 = r^2$$

con centro nel punto di coordinate $(v, 0)$ e raggio r (Figura 1.2).

Data *P(x,y)*=0 l'equazione polinomiale della curva, il sistema

$$\begin{cases} P(x,y) = 0 \\ (x-v)^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$ rappresenta l'intersezione tra la curva e la circonferenza.

Se si elimina la variabile y si ottiene un polinomio in x, che indichiamo con $Q(x)$, tale che, se l'equazione della curva è

di grado $4n$, il polinomio risultante $Q(x)$ è di grado $2n$.
La condizione di tangenza del cerchio equivale a richiedere che il polinomio $Q(x)$ abbia una radice doppia in x_0 ovvero che abbia la forma

$$Q(x) = (x - x_0)^2 R(x) \tag{1.1}$$

con $R(x)$ polinomio di grado $2n$-2.
Uguagliando in (1.1) i coefficienti dei termini dello stesso grado, si ottengono i parametri v e r che permettono di ricavare la circonferenza tangente. Si può da qui concludere calcolando la perpendicolare al raggio passante per P_0.
Il problema delle tangenti sembrerebbe dunque risolto, tuttavia esso celava dei problemi: primo fra tutti il fatto che fosse applicabile solamente alle curve della forma $y = f(x)$ con $f(x)$ un polinomio e, in secondo luogo, tale procedimento costringeva a risolvere un sistema di $2n+1$ equazioni in $2n+1$ incognite, conducendo così a calcoli molto complessi.

Quando nel 1637 Descartes pubblicò la sua *Géométrie*, **Pierre de Fermat** (1601 -1665) già da qualche anno possedeva un suo metodo per le tangenti, basato su una rappresentazione analitica delle curve.
Con molta probabilità possiamo supporre che fu proprio la notizia della prossima pubblicazione di Descartes a spingerlo a dare una maggiore diffusione al suo *Methodus ad disquierendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum*, mandato al filosofo e matematico Marin Mersenne (1588-1648) a Parigi in quello stesso anno. Il metodo di Fermat prendeva origine dalle sue ricerche sui massimi e minimi di una funzione.[1]
Vale la pena precisare però che non fu Fermat il primo a trattare la terza classe di problemi legati al calcolo differenziale, ossia la ricerca dei massimi e dei minimi. Tale studio ebbe inizio infatti con *Keplero*(1571-1630): egli era interessato alla forma delle botti di vino e nella sua *Stereometria doliorum* del 1615 dimostrò che il parallelepipedo rettangolo più grande inscritto in una sfera era il cubo. Attraverso tale studio Keplero osservò che la variazione di volume corrispondente a un cambiamento fisso delle dimensioni diventa sempre più piccolo in corrispondenza del valore massimo.
Ma andiamo dunque a vedere più nel dettaglio il metodo di Fermat

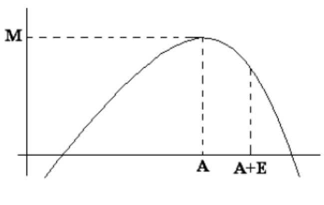


Figura 1.3

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ e supponiamo che f assuma il valore massimo M quando $x=$ A (Figura 1.3).
Se incrementiamo il valore di A di una quantità arbitraria sufficientemente vicina E, il valore assunto dalla funzione nel punto A + E dovrà essere minore del valore assunto dalla funzione nel punto di massimo A, ossia

[1]Il lettore deve tenere presente che qui parliamo di funzioni, ma Fermat faceva riferimento al più vago concetto di grandezza variabile. Il concetto di funzione sarà definito decenni più tardi, qui faremo un abuso del termine per renderne più immediata la lettura.

$$f(A+E) < f(A) \tag{1.2}$$

Più in generale, possiamo notare che, confrontando il valore di $f(x)$ in un certo punto con il valore $f(x+E)$ in un punto vicino, si troveranno valori nettamente differenti, ma, nel punto più alto o in quello più basso di una curva continua, la differenza sarà quasi impercettibile. Pertanto, quanto più piccolo è l'intervallo E tra i due punti, tanto più la disuguaglianza (1.2) si avvicinerà a un'uguaglianza o, per usare i termini di Fermat [2], diventerà un'*adequazione*

$$f(A+E) - f(A) \approx 0$$

che non è altro che un'equazione approssimata, vera solamente nel momento in cui E è esattamente uguale a 0. A questo punto il metodo di Fermat può concludersi dopo aver diviso per E ($\frac{f(A+E)-f(A)}{E}$) e ponendo E $=$ 0: i risultati ottenuti permettevano di ottenere le ascisse dei punti di massimo e minimo della curva algebrica.
Si noti che i passaggi precedenti non sono rigorosi: nel metodo di Fermat, infatti prima si divide per E, sottintendendo che sia una quantità diversa da zero, e poi la si annulla.

Nella seconda parte del *Methodus ad disquierendam maximam et minimam*, intitolata *De tangentibus linearum curvarum*, ritroviamo invece il problema della determinazione della tangente, risolto da Fermat senza dare spiegazioni esaustive, bensì limitandosi ad evidenziarne le analogie con il suo metodo dei massimi e minimi.
In questa seconda parte troviamo comunque solo l'esempio della parabola e non una descrizione generale del metodo, presente in una memoria successiva, la *Doctrina tangentium.* Di seguito cerchiamo di ripercorrere brevemente l'esempio della parabola [3].

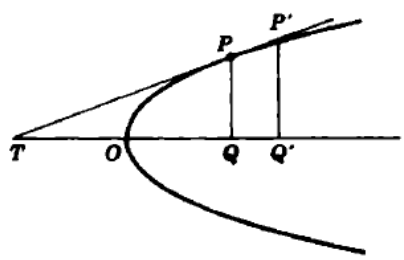


Figura 1.4

Sia P un punto di coordinate (a, b) della curva $y = f(x)$ (Figura 1.4) in cui si vuole trovare la tangente,allora un punto P' sulla curva con coordinate $x = a+ E$, $y = f(a+ E)$ verrà a trovarsi così vicino alla tangente che lo si potrà considerare approssimativamente come giacente sulla tangente oltre che sulla curva.
Se la sottotangente nel punto P è TQ $=$ c, si può supporre che i triangoli TPQ e T$P'Q'$ siano simili, ottenendo così la proporzione

$$\frac{b}{c} = \frac{f(a+E)}{c+E}$$

[2]Tale terminologia la possiamo ritrovare nella corrispondenza tra Fermat e Marsenne del 1640.
[3]*Massimi e minimi di Fermat* http://dm.unife.it/storia/massimi.htm.

A questo punto, tenendo presente che $b = f(a)$, ricavare la sottotangente si riduce a fare delle moltiplicazioni incrociate, eliminando i termini simili e, analogamente a quanto detto per il metodo dei massimi e minimi, a dividere il tutto per E e porre E = 0.

L'opera di Fermat fu diffusa solo in una ristretta cerchia di scienziati, tra i circoli parigini e gli ambienti galileiani in cui il matematico francese fu introdotto da Mersenne in occasione del suo viaggio in Italia del 1644.
Al contrario la *Géométrie* di Descartes ebbe una rilevante diffusione e fu stampata in diverse edizioni, alcune delle quali arricchite da commenti e spiegazioni che ne aiutarono la comprensione.
Nell'edizione latina della Geometria del 1649, ad esempio, *Florimond de Baune* (1601-1652) commentò l'opera cartesiana osservando come considerare una retta di equazione $y = y_0 + m(x - x_0)$ al posto di una circonferenza potesse dimezzare il grado dell'equazione risultante, facilitandone così i conti.
Nell'edizione di dieci anni successiva un contributo venne poi dato dal matematico *Johannes Hudde*(1628-1704), il quale studiò un modo per non introdurre il polinomio *R(x)*, al fine di ridurre le incognite e poter trovare così più agilmente i parametri v e r della circonferenza tangente cercata da Descartes.
Anche **Isaac Barrow**(1630-1677) diede un suo metodo per trovare le tangenti alle curve, questa volta ispirato dal lavoro di Fermat.
Egli non si limitò a ripercorrere la via di Fermat ma la ampliò: Fermat, attraverso la sostituzione di una porzione di tangente con l'analoga porzione di curva, era riuscito a prendere in considerazione alcune curve trascendenti, prima tra tutte la cicloide, mentre Barrow si spinse oltre andando a considerare intere classi di curve trascendenti, dipendenti sia dalla rettificazione, sia dalla quadratura di altre curve.

La sua opera principale fu le *Lectiones geometricae* del 1669, che rappresentò uno dei contributi fondamentali al calcolo infinitesimale.
In Barrow ritroviamo poi l'uso del triangolo differenziale ossia il triangolo PRP' (Figura 1.5), ottenuto a partire dall'incremento PR che, se sufficientemente piccolo, permette di identificare PP' sia come arco della curva, sia come parte della tangente.

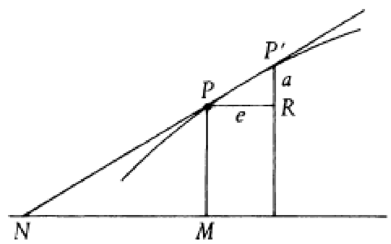


Figura 1.5

Abbiamo quindi visto che in questo periodo si erano diffusi molti metodi per la determinazione delle tangenti: alcuni si presentavano come rivistazioni dell'opera cartesiana, altri erano più vicini alla linea di Fermat. Il problema era stato risolto per le curve algebriche, mentre le curve trascendenti, se pur trattate da diversi matematici, richiedevano di essere studiate singolarmente e non esisteva un procedimento univoco per esse.
Oltre al problema delle curve trascendenti c'erano anche altre questioni da risolvere,

prima fra tutte la complessità dei calcoli che in molti casi ci si trovava ad affrontare, basti pensare al caso di equazioni con molti radicali.
Il motivo per cui si era costretti ad affrontare calcoli molto complessi risiede nel carattere globale comune a tutti i metodi elaborati fino a quel momento.
Per comprendere ciò riprendiamo come esempio il metodo dei massimi e minimi di Fermat. In questo procedimento molti storici e matematici, a cominciare da Lagrange, videro la prima apparizione della derivata, riconoscendo nella la derivata $f'(A) = 0$ l'espressione

$$\left.\frac{f(A+E) - f(A)}{E}\right|_{E=0} = 0 \tag{1.3}$$

In realtà questa identificazione con il calcolo differenziale è, per certi aspetti, una forzatura. La derivazione è infatti un operatore che agisce su una funzione secondo determinate regole e la trasforma nella funzione derivata, poi uguagliata a zero per la determinazione dei punti stazionari.
Il metodo di Fermat invece agisce sempre su adequazioni o equazioni e, contrariamente alla derivata, l'equazione è sempre globale.
Pensiamo ad esempio alla derivazione di una somma: se la funzione f è somma di due funzioni $f(x) = g(x) + h(x)$, anche la sua derivata sarà la somma delle derivate corrispondenti, mentre l'equazione $f(x) = 0$ non ha nulla a che vedere con le due $g(x) = 0$ e $h(x) = 0$. Non è pertanto possibile separare le difficoltà, che devono sempre essere affrontate tutte insieme; sono proprio tali difficoltà a rendere estremamente complicato l'utilizzo di questi metodi in caso di equazioni con un gran numero radicali [21].
Tale problema sarà risolto solamente con Leibniz e l'avvento del calcolo.

Per quanto riguarda poi il problema di trovare le aree, i volumi, i baricentri e le lunghezze, possiamo dire che le prime ricerche siano da attribuirsi a Keplero, il cui metodo si basava sulla identificazione delle aree curvilinee e dei volumi con la somma di un numero infinito di elementi infinitesimi della stessa dimensione.
Nelle *Due nuove scienze* il grande fisico e matematico *Galileo Galilei*(1564-1642) concepì le aree in maniera analoga a Keplero, spingendosi però oltre i suoi studi. Trattando il problema del moto uniformemente accelerato, espose un ragionamento utile a dimostrare che l'area compresa sotto la curva che rappresenta la velocità in funzione del tempo coincide con lo spazio percorso.
In pratica Galileo pensò all'area sottesa alla curva come a una somma di segmenti che rappresentavano la velocità instantanea e, nello stesso tempo, lo spazio infinitesimo percorso: ovviamente tale ragionamento era poco chiaro e fu giustificato in modo poco rigoroso dallo stesso Galileo, che, per avvalorare le sue tesi, si appellò a considerazioni di natura filosofica.
Bonaventura Cavalieri(1598-1674), allievo di Galileo, fu spinto da quest'ultimo a occuparsi di problemi legati al calcolo infinitesimale. Egli, nella sua *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* del 1635 discusse il metodo degli indivisibili, che aprì nei secoli successivi un lungo dibattito.
La sua idea era quella di rappresentare le figure geometriche come totalità di enti di

dimensione inferiore pensati non ulteriormente divisibili, chiamati appunto indivisibili: l'area veniva quindi a coincidere con un numero indefinito di segmenti paralleli equidistanti e un volume con un numero indefinito di aree parallele.
Il metodo degli indivisibili sarà applicato per compiere quadrature ed ottenere risultati generali anche dal matematico inglese *John Wallis*(1616-1703), che fu colui che, prima di Newton e Leibniz, lavorò di più con il fine di introdurre metodi analitici nel calcolo infinitesimale.

Abbiamo visto dunque una sequenza di risultati sui problemi che portarono alla nascita del calcolo.
Inizialmente questi problemi sembravano scollegati l'uno dall'altro: in realtà ben presto si scoprì che tutti potevano essere visti come casi particolari del problema generale di trovare il tasso di variazione istantaneo di una variabile rispetto a un'altra.
Tutto infatti è splendidamente connesso in un mosaico di risultati: il problema delle tangenti non rappresenta altro che la controparte geometrica della ricerca di un tasso di variazione, problema che a sua volta non è altro che l'inverso del problema delle aree.
A quest'ultimo risultato arrivò inconsapevolmente già Galileo. Abbiamo detto che con lui si era giunti a dire che l'area compresa sotto il grafico della velocità in funzione del tempo coincide con lo spazio percorso, dunque, dal fatto che il tasso di variazione dello spazio deve essere la velocità, si deve avere che il tasso di variazione dell'area, vista come somma di elementi indivisibili, deve essere la derivata della funzione area.
Tuttavia non si era ancora giunti a un metodo completo che permettesse di dimostrare in linea generale questi risultati.

1.2 Isaac Newton

Andiamo allora a vedere il contributo che diede Newton alla nascita del calcolo infinitesimale e, in particolare, allo sviluppo del concetto di derivata.
Egli fu infatti una figura fondamentale, considerato assieme a Leibniz, per usare la metafora del paragrafo precedente, il mosaicista che riordinò le tessere dei risultati precedenti giungendo alla fondazione del calcolo.

Figura 1.6: Newton

Isaac Newton nacque il 4 Gennaio 1643 (25 Dicembre 1642 secondo il calendario Giuliano) nel villaggio di Woolsthorpe, in Inghilterra.
Nel 1661 andò a Cambridge, al Trinity College, dove seguì le lezioni di Isaac Barrow e studiò, tra le altre cose, la *Géométrie* di Descartes, l'ottica e l'aritmetica sviluppata da Wallis nel suo *Arithmetica Infinitorum.*
Nel 1665-1666, dopo la conclusione del suo primo anno universitario, si ritirò nella sua casa natale a causa della diffusione della peste. Qui approfondì gli studi e fece le sue scoperte principali, tra cui la formula del binomio, il *calcolo infinitesimale*, la legge di gravitazione universale, la teoria dei colori.
Non disse però nulla delle sue scoperte e, quando nel 1669 Barrow diede le dimissioni dalla sua cattedra, prese il suo posto. In questo periodo però solamente lo stesso Barrow e *Edmund Halley* (1656-1742) riconobbero il suo valore e lo incoraggiarono nei suoi studi.
Nel 1675 pubblicò un lavoro sulla teoria corpuscolare della luce, che fu soggetta però a molte critiche dagli studiosi dell'epoca e, dopo aver sviluppato gli studi sulla legge di gravitazione, nel 1687, aiutato finanziariamente dall'amico Halley, pubblicò la prima edizione dei *Philosophiae naturalis principia mathematica*: a tal proposito, nella speranza di non essere ulteriormente attaccato da critiche, sappiamo che scrisse a un amico di aver reso l'opera difficile "per evitare di essere colpito dai piccoli saccenti della matematica".
Continuò ad insegnare per quarantacinque anni, a seguito dei quali cominciò a soffrire di depressione e decise di abbandonare la ricerca. Nel 1695 divenne governatore della zecca di Londra e nel 1705 presidente della Royal Society, carica che tenne fino alla morte, avvenuta nel 1727 a Londra.

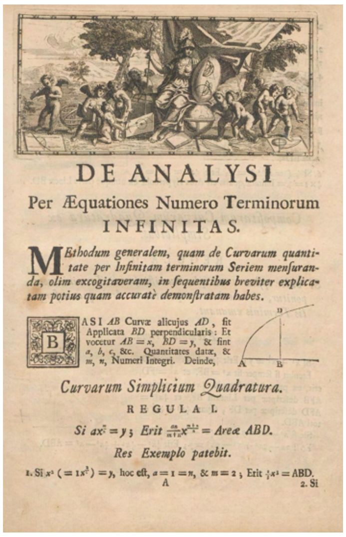
Per quel che riguarda il calcolo infinitesimale, Newton generalizzò le idee che si erano susseguite fino a quel momento, mettendo in luce le relazioni esistenti fra molti dei problemi che portarono alla nascita del calcolo.
Egli, ad esempio, fu il primo a risolvere il problema riguardante velocità e accelerazione istantanea, problema che riflette il suo orientamento da fisico e che viene visto per la prima volta come caso particolare del calcolo di un tasso di variazione istantaneo di una variabile rispetto ad un'altra.
Egli stesso si rese conto di aver presentato un metodo generale, tanto che, per

descriverlo, in una lettera a Wallis usò le seguenti parole:

> *"Questo è un caso particolare di un metodo generale che si estende, senza calcoli complicati, non soltanto al tracciamento delle tangenti a qualsiasi linea, sia essa geometrica o meccanica... ma anche alla risoluzione di altri tipi più astrusi di problemi concernenti la curvatura, le aree, le lunghezze, i centri di gravità delle curve,ecc; né esso è... limitato alle equazioni che sono prive di quantità irrazionali."*

Per giungere ai suoi risultati Newton ragionò in prevalenza in modo analitico, influenzato principalmente dall'*Arithmetica infinitorum* di Wallis ed estese il suo metodo in tre trattati, che di seguito vedremo nel dettaglio.

De analysi per aequationes numero terminorum infinitas


DE ANALYSI
Per Æquationes Numero Terminorum
INFINITAS.

Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensuranda, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accuratè demonstratam habes.

BASI *AB* Curvæ alicujus *AD*, sit Applicata *BD* perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & sint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n, Numeri Integri. Deinde,

Curvarum Simplicium Quadratura.

REGULA I.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *Erit* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} =$ *Areæ ABD.*

Res Exemplo patebit.

1. Si x^2 $(= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc est, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3 =$ ABD.

A 2. Si

Figura 1.7: De Analysi

Il primo scritto di materia analitica fu il *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* pubblicato nel 1711, ma cominciato a circolare tra gli amici dello scienziato inglese già a partire dal 1669.
In quest'opera Newton estese l'uso delle serie infinite, tanto che scrisse [4]

> *"E qualsiasi cosa l'analisi comune esegua per mezzo di equazioni con un numero finito di termini (purché lo si possa fare), questo metodo può sempre eseguire la stessa cosa per mezzo di equazioni infinite. Così non ho esitato a dare ad esso nome di analisi. Infatti i ragionamenti usati in questa analisi non sono meno certi di quelli usati nell'altra"*

precisando poi

> *"Per concludere, possiamo giustamente ritenere che ciò spetti all'Arte analitica, con l'aiuto della quale è possibile determinare esattamente e geometricamente le aree e le lunghezze delle curve"*

Nelle mani di Newton gli sviluppi in serie subirono una trasformazione nel loro utilizzo: fino a quel momento essi erano considerati un metodo di approssimazione rilegato al calcolo aritmetico e analitico, terreno contiguo ma distinto dal calcolo differenziale, per Newton invece essi sono parte integrante per risolvere nella loro generalità i problemi legati al calcolo.
A tal proposito il *De Analysi per aequationes numero terminorum inifinitas* è fondamentale, in quanto possiamo vederlo come la prima esposizione sistematica del calcolo infinitesimale newtoniano.
Vediamo dunque uno dei principali risultati ivi contenuto. [27]

Supponiamo di avere una curva (Figura 1.8) e che l'area z sottostante alla curva sia definita come segue

$$z = ax^m$$

dove precisiamo m può assumere anche valori frazionari.

Ciò non rappresentava infatti un problema per Newton in quanto il suo metodo sulle serie infinite gli aveva fornito un algoritmo universale per poter svolgere i conti.

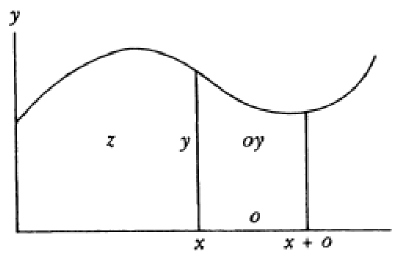


Figura 1.8

Newton definì *momento* di x un suo incremento infinitesimo e lo denotò con o (esso corrisponde in qualche modo all'incremento E che abbiamo visto nel metodo di Fermat).

L'area limitata dalla curva, dall'asse x, dall'asse y e dall'ordinata relativa al punto di ascissa $x+o$ è definita come $z+ oy$, con oy momento dell'area, e corrisponde a

$$z + oy = a(x + o)^m$$

Dopo aver applicato il teorema del binomio e sottratto le due equazioni, dividendo per o e poi annullando tutti i termini contenenti o si ottiene

$$y = max^{m-1}$$

La dimostrazione fu introdotta da Newton con un esempio, di cui ripercorreremo ora la spiegazione[4].

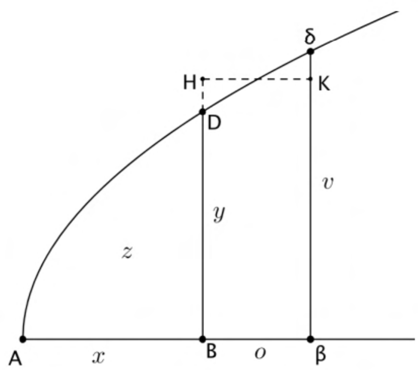


Figura 1.9

Consideriamo la Figura 1.9, poniamo AB $= x$, BD $= y$ e l'area ABD $= z$ tale che $z^2 = \frac{4}{9}x^3$.
Siano poi Bβ un incremento o non nullo di AB e BH $= v$, dove v deve essere scelto in modo tale che l'area del rettangolo BβKH coincida con l'area B$\beta\delta$D.
Dunque, ponendo A$\beta = x + o$, ne segue per ipotesi che l'area AδB $= z + ov$ (somma dell'area ADB con l'area BβKH $=$ B$\beta\delta$D).

Applicando ora all'area l'incremento o, si ottiene

$$(z + ov)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3$$

e svolgendo i conti otteniamo

$$z^2 + 2zov + o^2v^2 = \frac{4}{9}(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3) \tag{1.4}$$

[4] *Il De Analysi di Newton e l'inizio del calcolo*, Università degli studi di Trento, 2018 http://www.science.unitn.it/~fontanar/downloads/Lezione_06.pdf

Ricordando che $z^2=\frac{4}{9}x^3$, dividiamo poi per o.
Ora supponiamo che *"Bβ diminuisca all'infinito e svanisca, o che o non sia niente"* e eliminiamo i termini che sono moltiplicati da o.
Tenendo allora presente che per ipotesi $v = y$, la (1.4) diventa

$$\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}y = \frac{4}{3}x^2$$

da cui

$$y = \sqrt{x}$$

Dunque in questo modo Newton provò che data la curva di equazione $y = ax^{\frac{m}{n}}$ l'area sottesa coincide con $\frac{ax^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}$ e il viceversa, ossia che, conosciuta l'area, possiamo risalire all'equazione della curva. In pratica, considerando l'incremento dell'area, egli risolse quello che in analisi moderna viene detto integrale indefinito.
Newton infatti non diede soltanto un metodo generale per ricavare il tasso di variazione z rispetto alla variabile x, bensì mostrò che l'area, ottenuta attraverso la somma di aree infinitesime, può essere ricavata invertendo tale procedimento: quest'ultimo risultato non è altro che quello che ora noi dimostriamo nel teorema fondamentale del calcolo.

Finora quindi, per approcciarsi al calcolo, Newton ha fatto uso dei momenti o incrementi infinitesimi, ossia quantità infinitamente piccole e indivisibili, pur tuttavia non dandone una spiegazione rigorosa (notiamo come prima si divida per o e poi si annulli tale quantità). Fu egli stesso a definire il suo metodo come qualcosa di *"spiegato brevemente piuttosto che dimostrato accuratamente"*.[27]

Methodus fluxionum et serierum infinitarum

Il secondo trattato fu il *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, più esteso del precedente, scritto nel 1671 ma pubblicato postumo solamente nel 1736. Qui verrà introdotta la notazione caratteristica dei testi successivi e i concetti basilari del calcolo delle flussioni.
Nel *Methodus fluxionum* Newton considerò le variabili come generate dal moto continuo di punti, rette e piani, piuttosto che, come in precedenza, come aggregati di elementi infinitesimi. In una concezione meccanica della geometria, le variabili sono quindi viste come grandezze il cui valore aumenta o diminuisce con continuità, e l'equazione della curva $P(x, y)$ non rappresenta altro che la traiettoria di un punto. Le variabili x e y sono concepite quindi come quantità *fluenti* correlate all'equazione e a cui,a loro volta, si possono correlare due nuove grandezze $\dot{x}$, $\dot{y}$ che rappresentano le velocità istantanee e sono chiamate da Newton *flussioni*.
Similmente poi la flussione di $\dot{x}$ sarà $\ddot{x}$ e così via.
L'obiettivo di Newton diventava quindi comprendere la relazione tra due flussioni conosciuta la relazione tra le due rispettive fluenti.

Vediamo dunque il ragionamento di Newton.[32]
Si consideri l'equazione della curva

$$y = x^n \tag{1.5}$$

Sia o un intervallo di tempo infinitamente piccolo e $o\dot{x}$ e $o\dot{y}$ gli incrementi infinitesimi relativi alle fluenti x e y e chiamati da Newton momenti .
Sostituiamo in (1.5) y con $y + o\dot{y}$ e x con $x + o\dot{x}$, ottenendo così

$$y + o\dot{y} = (x + o\dot{x})^n$$

Ora, similmente a quanto descritto nel *De Analysi*, applichiamo il teorema del binomio, cancelliamo tutti i termini contenenti o e dividiamo tutto per o ottenendo così

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$$

In tale modo Newton era riuscito a ricavare $\dot{x}$ e $\dot{y}$, che in notazione moderna altro non sono che rispettivamente $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$, quindi aveva raggiunto anche il suo obiettivo, ossia trovare la relazione tra le flussioni $\frac{dy}{dx}$.
I risultati sostanzialmente sono quelli ottenuti nel *De Analysi*, tuttavia Newton era convinto di aver eliminato le difficoltà della dottrina degli indivisibili utilizzando il concetto molto più intuitivo di moto: i momenti $o\dot{x}$ e $o\dot{y}$ variano infatti con il tempo o, mentre nel primo libro i momenti sono particelle elementari di x e z.
E' importante comunque sottolineare come in questa prima formulazione del metodo delle flussioni manchi ancora una spiegazione rigorosa e il concetto di limite sia implicito ma non giustificato.

Tractatus de quadratura curvarum

Nel 1676 Newton redasse una terza opera sul calcolo infinitesimale che prese il titolo di *Tractatus de quadratura curvarum* e che fu pubblicata solamente nel 1704.
Questa volta egli cercò di evitare sia le quantità infinitamente piccole, sia le quantità fluenti, sostituendole con quello che chiamava *metodo delle prime e delle ultime ragioni.*
A proposito dell'eliminazione dei termini contenenti o queste furono le parole usate da Newton:

> *"Nella matematica gli errori più minuti non devono essere trascurati... Io considero qui le quantità matematiche non come costituite da parti molto piccole, ma come descritte da un moto continuo."*

e aggiunse:

> *"Le flussioni sono, in quanto incrementi delle fluenti generati nel tempo, tanto vicine fra loro e tanto più piccole quanto è possibile, e, per parlare accuratamente, esse sono nel primo rapporto degli incrementi nascenti"*

Con il suo metodo egli disse di aver trovato *la prima ragione di aumenti crescenti* o *l'ultima ragione di incrementi evanescenti* e lo fece nel modo seguente.
Consideriamo la funzione $y = x^n$ e supponiamo di voler conoscere la velocità di variazione in x e in x^n. Sia o l'incremento in x e $(x+o)^n$ - x^n il corrispondente incremento in x^n. Dunque x^n diventa

$$(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + ...$$

e dividendo per o si ricava che il rapporto fra gli incrementi di x (ossia o) e y (ossia nox^{n-1} + $\frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2}$ + ...) è

$$1 : [nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}ox^{n-2} + ...]$$

Ora, facendo "svanire" la quantità o Newton arrivò al rapporto $1 : nx^{n-1}$: in termini newtoniani ciò si traduce dicendo che la flussione di x sta alla flussione di x^n come 1 sta a nx^{n-1}, mentre in termini moderni diremmo che il tasso di variazione di y rispetto a x è nx^{n-1}.
Vediamo un esempio per comprendere meglio questo risultato.
Supponiamo nello specifico che $y = x^2$.
Nell'intervallo di tempo o, incrementando x di $o\dot{x}$, y diventa

$$(x + o\dot{x})^2 = x^2 + 2ox\dot{x} + o^2x^2$$

e il rapporto tra gli incrementi coincide con

$$\frac{o\dot{x}}{x^2 + 2ox\dot{x} + o^2x^2} = \frac{1}{2x + o\dot{x}}$$

Annullando o si conclude banalmente che il rapporto è $\frac{1}{2x}$, chiamato da Newton *ultima ragione*,perché è l'ultimo della successione di rapporti numerici che si ottengono per valori di o decrescenti verso lo zero, ma anche *prima ragione*, perché è il primo della successione di rapporti numerici crescenti a partire dallo zero.

Ovviamente anche questa versione portava con sé delle lacune e la principale obiezione riguardava l'uso del termine "svanire".
"Esiste realmente un rapporto tra incrementi che sono svaniti?" Questa è la domanda a cui Newton non diede mai una risposta chiara e che turbò i matematici negli anni a venire.

Philosophiae naturalis principia mathematica

Newton scoprì il metodo degli sviluppi in serie e il calcolo infinitesimale negli anni 1665-1666, quando si ritirò nel paesino natale a seguito della diffusione della peste. Nel decennio successivo scrisse i trattati precedentemente descritti, tuttavia la prima pubblicazione in cui fece uso del calcolo infinitesimale fu i *Philosophiae naturalis principia mathematica*, avvenuta nel 1687.
Quest'opera rappresenta forse il più ammirato trattato scientifico di tutti i tempi e viene descritto generalmente come quel libro che presenta i fondamenti della fisica e dell'astronomia nel linguaggio della geometria pura.
Nei *Principia* Newton usò infatti fondamentalmente metodi di dimostrazione geometrici, attraverso i quali si avvicinò notevolmente ai processi di limite tipici del calcolo infinitesimale: ad esempio, pur non parlando espressamente di passaggio al limite, l'area sottesa a una curva diventava essenzialmente il limite della somma dei rettangoli che la approssimano, esattamente come lo è oggi nel calcolo infinitesimale.

Tuttavia all'interno dell'opera newtoniana non mancano nemmeno in questo caso dei passi in forma analitica, tanto che la prima sezione del primo libro prende il titolo *"il metodo delle prime e delle ultime ragioni delle quantità, con l'aiuto delle quali dimostriamo le proposizioni che seguono"*.[5]
Qui Newton non parlò di quantità infinitesime, sostituite a pieno titolo dalle *"quantità evanescenti"*, che possono essere diminuite all'infinito. A tal proposito di seguito riportiamo le parole di Newton:

> *"Le ultime ragioni in cui le quantità si annullano non sono, a rigore, rapporti di quantità ultime, ma limiti a cui i rapporti di quantità, diminuiscono senza limite"*

ritenendone un caso particolare la *"velocità ultima"*, definita come quella *"con cui il corpo si muove, né prima che esso arrivi nel suo ultimo posto, quando il moto cessa, né dopo, ma nell'istante stesso in cui arriva.. in modo analogo, con ultima ragione di quantità evanescenti si deve intendere il rapporto delle quantità né prima che si annullino né dopo, ma quello con cui si annullano."*

Oltre ai passaggi in forma analitica, i *Principia* sono importanti nel quadro del calcolo infinitesimale in quanto le ricerche di Newton sul calcolo furono motivate dal suo interesse per i problemi di natura fisica ivi trattati.

Nella prima edizione dei *Principia* ritroviamo un riferimento al fatto che Leibniz possedesse un metodo simile per il calcolo, riferimento che tuttavia Newton eliminò nella terza edizione del 1726. La causa di ciò è da attribuirsi alla polemica tra i sostenitori dei due scienziati in merito all'indipendenza e priorità della scoperta del calcolo infinitesimale.
Oggi è abbastanza evidente che, nonostante a Leibniz vada riconosciuta la priorità di pubblicazione dell'esposizione del calcolo (avvenuta nel 1684), la scoperta di Newton precedette quella di Leibniz di circa dieci anni, nonostante vada comunque precisato che le due teorie si svilupparono con tutta probabilità indipendentemente l'una dall'altra.

[5] *Serie e flussioni di Newton*, http://dm.unife.it/storia/serie.htm.

Nel prossimo paragrafo andremo allora a vedere nel dettaglio il lavoro svolto da Leibniz, cercando di comprendere analogie e differenze con lo studio newtoniano.

1.3 Gottfried Wilhem Leibniz

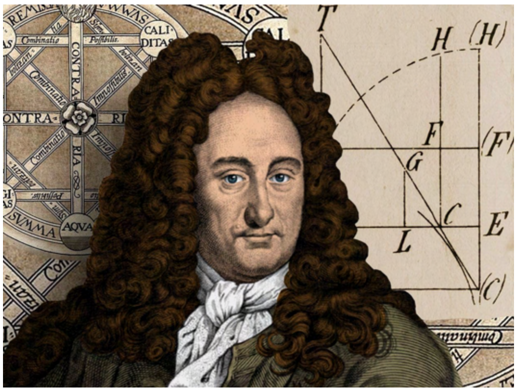


Figura 1.10: Leibniz

Gottfried Wilhem Leibniz nacque a Lipsia il 3 Luglio 1646.
Studiò diritto, filosofia, teologia, matematica e, dopo aver discusso una tesi di logica intitolata *De arte combinatoria*, conseguì il grado di baccelliere in filosofia.
Durante gli anni 1670/1671 scrisse i primi lavori di meccanica e prima del 1671 aveva già inventato la sua macchina calcolatrice.
Entrò poi in diplomazia, dove prestò diverse attività prima presso l'elettore di Magonza, poi presso la famiglia Brunswick, infine presso gli Hannover e, come uomo di stato, viaggiò molto.
Nel 1673 visitò Londra, visita su cui anni più tardi si concentrò la polemica sulla priorità della scoperta del calcolo infinitesimale, in quanto fu accusato di aver letto uno scritto di Newton: è comunque da dubitare che a tale data egli potesse trarne profitto, perché non aveva ancora una buona preparazione in geometria e in analisi.[4] Nel 1676 visitò poi Londra per la seconda volta.
Iniziò a pubblicare lavori sul calcolo differenziale nel 1684, anche se fu proprio negli anni che separarono queste sue due visite londinesi che prese forma la sua teoria sul calcolo.
Lo sviluppo delle sue idee ebbe infatti inizio nel 1675, anche se entro il 1673 conosceva già il problema diretto e inverso di trovare le tangenti alle curve, convinto che il metodo inverso coincidesse con il calcolo di aree e volumi per sommazione.
Dopo la seconda visita londinese restò ad Hannover, dove collaborò con il filosofo e matematico Otto Mencke (1644-1707) alla fondazione di quello che possiamo dire fu il primo giornale mensile scientifico, ossia gli *Acta Eruditorum*, che restò attivo dal 1682 al 1782.
Nel 1714 scrisse l'*Historia et origo calculi differentialis*, in cui spiegò lo sviluppo del proprio pensiero, con lo scopo principale di difendersi dalle accuse di plagio che gli erano state mosse.
Morì due anni dopo, ad Hannover, il 14 novembre 1716, amareggiato per le critiche rivoltegli dai seguaci di Newton, che lo accusarono di essersi appropriato di metodi e risultati di quest'ultimo.

Abbiamo già anticipato che lo sviluppo del calcolo lo si ebbe a partire dal 1675, tuttavia, per comprendere come si è evoluto il pensiero di Leibniz, vale la pena notare che già nel *De arte Combinatoria* del 1666 il matematico tedesco aveva considerato la successione delle differenze prime, seconde e di ordine superiore di una successione di numeri dati: da tale studio scoprì l'annullarsi delle differenze seconde per la successione dei numeri naturali, delle differenze terze per la successione dei numeri quadrati e così via.
Per collegare ciò al calcolo infinitesimale egli doveva rivedere nelle successioni dei numeri i valori delle ordinate di una funzione e, nella differenza tra essi, la differenza di due ordinate vicine.
Fu proprio nel 1673, leggendo la lettera di Amos Dettonville sul *Traité des sinus du quart de cerche* che Leibniz intuì che la determinazione della tangente a una curva dipendeva dal rapporto tra le *differenze* delle ordinate e delle ascisse, quando queste erano infinitesime, e che le quadrature erano legate alla somma delle ordinate cioè dei rettangoli infinitesimi che formavano l'area.
Leibniz introdusse così un'operazione, la differenziazione, che agisce sulle variabili e sulle loro combinazioni, e che corrisponde a prendere la differenza tra due valori infinitamente vicini delle variabili. Saranno proprio le proprietà formali della differenza e il carattere infinitesimo delle differenze, che permetteranno a Leibniz di trovare le regole di differenziazione che caratterizzeranno il suo metodo.
Egli elaborò un linguaggio e una notazione confacenti a questa nuova branca della matematica, notazione che ebbe successo anche negli anni a venire tanto che tutt'oggi i contributi di Leibniz sono evidenti.
Dopo vari tentativi fissò la sua scelta su dx e dy per indicare le minime differenze possibili (differenziali) di x e y. In un primo tempo scrisse semplicemente omn. y (cioè "tutte le y") per indicare la somma di tutte le ordinate di una curva; più tardi, però, usò il simbolo $\int y$, e ancora più tardi $\int ydx$, dove il simbolo dell'integrale non rappresentava altro che l'ingrandimento della lettera s indicante la somma.

Nova Methodus

Nel 1684 Leibniz pubblicò all'interno degli *Acta Eruditorum* una memoria intitolata *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractae, nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus* ossia "Nuovo metodo per i massimi e i minimi, come anche per le tangenti, che non si arresta davanti a quantità frazionarie e irrazionali e modo unico di calcolo per i suddetti".
Tale titolo va ad enfatizzare le caratteristiche della sua invenzione, destinata a soppiantare i metodi esistenti grazie alla sua generalità: sia che una funzione fosse razionale o irrazionale, algebrica o trascendente, potevano sempre essere applicate le operazioni per trovare somme e differenze, superando così le complessità del calcolo, che rendevano ad esempio inutilizzabili i metodi cartesiani in presenza di radicali o espressioni frazionarie.

Nella sua esposizione egli considerò più curve VX, WX, YX, ZX,(si veda la Figura 1.11) [6] alle quali tracciò le tangenti trovandone poi i punti di intersezione con l'asse AX. È in questo frangente che Leibniz definì la *differenza dy*, che altro non è che quello che noi chiamiamo oggi differenziale.
Per maggior semplicità noi andremo a considerare il caso di un'unica curva (come in Figura 1.12).

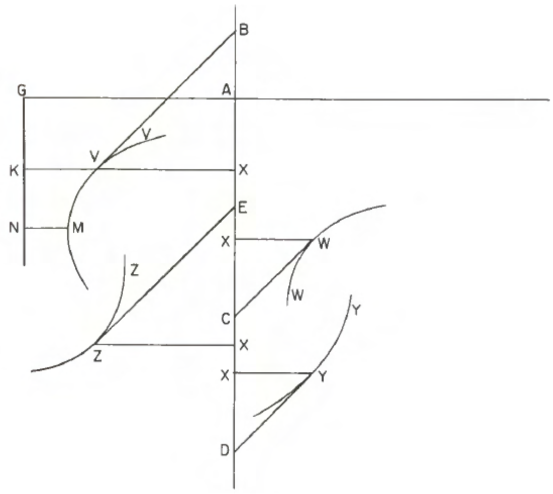


Figura 1.11

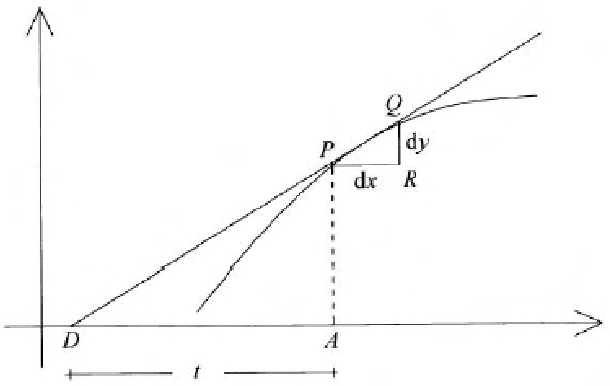


Figura 1.12

Partendo da una curva $y = f(x)$ l'idea di Leibniz è quella di tracciare la tangente uscente da un punto (x, y) della curva.
Dato ad x un incremento dx, l'idea sta nello scegliere il differenziale della funzione, dy, in modo che il rapporto $\frac{dy}{dx}$ corrisponda al coefficiente angolare della tangente.
Questa definizione coincide con quella di derivata che si dà oggi in analisi moderna, tuttavia nell'opera di Leibniz mancano le giustificazioni al suo metodo, tanto che non parlò mai di derivata e non introdusse mai i concetti di limite o di infinitesimi dei vari ordini.
Soltanto a un certo punto disse:[7]

"Dalla conoscenza di questo particolare algoritmo, o di questo calcolo che io chiamo differenziale, ... , possono ... ottenersi i massimi e minimi, come pure le tangenti [7], in modo che non sia necessario far sparire le frazioni o gli irrazionali, od altri vincoli, come tuttavia si doveva fare secondo i metodi sinora pubblicati."

L'identificazione della curva con la retta tangente è possibile dunque solo a patto di considerare dx infinitesimo.

Una volta stabilito che la sottotangente si esprime come $t = y\frac{dx}{dy}$ occorre stabilire delle regole per calcolare il rapporto $\frac{dx}{dy}$ a partire dall'equazione della curva.

[6] Dirk Struik, *A Source Book in Mathematics 1200-1800*, Cambridge, Harvard University Press, 1969.

[7] Si noti che Leibniz aveva ricavato il rapporto $\frac{dy}{dx}$ dalla conoscenza della tangente, mentre qui sembrerebbe alludere al processo inverso.

Va precisato poi che nel Nova Methodus Leibniz definì i differenziali, o come li chiama lui le "differenze", a partire dalle tangenti, ma solo più avanti definirà quest'ultime, usando le seguenti parole:

> *"trovare la tangente è condurre una retta che congiunga due punti aventi una distanza infinitamente piccola, ossia tracciare il lato prolungato di un poligono infinitangolo, che per noi equivale alla curva"*

Dopo queste brevi puntualizzazioni, riprendiamo quindi nello specifico il ragionamento di Leibniz facendo riferimento alla curva in Figura 1.12.[18]
Se si interpreta la curva come un poligono di lati infinitesimi, la tangente altro non è che il prolungamento di uno di questi lati infinitesimi, ovvero la retta che unisce due punti infinitamente vicini P e Q che giacciono sulla curva.
Posta $DA = t$ la misura della sottotangente e $P(x, y)$ e $Q(x + dx; y + dy)$ i due punti sulla curva, possiamo sfruttare la similitudine dei due triangoli PAD e QRP, ottenendo così la seguente proporzione

$$DA : PA = DR : QR \tag{1.6}$$

che, secondo le nostre ipotesi, diventa

$$t : y = dx : dy \tag{1.7}$$

da cui si può ricavare la sottotangente $t = y\frac{dx}{dy}$.
Come abbiamo precedentemente accennato, ricordiamo che in questa spiegazione Leibniz non parla ancora di differenziali come di grandezze infinitesime: più precisamente in un punto disse che dx era una quantità arbitraria e dy era definito attraverso la proporzione (1.7).
Questa definizione di dy presupponeva però un'espressione della sottotangente e perciò non era una definizione completa, tanto più che la definizione data da Leibniz della tangente non era soddisfacente.
Tuttavia si può facilmente notare che di fatto Leibniz, al momento della stesura del suo lavoro, considerava già dx e dy come infinitesimi.
Osserviamo infatti che per stabilire la proporzione (1.6) i punti P e Q, presi sulla curva, devono giacere sulla retta tangente, ma se dx fosse un segmento non infinitesimo, i punti P e Q continuerebbero a giacere sulla tangente e non sulla curva, come invece si è assunto.
È proprio nel *Nova Methodus* che Leibniz presentò delle regole di differenziazione o meglio, come disse lui, delle regole per calcolare *"le differenze"*, che di seguito riporteremo[8]

Sia a una quantità costante, sarà

$$da = 0 \qquad\qquad dax = adx$$

[8] *Nova Methodus di Leibniz*, http://dm.unife.it/storia/nova.htm.

Addizione e sottrazione

se si ha z - $y + w + x = v$ sarà $d(z - y + w + x) = dv = dz$ - $dy + dw + dx$

Moltiplicazione

$$\text{posto } y = xv \quad \text{sarà} \quad dy = xdv + vdx$$

La moltiplicazione rappresenta un esempio evidente del fatto che Leibniz trascurò nel suo calcolo gli infinitesimi di ordine superiore. Se infatti le minime differenze di x e v sono dx e dv allora dxv, ossia la differenza minima di xv è $(x + dx)(v + dv) - xv$. Essendo dx e dv infinitamente piccoli, il termine $dxdv$ sarebbe "infinitamente infinitesimo", dunque trascurabile: è da quest'ultima considerazione che si giunge a $dxv = xdv + vdx$.[9]

Divisione

$$\text{posto } z = \tfrac{v}{y} \quad \text{sarà} \quad d\tfrac{v}{y} = dz = \tfrac{\pm vdy \mp ydv}{y^2}$$

In questo caso notiamo che Leibniz, non avendo fissato esatte convenzioni sull'uso dei segni in geometria analitica, si trovò costretto a complicare le regole del calcolo introducendo segni ambigui.

Potenza

$$dx^a = ax^{a-1}dx$$
$$d\frac{1}{x^a} = -\frac{adx}{x^{a+1}}$$

Radice

$$d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}d\sqrt[b]{x^{a-b}}$$

Come Newton, anche Leibniz diede poi grande importanza alle serie infinite, sottolineando come le nuove operazioni del suo calcolo si potessero applicare tanto ad esse quanto alle espressioni algebriche finite.

Nel *Nova Methodus* Leibniz propose alcuni esempi di applicazione del proprio metodo e tra questi troviamo *il problema della rifrazione della luce*, che l'autore aveva già trattato in precedenza nella memoria *Unicum opticae, catoptricae et dioptricae Principium* pubblicata nel 1682 negli Acta Eruditorum.
In particolare questo esempio è interessante in quanto vediamo l'uso del calcolo

[9] In una lettera a Wallis del 30 Marzo 1690 Leibniz giustificava le sue idee in questo modo: *"E' utile considerare quantità infinitamente piccole tali che, quando si cerca il loro rapporto, esse possono non essere considerate uguali a zero, ma che vengono respinte non appena compaiono insieme a quantità incomparabilmente più grandi... non possiamo avere insieme xdx e $dxdx$. Se quindi dobbiamo differenziare xy scriveremo $(x + dx)(v + dv) - xv = xdy + ydx + dxdy$. Qui però $dxdy$ deve essere respinto perché è incomparabilmente minore di $xdy + ydx$. Così, in ogni caso particolare l'errore è minore di qualsiasi quantità finita".*

per risolvere un problema di minimo: anche Fermat, come Leibniz, era arrivato a determinare la legge di rifrazione attraverso un principio di minimo, tuttavia il matematico francese riteneva che si dovesse minimizzare il tempo necessario per andare da un punto all'altro.
Ripercorriamo allora nel dettaglio questo esempio, ponendo l'attenzione anche sulle parole usate da Leibniz per spiegarlo [10].

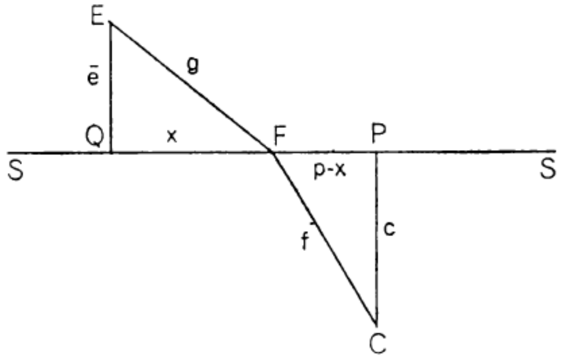


Figura 1.13

Si considerino due punti C e E, posti nei due semipiani opposti determinati dalla retta complanare SS e immersi in due mezzi di densità rispettivamente h e r.
L'obiettivo di Leibniz era trovare F sulla retta SS tale che il percorso della luce da C ad E per F fosse il minimo possibile o, usando le parole del matematico tedesco, *la più facile di tutte le vie possibili.*
Nella memoria del 1682 Leibniz parlò proprio di questa legge dell'ottica, usando le seguenti parole:

"La luce perviene da un punto raggiante al punto che dev'essere illuminato attraverso la via più facile tra tutte quelle possibili."

Per Leibniz il problema si poteva risolvere andando a trovare quel punto F che minimizzava la seguente espressione

$$CFh + EFr \tag{1.8}$$

chiamata *" difficoltà del cammino da C a E attraverso F "*. Supponiamo poi, come in Figura 1.13, che $PQ = p$, $EQ = e$, $PC = c$. Se $FQ = x$, allora $PF = p - x$. L'espressione (1.8) diventa

$$h\sqrt{(p-x)^2 + c^2} + r\sqrt{x^2 + e^2} \tag{1.9}$$

ponendo il primo radicando uguale a l e il secondo uguale a m si ottiene

$$w = h\sqrt{l} + r\sqrt{m} \tag{1.10}$$

A (1.10) va applicato il principio del minimo di Leibniz [11] ossia va posto il differenziale $dw = 0$.

[10] Per vedere il passo completo di Leibniz il lettore può consultare *Castelnuovo Guido, Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna con scritti di Newton, Leibniz, Torricelli, Biblioteca scientifica Feltrinelli,1962* da cui è tratta anche la figura 1.13.

[11] Con riferimento alla Figura 1.11 le parole di Leibniz riguardo al principio del minimo furono le seguenti: *"... poiché le ordinate v ora crescono, ora decrescono, dv sarà una quantità ora positiva, ora negativa ... né l'una né l'altra cosa avviene in un punto intermedio M, nel caso in cui le v non crescono né decrescono, ma sono stazionarie e anzi diventa dv=0,....,cioè l'ordinata LV è massima (oppure, se si volgesse la concavità verso l'asse, sarebbe minima) e la tangente alla curva in M non è tracciata né al di sopra di X dalla parte di A,..., né al di sotto di X,..., ma è parallela all'asse".*

Ora, utilizzando le regole del calcolo già esposte, si ha che $dl = (2x - 2p)dx$ e $dm = 2xdx$ e da ciò si ottiene

$$r\frac{x}{\sqrt{m}} = h\frac{p-x}{\sqrt{l}} \tag{1.11}$$

Applicando ora queste considerazioni alla diottrica, considerando cioè r ed h come gli indici di rifrazione e osservando che $PF = p - x$ e $FQ = x$ sono proporzionali ai seni degli angoli di rifrazione (θ_r) e di incidenza (θ_i) otteniamo la consueta legge di rifrazione di Snell

$$\frac{r}{h} = \frac{\operatorname{sen}\theta_r}{\operatorname{sen}\theta_i}$$

Nel 1686, sempre negli *Acta Eruditorum*, Leibniz pubblicò una spiegazione al calcolo integrale, nella quale le quadrature venivano descritte dal matematico tedesco come casi particolari del metodo inverso delle tangenti.
In questo contesto Leibniz sottolineò la relazione inversa esistente tra differenziazione e integrazione nel teorema fondamentale del calcolo, facendo notare il ruolo essenziale delle curve trascendenti, trascurate ad esempio da Descartes, senza le quali però non si sarebbero avuti diversi integrali di funzioni algebriche come ad esempio $\frac{1}{x}$ o $\frac{1}{1+x^2}$.

1.3.1 Confronto con Newton e disputa sulle priorità

Abbiamo dunque visto come sia Leibniz, sia Newton abbiano il merito di aver trovato nel calcolo infinitesimale un nuovo metodo applicabile a molti tipi di funzioni.
Entrambi aritmetizzarono il calcolo e da questo punto di vista le analogie matematiche tra la formulazione newtoniana e quella leibniziana sono evidenti: basta infatti sostituire ai momenti di Newton $o\dot{x}$, $o\dot{y}$ i differenziali dx e dy per ottenere il metodo di Leibniz per le tangenti, poiché sono uguali le regole di differenziazione nei due casi.
Furono proprio le loro tecniche algebriche e le loro notazioni a permettere di costruire un metodo in grado di trattare con la stessa tecnica problemi di natura sia fisica, sia geometrica.
Altro punto in comune sta nell'essere riusciti ad intuire come l'antidifferenziazione portasse alla risoluzione dei problemi di area e volume, che fino a quel momento erano stati risolti per sommazione. In tal modo i quattro problemi principali che stavano alla base del calcolo e che abbiamo visto nei paragrafi precedenti (tasso di variazione, problema delle tangenti, massimi e minimi, aree e volumi) vennero ridotti alla differenziazione e antidifferenziazione.
Ci sono tuttavia delle sostanziali differenze tra i due matematici.

Per prima cosa Leibniz maneggiava direttamente i differenziali, ossia gli incrementi infinitamente piccoli di x e y, e ne determinava le relazioni. Newton, invece, usava gli incrementi per determinare le flussioni restando nell'ambito delle quantità finite, le velocità, la cui definizione rigorosa avrebbe condotto verso difficoltà analoghe a quelle della teoria leibniziana, ma che potevano essere ignorate a causa della familiarità del concetto. Newton usava quindi le quantità infinitesime ma relegandole a una questione di calcolo e presentando così il problema delle tangenti come una naturale conseguenza dell'interazione dei suoi punti di vista sulla cinematica con la geometria cartesiana.
Tutto il ragionamento di Newton si basava quindi sui tassi di variazione, compresi i problemi di aree e volumi: l'uso della sommazione lo troviamo infatti molto raramente, soppiantato a pieno titolo dalla differenziazione e antidifferenziazione. Leibniz ragionava in modo differente, egli infatti prima pensava in termini di sommazione, anche se le somme erano calcolate mediante l'antidifferenziazione.
Altra differenza stava poi nel metodo di lavoro: Leibniz era più interessato alle formule operative per il calcolo e alla scelta di una notazione adatta, mentre Newton non si preoccupava di formulare regole, bensì si concentrò sulle applicazioni del calcolo, applicazioni che influenzarono e determinarono la direzioni dell'analisi matematica degli anni a venire.

Abbiamo già visto che, nonostante Newton avesse iniziato a lavorare al calcolo nel 1665, non pubblicò mai nulla prima del 1687 e che, durante le sue visite londinesi, Leibniz fu accusato di aver letto gli scritti del famoso matematico inglese.
Si creò una vera e proprio controversia sulla priorità dell'invenzione del calcolo, tuttavia ora si è giunti alla conclusione che, nonostante Newton avesse portato a termine prima i suoi studi, Leibniz giunse in modo autonomo ai suoi risultati.
L'importanza di questa disputa non sta tanto nel capire chi fosse effettivamente a detenere il primato dell'invenzione, bensì risiede nella comprensione di come si svilupparono gli studi da lì in avanti. Si crearono infatti due sorte di partiti: i matematici continentali si schierarono dalla parte di Leibniz, quelli inglesi dalla parte di Newton. I due partiti ben presto cessarono di scambiarsi le idee e ciò portò a un'inevitabile distanziamento dei matematici inglesi a seguito di un'estensione e miglioramento del metodo leibniziano avvenuta nel continente.

Furono quindi Newton e Leibniz a dare il via a quella branca della matematica che prende il nome di calcolo infinitesimale o calcolo sublime. Nonostante ciò, come abbiamo visto più volte, nessuno dei due comprese con chiarezza e definì in modo rigoroso i propri concetti e ciò fu causa di non poche critiche.
Nel seguente paragrafo andremo quindi a vedere meglio queste critiche, con il fine di capire come, a partire da questi due grandi matematici, si sia sviluppato il calcolo, e in particolare il concetto di derivata.

1.4 La ricerca del rigore del calcolo infinitesimale

Ciò che dunque fin qui dovrebbe risultare evidente è che né Newton né Leibniz riuscirono a precisare i concetti fondamentali del calcolo, ossia quello di derivata e integrale. Non riuscendo a comprenderli esattamente, essi preferirono infatti basarsi sulla coerenza dei risultati e sulla fecondità del metodo per poter affrontare i problemi anche senza rigore.

Una lunga serie di critiche e attacchi ai due matematici ebbe inizio con la pubblicazione di due libri nel 1694 e 1695 ad opera del medico e geometra olandese *Bernard Nieuwentijdt* (1654-1718). Egli, pur ammettendo la correttezza dei risultati, lamentava la mancanza di una spiegazione in grado di giustificare come potessero quantità infinitamente piccole essere diverse da zero e nello stesso tempo essere in certe parti eliminate, mettendo in dubbio anche l'esistenza di differenziali di ordine superiore. Leibniz rispose prontamente al matematico olandese criticandolo di "eccessiva precisione" e rivendicando negli infinitesimi semplicemente delle quantità piccole quanto si vuole, aventi lo scopo di dimostrare che l'errore in cui si incorre nel calcolo è talmente piccolo da poter essere trascurato.
Per cercare di placare le critiche Leibniz enunciò un principio filosofico, noto come principio di continuità, riportato in una lettera del 1687 a Pierre Bayle [27]

"In ogni supposta transizione, che finisca in un termine qualsiasi, è ammissibile istituire un ragionamento generale in cui può essere incluso anche il termine finale"

Per confermare il suo principio, in un manoscritto del 1695, Leibniz portò l'esempio in cui le ellissi e le parabole vengono trattate come un unico ragionamento, anche se la parabola è un caso limite dell'ellisse in cui uno dei due fuochi è andato all'infinito. Egli fece notare come cose assolutamente uguali abbiano una differenza nulla, quindi la parabola non poteva essere un'ellisse, tuttavia aggiunse le seguenti parole:

E' possibile immaginare uno stato di transizione o di evanescenza in cui non è ancora sorta l'esatta uguaglianza o l'esatta quiete... ma in cui si sta passando in uno stato tale che la differenza è minore di qualunque quantità assegnabile e che in questo stato rimanga ancora una certa differenza, una certa velocità, un certo angolo, ma in ciascun caso tale che sia infinitamente piccolo... Sarà sufficiente se, quando parliamo di quantità infinitamente grandi ... o infinitamente piccole ... si intenda che vogliamo indicare quantità indefinitamente grandi o indefinitamente piccole, cioè tanto grandi quanto si vuole o tanto piccole quanto si vuole, cosicché l'errore che si può commettere sia minore di una certa quantità assegnata.
Sulla base di queste ipotesi, tutte le regole del nostro algoritmo, quali sono esposte negli "Acta Eruditorum" dell'ottobre 1684, possono essere dimostrate senza molta fatica."

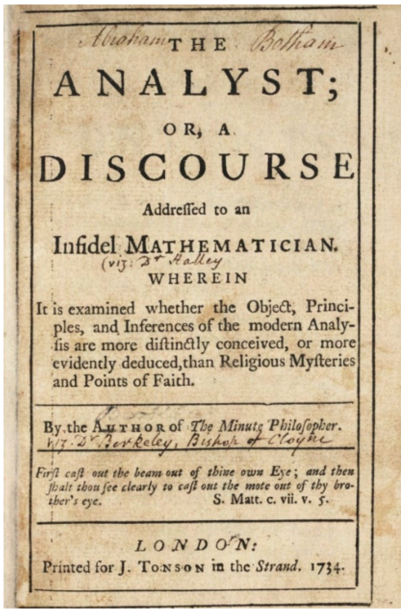
Tuttavia il principio di continuità di Leibniz non può ovviamente essere considerato un assioma matematico e le critiche da diversi fronti continuarono a farsi sentire. Infatti con l'avvvento del nuovo secolo, mentre da un lato furono pubblicati diversi tentativi per giustificare i procedimenti di Lebniz, da parte dei continentali, e di Newton, da parte degli inglesi, dall'altro non mancarono nuovi attacchi, il più violento dei quali da parte dell'arcivescovo *George Berkeley.*

1.4.1 George Berkeley

Figura 1.14: Berkeley

George Berkeley (1685-1753) fu un filosofo, teologo, vescovo anglicano irlandese che, temendo la crescente minaccia per la religione costituita dal meccanicismo e dal determinismo, sostenne che il successo del calcolo newtoniano fu soltanto frutto del caso, ossia il metodo delle flussioni risolvesse certi problemi e trovasse numerose applicazioni nel mondo reale esclusivamente grazie a una compensazione casuale di errori.[12]
Nel 1734 pubblicò *The Analyst, Or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician.*
Wherein It is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith. "First cast out the beam out of thine own Eye; and then shalt thou see clearly to cast out the mote out of thy brother's Eye"

(L'Analista, ovvero Discorso rivolto a un *matematico infedele.* Dove si esamina se l'oggetto, i principi e le inferenze della moderna analisi siano concepiti più distintamente o dedotti più evidentemente, dei misteri religiosi e degli articoli di fede. "Scaccia prima il trave dal tuo occhio e poi vedrai abbastanza chiaramente per scacchiare il granello di polvere dall'occhio di tuo fratello").



THE
ANALYST;
OR, A
DISCOURSE
Addressed to an
Infidel MATHEMATICIAN.
WHEREIN
It is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith.

By the AUTHOR of *The Minute Philosopher.*

First cast out the beam out of thine own Eye; and then shalt thou see clearly to cast out the mote out of thy brother's eye. S. Matt. c. vii. v. 5.

LONDON:
Printed for J. TONSON in the *Strand.* 1734.

Figura 1.15

Con molta probabilità la figura del matematico infedele coincideva con Edmond Halley, anche se altri ipotizzarono che potesse essere Isaac Newton stesso. Unita a un taglio satirico, l'opera rappresenta una critica verso i fondamenti del calcolo infinitesimale ma non solo: Berkeley cercò infatti di smontare la matematica, affermando di scoprire numerosi vuoti nelle sue dimostrazione e nell'uso degli infinitesimi.
Nel suo trattato, cercò di sostenere che, sebbene il calcolo portasse a risultati reali, le sue basi non erano più sicure di quelle della religione e osservò come i matematici stessero procedendo induttivamente e non deduttivamente senza fornire la logica o le ragioni dei passi che compivano.
Berkeley centrò il principale punto debole della costruzione newtoniana, cioè la

[12] *La Critica di George Berkeley al calcolo infinitesimale* (a cura di Ambra Catozzi) http://dm.unife.it/divulgazione/2019/4.I%20fondamenti%20del%20calcolo.html.

definizione di flussione, così come quella degli incrementi infinitesimi di stampo leibniziano.
Egli fece notare che, per trovare le flussioni o per calcolare i rapporti tra differenziali, i matematici prima assumevano che venissero apportati incrementi alla variabile e poi eliminavano tali incrementi ponendoli uguali a zero.
E' per tale motivo che, come accennato poco fa, egli non ritenne il calcolo altro che una compensazione di errori, dandone una descrizione in questi termini:

"In virtù di un duplice errore giungiamo, se non proprio alla scienza, per lo meno alla verità".

Altro punto su cui pose l'attenzione fu poi la definizione di velocità istantanea, considerata erronea in quanto, riducendo gli incrementi della distanza e del tempo, si riconduceva a una forma del tipo $\frac{0}{0}$, priva di significato.
L'altra definizione newtoniana, basata sulle prime e ultime ragioni, prevedeva invece la considerazione del rapporto non quando era uguale a zero, né quando era diverso da zero, ma nel momento stesso in cui si annullava e il triangolo caratteristico si contraeva in un punto. Anche quest'ultimo passaggio fu criticato dall'arcivescovo irlandese che, rivolgendosi al "matematico infedele", usò le seguenti parole:

"Si assume che le flussioni possono essere esposte o espresse da linee finite proporzionali ad esse: quali linee finite possono essere chiaramente concepite, conosciute e ragionate, in modo che possano essere sostituite con le flussioni e tali che le loro relazioni o proporzioni reciproche possano essere considerate come proporzioni di flussioni: con ciò la dottrina diventa chiara e utile. Io rispondo che se per arrivare a queste linee finite proporzionali alle Flussioni, si percorrono alcuni passaggi oscuri e inconcepibili, allora quelle stesse linee finite così chiaramente concepite, riconoscono che il tuo procedimento non è chiaro e che il tuo metodo non è scientifico."

Anche per quanto riguarda la derivata considerata come rapporto degli incrementi evanescenti in x e y, Berkeley non risparmiò le critiche, ritenendo tali incrementi

"... né quantità finite, né quantità infinitesime, e tuttavia non sono nulla. Perché non chiamarli ***fantasmi di quantità defunte****"*

Alcuni matematici cercarono di controbattere alle critiche di Berkeley, tuttavia con scarsi risultati. Più precisamente, fino all'Ottocento, ci furono un susseguirsi di risultati con il tentativo di fare chiarezza ai grandi dubbi che erano emersi e che aleggiavano intorno alla questione del calcolo.

1.4.2 Ulteriori tentativi di portare rigore da MacLaurin a D'Alembert

Colin MacLaurin (1698-1746) per rispondere a Berkeley, nel suo *Treatise of Fluxions* del 1742, cercò di fondare rigorosamente il calcolo infinitesimale compiendo uno sforzo che, benché notevole, non era corretto.
Egli appartenne alla scuola matematica inglese e pertanto seguì il modello newtoniano, anche se evitò l'uso del concetto di infinitesimo, usato saltuariamente da Newton, prediligendo invece nella sua trattazione solo i concetti di moto e velocità. MacLaurin stesso infatti scrisse[13]:

"La velocità secondo cui una quantità scorre ...è chiamata flussione che è pertanto misurata dall'incremento [positivo o negativo] che sarebbe generato in un dato tempo da questo moto, se fosse uniformemente continuato da quello stesso istante senza accelerazione o decelerazione."

La trattazione di Maclaurin fu puramente geometrica e intuitiva tanto da fare uso nella sua opera di 350 disegni che permettessero una trattazione descrittiva degli oggetti matematici.
Nella prefazione si pose fin da subito contro Berkeley scrivendo:

L'autore di quel lavoro [Berkeley] aveva presentato il metodo delle flussioni come fondato su un falso ragionamento e pieno di misteri. Le sue motivazioni sembrano essere state motivate in gran parte dalla maniera concisa in cui gli elementi di questo metodo sono stati di solito descritti; e l'essere stato frainteso da una persona delle sue capacità mi è sembrata una prova sufficiente che si richiedesse una trattazione più completa dei loro fondamenti.

Maclaurin tuttavia non riuscì nel suo intento e si limitò in realtà a usare abilmente la geometria in modo da persuadere gli altri a servirsene trascurando l'analisi. Ciò non convincerà i matematici del continente, in particolare *Lagrange* (1736-1813) che, seguendo una trattazione algebrica del calcolo, non approvò l'introduzione di un' idea ad esso estranea: la velocità . Pertanto nella *Théorie des fonctions analytiques* scrisse:

"Ma, da un lato, introdurre il movimento in un calcolo che non ha che quantità algebriche per oggetto è introdurre una idea estranea, che costringe a considerare queste quantità come linee percorse da un mobile; d'altro lato bisogna riconoscere che non si abbia affatto una idea ben chiara di cosa sia la velocità istantanea di un punto, quando questa velocità è variabile; e si può vedere nel dotto "Trattato delle flussioni" di Maclaurin come sia difficile dimostrare rigorosamente il metodo delle flussioni, e quanti artifici particolari occorra impiegare per dimostrare le diverse parti di questo metodo."

In generale ciò che emerse da parte dei matematici continentali fu un approccio basato maggiormente sulle formulazioni algebriche e un esempio importante sotto questo punto di vista fu **Euler** (1707-1783).

[13] *MacLaurin e Lagrange: due approcci al calcolo fra geometria e algebra* (a cura di Paolo De Fazio) http://dm.unife.it/divulgazione/2019/3.La%20diffusione%20del%20calcolo.html.

Nelle sue *Institutiones* del 1755 egli bandì i differenziali e tentò di spiegare per via algebrica come il rapporto $\frac{dy}{dx}$, che per lui era $\frac{0}{0}$, potesse essere un numero definito, ritenendo che la derivata non fosse altro che un modo comodo per ottenere tale rapporto. In pratica Euler accettò il fatto che potessero esistere delle quantità assolutamente uguali a zero e che di esse si potesse dedurre il rapporto ridotto a una quantità finita. Il merito che si può dare a Euler fu quello di liberare il calcolo infinitesimale dalla geometria e fondarlo sull'aritmetica e l'algebra.
Lagrange nella sua *Théorie des fonctions analytiques* del 1797 compì un tentativo di ricostruzione del calcolo infinitesimale, ambizione la sua che emerge anche dal sottotitolo dell'opera *"Contenente i principali teoremi del calcolo differenziale senza l'uso dell'infinitamente piccolo, né delle quantità evanescenti, né dei limiti o delle flussioni, e ricondotto all'arte dell'analisi algebrica delle quantità finite"*.
Egli ritenne che, sia gli infinitesimi leibniziani, sia gli zeri assoluti di Euler non fossero sufficientemente chiari per fornire le fondamenta "a una scienza la cui certezza dovrebbe basarsi sulla sua propria evidenza".[27]
Per cercare di raggiungere il suo obiettivo Lagrange si affidò all'algebra e, in particolare, allo sviluppo delle funzioni in serie di potenze: per questo riprese gli studi fatti da Euler, che aveva trovato espansioni in serie di potenze infinite per funzioni come il seno, il coseno, l'esponenziale.
Fu proprio nel 1797 che Lagrange fu convinto di aver dimostrato che ogni funzione potesse essere scritta nella forma

$$f(x+h) = f(x) + p(x)h + q(x)h^2 + r(x)h^3 + ... \tag{1.12}$$

eccetto per un numero isolato di valori di x.
In tal modo egli definì una nuova funzione, il coefficiente lineare in h, che è $p(x)$ in (1.12), che chiamò *funzione derivata* e indicò con $f'(x)$.
Denotando quindi p con $f'(x)$, è possibile poi ricavare gli altri coefficienti, quali ad esempio $q(x) = \frac{f''(x)}{2!}$, $r(x) = \frac{f'''(x)}{3!}$ e così via.
Con questa definizione si superava in qualche modo il problema del calcolo newtoniano, in cui la definizione di flussione era strettamente legata al moto, e il problema del quoziente tra differenziali, ampiamente criticato.
Lagrange andava dunque a considerare le derivate come funzioni, piuttosto che come rapporti o velocità, e le andava a definire in base alla loro posizione nello sviluppo di Taylor.
Tuttavia anche tale metodo presentava delle lacune, in particolar modo presupponeva che ogni funzione potesse essere sviluppata in serie di potenze.
Non è possibile infatti accettare la definizione di Lagrange di derivata, dal momento che essa si basava sul fatto che ogni funzione differenziabile fosse la somma di una serie di Taylor e perciò dovesse avere una serie infinita di derivate.[23]
I criteri oggi noti per l'esistenza dello sviluppo in serie di potenze coinvolgono infatti l'esistenza delle derivate stesse, che era proprio ciò che Lagrange voleva evitare.
Lagrange era convinto di essere riuscito a fare a meno del concetto di limite per formalizzare il calcolo e, nonostante l'inadeguatezza del suo approccio, il suo metodo incontrò per un certo periodo un grande favore tra i matematici dell'epoca.

Tra i molti sforzi e tentativi proposti per introdurre rigore nel calcolo differenziale, pochi però erano effettivamente gli studi sulla strada giusta.
Un importante contributo venne dato da **D'Alembert** (1717-1783), il quale ritenne gli infinitesimi un modo di esprimersi che evitava la più lunga descrizione in termini di limiti.
Nell'articolo *"Différentiel"* della *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts, et des Métiers* (1751-80), ritroviamo le seguenti parole di D'Alemebert:

"Newton non ha mai considerato il calcolo differenziale come calcolo di infinitesimi, ma come un metodo delle prime e ultime ragioni, cioè come un metodo per trovare il limite di questi rapporti"

Egli definì il differenziale come una quantità infinitamente piccola e, nella sua ricerca dell'uso dei limiti, come Euler, affermò che il rapporto $\frac{0}{0}$ poteva essere una quantità finita. A tal proposito, in un articolo, egli disse:

"La teoria dei limiti è la vera metafisica del calcolo... Nel calcolo differenziale non si ha mai a che fare con quantità infinitesime, ma unicamente con limiti di quantità finite. Perciò la metafisica delle quantità infinite e infinitamente piccole, più grandi o più piccole l'una dell'altra, è completamente inutile per il calcolo differenziale."

D'Alembert fu quindi il primo a rendersi conto che Newton possedeva essenzialmente la nozione corretta di derivata, ritenendo che essa doveva basarsi sul limite del rapporto delle differenze della variabile dipendente e della variabile indipendente, andando a riformulare così in qualche modo i rapporti primi e ultimi newtoniani. Non si spinse però oltre perché era legato all'intuizione geometrica e, così come i suoi successori dei primi cinquant'anni, non riuscì a dare una definizione chiara di derivata.

Sarà necessario attendere l'Ottocento per avere una vera e propria riformulazione di quello che era il calcolo infinitesimale.Una prima soluzione fu trovata infatti nell'Ottocento quando il matematico francese **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) ridefinì la derivata attraverso il concetto di limite, definizione che verrà poi perfezionata da **Bernard Bolzano** (1781- 1848) assieme al tedesco **Karl Weierstrass** (1815-1897), che definirono in modo rigoroso i limiti, senza far uso di infinitesimi, ma con la ben nota definizione *epsilon-delta*.
Saranno proprio questi i passaggi cruciali che andremo a vedere maggiormente nel dettaglio nel prossimo paragrafo.

1.4.3 Il calcolo diventa analisi

Fin qui abbiamo ampiamente visto come l' approccio di un matematico al calcolo infinitesimale prima della fine del XVIII secolo fosse essenzialmente pragmatico e mirasse a risolvere problemi soprattutto sperimentali derivanti dal mondo fisico. Lagrange fu uno dei primi ad ammonire la comunità internazionale che la mancanza di rigorose basi per il calcolo doveva rappresentare una una grande sfida per i matematici, tanto che egli inciterà i contemporanei agli studi usando le seguenti parole *"Andate avanti, e la fede vi verrà"*.

Figura 1.16: Cauchy

La vera svolta la si ebbe però nell'Ottocento con **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857), a partire dal quale i fondamenti del calcolo diventarono una parte essenziale dell'analisi, passando dal XVIII secolo orientato ai risultati al XIX secolo basato sul rigore dei risultati stessi[14].
Fu proprio intorno al 1800 infatti che i matematici cominciarono a preoccuparsi dell'imprecisione dei concetti e delle dimostrazioni di vaste branche dell'analisi.
Per il suo *Cours d'analyse de l'ecole royale polytechnique* del 1821 Cauchy adottò come sottotitolo la frase di Lagrange *"analyse algébrique"*.
La vera innovazione fu però che, contrariamente a Lagrange, Cauchy riteneva che fossero le disuguaglianze, invece delle uguaglianze, a poter essere la giusta base per il calcolo. Prima di Cauchy, le approssimazioni erano viste come un metodo per avvicinarsi sempre di più a un numero reale la cui esistenza era data per scontata. Dopo Cauchy, i numeri reali vennero definiti come limiti di processi approssimanti, e la loro esistenza venne dimostrata dalla convergenza dell'approssimazione.
Più precisamente questa idea di disuguaglianza risiedeva nella definizione di limite data da Cauchy ossia [4]

"Quando i valori successivamente attribuiti alla stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore costante, in modo che alla fine differiscano da questo di una quantità piccola a piacere, allora esso è chiamato il limite di tutti gli altri."

Va comunque precisato, e può essere facilmente notato anche dalla definizione precedente, che il rigore raggiunto da Cauchy non è ancora paragonabile agli standard odierni: ciò lo intuiamo ad esempio dall'uso di espressioni quali "si avvicina indefinitamente", "piccolo quanto si vuole","una variabile si avvicina al suo limite" ecc., tuttavia è anche evidente il passaggio tra la matematica del Settecento, in cui mancavano del tutto i concetti base di limite e continuità, e quella dell'Ottocento.
Sempre nell'ottica del ragionamento con i limiti, mentre molti matematici precedenti avevano concepito un infinitesimo come un numero fisso molto piccolo, Cauchy lo definì come una variabile dipendente:

[14] *Cauchy: il calcolo diventa analisi* (a cura di Jonathan Franceschi) http://dm.unife.it/divulgazione/2019/home.html.

"Si dice che una quantità variabile diventa infinitamente piccola quando il suo valore numerico decresce indefinitamente in maniera da convergere verso il limite zero."

Fu dunque attraverso questo parole che Cauchy cercò di chiarire la nozione leibniziana di infinitesimo, liberandola dai suoi legami metafisici.
Nel contesto dato da Cauchy al calcolo infinitesimale erano fondamentali dunque i concetti di funzione e limite di una funzione.
Nel *Résumé des lecons* definì la derivata di $y = f(x)$ rispetto a x assegnando alla variabile x un incremento $\Delta x = i$ e considerando il limite del rapporto degli incrementi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

quando i tende a zero.
Con Cauchy il differenziale prende significato soltanto in termini di derivate e costituisce una semplice nozione ausiliaria di cui si potrebbe fare a meno dal punto di vista logico: in particolare il dx leibniziano assume il significato di una qualsiasi quantità finita, mentre il dy è definito come $f'(x)dx$.
Cauchy diede anche una definizione di continuità che, sfruttando il suo modo di definire l'infinitamente piccolo, può essere essere assimilita alla definizione moderna: una funzione $f(x)$ risulta continua entro limiti fissati se, nell'intervallo compreso tra questi limiti, un incremento infinitamente piccolo della variabile x produce un incremento infinitamente piccolo della funzione stessa.
Altra innovazione fondamentale apportata da Cauchy nell'ambito del calcolo fu il perfezionamento del concetto di integrale.
L'idea di Cauchy fu quella di considerare una funzione $f(x)$ continua su un intervallo (x_0, X) e di suddividere l'intervallo in n sotto-intervalli (x_i, x_{i+1}), non necessariamente uguali tra loro. A questo punto l'integrale poteva essere approssimato sommando gli n prodotti $(x_{i+1} - x_i)f(x_i)$.
Il problema di questo approccio è che il valore dell'approssimazione dipende dalla suddivisione dell'intervallo, quindi, affinché la definizione fosse ben posta, era necessario dimostrare che in ultima analisi il valore del limite di tale approssimazione fosse indipendente dalla suddivisione. Cauchy riuscì nell'intento usando una versione di continuità della funzione $f(x)$ più forte di quella puntuale, ossia la continuità uniforme.

Cauchy è stato la tessera fondamentale nel passaggio dal calcolo di Newton e Leibniz alla moderna analisi matematica ma, come spesso accade nella storia della matematica, ci fu un caso di simultaneità nelle scoperte. Infatti concezioni analoghe furono sviluppate verso la stessa data da **Bernard Bolzano** (1781-1848), prete boemo che lavorò all'aritmetizzazione del calcolo.
In realtà forse fu proprio lui il primo, nel 1817, a definire la derivata di $f(x)$ come la quantità $f'(x)$ a cui si avvicina indefinitamente il rapporto $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ quando Δx si avvicina a 0 attraverso valori positivi o negativi. [28]
Un grande merito da attribuire a Bolzano fu quello di intuire per la prima volta la distinzione tra continuità e derivabilità. Nella sua *Funktionenlehre*, scritto nel 1834 mai completato e pubblicato postumo nel 1930, diede un esempio di funzione

continua non derivabile, esempio che rimase ignoto e che probabilmente non avrebbe avuto grande seguito in quanto la curva non aveva una rappresentazione analitica e per i matematici di quel periodo le funzioni erano entità date da espressioni analitiche.
L'esempio che attirò invece maggior attenzione è dovuto a **Karl Weierstrass** ed è rappresentato dalla funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n cos(a^n \pi x)$$

con a numero intero dispari, b costante positiva minore di 1 tale che $ab > 1 + (3\pi/2)$. Tale serie è uniformemente convergente, definisce una funzione continua ed è importante perché promosse gli studi e la costruzione di molte più funzioni continue ma non derivabili.
Weierstrass fu di fondamentale importanza in quanto possiamo attribuire a lui il merito di aver eliminato la vaghezza che aleggiava nelle definizioni fino ad allora formulate, formalizzando, attraverso la ben nota notazione *epsilon delta*, quelle definizioni oggi comunemente accettate di continuità, limite e derivata.

A discapito di Leibniz e dei suoi infinitesimi, si compì così il processo sulla rifondazione rigorosa dei concetti dell'Analisi Matematica: gli infinitesimi non erano più presenti e si era giunti al risultato cercato senza contraddizioni, infatti, con la formalizzazione del concetto di limite, il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ non era più privo di significato in quanto non veniva mai posto $\Delta x = 0$.
I matematici erano dunque sempre più restii a fidarsi dell'intuizione e del ragionamento geometrico, nonostante i metodi di Leibniz continuassero a conservare il fascino di una semplicità ed immediatezza che l'Analisi di Cauchy e Weierstrass aveva perso.
Sebbene presentassero molte lacune, i metodi leibniziani non portarono però a dei risultati scorretti, ragion per cui non furono abbandonati completamente: essi riaffioreranno infatti nel Novecento grazie al matematico **Abraham Robinson** (1918-1974), il quale ridarà dignità agli infinitesimi schiudendo le porte a quella che prenderà il nome di **analisi non standard**.
È proprio intorno alla figura di Robinson e a questa possiamo dire "rinascita degli infinitesimi" che si svilupperà il prossimo capitolo.

Capitolo 2

L'approccio non standard all'analisi con i numeri iperreali

Nel capitolo precedente abbiamo visto come nell'Ottocento si giunse a una completa riformulazione del calcolo differenziale ad opera di Karl Weierstrass con l'introduzione del concetto di limite, approccio che permise di eliminare definitivamente l'uso degli infinitesimi. Tale metodo, se pur rigoroso, ha però il difetto di far perdere l'intuizione iniziale che aveva dato il via alla nascita del calcolo infinitesimale e che comunque aveva condotto a delle conclusioni corrette.
Lo scopo di questo capitolo è quello di mostrare come in realtà si possa trovare una legittimazione al ragionamento di Leibniz: questo è possibile attraverso il metodo introdotto dal logico *Abraham Robinson* (1918 – 1974), il quale diede una nuova identità agli infinitesimi, rendendone rigoroso il loro utilizzo.

2.1 L'idea di Abraham Robinson

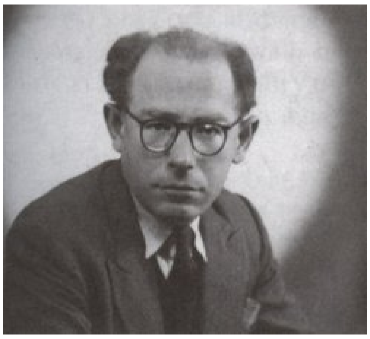


Figura 2.1: Robinson

Nel 1960 il matematico Abraham Robinson risolse il problema durato tre secoli di dare uno sviluppo rigoroso al calcolo basandosi sull'utilizzo degli infinitesimi. Abbiamo già ampiamente visto che la piena fioritura del metodo degli infinitesimi si ebbe con Newton e Leibniz i quali, tra il 1660 e il 1680, formularono i teoremi fondamentali del calcolo. Per essere precisi Leibniz in realtà non proclamava l'esistenza reale delle quantità infinitesime, bensì si limitava a sostenere che si poteva ragionare come se esistessero, senza commettere errori. Tuttavia abbiamo anche visto che furono mosse più critiche al suo metodo, ritenuto dai più poco rigoroso e autocontraddittorio. Proviamo ad esempio a fissare le idee esposte al Capitolo 1 considerando un esempio specifico, ossia derivando alla

Leibniz la funzione $f(x) = x^2$. Così facendo, si ottiene

$$\frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \frac{2x\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = 2x + \varepsilon = 2x$$

in cui prima si divide per la quantità infinitesima e poi la si elimina considerandola nulla. Tuttavia, nonostante non sia difficile trovare delle critiche a tale metodo, non si può negare che il risultato a cui giunse Leibniz fosse corretto.
Fu proprio Robinson che, con le sue ricerche, mostrò come dopo tutto Leibniz avesse avuto ragione ed è grazie alla logica e al linguaggio formale che riuscì a formalizzare l'affermazione leibniziana secondo la quale nel calcolo si sarebbe potuto ragionare senza commettere errori come se gli infinitesimi esistessero.
Robinson riuscì così a superare in qualche modo il concetto di limite, non ritenuto più un concetto centrale dell'Analisi, e per farlo andò a considerare un nuovo insieme numerico, quello dei i numeri iperreali, introdotti dallo stesso matematico nel 1966 nella sua opera *Non Standard Analysis.*
In logica matematica il linguaggio predicativo del primo ordine è un linguaggio formale che serve per gestire enunciati e ragionamenti che coinvolgono i connettivi logici, le relazioni e i quantificatori, in cui l'espressione "del primo ordine" indica che c'è un insieme di riferimento e i quantificatori possano riguardare solo gli elementi di tale insieme e non i sottoinsiemi. Il linguaggio formale ci permette di esprimere i concetti di una teoria a cui è possibile dare delle interpretazioni.[30]

Definizione 2.1.1. *Una struttura del primo ordine M è definita da un insieme A di elementi e un insieme P di relazioni, (funzioni e costanti).*

Dati L e M rispettivamente un linguaggio e una struttura del primo ordine, è possibile quindi definire una mappa di interpretazione, ossia una funzione da $A \cup P$ ad un sottoinsieme dei simboli di L, in modo tale da mappare elementi in simboli di elementi e relazioni n-arie in simboli di relazioni n-arie.
Possiamo quindi definire un modello come segue:

Definizione 2.1.2. *Siano L e M un linguaggio e una struttura del primo ordine, sia X un insieme di formule di L, tale per cui esista una mappa d'interpretazione, in modo che tutte le proposizioni di X siano definite e vere in M. In questo caso M viene detto **modello** di X.*
Un insieme di formule di un linguaggio viene detto consistente se possiede almeno un modello.

Nell'Analisi Non Standard si prendono come punto di partenza i numeri reali e le loro proprietà, che vengono definiti *universo standard.* Noi indicheremo tale insieme con la lettera M e con L il suo linguaggio formale (in particolare facciamo riferimento al linguaggio formale dei campi ordinati ovvero $L = \{+, \cdot, 0, 1, \leq\}$): ogni proposizione in L è un enunciato su M, che deve essere vero o falso ossia vero o nella sua forma o nella sua negazione. Chiamiamo K l'insieme di tutte le proposizioni vere e diciamo che M è un modello per K. A questo punto però, la chiave per comprendere il ragionamento di Robinson è supporre che, oltre a M, universo standard, ci siano anche modelli non standard di K, cioè esistano strutture matematiche M^*, non isomorfe a M, ma che sono modelli di K, nel senso che ci sono oggetti in M^* e

relazioni tra oggetti di M^* tali che, se reinterpretiamo i simboli di L in modo da riferirli a questi pseudo-oggetti e pseudo-relazioni in modo opportuno, allora ogni proposizione di K è ancora vera, anche se con un significato differente. [30]
Robinson non fu il primo ad usare tali modelli, il primo a farne uso fu infatti il logico norvegese *Thoralf A. Skolem* (1887-1963) che studiò gli assiomi dei numeri naturali, ammettendo modelli non standard. La grande intuizione di Robinson fu però quella di comprendere come questo risultato della logica formale moderna poteva essere alla base di una costruzione in grado di far rivivere i metodi infinitesimali nel calcolo differenziale e integrale.
In questa ripresa egli si basava sul ***teorema di compattezza***, che permette di affermare che, se si suppone che nell'universo standard ogni sottoinsieme finito di una collezione di proposizioni del linguaggio L sia vero, allora esiste un universo non standard in cui tutte le proposizioni sono simultaneamente vere. Quanto detto è strettamente legato al teorema di completezza di *Kurt Gödel*(1906-1978), secondo cui un insieme di proposizioni è logicamente coerente se e solo se tutte le proposizioni hanno un modello, cioè se e solo se c'è un universo in cui sono tutte vere: dunque dal fatto che non possiamo dedurre contraddizioni da P (in quanto ogni deduzione può fare uso solo di un numero finito di premesse, ossia di elementi di P), e dal fatto che ogni sottoinsieme di P è vero (in quanto logicamente coerente per ipotesi), l'intera collezione di proposizioni è logicamente coerente e dal teorema di completezza segue l'esistenza di un universo non standard.[12]
Conseguenza diretta di questo ragionamento è l'esistenza di infinitesimi.
Consideriamo, per esempio, le seguenti proposizioni:

- $\exists x$ tale che $0 < x < \frac{1}{2}$
- $\exists x$ tale che $0 < x < \frac{1}{3}$
- $\exists x$ tale che $0 < x < \frac{1}{4}$
- ......
- $\exists x$ tale che $0 < x < \frac{1}{n}$
- .....

In questo caso stiamo considerando una collezione infinita di proposizioni, ciascuna delle quali può essere scritta servendosi del linguaggio formale del primo ordine L.
Se consideriamo come struttura del primo ordine l'universo standard dei numeri reali abbiamo che ogni sottoinsieme finito è vero, tuttavia non lo è l'intero insieme infinito: infatti, se consideriamo l'insieme dei reali, per quanto piccolo possiamo scegliere un numero reale positivo x, $\frac{1}{n}$ risulterà minore di x scegliendo n sufficientemente grande.
Applicando il teorema di compattezza però, si può concludere che esiste un universo non standard $\mathbb{R}^*$, in cui tutti gli enunciati sono veri: presto si vedrà che tale insieme prende il nome di *insieme di numeri iperreali*.

2.2 I numeri iperreali

Il processo di ricostruzione logica dell'Analisi di Robinson venne ripreso e completato verso la fine degli anni Sessanta dal matematico statunitense H. Jerome Keisler, che riformulò tutta l'Analisi Matematica secondo il principio infinitesimale di Robinson, seguendo però una via alternativa che non utilizza direttamente la logica matematica.
È su tale via che in questo paragrafo andremo a descrivere un po' più nel dettaglio cosa si intende quando parliamo di numeri iperreali.

2.2.1 La costruzione degli insiemi numerici

Con il fine di dare l'idea di come si può giungere alla costruzione dei numeri iperreali, andiamo a familiarizzare con la costruzione di alcuni insiemi numerici noti.[29]
A partire da $\mathbb{N}$ si possono poi costruire i numeri interi e razionali.
I numeri interi sono infatti definiti come una classe di equivalenza su coppie ordinate di numeri naturali

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/_{\sim}$$

dove $\sim$ è la relazione di equivalenza

$$(a, b) \sim (c, d) \quad se \quad a + d = b + c$$

Allo stesso modo possiamo definire i numeri razionali, cambiando però ovviamente la relazione precedente che diventa $\mathbb{Q} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0/_{\sim}$ con

$$(a, b) \sim (c, d) \quad se \quad ad = bc$$

Più interessante è la costruzione dei reali a partire dai razionali[1].

Definizione 2.2.1. *Una successione (a_n) a valori in $\mathbb{Q}$ è di Cauchy se*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : (\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon)$$

L'insieme delle successioni di Cauchy su $\mathbb{Q}$ verrà indicato con $C(\mathbb{Q})$.

Se immaginiamo di rappresentare su una retta gli elementi di una successione di Cauchy, abbiamo che, comunque preso un numero $\varepsilon > 0$, da un certo valore dell'indice n in avanti, tutti i punti si trovano in un intervallo I_ε di ampiezza ε.
È infatti sufficiente considerare un naturale n_0 tale che, in base alla Definizione 2.2.1, $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ per tutti gli m,n $\geq n_0$.
Se I_ε ha ampiezza ε e centro a_{n_0}, allora $a_n \in I_\varepsilon$ $\forall$ n $\geq n_0$. Dati due intervalli I_ε e $I_{\varepsilon'}$, la loro intersezione contiene tutti gli a_n per n maggiori di un certo n*. L'intuizione geometrica ci suggerisce che l'intersezione di tali intervalli ci fornisce un solo punto, a cui corrisponde una coordinata nel sistema numerico considerato, che non sempre è riconducibile all'insieme dei razionali.

[1]Vi sono in realtà più modi per costruire l'insieme dei reali, tuttavia in questa trattazione accenneremo solo al metodo che prevede l'uso delle successioni di Cauchy [47], in quanto questo metodo trova delle analogie con quello che si farà poi con i numeri iperreali.

Ma torniamo a considerare l'insieme $C(\mathbb{Q})$.
L'insieme $(C(\mathbb{Q}), +, \cdot, (0), (1))$ è un anello commutativo con unità in cui per ogni successione è possibile definire un limite reale a tale che $\forall\, \varepsilon > 0$ definitivamente $|a_n - a| < \varepsilon$. In particolare in $C(\mathbb{Q})$ si possono definire la somma e il prodotto

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$
$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$$

in cui l'elemento neutro della somma è lo zero (0,0,0...) e l'elemento neutro moltiplicativo è (1,1,1....).[47]
È evidente che successioni distinte possono convergere allo stesso limite e, in particolare, si può stabilire la seguente relazione di equivalenza

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$$

A questo punto l'insieme dei reali $\mathbb{R}$ è definito come l'insieme quoziente rispetto alla relazione di equivalenza così definita.

Ora, ragionando in termini di successioni di Cauchy, possiamo affermare che

Definizione 2.2.2. *Una successione (a_n) si dice infinitesima se $lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$.*

Dunque, possiamo dire che la successione

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$$

è infinitesima, ma lo stesso vale per

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, ...$$

In questo senso entrambe andrebbero a rappresentare una quantità infinitamente piccola, tuttavia ci si potrebbe chiedere se la seconda potrebbe essere vista in un certo senso come "metà" della prima, convergendo il doppio più velocemente.
Queste osservazioni sono interessanti in quanto ci suggeriscono la possibilità di usare misure infinitamente piccole (o infinitamente grandi, nel caso in cui si vada a ragionare con successioni che tendono all'infinito) come criteri di convergenza.
Nella costruzione dei numeri reali infatti, tutte le successioni convergenti a 0 sono identificate con il numero 0 stesso, mentre dobbiamo necessariamente cambiare metodo se consideriamo gli infinitesimi. [22]
In questo senso, possiamo dire che due successioni a valori reali $r = \left\langle\ r_0, r_1, r_2, ...\ \right\rangle$ e $s = \left\langle\ s_0, s_1, s_2, ...\ \right\rangle$ sono equivalenti se coincidono per un "ampio" numero di posti, o equivalentemente se l'insieme

$$E_{rs} = \{\ n : r_n = r_s\} \tag{2.1}$$

è sufficientemente "ampio".
Ovviamente non possiamo considerare questa una definizione rigorosa e, per essere più precisi, è necessario definire dei nuovi oggetti matematici, che giocheranno un ruolo fondamentale nella costruzione dell'insieme dei numeri iperreali.

Definizione 2.2.3. *Un **filtro** su I è una collezione non vuota $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ avente le seguenti proprietà:*

- *L'insieme vuoto $\emptyset \notin \mathcal{F}$;*
- *Se A,$B \in \mathcal{F}$, allora $A \cap B \in \mathcal{F}$;*
- *Se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B \subseteq I$, allora $B \in \mathcal{F}$.*

*Un **ultrafiltro** $\mathcal{U}$ è un filtro che soddisfa*

- *$\forall\ A \subseteq I$, o $A \in \mathcal{F}$ o $A^c \in \mathcal{F}$, dove $A^c = I - A$.*

Definizione 2.2.4. *Un filtro $\mathcal{F}$ su I è detto principale se esiste un elemento $a \in I$ tale che $\mathcal{F} = \{A \subseteq I | a \in A\}$.*

Solo su un insieme infinito un ultrafiltro può essere non principale. Infatti, supponendo I di cardinalità finita, dovrebbe esistere almeno un sottoinsieme del tipo $I - \{a\}$ che non deve appartenere ad $\mathcal{U}$. Infatti, se tutti i sottoinsiemi di I con cardinalità $n-1$ ci appartenessero, l'intersezione sarebbe vuota, ma $\emptyset \notin \mathcal{U}$. Da questo segue che il complementare di $I - \{a\}$, ossia $\{a\}$, deve appartenere all'ultrafiltro, da cui segue che tutti i sottoinsieme contengono $\{a\}$, ossia $\mathcal{U}$ è principale. Se l'insieme I è infinito, allora i sottoinsiemi del tipo $I - \{a\}$ sono infiniti, dunque $\{a\}$ non deve necessariamente appartenere a $\mathcal{U}$ (nella definizione di ultrafiltro si fa riferimento solo a intersezioni finite).

Osservazione 2.2.1. *Si noti che un ultrafiltro non principale non contiene insiemi finiti.*

Un ultrafiltro non principale non può infatti contenere un singoletto, altrimenti conterrebbe anche tutti i suoi sovra-insiemi e ciò equivarrebbe a dire che esso è principale. Allo stesso modo però non può contenere nemmeno un insieme con due elementi, ad esempio $\{a, b\}$. Infatti, per quanto detto sopra, non dovrebbe contenere $\{a\}$ ma, essendo un ultrafiltro, deve contenerne il complementare: ora, intersecando il complementare del singoletto $\{a\}$ con $\{a, b\}$ dobbiamo rimanere all'interno dell'ultrafiltro, ma tale intersezione coincide con il singoletto $\{b\}$, dunque otterremmo nuovamente un ultrafiltro principale. Tale ragionamento può essere esteso a tutti gli insiemi finiti.

Esempio 2.2.1. *Un esempio di filtro è il filtro di Frechet. Il filtro di Frechet su un insieme infinito I è il filtro costituito da tutti gli insiemi cofiniti, cioè dagli insiemi con complementare finito*

$$Fr(I) = \{A \subseteq I | A^c \text{ è finito}\}$$

Osservazione 2.2.2. *Il filtro di Frechet è non principale.*
Su ogni insieme infinito I, il filtro di Frechet non è un ultrafiltro. Infatti basta prendere un insieme infinito $A \subset I$ il cui complementare A^c sia infinito, ed abbiamo $A, A^c \notin Fr(I)$.

L'esistenza di ultrafiltri non principali, ossia di ultrafiltri che estendono il filtro di Frechet, è garantita dal *Lemma di Zorn*, che è una delle forme equivalenti dell'assioma di scelta. Ricordiamo che, dato un insieme parzialmente ordinato $(X, \leq)$, un sottoinsieme C di X è detto *catena* se $\forall x, y \in C$ si ha che $x \leq y$ oppure $y \leq x$. Ricordiamo poi che il Lemma di Zorn ci permette di affermare che *se ogni catena in X ha un maggiorante, allora X ha un elemento massimale.*
Risulta quindi semplice dimostrare la seguente proposizione

Proposizione 2.2.1. *Per ogni filtro $\mathcal{F}$ su un insieme infinito I, esiste un ultrafiltro $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ che lo estende.*

Dimostrazione. Sia $\mathbb{G}$=$\{G$ filtro su $I \mid G \supseteq \mathcal{F}\}$. La famiglia $\mathbb{G}$ è parzialmente ordinata rispetto all'inclusione ma per applicare il Lemma di Zorn è necessario dimostrare l'esistenza di un maggiorante per ogni catena.
Scegliamo dunque una catena arbitraria $\langle \mathcal{G}_j | j \in J\rangle$ di elementi di $\mathbb{G}$. L'unione $\mathcal{G} = \cup_{j\in J}\mathcal{G}_j$ include i $\mathcal{G}_j$ e di conseguenza $\mathcal{F}$. Si può provare poi facilmente che $\mathcal{G} \in \mathbb{G}$, ossia che $\mathcal{G}$ è un filtro [10]. Proviamo ad esempio la proprietà dell'intersezione. Se $A, B \in \mathcal{G}$, allora $A \in \mathcal{G}_{j1}$ e $B \in \mathcal{G}_{j2}$ ed essendo $\langle \mathcal{G}_j | j \in J\rangle$ una catena si ha che $\mathcal{G}_{j1} \subseteq \mathcal{G}_{j2}$ (o viceversa). Quindi $A, B \in \mathcal{G}_{j2} \implies A \cap B \in \mathcal{G}_{j2} \subseteq \mathcal{G}$.
È dunque possibile applicare il lemma di Zorn, da cui segue l'esistenza di un elemento massimale $\mathcal{U}$ in $\mathbb{G}$, che altro non è che l'ultrafiltro cercato.

□

Riprendiamo dunque la costruzione dei numeri iperreali: essa richiede di prendere una classe di equivalenza in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ossia nell'insieme delle successioni a valori reali e necessita di definire un ultrafiltro non principale.
Un elemento di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ha la forma $r = \left\langle\ r_0, r_1, r_2, ...\ \right\rangle$, e può essere abbreviata come $\left\langle\ r_n : \text{n} \in \mathbb{N}\ \right\rangle$, o semplicemente $\left\langle\ r_n\ \right\rangle$.
Siano r = $\left\langle\ r_n\ \right\rangle$ e s = $\left\langle\ s_n\ \right\rangle$ con le seguenti operazioni

$$r \oplus s = \left\langle r_n + s_n : n \in \mathbb{N}\right\rangle$$

$$r \odot s = \left\langle r_n \cdot s_n : n \in \mathbb{N}\right\rangle$$

Allora si può dimostrare che $\left\langle\ \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \oplus,\ \odot\ \right\rangle$ è un anello commutativo con lo zero $0 = \left\langle\ 0{,}0{,}0\ ...\right\rangle$, l'unità $1 = \left\langle\ 1{,}1{,}1\ ...\right\rangle$ e l'inverso additivo $-r = \left\langle -r_n : n \in \mathbb{N}\ \right\rangle$ [2].
Si può banalmente dimostrare che, a differenza di $\mathbb{R}$, questo non sia un campo, infatti se consideriamo

$$\left\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1...\right\rangle \odot \left\langle 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0...\right\rangle = 0$$

abbiamo due successioni che sono divisori dello zero, ossia elementi non nulli il cui prodotto è nullo.
Quello che vogliamo fare è dunque andare a definire una relazione di equivalenza sull'insieme delle infinite successioni a valori reali e, per farlo, useremo un ultrafiltro che permetta di selezionare insiemi equivalenti.

[2] Il lettore interessato alla dimostrazione precisa può consultare [6].

Definizione 2.2.5. *Siano* $r = \langle r_n \rangle$ *e* $s = \langle s_n \rangle$, *allora*

$$r \equiv s \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \in \mathcal{U}.$$

In questo caso diremo che r e s sono uguali quasi ovunque.

Proposizione 2.2.2. *Tale relazione* $\equiv$ *è una relazione di equivalenza su* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Dimostrazione. Per dimostrare tale Proposizione è sufficiente provare le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.
Per quanto riguarda la riflessività, abbiamo che $r \equiv r$ in quanto $\{ n \in \mathbb{N} : r_n = r_n \}$ coincide con $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$.
La simmetria è banalmente una conseguenza della simmetria della relazione di uguaglianza $=$ sull'insieme dei reali $\mathbb{R}$.
Per provare la transitività dobbiamo invece ricordare la Definizione 2.2.4 di ultrafiltro. Supponiamo che $r \equiv s$, ossia $\{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n \} \in \mathcal{U}$, e $s \equiv t$, ossia $\{ \text{n} \in \mathbb{N} : s_n = t_n \} \in \mathcal{U}$. Dalla definizione di filtro, o, per la precisione, dalla proprietà secondo la quale *se* $A, B \in \mathcal{F}$, *allora* $A \cap B \in \mathcal{F}$, segue che

$$\{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : s_n = t_n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : r_n = t_n\} \in \mathcal{U}$$

e abbiamo così provato la transitività, ossia r $\equiv$ t.

$\square$

La classe di equivalenza di una successione r $\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ indotta da $\equiv$ sarà denotata con [r]. Dunque avremo

$$[r] = \{s \in \mathbb{R}^N : r \equiv s\}$$

Definizione 2.2.6. *L'insieme quoziente, ossia l'insieme delle classi di equivalenza di* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *indotta da* $\equiv$ *è indicato con*

$$\mathbb{R}^* = \{[r] : r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\} \tag{2.2}$$

e gli elementi di tale insieme sono detti ***numeri iperreali****.*

In $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ è possibile definire

$$[r] + [s] = [r \oplus s] = \langle r_n + s_n \rangle$$

$$[r] \cdot [s] = [r \odot s] = \langle r_n \cdot s_n \rangle$$

e si ha che

$$[r] < [s] \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : r_n < s_n\} \in \mathcal{U}$$

Dunque la relazione di equivalenza della Definizione 2.2.5 ci fornisce l'idea di "ampiezza" data in (2.1): un ultrafiltro è infatti un modo rigoroso per mettere in relazione gli iperreali, identificati attraverso successioni a valori reali. L'idea è quella di identificare due successioni quando esse coincidono sulla "maggior parte" degli

indici e tale numero di indici deve appartenere all'ultrafiltro scelto.
Facciamo un esempio per comprendere l'importanza del ruolo giocato dagli ultrafiltri in questa definizione. Abbiamo definito infatti questa relazione di equivalenza che ci permette di dire che due numeri iperreali che differiscono solo per un numero finito di elementi sono uguali e possiamo dare una regola di maggiorazione tale per cui due numeri sono uno minore dell'altro se un numero finito di elementi del primo sarà strettamente maggiore di un numero finito di elementi del secondo. Va però precisato che questa regola è applicabile solamente agli ultrafiltri non principali, una cui caratterizzazione abbiamo visto essere quella di contenere tutti gli insiemi complementari di insiemi finiti: se quozientassimo ad esempio rispetto un ultrafiltro principale generato da a, quello che otterremmo sarebbe semplicemente la a-esima componente della successione considerata. Vale la pena evidenziare poi che non sempre tale ragionamento risulta immediato, infatti le regole di maggiorazione dipendono dall'ultrafiltro considerato, fatto da cui seguirà che esiste un campo di numero iperreali per ogni ultrafiltro.[6]
Consideriamo due numeri iperreali $r = \langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1... \rangle$ e $s = \langle 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0... \rangle$: in questo caso i numeri 1 e 0 compaiono lo stesso numero di volte, dunque non possiamo applicare il ragionamento precedentemente illustrato e la scelta in questo caso dipende dall'ultrafiltro che stiamo andando a considerare, in quanto esso ci permetterà di andare a confrontare tra loro i numeri iperreali. Se supponiamo ad esempio che la numerazione relativa agli indici dei posti parta da 0 e stabiliamo la regola che i numeri di posto dispari prevalgano sui pari, ossia scegliamo che i numeri dispari appartengano all'ultrafiltro $\mathcal{U}$ considerato, avremo che $r = 0$. Viceversa se scegliamo i numeri pari in $\mathcal{U}$, avremo che $r = 1$.

Si può poi dimostrare che $\langle \mathbb{R}^*, +, \cdot, < \rangle$ è un campo ordinato con zero [0] e unità [1].[3]
Possiamo quindi includere i reali negli iperreali e, in particolare, possiamo identificare un numero reale $r \in \mathbb{R}$ con la successione costante $r = \langle r, r, ... \rangle$.
In tal senso associato ad ogni numero reale avremo

$$r^* = [r] = [\langle r, r, r.... \rangle]$$

e, presi $r, s \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{gathered}(r + s)^* = r^* + s^* \\ (r \cdot s)^* = r^* \cdot s^* \\ r^* < s^* \Leftrightarrow r < s \\ r^* = s^* \Leftrightarrow r = s\end{gathered}$$

In particolare si ha che $\mathbb{R}$ può essere immerso in $\mathbb{R}^*$, concetto che può essere formalizzato nel seguente modo:

Teorema 2.2.1. *Esiste un monomorfismo di campi ordinati da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^*$.*

[3] Il lettore interessato alla dimostrazione precisa può consultare [22]. Più avanti nel capitolo vedremo che ciò può essere dimostrato sfruttando la proprietà di transfer.

Dimostrazione. Consideriamo

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^* \\ r &\mapsto \varphi(r) = r^* = [\langle r, r, r....\rangle] \end{aligned}$$

Quello che vogliamo dimostrare è che φ così definita sia un monomorfismo di campi ordinati.
L'iniettività segue banalmente dalle definizioni, infatti

$$\varphi(r) = \varphi(s) \Rightarrow r^* = s^* = \langle r, r, r....\rangle = \langle s, s, s....\rangle \Rightarrow r = s$$

Possiamo poi osservare che
$\varphi(r + s) = (r + s)^* = r^* + s^* = \varphi(r) + \varphi(s)$
$\varphi(r \cdot s) = (r \cdot s)^* = r^* \cdot s^* = \varphi(r) \cdot \varphi(s)$
$r < s \implies \varphi(r) = r^* < s^* = \varphi(s)$
$\varphi(0) = 0^* = [\langle 0, 0, 0....\rangle]$
$\varphi(1) = 1^* = [\langle 1, 1, 1....\rangle]$
Da cui segue che φ è un omomorfismo da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^*$. □

L'insieme dei numeri reali è anche detto insieme dei numeri standard, mentre il suo complementare è l'insieme dei numeri non standard.
Nel prossimo paragrafo andremo a vedere un po' più nel dettaglio cosa siano dunque questi numeri iperreali.

2.2.2 La struttura dei numeri iperreali

Finora abbiamo dunque detto che i numeri reali sono un sottocampo degli iperreali: in tal modo si ha ad esempio che l'iperreale 0 non è altro che la successione (0,0,0,...) e π non è altro che $(\pi, \pi, \pi, ...)$. Gli infinitesimi sono definiti come successioni che tendono a 0 e queste negli iperreali corrispondono a numeri che sono minori di un qualsiasi numero reale. Più precisamente:

Definizione 2.2.7. *Sia $x \in \mathbb{R}^*$. Allora*

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Definizione 2.2.8. *Un elemento $x \in \mathbb{R}^*$ è:*

- ***infinitesimo*** *se $|x| < \frac{1}{n}$ per ogni naturale standard n;*
- ***infinito*** *se $|x| > n$ per ogni numero naturale standard n;*
- ***finito*** *se $|x| < n$ per un qualche numero standard n.*

Due elementi x,y $\in \mathbb{R}^*$ sono ***infinitamente vicini*** *$x \approx y$ se $x - y$ è infinitesimo.*

Teorema 2.2.2. *Esiste $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ tale che $\varepsilon > 0$ e $\forall x$ reale positivo $\varepsilon < x$.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...)$ e denotiamo ciascun termine con ε_n.
Allo stesso modo consideriamo la successione (0,0,0,0...) e ciascun suo termine 0_n tale che $\varepsilon_n > 0_n$ per ogni n. Da ciò risulta evidente che $\varepsilon > 0$.
Prendiamo ora una generica successione $x = (x, x, x, ...)$ e identifichiamo ciascun termine con x_n. Possiamo dire che esiste n_0 tale che $\forall n \geq n_0$ si ha che $\varepsilon_n < x_n$, ossia ci sono infiniti termini tale per cui $\varepsilon_n < x_n$, da cui segue che $\varepsilon < x$. $\square$

In modo analogo si può dimostrare il seguente Teorema.

Teorema 2.2.3. *Esiste $\omega \in \mathbb{R}^*$ tale che $\omega > x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.*

Osservazione 2.2.3. *Un infinitesimo positivo è iperreale ma non reale e l'unico infinitesimo reale è lo 0.*

Definizione 2.2.9. *Dato un numero iperreale $x \in \mathbb{R}^*$, la* ***monade*** *di x è l'insieme*

$$Mon(x) = \{y \in \mathbb{R}^* : x \approx y\}$$

La ***galassia*** *di x è l'insieme*

$$Gal(x) = \{y \in \mathbb{R}^* : x - y \quad finito\}$$

Osservazione 2.2.4. *Mon(0) è l'insieme degli infinitesimi e Gal(0) è l'insieme dei numeri iperreali finiti.*

Esiste una precisa aritmetica in $\mathbb{R}^*$. Di seguito elencheremo alcune regole[4].
Siano ε, δ infinitesimi, x finito e ω infinito, allora:

- $\varepsilon + \delta$ è infinitesimo
- $x + \varepsilon$ è finito
- $\varepsilon \cdot \delta$ è infinitesimo
- $\varepsilon \cdot x$ è infinitesimo
- $\omega + x$ è infinito
- $\frac{1}{\varepsilon}$ è infinito
- $\frac{1}{\omega}$ è infinitesimo

Usando queste regole possiamo ad esempio dimostrare il seguente Teorema:

Teorema 2.2.4. *La relazione $\approx$ definita nella Definizione 2.2.8 è una relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^*$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che valgono la proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.
Riflessività: $r \approx r$ infatti $r - r = 0$ e 0 è l'unico reale infinitesimo.
Simmetria: se $r \approx s$ si ha che $s - r = \varepsilon$ con ε infinitesimo. Ora $r - s = -\varepsilon$ che è anch'esso un infinitesimo, da cui segue che $s \approx r$.
Transitività: Supponiamo $r \approx s$ e $s \approx t$. Allora $s - r = \varepsilon$ e $t - s = \varepsilon'$, da cui

[4] In questa sede ometteremo la dimostrazione. Il lettore interessato può consultare [25].

$t = s + \varepsilon'$ e $r = s - \varepsilon$, da cui segue che $t - r = \varepsilon' + \varepsilon$ e somma di infinitesimi è infinitesima. Dunque $r \approx t$. $\square$

Per poter rigorizzare il metodo infinitesimale di Newton e Leibniz è necessario fornire poi un'ulteriore definizione, ossia quella di *parte standard* di un numero iperreale. Partiamo allora da un Teorema strettamente connesso a questo concetto.[26]

Teorema 2.2.5. ***(Teorema della parte standard)*** *Ogni numero iperreale finito x è infinitamente vicino a un unico numero reale $t \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}^*$ un iperreale finito.
Unicità: L'unicità segue direttamente dal fatto che $\approx$ è una relazione di equivalenza. Supponiamo infatti t, s numeri reali tale che $t \approx x$ e $x \approx s$. Per la transitività si ha che $t \approx s$, dunque $t - s = 0$, da cui segue $t = s$.
Esistenza: Consideriamo l'insieme $X = \{s \in \mathbb{R} : s < x\}$. X è non vuoto e ha sicuramente un maggiorante infatti esiste un reale positivo r tale che $|x| < r$.
Possiamo anche affermare che X ha l'estremo superiore e questo segue dal fatto che $\mathbb{R}$ è un campo ordinato e completo.
Dunque dalla proprietà dell'estremo superiore abbiamo che $\exists t \in \mathbb{R}$ tale che per ogni reale positivo r

$$x \leq t + r, \quad x - t \leq r$$

così come

$$t - r \leq x, \quad -(x - t) \leq r$$

da cui

$$|x - t| \leq r \ \ \forall r \in \mathbb{R}^+$$

Dunque $x - t$ è una quantità infinitesima, ossia x $\approx$ t. $\square$

Osservazione 2.2.5. *Il Teorema 2.2.5 ci permette di affermare che ogni monade finita contiene un unico numero reale.*

Definizione 2.2.10. *Sia x un numero iperreale finito. L'unico reale r tale che $r \approx x$ è detto* ***parte standard*** *di x e si indica con $st(x)$.*
Se x è infinito, la parte standard non è definita.

Corollario 2.2.1. *Siano x e y iperreali finiti.*
(i) $x \approx y$ se e solo se $st(x) = st(y)$.
(ii) $x \approx st(x)$.
(iii) Se $r \in \mathbb{R}$ allora $st(r) = r$.
(iv) Se $x \leq y$ allora $st(x) \leq st(y)$.

Dimostrazione. Proviamo il (iv) punto.
Siano

$$x = st(x) + \varepsilon, \quad y = st(y) + \delta$$

con ε e δ infinitesimi. Assumiamo $x \leq y$. Allora

$$st(x) + \varepsilon \leq st(y) + \delta$$

$$st(x) \leq st(y) + (\delta - \epsilon)$$

Dalla definizione di infinitesimo, preso $r \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\delta - \varepsilon < r$$

ma allora

$$st(x) < st(y) + r$$

da cui segue

$$st(x) \leq st(y).$$

□

Vediamo degli esempi che ci permettano di concretizzare la teoria appena vista.

- $14 + \varepsilon$ è infinitamente vicino a 14 in quanto $(14 + \varepsilon) - 14 = \varepsilon$. Da ciò segue che $st(14 + \varepsilon) = 14$. Stesso risultato si ottiene se consideriamo ad esempio $14 + \varepsilon^2$ o $14 + \varepsilon + \delta$.
- 2ε coincide con $0 + 2\varepsilon$, a cui corrisponde $st(0 + 2\varepsilon) = 0$.
- Se consideriamo un numero reale, la sua parte standard coinciderà con il numero stesso. Ad esempio $st(97) = 97$ infatti 97 è infinitamente vicino a se stesso dato che $97 - 97 = 0$ e 0 abbiamo detto essere l'unico reale infinitesimo.

Esistono poi delle regole algebriche anche per la parte standard.

Teorema 2.2.6. *La funzione parte standard è un omomorfismo dell'anello Gal(0) nel campo dei numeri reali. Valgono infatti le seguenti regole:*
(i) $st(x + y) = st(x) + st(y)$.
(ii) $st(x - y) = st(x) - st(y)$.
(iii) $st(xy) = st(x)st(y)$.

Dimostrazione. Siano ε e δ infinitesimi.
Consideriamo $x = r + \varepsilon$ e $y = s + \delta$ dove $r = st(x)$ e $s = st(y)$.
Iniziamo dunque con il provare (i).

$$\begin{aligned} st(x + y) &= st((r + \varepsilon) + (s + \delta)) \\ &= st((r + s) + (\varepsilon + \delta)) \\ &= r + s \end{aligned}$$

Per dimostrare (ii) è sufficiente ripercorrere i passaggi appena svolti per dimostrare (i). Ora andiamo a provare (iii).

$$\begin{aligned} st(xy) &= st((r + \varepsilon)(s + \delta)) \\ &= st(rs + r\delta + s\varepsilon + \varepsilon\delta) \\ &= rs \end{aligned}$$

essendo il prodotto con una quantità infinitesima esso stesso infinitesimo.
In tal modo è naturale che $st(\cdot)$ sia un omomorfismo della galassia(0) in $\mathbb{R}$ e che lo sia in $\mathbb{R}$ segue dal fatto che, preso $r \in \mathbb{R}$, si ha che $st(r) = r$. □

Corollario 2.2.2. *Siano x e y finiti.*
(i) Se $st(y) \neq 0$ allora $st(x/y) = st(x)/st(y)$.
(ii) Se $x \geq 0$ e $y = \sqrt[n]{x}$ allora $st(y) = \sqrt[n]{st(x)}$.

Dimostrazione. Per (i) è sufficiente vedere che $st(x) = st((x/y) \cdot y) = st(x/y) \cdot st(y)$.
Dalle ipotesi di (ii) abbiamo poi che $y^n = x$ e $y \geq 0$.
Passando ora alle parti standard otteniamo

$$st(x) = st(y^n) = (st(y))^n$$

Sappiamo che $st(y) \geq 0$, per cui abbiamo $st(y) = \sqrt[n]{st(x)}$. □

2.2.3 L'estensione non standard e il principio di transfer

Quali sono le proprietà che si preservano se passiamo da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^*$?
Abbiamo già visto che possiamo in qualche modo estendere i numeri reali con i numeri iperreali e, in particolare, possiamo definire **l'estensione non standard** come quella corrispondenza ***** che associa ad ogni oggetto standard dell'analisi elementare un unico oggetto non standard.
In particolare:

- se $x \in \mathbb{R}$, allora x^* coincide con x stesso.
- Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ può essere esteso a un sottoinsieme A^* di $\mathbb{R}^*$ e si ha che $A \subseteq A^*$. In particolare possiamo definire l'estensione di A nel seguente modo
  $$\forall r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\; [r] \in A^* \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} \in \mathcal{U}$$
  dunque $[r_n] \in A^*$ se e solo se $r_n \in A$ per quasi ogni n.
  Questa è una buona definizione, infatti si ha che
  $$\{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} \cap \{n \in \mathbb{N} : r = r'\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : r' \in A\}$$
  dunque
  $$r \equiv r' \cup \{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} \in \mathcal{U} \implies \{n \in \mathbb{N} : r' \in A\} \in \mathcal{U}$$
  Quanto detto ci permette di stabilire come siano definiti ad esempio i numeri iperinteri o ipernaturali. Infatti potremmo pensare di estendere i naturali $\mathbb{N}$ con gli ipernaturali $\mathbb{N}^*$: avremmo quindi che $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}^*$ e gli elementi di $\mathbb{N}^*$ successioni costituite per la "maggior parte" da numeri naturali. In tal senso possiamo quindi pensare agli ipernaturali come ai naturali standard ai quali sono aggiunti quegli infiniti positivi che rispettano tale caratterizzazione.

Quando parliamo di funzioni facciamo invece riferimento al **principio di estensione.**
Data una funzione reale f esiste una corrispondente funzione iperreale f^* che ha dominio e codominio definito in $\mathbb{R}^*$ tale che:
i) se $r \in \mathbb{R}$ e $f(r)$ è definita, $f^*(r) = f(r)$;
ii) se $r \in \mathbb{R}$ e $f(r)$ non è definita, $f^*(r)$ non è definita;
iii) se f ha una certa regola, f^* ha la stessa regola applicata però agli iperreali.

In particolare:

- Una funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si può estendere a f^*: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$. Per ogni successione $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sia $f \circ r$ la successione $\langle f(r_1), f(r_2), ...\rangle$ allora si ha

$$f^*([r]) = [f \circ r]$$

In altre parole

$$f^*([\langle r_0, r_1, ...\rangle]) = [\langle f(r_0), f(r_1), ...\rangle]$$

Anche questa è una buona definizione, infatti

$$\{n \in \mathbb{N} : r = r'\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : f \circ r = f \circ r'\}$$

da cui

$$r \equiv r' \implies f \circ r \equiv f \circ r'$$

Si ha dunque che

$$\begin{aligned} f^*([r]) = [s] &\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : f(r_n) = s_n\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow f(r_n) = s_n \quad q.o. \end{aligned}$$

- Supponiamo ora di avere una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita in un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$, in cui quindi $f(r_n)$ potrebbe non essere definita per tutti gli n.
Possiamo comunque estendere la funzione a $f^* : A^* \to \mathbb{R}^*$, il cui dominio è un'estensione di A, ossia $dom^* f = (dom f)^*$.
Per definire precisamente tale estensione, prendiamo dunque $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con $[r] \in A^*$ (ossia $\{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} \in \mathcal{U}$).
Definiamo s_n come segue

$$s_n = \begin{cases} f(r_n) & n \in \{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} \in \mathcal{U} \\ 0 & n \notin \{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} \in \mathcal{U} \end{cases}$$

allora abbiamo

$$f^*([r]) = [s]$$

Dunque siamo giunti a dire ancora che

$$f^*([r_n]) = [f(r_n)]$$

Un esempio particolarmente interessante ci è fornito dalle successioni.
Infatti una successione a valori reali non è altro che una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e la sua estensione prende il nome di *ipersuccessione*, ossia la successione $s^* : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^*$. In questo caso s_n è definita anche quando $n \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$.

La trasformazione * può però essere applicata solo quando utilizziamo un linguaggio formale del primo ordine. Esiste in particolare un principio, detto **principio di transfer**, tale per cui ogni formula ϕ che usa un linguaggio formale del primo ordine[5] su $\mathbb{R}$ vale se e solo se la sua estensione ϕ^* vale in $\mathbb{R}^*$.
Dunque una proprietà $P(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ degli oggetti standard $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ espressa in un linguaggio del primo ordine, vale se e solo se la stessa proprietà vale per le corrispondenti estensioni non standard, ossia se e solo se vale $P(a_1^*, a_2^*, a_3^*, ..., a_n^*)$.
Per quanto riguarda il linguaggio formale del primo ordine abbiamo in particolare le seguenti regole [22]:

- Se τ è una variabile allora $\tau^* = \tau$.
- Se τ è $f(\tau_0, \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ allora τ^* è $f(\tau_0^*, \tau_1^*, \tau_2^*, ..., \tau_n^*)$.
- Se ϕ è una formula allora ϕ^* è ottenuta sostituendo ciascun termine τ che compare in ϕ con τ^* e ogni simbolo relazionale P di una formula atomica in P^*.
- Valgono ad esempio le seguenti regole

$$\begin{aligned}(\phi \vee \psi)^* &:= \phi^* \vee \psi^* \\ (\phi \wedge \psi)^* &:= \phi^* \wedge \psi^* \\ (\neg\phi)^* &:= \neg\phi^* \\ (\phi \rightarrow \psi)^* &:= \phi^* \rightarrow \psi^* \\ (\phi \leftrightarrow \psi)^* &:= \phi^* \leftrightarrow \psi^*\end{aligned}$$

- Solitamente non si mette il simbolo della trasformazione * nel caso di formule di uso molto comune $=$, $\neq$, $\leq$, $\geq$ etc.
- Vediamo infine un esempio con i quantificatori universali

$$(\forall x \in P)^* = \forall x \in P^* \qquad (\exists x \in P)^* = \exists x \in P^*$$

Tipicamente per mostrare che un numero reale di un certo tipo esiste, potrebbe essere più semplice mostrare che un iperreale di quel tipo esiste e applicare il principio di transfer.
Prendiamo ad esempio una successione a valori reali $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ per la quale l'ipersuccessione estesa $s^* : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ è limitata. Il principio di transfer può essere usato per dimostrare che la successione originaria deve essere limitata in $\mathbb{R}$.
Per ipotesi $\exists\ \omega \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$, tale che

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(|s(n)|^* < \omega) \tag{2.3}$$

In (2.3) non ritroviamo però l'estensione * finora definita, perché contiene la costante ω. Si può rimuovere la costante e sostituirla con un quantificatore esistenziale: (2.3) implica infatti necessariamente che

$$(\exists y \in \mathbb{R}^*)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(|s(n)|^* < y) \tag{2.4}$$

[5]Si fa riferimento al linguaggio dei campi ordinati $L = \{+, \cdot, 0, 1, \leq\}$ in cui a ogni numero reale è associata una costante e in cui i quantificatori agiscono sugli elementi e non sui sottoinsiemi.

Ora (2.4) è formulata correttamente utilizzando il linguaggio formale del primo ordine, al quale può essere applicato il principio di transfer, ottenendo così

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(|s(n)| < y)$$

che è ciò che volevamo dimostrare.

Ci sono diversi esempi in cui si può usare il transfer.
Un esempio classico è provare che $\mathbb{R}^*$ è un campo ordinato: si può evitare infatti la dimostrazione algebrica e, sapendo che $\mathbb{R}$ è un campo ordinato, utilizzare il transfer. Dunque $\mathbb{R}^*$ risulta essere un campo ordinato con somma e prodotto che non sono altro che estensioni delle funzioni binarie $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e la relazione d'ordine è l'estensione $\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | a < b\}^*$.

La proprietà archimedea e la completezza dei reali attraverso $\mathbb{R}^*$

Abbiamo fin qui detto che, per il principio di transfer, ogni enunciato esprimibile nel linguaggio L del primo ordine è vero quando è interpretato nella struttura dei reali se e solo se è vero anche quando è interpretato nella struttura degli iperreali. Dobbiamo però prestare attenzione al significato che attribuiamo a una *-trasformazione. Vediamo ad esempio cosa succede nel caso della **proprietà archimedea**.
La proprietà archimedea

$$\forall \varepsilon, M \in \mathbb{R}^+ \ \exists n \in \mathbb{N} \quad n \cdot \varepsilon > M$$

vale nei reali ma non negli iperreali. Se scegliessimo ε infinitesimo infatti, anche $n \cdot \varepsilon$ lo sarebbe, dunque non varrebbe più la proprietà precedentemente enunciata.
Tuttavia a questa formulazione possiamo applicare il transfer ottenendo

$$\forall \varepsilon, M \in \mathbb{R}^*_+ \ \exists n \in \mathbb{N}^* \quad n \cdot \varepsilon > M \tag{2.5}$$

dove con $\mathbb{R}^*_+$ intendiamo gli iperreali positivi.
Ora (2.5) è valida negli iperreali se prendiamo n tra i numeri infiniti appartenenti agli ipernanturali.

Abbiamo dunque visto, come nel caso della *-archimedeità, che proprietà *-trasformate possono avere un significato differente rispetto alle originarie. Ci sono poi dei casi in cui, come abbiamo ribadito più volte, non si può applicare il transfer: tale principio infatti si può applicare solo per proprietà espresse nel linguaggio formale del primo ordine, ossia per predicati relativi agli elementi e non ai sottoinsiemi.
Un esempio è l'assioma di completezza dei reali e, in particolare, la formulazione secondo la quale ogni sottoinsieme limitato dei reali ha l'estremo superiore, enunciato in cui i quantificatori non sono riferiti a oggetti, bensì a sottoinsiemi.
Questo esempio è interessante, in quanto pur non potendo applicare il principio di transfer, possiamo usare una formulazione al primo ordine riguardante gli iperreali per dimostrare l'assioma stesso.

Teorema 2.2.7. *Dal fatto che ogni iperreale finito è infinitamente vicino a un numero reale segue la completezza dei reali.*

Dimostrazione. Sia $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione di Cauchy. Da ciò segue che deve necessariamente esistere un elemento $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \, (m, n \geq k \implies |s_m - s_n| < 1)$$

è vera. Questo enunciato è espresso nel linguaggio formale del primo ordine, dunque si può applicare il principio di transfer. In particolare esiste un infinito positivo $N \in \mathbb{N}^*$ tale che $\forall$ m $\geq$ k si ha che $|s_m - s_N| < 1$. Da questa relazione risulta evidente che s_N è finito.
Per ipotesi si ha che ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino a un numero reale, dunque $s_N \approx L$ per un qualche L $\in \mathbb{R}$, ossia L è la parte standard di s_N.
Mostriamo ora che la successione originaria $s \to L$.
Se s è una successione di Cauchy, preso $\varepsilon > 0$, esiste $j_0 \in \mathbb{N}$ tale che per $j \geq j_0$ si ha

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \, (m, n \geq j \implies |s_m - s_n| < \varepsilon)$$

Applicando il principio di transfer come in precedenza, sappiamo che preso $m \in \mathbb{N}$ tale che $m \geq j$ allora per $m, N \geq j$ si ha che $|s_m - s_N| < \varepsilon$.
Ma allora risulta

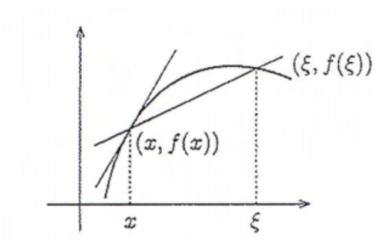
$$|s_m - L| \leq |s_m - s_N| + |s_N - L| < \varepsilon + \delta$$

dove δ è un infinitesimo, infatti sappiamo che $s_N \approx L$.
Dall'arbitrarietà della successione di Cauchy scelta, scelta segue che tutte le successioni di Cauchy convergono a un limite e ciò è una formulazione equivalente alla completezza dei reali.

□

2.3 Il concetto di derivata in Analisi Non Standard

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per rigorizzare il metodo infinitesimale di Leibniz e Newton. In particolare in questo contesto analizzeremo il concetto di derivata[6].
Ripassiamo dunque dapprima come vengono definite le derivate in analisi standard: alla luce di quanto detto al Capitolo 1, abbiamo visto infatti che esse sono definite mediante la nozione di limite.[8]



Per studiare come varia una funzione reale di variabile reale, viene spesso utilizzato il concetto di *rapporto incrementale*.
Se $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$, presi x, $\xi \in X$ con $\xi \neq x$, definiamo il rapporto incrementale come

$$f[\xi,\mathrm{x}] = \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}$$

Esso misura la variazione media di f rispetto alla variabile indipendente nell'intervallo di estremi x, ξ.
Il rapporto incrementale è la pendenza, o coefficiente angolare, della retta secante il grafico di f che passa per i punti $(x, f(x)), (\xi, f(\xi))$.

Definizione 2.3.1. ***(Derivata in analisi standard)*** *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. f è* ***derivabile*** *nel punto x_0 se esiste finito il limite*

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in tal caso il limite si chiama ***derivata*** *di f in x_0.*

Definizione 2.3.2. ***(Derivata in analisi non standard)*** *Sia f una funzione reale di una variabile reale e x_0 un punto del suo dominio. La derivata $f'(x_0)$ di f in x_0, se esiste, è definita come segue*

$$f'(x_0) = st\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

per ogni infinitesimo $\Delta x \neq 0$.

La derivata non è più quindi il rapporto leibniziano $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ con Δx infinitesimo, bensì la parte standard di tale rapporto: questa è una lieve ma essenziale modifica della definizione di Leibniz, che ci permette di giungere ai risultati sperati evitando ogni contraddizione, pur rimanendo ispirati all'antico metodo infinitesimale. [12]
Dunque dato

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

[6] In questa sede ci occuperemo solo del concetto di derivata, ma il lettore interessato può approfondire altri concetti, come limiti, continuità, integrali, che sono ben definiti all'interno dell'Analisi non Standard. Si può consultare tale teoria ad esempio in [25].

si ha che, se $f'(x)$ esiste , il suo valore coincide con la parte standard del rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ossia

$$f'(x) = st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

Chiamiamo poi dy il differenziale di y

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Geometricamente, analogamente al caso standard, andiamo a definire la *retta tangente* alla curva $y = f(x)$ in un punto (a, b) come la retta passante per (a, b) avente pendenza $f'(a)$.
Ora si ha che Δy è la variazione di y lungo la curva e dy è la variazione di y lungo la retta tangente: quello che ci interessa è capire la relazione tra Δy e dy considerando Δx infinitesimo.

Definizione 2.3.3. *Sia Δx un infinitesimo non nullo.Diciamo che u,v sono* ***infinitamente vicini in relazione a*** Δx

$$u \approx v \text{ (in relazione a } \Delta x)$$

se

$$\frac{u}{\Delta x} \approx \frac{v}{\Delta x} \tag{2.6}$$

Ricordando che stiamo lavorando con gli iperreali, per ogni Δx infinitesimo non nullo possiamo definire

$$o(\Delta x) = \{u : \frac{u}{\Delta x} \quad infinitesimo\}$$

dove $o(\Delta x)$ è un ideale di $Gal(0)$ e si ha che $o(\Delta x) \subseteq Mon(0)$.
Dunque (2.6) diventa $u \approx v$ (in relazione a Δx) se

$$u - v \in o(\Delta x) \tag{2.7}$$

Teorema 2.3.1. ***(Teorema dell'incremento)*** *Sia x un numero reale, f una funzione in una variabile reale tale che $y = f(x)$ e $f'(x)$ esiste, Δx infinitesimo non nullo. Allora*

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x = dy + \varepsilon\Delta x$$

per un qualche ε infinitesimo.
In altre parole

$$\Delta y \approx dy \text{ (in relazione a } \Delta x)$$

Dimostrazione. Essendo la derivata definita come parte standard del rapporto incrementale, si ha che esiste una quantità infinitesima ε tale che

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$$

Da cui si può ricavare Δy

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

che è la relazione cercata.

$\square$

Le regole di derivazione in Analisi Non Standard sono le usuali dell'analisi standard e sono facilmente dimostrabili attraverso la teoria infinitesimale.

Teorema 2.3.2. *Siano f,g funzioni nella variabile indipendente x. Allora per ogni numero reale x tale per cui $\frac{df}{dx}$ e $\frac{dg}{dx}$ esistono, abbiamo*

(i) (Regola della somma)

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

(ii) (Prodotto con una costante)

$$\frac{d(cf)}{dx} = c\frac{df}{dx}$$

(iii) (Regola del prodotto)

$$\frac{d(fg)}{dx} = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$$

(iv) (Regola del quoziente) Se $g \neq 0$,

$$\frac{d(\frac{f}{g})}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Dimostrazione. (i) Sia $y = f + g$

$$\begin{aligned}
\Delta y &= (f + \Delta f) + (g + \Delta g) - (f + g) = \Delta f + \Delta g \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \\
st(\frac{\Delta y}{\Delta x}) &= st(\frac{\Delta f}{\Delta x}) + st(\frac{\Delta g}{\Delta x}) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}
\end{aligned}$$

Il procedimento è analogo per gli altri punti, modificando opportunamente l'equazione di Δy, che deve essere scelta come segue:

- per *(ii)* si partirà da $\Delta y = c(f + \Delta f) - cf = c\Delta f$
- per *(iii)* si partirà da $\Delta y = (f + \Delta f)(g + \Delta g) - fg = f\Delta g + g\Delta f + \Delta g\Delta f$
- per *(iv)* si partirà da $\Delta y = \frac{f+\Delta f}{g+\Delta g} - \frac{f}{g}$

$\square$

Un esempio di regola provata attraverso il Teorema dell'Incremento è poi la regola di derivazione della funzione composta.

Teorema 2.3.3. *(Regola della catena) Siano f e G funzioni reali e g la composizione*

$$g(t) = G(f(t))$$

Per ogni valore reale di t per i quali $f'(t)$ e $G'(f(t))$ esistono, allora $g'(t)$ esiste e si ha che

$$g'(t) = G'(f(t))f'(t)$$

Dimostrazione. Sia $x = f(t)$, $y = g(t) = G(x)$ e Δt infinitesimo non nullo.
Dal Teorema dell'Incremento applicato a $y = G(x)$ si ha

$$\Delta y = G'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

per un qualche infinitesimo ε.
Dividendo per Δt e prendendo la parte standard, abbiamo

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = G'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ossia

$$g'(t) = G'(f(t))f'(t)$$

□

2.4 Microscopi ottici

L'Analisi Non Standard consente un'interpretazione grafica suggestiva basata sugli strumenti ottici, che possono essere utilizzati efficacemente nella pratica didattica. In particolare, i microscopi ottici permettono di visualizzare i numeri iperreali e di vedere come appare il grafico di una funzione in un intorno infinitesimale di un suo punto [14].
Nel Capitolo 4 si vedrà la presentazione di tali strumenti ai ragazzi durante l'attività 2 del progetto didattico, a seguito di una adeguata trasposizione didattica. Di seguito vedremo brevemente in cosa consistano effettivamente questi strumenti, alla luce di studi condotti da matematici di spessore quali Tall e Keisler.

Secondo l'assiomatica euclidea sappiamo che esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta e l'insieme $\mathbb{R}$ dei reali. Abbiamo anche visto nei paragrafi precedenti che l'insieme dei numeri iperreali $\mathbb{R}^*$ è un campo ordinato non archimedeo (o meglio *-archimedeo) contenente i numeri reali, gli infinitesimi e gli infiniti. Sulla retta non è possibile distinguere tra loro numeri che differiscono di un infinitesimo, perché essi appaiono sovrapposti all'unico numero reale cui sono infinitamente vicini. Dunque per poter visualizzare i numeri iperreali necessitiamo di nuovi strumenti immaginari: la corrispondenza biunivoca tra punti del piano e numeri reali ci permette infatti di visualizzare solamente la parte standard dei numeri iperreali finiti,

tuttavia, essendo $\mathbb{R}^*$ un campo ordinato, se $\varepsilon > 0$ è un infinitesimo e c un numero reale, $c, c+\varepsilon, c-\varepsilon$ devono essere numeri distinti.
Per poter visualizzare tali numeri abbiamo bisogno di strumenti immaginari che ci permettano di fare degli ingrandimenti sulla retta reale. L'equivalente matematico di tale strumento è una trasformazione $\mu : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, detta **microscopio infinitesimale** o **non standard**, definita come segue

$$\mu(x) = \frac{x-c}{\varepsilon}$$

tale per cui ogni x è identificato con $\mu(x)$.
In questo modo si è risolto il problema posto precedentemente: infatti ora abbiamo che

$$\mu(c) = 0 \qquad \mu(c+\varepsilon) = 1 \qquad \mu(c-\varepsilon) = -1$$

dunque sono ben distinti, nonostante la distanza infinitesima (Figura 2.2).

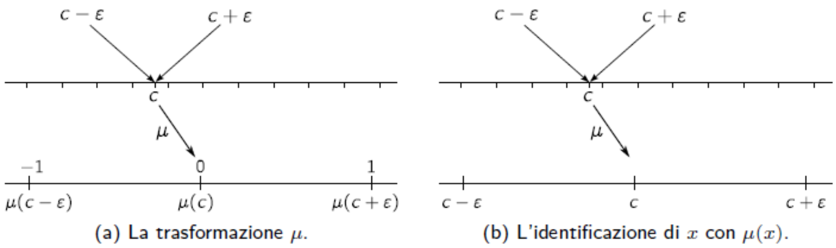


Figura 2.2: Meccanismo di un microscopio non standard

Se però ripetiamo lo stesso ragionamento per $c+\varepsilon^2$, otteniamo

$$\mu(c+\varepsilon^2) = \frac{c+\varepsilon^2-c}{\varepsilon} = \varepsilon$$

ossia l'immagine attraverso μ di $c+\varepsilon^2$ è ancora un infinitesimo, che non riusciamo a distinguere da 0, ossia dall'unico numero reale infinitamente vicino a ε. Un espediente trovato dagli studi di Tall[7] per ovviare a questo problema è quello di considerare la parte standard. Si può cioè esplicitare il passaggio che assegna la posizione del punto nell'immagine della lente considerando la parte standard di μ, ossia considerando la seguente funzione, detta **microscopio ottico**

$$\overline{\mu}(x) = st(\mu(x)) = st\left(\frac{x-c}{\varepsilon}\right)$$

In questo modo abbiamo dunque che nella visualizzazione $c+\varepsilon^2$ risulterà sovrapposto a c: ciò può essere spiegato dicendo che il microscopio non ha una potenza sufficiente per separare i due numeri, in quanto $c+\varepsilon^2$ è molto più vicino a c rispetto alla distanza tra $c+\varepsilon$ e c (Figura 2.3).

[7] Il lettore interessato può approfondire le modifiche apportate in David Tall, *Elementary axioms and pictures for infinitesimal calculus.* Bulletin of the IMA,1982.

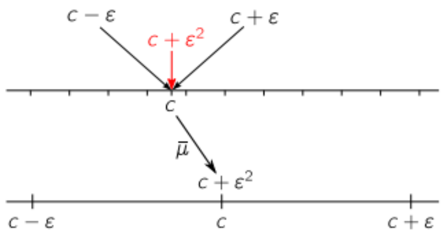


Figura 2.3: Microscopio ottico

Dunque possiamo dare la segente definizione:

Definizione 2.4.1. *Siano $c \in \mathbb{R}^*$ e $\varepsilon > 0$ infinitesimo. La funzione*

$$\mu : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \qquad \mu(x) = \frac{x-c}{\varepsilon}$$

è chiamata lente-ε puntata in c.
Il campo visivo della lente è l'insieme

$$C_\mu = \{x \in \mathbb{R}^* |\ \mu(x) \quad finito\}.$$

Considerando la parte standard di μ, otteniamo la funzione

$$\overline{\mu} : C_\mu \to \mathbb{R} \qquad \overline{\mu} = st\left(\frac{x-c}{\varepsilon}\right)$$

detta microscopio ottico o lente-ε ottica puntata in c.

Osservazione 2.4.1. *Da quanto appena detto, è evidente che $\overline{\mu}$ non è una funzione iniettiva.*

Osservazione 2.4.2. *Il campo visivo non è quindi altro che il dominio della corrispondente lente ottica e rappresenta l'insieme dei numeri che appaiono nell'immagine finale.*

Abbiamo detto che i microscopi ottici possono avere potenza differente l'uno dall'altro.
Per comprendere meglio ciò, andiamo a dare una definizione preliminare.

Definizione 2.4.2. *Dati ε e δ due infinitesimi non nulli, si ha che*

- *ε ha ordine superiore a δ se $\frac{\varepsilon}{\delta}$ è infinitesimo.*
- *ε ha lo stesso ordine di δ se $\frac{\varepsilon}{\delta}$ è finito non infinitesimo.*
- *ε ha ordine inferiore a δ se $\frac{\varepsilon}{\delta}$ è infinito.*

Questi concetti sono strettamente legati al concetto di potenza di un microscopio ottico. Riprendiamo ad esempio l'esempio in Figura 2.3 : i numeri c e $c+\varepsilon^2$ non sono distinti perché il microscopio è in grado di separare numeri che differiscono di un infinitesimo dello stesso ordine di ε, mentre ε^2 è di ordine superiore.
Di seguito vediamo un ulteriore esempio in Figura 2.4 :

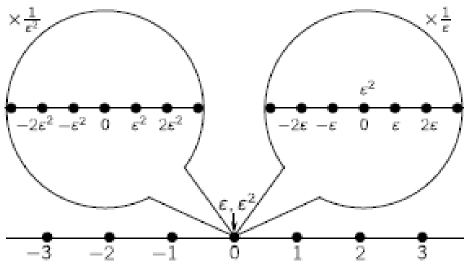


Figura 2.4: Microscopi non standard con potenza differenti

In questo caso abbiamo due microscopi puntati in 0 con ingrandimenti differenti: la lente-ε separa ε da 0 ma non riesce a visualizzare ε^2, mentre la lente-ε^2 riesce a separare ε^2 da 0, ma non riesce più a visualizzare ε, che è uscito dal suo campo visivo.
Una regola generale che possiamo dare è che due punti nel campo visivo di una lente-ε che differiscono di un infinitesimo di ordine superiore rispetto a ε appaiono uguali attraverso di essa o, equivalentemente, una lente-ε distingue due punti se e solo se la loro distanza non è infinitesima rispetto a ε, ossia se non è un infinitesimo di ordine superiore a ε.

I microscopi ottici possono essere utilizzati anche per studiare il grafico di una funzione in un intorno infinitesimale di un suo punto, dunque permettono ad esempio di andare a visualizzare proprietà delle derivate. In questo caso è necessario generalizzare a più dimensioni i microscopi visti fino ad ora e, in particolare nel nostro caso in due dimensioni: per fare ciò è sufficiente puntare una lente ad ogni coordinate del punto considerato.[14]

Definizione 2.4.3. *Siano* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{*2}$ *e* $\varepsilon > 0$ *un infinitesimo. La funzione*

$$\mu : \mathbb{R}^{*2} \to \mathbb{R}^{*2} \qquad \mu(x, y) = \left(\frac{x-\alpha}{\varepsilon}, \frac{y-\beta}{\varepsilon}\right)$$

è chiamata lente-ε *puntata in* (α, β).
Il campo visivo della lente è l'insieme

$$C_\mu = \{x \in \mathbb{R}^{*2} | \ \mu(x, y) \quad finito\}.$$

Considerando la parte standard di μ*, otteniamo la funzione*

$$\overline{\mu} : C_\mu \to \mathbb{R}^2 \qquad \overline{\mu} = st\left(\frac{x-\alpha}{\varepsilon}, \frac{y-\beta}{\varepsilon}\right)$$

detta microscopio ottico o lente-ε *ottica puntata in* (α, β).

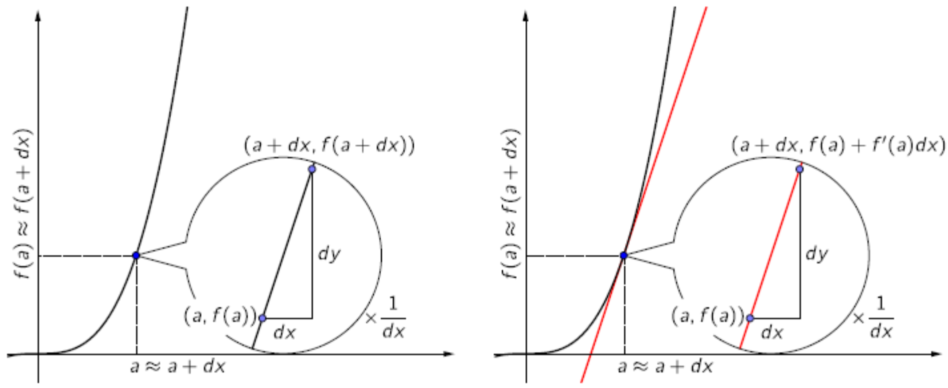


Figura 2.5: Attraverso un microscopio ottico, la curva e la tangente risultano indistinguibili.

Dal Teorema dell'Incremento per ogni numero reale a, si ha che $f'(a) = S$ se e solo se per ogni infinitesimo non nullo Δx si ha

$$f(a + \Delta x) = f(a) + S\Delta x$$

ossia $f'(a)$=S in un punto reale a se e solo se la curva $y = f(x)$ risulta indistinguibile dalla retta tangente, ossia dalla retta di pendenza S, nel campo visivo di un microscopio ottico centrato in $(a, f(a))$. [26]
Quando la pendenza esiste, si può allora usare il microscopio ottico per per mostrare la differenza tra la tangente e la curva (vedi Figura 2.5, 2.6 e 2.7).

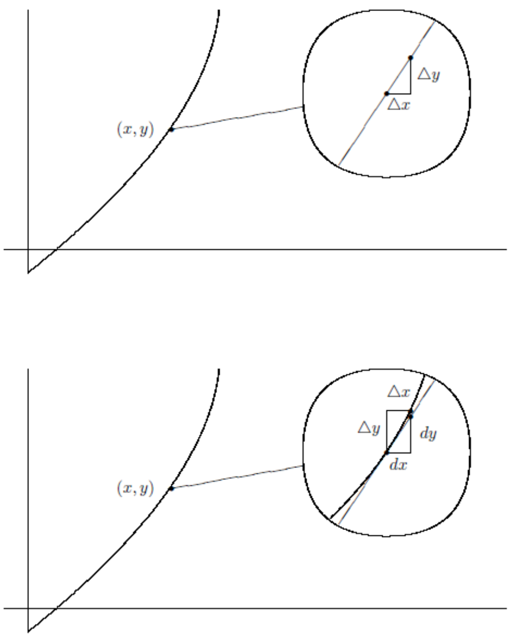


Figura 2.6: Lente-Δx ottica centrata in $(x, f(x))$. Nella seconda immagine viene accentuata la curvatura per mettere in evidenza come con una lente-Δx ottica la differenza tra Δy e dy sia impercettibile.

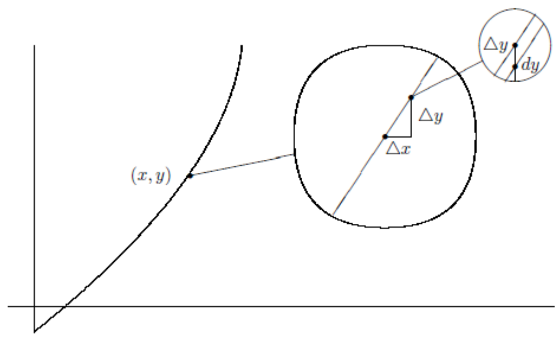


Figura 2.7: Cambia la potenza del microscopio ottico, che adotta una lente-$(\Delta x)^2$ ottica. La curva e la tangente sono indistinguibili con la lente-Δx ottica, ma possono essere distinte con la lente-$(\Delta x)^2$ ottica centrata nel punto iperreale $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.

Capitolo 3

La didattica delle derivate nella Scuola Secondaria di secondo grado

L'insegnamento e l'apprendimento dei concetti legati al calcolo infinitesimale sono temi di grande rilievo all'interno della Didattica della Matematica, a cui viene data importanza anche dalle Indicazioni Nazionali per i licei e le Linee Guida per gli istituti tecnici e professionali (2010 e 2012).
In questo capitolo cercheremo di vedere nel dettaglio questo punto, soffermandoci su quali percorsi è preferibile proporre agli studenti per l'insegnamento delle derivate.

3.1 Le derivate nelle Indicazioni nazionali per Licei e nelle Linee guida

Dal 2000 circa sono stati approvati dei provvedimenti con lo scopo di aggiornare la scuola italiana e introdurre nuovi curricoli di matematica.
I vari curricoli che si sono succeduti negli anni sono stati preceduti da un lavoro realizzato da una commissione istituita dall' Unione Matematica Italiana (UMI), a cui parteciparono docenti universitari e di scuola, affiancati da esperti in didattica.
In tale sede emerse l'idea della *"Matematica per il cittadino"*, ossia l'idea di creare *"un corpus di conoscenze e abilità fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società"*.
A seguito del lavoro svolto dalla commissione, sono stati pubblicati tre volumi contenenti, oltre i suddetti curricoli, attività da svolgere in classe, volte ad illustrare il significato delle scelte operate all' interno del curricolo.
Nel 2001, l'UMI ha presentato una proposta di curricoli di matematica per la scuola primaria e secondaria di primo grado, pubblicata nel volume *Matematica 2001*.
Nei volumi *Matematica 2003* e *Matematica 2004* si trovano i contenuti di matematica per la parte comune a tutti gli indirizzi di scuola secondaria di secondo grado, strutturati in quattro nuclei tematici:

- Numeri e algoritmi
- Spazio e figure

- Relazioni e funzioni
- Dati e previsioni

e in nuclei trasversali "di processo":

- Argomentare, congetturare, dimostrare
- Risolvere e porsi problemi
- Misurare
- Laboratorio di matematica

In particolare nel volume del 2003 ritroviamo i contenuti relativi al primo e al secondo biennio della scuola secondaria di secondo grado, mentre quello del 2004 è riservato al quinto anno, con lo scopo di fare da raccordo tra gli studi scolastici e quelli universitari.
In questa tesi ciò che vogliamo indagare è l'insegnamento e l'apprendimento del concetto di derivata, dunque, a tal fine, il nucleo di nostro interesse sarà quello intitolato "Relazioni e funzioni". In particolare, in *Matematica 2004*, nel nucleo "Relazioni e funzioni" le abilità specifiche richieste sono:[39]

- Interpretare geometricamente la derivata; determinare la tangente in un punto al grafico di una funzione ed usarla per approssimare ("linearizzare") la funzione in un opportuno intervallo.
- Utilizzare la derivata per calcolare la velocità istantanea di un moto.
- Valutare l'andamento e il segno della funzione $f'(x)$ in relazione all'andamento di $f(x)$ e viceversa; individuare i punti in cui una funzione assume i valori massimi o minimi, relativi e assoluti.

ponendo l'attenzione sul fatto che *"l'ordine e il modo in cui si introduce il concetto di derivata dipende dalle scelte didattiche dell'insegnante. La storia della matematica può essere di aiuto e di guida in queste scelte. Si sconsiglia invece di ridurre l'analisi matematica esclusivamente allo studio di funzioni e di rendere meccanico l'uso della derivata prima e seconda e lo studio del loro segno."*
L'iniziativa dell'UMI ha avuto un'influenza fondamentale su tutti i curricoli ministeriali. In essi ritroviamo la stessa suddivisione in nuclei sopra elencata (con l'unica differenza nella nomenclatura[1]).
Ma andiamo allora a vedere più nel dettaglio cosa ci dicono in fatto di derivate le *Indicazioni Nazionali* per i licei e le *Linee Guida* per gli istituti tecnici e professionali, riferimento principale per ogni docente nella fase di progettazione dei propri interventi didattici.
Lo studio delle derivate nei licei (scientifici e non) è proposto al quinto anno, anche se già nei contenuti relativi al secondo biennio troviamo riferimenti al tasso di variazione di una funzione: più precisamente, nel nucleo "Relazioni e funzioni", troviamo riportato *"Un tema importante di studio sarà il concetto di velocità di variazione di*

[1]Nei curricoli odierni i primi due nuclei tematici sono denominati *Aritmetica e Algebra, Geometria.*

un processo rappresentato mediante una funzione."
Per quanto riguarda invece il quinto anno di un liceo scientifico (per gli altri licei cambia leggermente la formulazione, ma i punti chiave toccati sono fondamentalmente gli stessi[2]) le *Indicazioni Nazionali* riportano:

"Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale (in particolare la continuità, la derivabilità) anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva). Non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche del calcolo, che si limiterà alla capacità di derivare le funzioni già note, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, le funzioni razionali. Si tratterà soprattutto di comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura. Inoltre, lo studente acquisirà familiarità con l'idea generale di ottimizzazione e con le sue applicazioni in numerosi ambiti."

Quello che si può notare è, da un lato l'importanza che viene data alla contestualizzazione storica e quindi alla conoscenza delle problematiche che stanno all'origine del calcolo infinitesimale, dall'altro viene sottolineata la necessità di acquisire consapevolezza dei procedimenti, più che del mero calcolo, a volte complicato e fine a se stesso.
Frequentemente infatti, nell'insegnamento della matematica, viene dato molto spazio ad esercizi di calcolo, talvolta però ripetitivi, volti più a un addestramento che a una reale comprensione. Spesso lo studente conosce delle regole applicative, ma non sempre ha compreso il significato dei concetti considerati e questo fatto è ciò che, in più contesti, viene ribadito dalle *Indicazioni Nazionali.*
Viene poi puntata l'attenzione sui problemi di ottimizzazione, che qualche decina di anni fa prendevano il nome di problemi di massimo e minimo: questa scelta è coerente con gli sviluppi attuali di scienza, tecnica e società, basti pensare agli studi sul trasporto ottimo condotti in questi ultimi anni da Alessio Figalli, vincitore della Medaglia Fields in matematica nel 2018 [3].[33]
Infine, un altro aspetto che si può rilevare dal passo sopra citato è il riferimento alla *"matematizzazione"*, attuabile attraverso il concetto di "modello matematico", inteso come un discorso su oggetti matematici, che usa il linguaggio e gli strumenti della matematica e che viene messo in relazione con oggetti, eventi e situazioni del mondo reale (in particolare nel testo troviamo come riferimento *i fenomeni fisici e naturali*). [46]
L'uso dei modelli matematici si è esteso oggi agli ambiti più disparati basti pensare, per citarne alcuni, all'economia, l'ingegneria, la biologia, la medicina, le scienze sociali: anche questo probabilmente è il motivo per cui la modellizzazione ricorre continuamente nei curricoli di matematica attuali.
La capacità di "matematizzare" è presa in considerazione anche dal programma OCSE PISA 2012 che definisce la "mathematical literacy" come *"la capacità di una persona di formulare, utilizzare e interpretare la matematica in svariati contesti. Ta-*

[2]Il lettore interessato alla precisa formulazione relativa ad ogni indirizzo liceale può consultare [35].

[3]Il lettore può trovare un piccolo approfondimento di questo ultimo punto in Appendice C.

le competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni, aiutando gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate, che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo"[4].
Le indicazioni curricolari invitano quindi gli insegnanti ad aiutare gli studenti ad acquisire la consapevolezza dell'importanza delle relazioni tra matematica e realtà e ciò non solo nei licei, ma anche negli istituti tecnici e professionali, dove, in relazione alle derivate, sono citati anche altri collegamenti al mondo reale, quali ad esempio l'economia.
Completiamo quindi questo quadro andando a vedere conoscenze e abilità richieste nelle Linee Guida per gli istituti tecnici e professionali, in cui lo studio delle derivate è proposto già a partire dal secondo biennio.[36, 37]

II biennio degli istituti tecnici

Conoscenze	Abilità
Funzioni di uso comune in scienze economiche e sociali e loro rappresentazione grafica. Concetto di derivata e derivazione di una funzione. Proprietà locali e globali delle funzioni. Approssimare funzioni derivabili con polinomi.	Calcolare derivate di funzioni. Costruire modelli matematici per rappresentare fenomeni delle scienze economiche e sociali, utilizzando derivate. Utilizzare metodi grafici per risolvere equazioni e disequazioni anche con l'aiuto di strumenti informatici. Risolvere problemi di massimo e di minimo.

II biennio degli istituti professionali

Conoscenze	Abilità
Funzioni polinomiali; funzioni razionali e irrazionali; funzione modulo; funzioni esponenziali e logaritmiche; funzioni periodiche. Concetto di derivata di una funzione. Proprietà locali e globali delle funzioni. Formula di Taylor. Algoritmi per l'approssimazione degli zeri di una funzione.	Calcolare derivate di funzioni. Analizzare esempi di funzioni discontinue o non derivabili in qualche punto. Rappresentare in un piano cartesiano e studiare le funzioni $f(x) = a/x$, $f(x) = a^x$, $f(x) = \log x$. Descrivere le proprietà qualitative di una funzione e costruirne il grafico. Calcolare derivate di funzioni composte. Costruire modelli, sia discreti che continui, di crescita lineare ed esponenziale e di andamenti periodici. Approssimare funzioni derivabili con polinomi.

[4]Tratto dal QdR PISA 2012.

Riferimenti espliciti alle derivate li ritroviamo anche nel *Quadro di riferimento per la redazione e lo svolgimento della seconda prova scritta dell'esame di Stato* relativa al liceo scientifico, in cui viene messo in luce come l'esame debba accertare l'acquisizione dei principali concetti e metodi della matematica, anche in una prospettiva storica-critica. In particolare, tra gli obiettivi della prova è riportato l'accertamento che il candidato sia in grado di:

- Riconoscere le caratteristiche di continuità e derivabilità di una funzione e applicare i principali teoremi riguardanti la continuità e la derivabilità.
- Determinare la derivata di una funzione ed interpretare geometricamente il significato.
- Applicare il calcolo differenziale a problemi di massimo e minimo.
- A partire dal grafico di una funzione, tracciare il grafico della sua derivata.

Anche nella griglia di valutazione dei punteggi emerge poi come gli indicatori di svolgimento corretto della prova non debbano limitarsi a verificare una corretta risoluzione del problema dal punto di vista di applicazione di regole e svolgimento di calcoli, bensì viene richiesta anche la capacità di analisi dei problemi posti, che devono essere commentati opportunamente effettuando eventuali collegamenti e adoperando i codici grafico-simbolici necessari[5].

[5] Il lettore interessato ai riferimenti completi relativi ai Nuclei Tematici fondamentali può consultare il *QdR - quadro di riferimento per la seconda prova scritta di matematica per il liceo Scientifico*, MIUR, (2018).

3.2 Questioni didattiche nell'insegnamento delle derivate

Una prima domanda che ci si potrebbe porre prima di affrontare il modulo sulle derivate a scuola, è capire quale sia il punto di partenza e, di conseguenza, quali siano i prerequisiti che gli studenti devono avere prima di affrontare l'argomento.
Può sembrare evidente la necessità di iniziare l'argomento con una buona conoscenza dei limiti: quasi tutti i testi universitari di analisi infatti iniziano con i limiti, così come i testi per le scuole secondarie.
A tal proposito vorrei riportare il parere di Francesco Speranza, matematico che fu membro dell'UMI:

I nuovi libri delle superiori sembrano suggerire per l'analisi l'approccio ottocentesco alla Weierstrass, fondato sul concetto di limite (...) L'esposizione attuale è inquadrabile sia nell'ordine positivistico delle discipline (la matematica pura precede le "applicazioni"), sia in una visione idealistica della matematica, che tenda a isolarla dalle altre discipline (...) Storicamente invece, l'analisi è iniziata con il problema delle aree (...), per proseguire con il problema delle tangenti e come strumento per affrontare le necessità della fisica matematica: il concetto di limite è arrivato per ultimo (anche se adombrato, per esempio in Newton). Se vogliamo tenere conto fin dall'inizio delle ragioni che hanno spinto i matematici a costruire i concetti fondamentali, dovremo tener conto dello sviluppo storico dei vari argomenti. (...) Del resto, fra gli stessi laureati in matematica molti non si rendono conto che, per esempio, velocità e tasso d'inflazione appartengono alla medesima categoria concettuale, quella della misura di una variazione"[6]

F. Speranza pose quindi l'attenzione su come spesso la formalizzazione dell'analisi matematica porti gli insegnanti a slegare la spiegazione da una contestualizzazione storica, indispensabile per comprendere anche i fenomeni reali.
Proviamo quindi ad analizzare meglio questo punto, vedendo gli autorevoli pareri di matematici e esperti in didattica della matematica.

3.2.1 L'importanza della storia nell'insegnamento della matematica

Nelle *Indicazioni Nazionali*, nella descrizione delle linee generali e delle competenze relative al liceo scientifico, troviamo questo preambolo *"Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente (...) saprà* ***inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale****. Lo studente avrà acquisito una* ***visione storico-critica*** *dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca,* ***il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico****, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di*

[6]Passo tratto da "Francesco Speranza, *I fondamenti epistemologici della matematica*, 1996".

matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica." [35]
Le parti evidenziate hanno lo scopo di porre l'attenzione su due aspetti: da un lato si può notare come, nei programmi ministeriali, si evidenzi l'importanza di connettere le varie teorie matematiche studiate con le problematiche storiche che le hanno originate, al fine di comprenderne meglio il significato, dall'altro si può vedere come il calcolo infinitesimale rappresenti uno dei punti di snodo dello sviluppo della matematica, tanto da essere citato come momento principale di caratterizzazione del pensiero matematico.
Questo approccio all'insegnamento in realtà non è nuovo: [20]

già Lagrange, nelle sue "Lezioni elementari sulle matematiche" del 1795, fece uso di riferimenti storici e riflessioni critiche e epistemologiche sui metodi e sui diversi settori delle matematiche.
Egli stesso descrisse le sue lezioni come momenti in cui si andava ad esporre *"il percorso analitico degli inventori e gli artifici che hanno impiegato per vincere le difficoltà che potevano fermarli"*.
Lagrange usò la storia nelle sue lezioni per esplicitare le problematiche in gioco e illustrare il cammino percorso dai matematici nella risoluzione dei problemi, tanto che spesso antepose ai suoi articoli introduzioni storiche, tra le quali ritroviamo anche scritti sui fondamenti dell'analisi e sul calcolo delle variazioni.

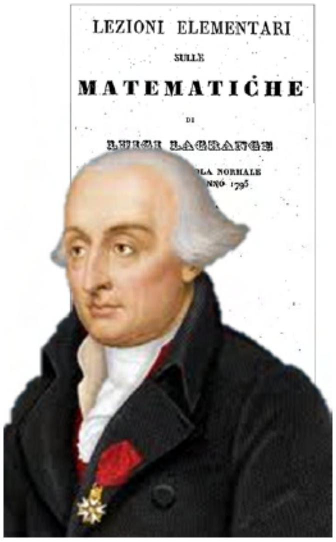


Figura 3.1: Lagrange

A partire dagli anni novanta dell'Ottocento poi *Felix Klein*, matematico tedesco nato a Düsseldorf nel 1849, cominciò a elaborare il suo celebre programma di riforma dell'insegnamento della matematica, fra i cui assunti metodologici vi era quello di presentare la teoria seguendo il modo con cui essa si era sviluppata nella storia e non a partire dalla sua formulazione finale.
Il tema fu trattato anche dal matematico italiano *Federigo Enriques*, nato a Livorno nel 1871, il quale sosteneva che un bravo insegnante avrebbe dovuto presentare ai suoi allievi *"le origini, le connessioni, il divenire, non un qualsiasi assetto statico di ogni teoria"*, prestando attenzione agli errori che hanno fatto progredire la scienza, alle questioni aperte e ai diversi metodi usati per affrontarle.
Nei suoi studi egli sosteneva infatti che gli sviluppi scientifici acquistassero pieno significato solo nella loro concatenazione storica, affermando che *"Una visione dinamica della scienza porta naturalmente sul terreno della storia, ... dunque la storia diviene parte integrante della scienza"*.
Francesco Severi, presidente di Mathesis nel 1909-1910, era convinto che, per facilitare la comprensione di certi concetti matematici da parte degli studenti di scuola secondaria, fosse utile partire dalla loro origine storica, sostenendo che *"occorre ispirarsi al principio che nell'apprendimento di nozioni nuove l'intelletto tende a seguire*

un processo analogo a quello con cui si è storicamente sviluppata la scienza".
Proprio questa idea della storia come supporto alla comprensione del significato degli oggetti matematici la ritroviamo negli scritti del didatta della matematica Louis Radford, il quale, nel 1997, sostenne come *"il modo in cui un'antica idea è stata forgiata può aiutarci a ritrovare quegli antichi significati che, con un'opportuna opera di adattamento didattico, possono probabilmente essere ridisegnati e resi compatibili con i moderni programmi scolastici".* [20]
In occasione dell'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) Study sul Ruolo della Storia della Matematica nell'Insegnamento e nell'Apprendimento della Matematica, tenutosi a Luminy (Marsiglia) nell'aprile 1998, Lucia Grugnetti, sotto la guida di Francesco Speranza, scrisse una nota, pubblicata nella Rivista Matematica dell'Università di Parma del 2000[7], nella quale veniva sostenuta la tesi secondo cui *"nella formazione, didattica, storia ed epistemologia (della matematica) devono costituire un «circolo virtuoso» nel quale ognuna di esse giustifica e rafforza le altre"*, aggiungendo che *"nell'insegnamento della matematica a livello di scuola secondaria superiore deve esserci una componente storico-epistemologica e, simmetricamente, deve esserci una componente matematica nell'insegnamento della filosofia."* [24]
In risposta ad alcune domande del documento preparatorio dell'ICMI Study, secondo i due matematici, gli allievi che si confrontano esplicitamente con questi problemi dovrebbero essere, o diventare, capaci di capire ***"il valore culturale" della matematica***. In tale documento è interessante anche la precisazione sul pericolo di ridurre la storia a qualche aneddoto: questi infatti, per non risultare inutili, dovrebbero essere inseriti in un contesto culturale.
Ciò che emerge quindi da più studi, passati e attuali, è come sia importante collocare la matematica in un contesto generale della conoscenza [8], in cui la storia può essere usata per motivare e stimolare gli studenti ad apprendere certi concetti matematici, come strumento cognitivo o strumento pedagogico.
A questo punto al lettore potrebbe sorgere spontanea una domanda: alla luce dell'importanza della storia nell'insegnamento e nell'apprendimento, quali sono le modalità preferibili per inserirla all'interno dell'intervento didattico?
Secondo Giorgio Tomaso Bagni (1958-2009) la storia all'interno della didattica può essere affrontata secondo diverse modalità. [2]
Una scelta potrebbe essere quella di usare gli elementi storici come introduzione all'argomento di riferimento, scelta che porterebbe inevitabilmente ad inserirli all'inizio della trattazione. In questo modo essi potrebbero essere esposti quindi all'inizio, seguendo un ordine cronologico e adottando così un *uso a priori della storia* nella trasmissione del sapere matematico.
Tale approccio si collega anche ad un'altra questione didatticamente rilevante in cui si contrappongono più visioni, ossia se l'introduzione di un concetto debba sempre seguire l'evoluzione storica degli eventi o meno.
Percorsi storici ordinati non cronologicamente sono spesso adottati nella pratica

[7]Una versione in inglese è stata pubblicata in Philosophy of Mathematics Education Journal 11, 1999

[8]Purtroppo oggi è frequente la scelta contraria: il lettore interessato può consultare, a titolo di esempio, l'introduzione di Bourbaki agli Elements)

tradizionale: ad esempio, l'analisi matematica viene in generale presentata secondo una sequenza che non riflette l'evoluzione storica (Hairer e Wanner, 1996 [9]); basti appunto pensare al concetto di limite, nato storicamente dopo quello di derivata (punto trattato in modo approfondito nel Capitolo 1), ma a scuola classicamente anticipato.
Sempre secondo Bagni però, questo non sarebbe l'unico approccio possibile.
Una via alternativa può essere rappresentata da un *uso a posteriori della storia* nella trasmissione del sapere matematico: in questo caso il ruolo degli elementi storici si collega all'approfondimento e al chiarimento degli argomenti trattati.
L'insegnante deve comunque tenere sempre a mente che, qualsiasi siano le modalità dell'impiego della storia, è indispensabile mantenere un rigoroso atteggiamento su alcune questioni metodologiche: in particolare, ogni richiamo storico deve essere adeguatamente contestualizzato, cioè presentato con riferimento al periodo in esame, in analogia con le parole precedentemente citate in questo paragrafo[10].
Un interrogativo per Bagni è se le impostazioni descritte (a priori e a posteriori) debbano essere considerate alternative o complementari. Tale questione, a suo parere, è delicata e richiede un adeguato approfondimento, anche se *"forse l'adozione di una possibilità non esclude definitivamente l'altra opzione, sebbene le due impostazioni si basino su diverse assunzioni epistemologiche."*.
Vorrei concludere questo breve approfondimento mettendo comunque in evidenza come le figure dello storico e del matematico siano ben distinte e non debbano essere superficialmente confuse: lo storico mira a ricostruire l'evoluzione della ricerca matematica nel tempo dall'interno, cioè collocandosi idealmente nel momento esaminato e senza particolari riferimenti alla successiva sistemazione concettuale della materia; il matematico (didattico) invece la ripercorre e la propone dall'esterno, interpretandola anche alla luce del sapere che sta trasmettendo, senza tuttavia trascurare la corretta contestualizzazione storica, sociale e culturale dei riferimenti impiegati.[2][11]

[9] Per riferimenti bibliografici precisi si veda [2].

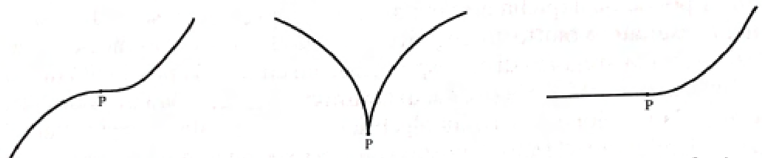
[10] Il riferimento va all'articolo dell'Università di Parma di Francesco Speranza e Lucia Grugnetti [24], precedentemente preso in esame all'interno del paragrafo.

[11] Per maggiori approfondimenti si può vedere Grugnetti Rogers *History in Mathematics Education*, The ICMI Study,39-62, Dodrecht,Kluwer, 2000.

3.2.2 "Concept image" e "concept definition" con riferimento al concetto di tangente

I matematici e didatti *David Tall* e *Shlomo Vinner* svilupparono nel 1981 le nozioni di ***concept image*** e ***concept definition*** come strumenti teorici per analizzare i processi di apprendimento delle definizioni in matematica.
L'anno precedente fu proprio Vinner, insieme a Hershkowitz, a notare che il pensiero degli studenti in geometria è basato molto frequentemente su prototipi, più che su definizioni rigorose. [15]
Ma vediamo allora più precisamente cosa intendiamo con queste due nozioni.
Per *concept definition* si intende la definizione formale del concetto matematico, mentre con *concept image* si fa riferimento all'insieme delle strutture cognitive che un individuo associa al concetto matematico e che può modificarsi nel corso degli anni in relazione alle varie esperienze che lo richiamano. [1]
La *concept image* può essere una rappresentazione visuale del concetto, un'immagine mentale, un insieme di impressioni o esperienze che possono poi essere tradotte in forma verbale.
La *concept image* di un concetto può variare da individuo a individuo e può aiutare a riferirsi ad una certa definizione, tuttavia, in matematica, è importante che gli studenti abbiano delle definizioni rigorose su cui costruire la loro conoscenza.
Molti insegnanti sono convinti che il processo di elaborazione segua il seguente schema: richiamo dal *concept name* alla *concept definition*, che, interagendo con la *concept image*, genera il comportamento cognitivo, ossia la risposta dello studente.
Non sempre però è così tutto automatico e da dare per scontato, anzi, quello che accade secondo diversi studi è un processo opposto, basato su una risposta intuitiva da parte dello studente: si ha cioè il passaggio dal concept name alla concept image, giungendo alla risposta senza alcun richiamo alla concept definition.
Tale processo si distingue dal processo di elaborazione atteso dall'insegnante (che possiamo definire come "deduzione che segue il processo intuitivo", in cui è presente la concept definition, precedentemente stimolata dalla concept image), ma si distingue ancor di più dalla così detta "deduzione formale", ossia quel processo cognitivo secondo il quale non ci sarebbe nemmeno la necessità di consultare la concept image, passando direttamente da concept name a concept definition.
Spesso è opinione comune tra gli insegnanti che l'introduzione della definizione rigorosa possa essere sufficiente a modificare una certa concept image, non rendendosi conto che la formazione di un concetto è un processo lungo, che prevede diversi passaggi, ossia la formazione di un'immagine concettuale e lo sviluppo di buone relazioni tra il nome del concetto, la sua immagine e la definizione.
Quest'ultima, purtroppo, molto spesso viene sottovalutata dagli studenti che si limitano a impararla meccanicamente e mnemonicamente, senza soffermarsi sul vero significato.
Per indagare sulle *concept images* e *definitions* bisogna utilizzare tecniche differenti: per le seconde è preferibile utilizzare domande dirette ("che cosa è ...?"), per le prime è necessario porre invece domande indirette.

Andiamo allora a vedere un esempio, proposto da Vinner nel 1981, riguardante uno dei punti di partenza per la scoperta del calcolo, ossia la definizione di retta tangente. [1]
La definizione di tangente viene generalmente introdotta agli studenti nel caso della circonferenza, in cui si hanno come vincoli il fatto che essa tocchi la curva in un solo punto e non possa attraversare la circonferenza stessa in quel punto: è questa quindi l'immagine concettuale che gli allievi costruiscono come frutto delle loro esperienze.
È proprio questo uno dei risultati emersi dalla sperimentazione condotta da Vinner su 278 studenti al loro primo anno universitario (di scienze/ingegneria), frequentanti un corso di analisi e che dunque già avevano visto la definizione formale di tangente al grafico di una funzione differenziabile.
Le domande sottoposte agli studenti erano le seguenti:

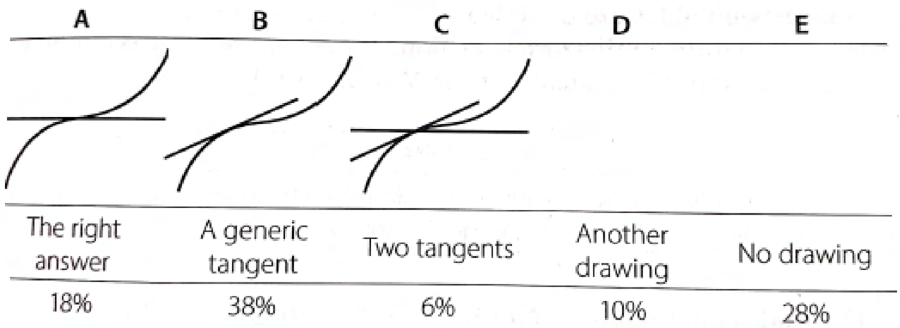


Per ognuno dei tre casi scegli l'affermazione che ti sembra corretta fra le tre elencate sotto, e segui le istruzioni fra parentesi:

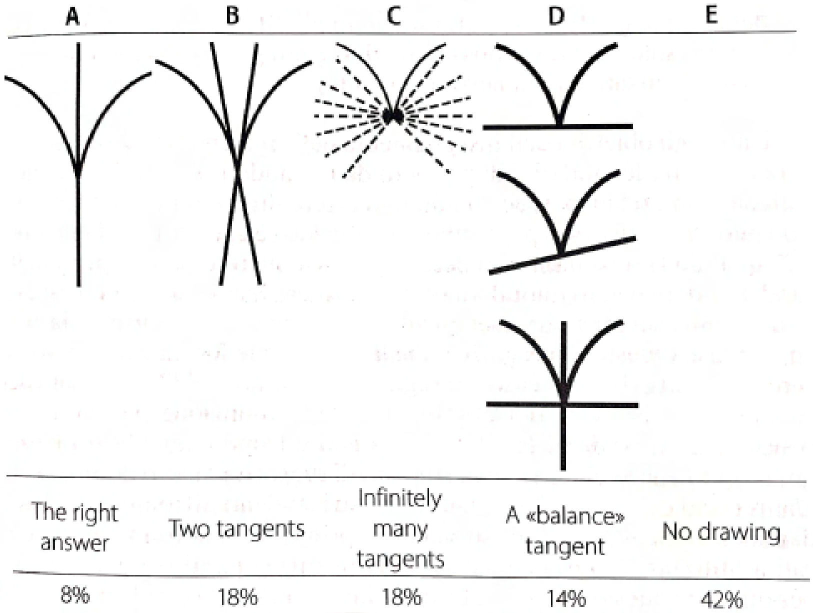
1. Per P è possibile condurre esattamente una tangente alla curva (disegnala).
2. Per P è possibile condurre più di una tangente (specifica quante: due, tre, infinite. Disegnale tutte se sono in numero finito, e alcune se sono infinite).
3. Per P è impossibile condurre tangenti alla curva.
4. Qual è la definizione di tangente che ti ricordi da questo corso o da corsi precedenti? Se non te ne ricordi nessuna cerca di definirla con le tue parole.

Figura 3.2

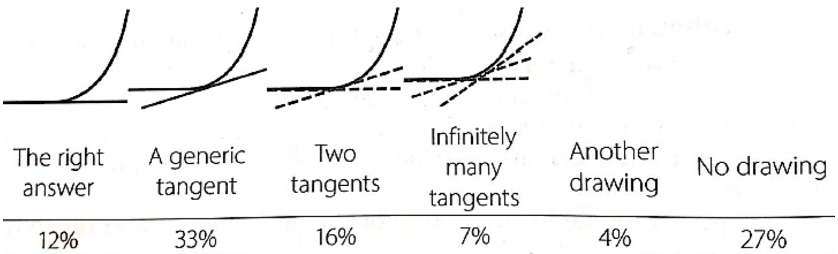
I punti 1,2,3 vanno a costituire una domanda formulata in modo indiretto e hanno lo scopo di indagare le *concept images* degli studenti, mentre la quarta è una domanda diretta che ha lo scopo di valutare la correttezza della *concept definition* acquisita dagli allievi.
Ma vediamo allora i risultati di tale sperimentazione.
Per la prima curva della Figura 3.2 le risposte date possono essere riepilogate come segue:



Per la seconda invece le risposte furono le seguenti:



E le seguenti per la terza:



Per quanto riguarda la domanda 4 emerse poi che solamente il 41% degli studenti era stato in grado di fornire una definizione corretta, il 35% invece si era riferito a proprietà che, secondo studi successivi di Winicki-Landman e Leikin[12], spesso sono ambiguamente presentate agli allievi come vere e proprie definizioni e sono da quest'ultimi estese impropriamente. Il restante 24% non ha fornito una risposta.
Attraverso tali risposte Vinner dedusse come il prototipo grafico della tangente a punti generici di un grafico venisse impropriamente esteso dagli studenti a punti particolari, quali quelli delle figure presentate nel questionario.
È da questo e altri esempi simili che Tall e Vinner elaborarono due regole didattiche: in primo luogo l'insegnante, a parere dei due matematici, avrebbe dovuto evitare agli studenti conflitti cognitivi, in secondo luogo avrebbe dovuto attivare tali conflitti solo quando questi sarebbero stati necessari al fine di portare gli studenti a uno stadio intellettivo più avanzato.
È dunque fondamentale che l'insegnante conosca i processi cognitivi e che attui delle

[12] Per maggiori riferimenti si veda Boggiano, Furinghetti, Somaglia, *"La definizione di derivata nella dialettica tra ambito algebrico e ambito geometrico"*, 2002, Unige.

tecniche utili all'evitare la creazione di misconcezioni, cercando di far capire ai suoi studenti quanto in matematica sia importante conoscere la definizione formale dei concetti.
Gli studenti devono quindi essere istruiti ad usare la definizione formale in più contesti e, a tal proposito, lo stesso Vinner sottolineò come, a suo parere, fosse necessario dare compiti che per essere risolti in modo corretto necessitassero della *concept definition*. Egli riteneva infatti che, senza esempi di questo tipo, gli studenti avrebbero sempre continuato ad usare la *concept image*, essendo per loro un processo più semplice e intuitivo, non capendo di incorrere così in errori e senza rendersi conto dell'importanza della definizione rigorosa: in questo caso quindi, solo un fallimento può convincerli alla necessità di fare uso di definizioni formali. [1]
È dunque necessario fare sempre riferimento alle *concept definitions*, senza limitarsi però alla semplice esposizione, bensì puntando sui conflitti tra *concept images* e definizione formale, portando gli studenti a discuterne e ragionare.
Compito fondamentale dell'insegnante è dunque supportare il processo di formazione e elaborazione dei concetti, e diverse ricerche in didattica della matematica hanno dimostrato come questo possa essere favorito dall'uso di software tecnologici di geometria dinamica.

È dunque proprio sulle potenzialità delle tecnologie per l'apprendimento della matematica, e in particolare nel nostro caso del calcolo, che ci soffermeremo nel prossimo paragrafo.

3.2.3 Uso del software dinamico nella didattica dell'Analisi Matematica

Il ruolo fondamentale che rivestono le tecnologie nell'insegnamento e apprendimento della matematica è messo in luce anche dalle *Indicazioni Nazionali* per i licei e nelle *Linee Guida* per gli istituti tecnici e professionali.
Nelle *Indicazioni Nazionali* è ad esempio riportato: [35]

"Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale."

È naturale, come sostenuto dall'insegnante-ricercatore Domingo Paola nel 2004, che, a seconda dell'approccio pedagogico di riferimento, l'uso delle tecnologie nell'insegnamento - apprendimento della matematica assuma ruoli e funzioni differenti.
Se consideriamo ad esempio il modello tradizionale di lezione frontale, il computer, e gli strumenti informatici in generale, non possono che essere utilizzati come una sorta di lavagne potenziate, portando a dei miglioramenti piuttosto limitati nell'insegnamento.
Diverso è invece l'uso di un modello costruttivista, in cui lo studente diventa protagonista nel processo di apprendimento e l'elemento tecnologico diventa la chiave per risolvere problemi ed edificare la propria conoscenza.
Le tecnologie oggi disponibili rendono possibile trattare in modo nuovo molti concetti matematici: importanti sono le ricerche didattiche sull'uso dei software di geometria dinamica per l'insegnamento della geometria nella scuola secondaria.
Un software di geometria dinamica, infatti, permette di eseguire costruzioni con riga e compasso e di metterle in movimento, aiutando così la comprensione dei concetti geometrici, nonché favorendo la congettura e la cultura della dimostrazione negli studenti.
Tutte queste applicazioni alla geometria, ampiamente discusse e argomentate in letteratura, potrebbero però ai più mettere in ombra le potenzialità che i software di geometria dinamica hanno anche nella didattica dell'analisi matematica.
Un esempio è proprio l'insegnamento e l'apprendimento del calcolo differenziale che, prima dell'avvento delle nuove tecnologie, era concentrato sul calcolo con illustrazioni statiche di grafici.
Gli attuali software hanno messo a disposizione invece grafici dinamici,manipolabili dallo studente, che è quindi aiutato e guidato nella comprensione dei concetti.
Per esempio, utilizzando funzioni come gli *Zoom*, presenti nei calcolatori, è possibile evidenziare l'eventuale linearità locale di un grafico; in seguito, utilizzando la funzione *Trace*, oppure trascinando un punto con il mouse sul grafico della funzione o, ancora, muovendo lungo il grafico un segmentino che congiunge due punti abbastanza vicini, lo studente può vedere dinamicamente come cambia la pendenza delle tangenti lungo il grafico e quindi può pensare alla pendenza delle tangenti al grafico

come a una vera e propria funzione [40].
Studi di questo tipo furono condotti anche da David Tall, il quale, già nel 1991, cominciò a parlare del ruolo rivestito dalla visualizzazione nel calcolo.
Di seguito andremo quindi a vedere i tratti salienti di un suo articolo [45], con il fine di comprendere il ruolo giocato dai software dinamici per introdurre concetti legati all'analisi matematica e, in particolare, al calcolo infinitesimale.
Tall aprì il suo articolo evidenziando l'importanza in generale della visualizzazione in analisi matematica, senza far riferimento inizialmente alle tecnologie, precisando come, nelle prime fasi di sviluppo della teoria di funzioni, limiti, continuità ecc, la visualizzazione si fosse rivelata una fondamentale fonte di idee.
Secondo questo didatta quindi, *"negare queste idee agli studenti significa privarli delle radici storiche della materia"*, nonché privarli, se guidati opportunamente da un insegnante, di un metodo efficace per la comprensione dei concetti.
Tuttavia Tall ha evidenziato anche che le ricerche in didattica della matematica mostrano come studenti abbiano un basso livello di abilità nella visualizzazione, che si traduce in una perdita del significato rigoroso dei contenuti.
Il problema risiede però nel fatto che non sempre la riproduzione di un'immagine statica può condurre alla giusta soluzione di un problema, all'esatta formulazione di un teorema o a una corretta *concept definition*.

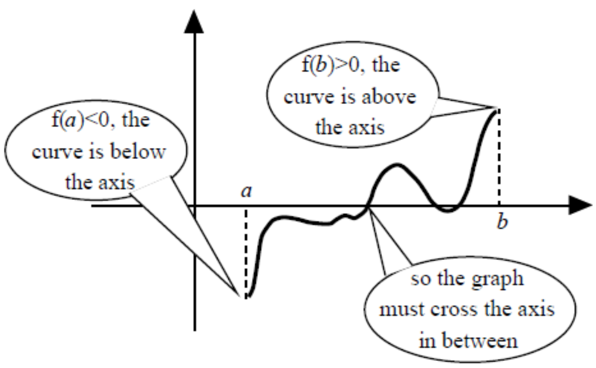
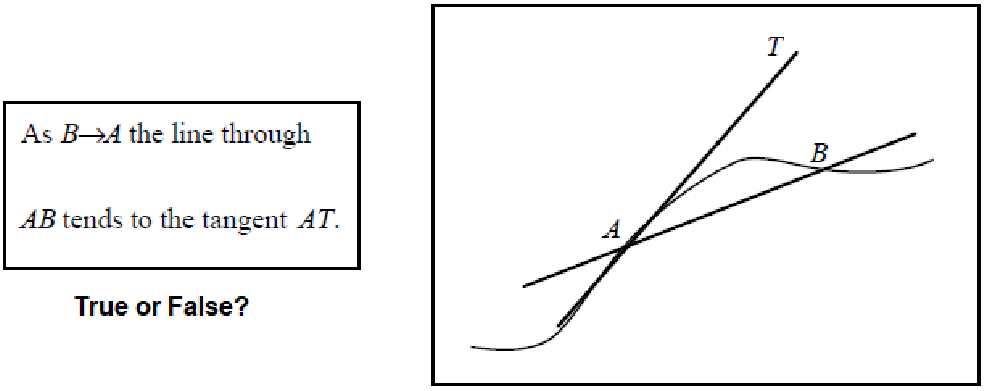


Figura 3.3: Visualizzazione del Teorema dei Valori Intermedi

Un esempio usato da Tall per chiarire quanto appena detto è il Teorema dei Valori Intermedi per le funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ (Fig 3.3).
Molto spesso ci si limita a dimostrare il teorema utilizzando un' immagine come quella in Fig 3.3, immagine che senza dubbio è intuitivamente chiara, ma che, se usata da sola come spiegazione, potrebbe creare delle misconcezioni negli studenti. Infatti, un individuo con poca esperienza, potrebbe, a partire da quell'immagine, generalizzare il teorema a casi non applicabili: basti pensare il caso della funzione $f(x) = x^2 - 2$ definita solamente nell'insieme dei numeri razionali (essa assume un valore negativo per $x = 1$, positivo per $x = 2$, ma non esiste un a razionale tale per cui $f(a) = 0$).
Questo è dunque un chiaro esempio di come la mediazione dell'insegnante sia fondamentale per il processo cognitivo degli allievi.
Questa idea è ripresa anche da Valeria Giardino, logica matematica e ricercatrice dal 2015 presso il CNRS (Centre national de la recherche scientifique), la quale, pur ritenendo che una giusta considerazione del ruolo della visualizzazione in matematica permetta di aumentarne la comprensione, sottolinea come una rappresentazione intuitiva o visiva sia sempre dipendente dal bagaglio di conoscenze e dall'esperienza propria del soggetto di volta in volta considerato.

Ma vediamo allora un altro esempio, strettamente legato a questa tesi, per mostrare come l'intuizione possa a volte portare a conclusioni erronee negli studenti, se non supportati dall'insegnante e da nuove metodologie.
Partiamo dalla domanda riportata di seguito in figura, sottoposta da David Tall in una sua ricerca a un campionario di studenti di 16 anni frequentanti la scuola secondaria di secondo grado.



Il 44% degli studenti ha risposto alla domanda in modo affermativo, ritenendo che, avvicinando B ad A la secante andasse a coincidere con la tangente.
Molti di essi, però, hanno collegato il simbolo $\rightarrow$ alla notazione vettoriale, visualizzando così lo spostamento da B in A attraverso il segmento BA e non attraverso il movimento della secante, intuizione ovviamente scorretta nonostante la correttezza della risposta alla domanda iniziale.
Il restante 56% ha risposto in modo errato, ritenendo l'affermazione falsa e affermando che *"all'infinito la retta AB e la tangente AT sarebbero sempre molto distanti, a prescindere dalla vicinanza di B con A"*. Il problema qui sorge proprio dall'intuizione errata che gli studenti hanno relativamente al concetto di limite: nell'immaginario infatti il limite è qualcosa che non si riuscirà mai a raggiungere e, tale intuizione, porta alla formazione di misconcezioni negli allievi.
E' dunque necessaria **una nuova forma di intuizione** al calcolo, che, secondo Tall, può essere favorita proprio dalla **visualizzazione dinamica**.
Rifacendoci alla domanda proposta nella precedente indagine, attraverso un software di geometria dinamica, ad esempio, uno studente può muovere in prima persone le rette secanti e vedere come effettivamente il limite coincida esattamente con la retta tangente.
In Tall quindi le nuove tecnologie vengono utilizzate per fondare la costruzione di significati dei concetti del Calculus su *radici cognitive*.[40]
Una radice cognitiva è un concetto che:

- costituisce un insieme significativo di informazioni che si possono considerare unitariamente, con tutte le loro relazioni con le altre parti della struttura cognitiva;
- costituisce un nucleo importante di conoscenza per uno studente che si appresta a iniziare un'attività di apprendimento;

- consente un'evoluzione dell'apprendimento attraverso strategie di estensione e generalizzazione della conoscenza, piuttosto che non attraverso ristrutturazioni e riorganizzazioni della rete concettuale;
- rende possibile la costruzione di significati che durano a lungo, nell'evoluzione del processo di apprendimento;
- è abbastanza solido e resistente da rimanere utile anche quando si sviluppano conoscenze più sofisticate.

È chiara, da quanto detto, l'importanza delle radici cognitive: se un concetto oggetto di attività di insegnamento−apprendimento trova il suo fondamento su solide radici cognitive, l'apprendimento e l'insegnamento non possono che essere favoriti e risultare veramente significativi. Vediamo allora alcuni esempi.
Il concetto di linearità locale può essere fondato su quello di "rettificazione locale" o "microlinearità", ossia la proprietà che hanno i grafici di certe funzioni di ridursi a una retta quando si effettuano successivi ingrandimenti centrati in un punto.
La "rettificazione locale" può diventare una radice cognitiva grazie ai comandi di Zoom, oggi disponibili in un qualunque software grafico.
Il concetto di continuità puntuale può essere fondato sulla radice cognitiva di grafico stirabile orizzontalmente fino a diventare piatto.
Le relazioni tra derivazione e integrazione, espresse con il teorema fondamentale del calcolo, possono essere fondate sulle radici cognitive dell'area sottesa al grafico di una funzione su un intervallo chiuso e del grafico "stirabile" orizzontalmente. [40]
Un software molto diffuso in grado di creare queste radici cognitive è GeoGebra, che ha il vantaggio di essere gratuito, oltre che essere supportato da diversi sviluppatori e utenti. GeoGebra è un software per l'apprendimento e l'insegnamento di geometria, algebra e analisi matematica.
Il suo creatore, Markus Hohenwarter, iniziò il progetto nel 2001 presso l'Università di Salisburgo, proseguendo presso la Florida Atlantic University (2006–2008), la Florida State University (2008–2009) e ora presso l'Università di Linz, avvalendosi del supporto di sviluppatori open−source e traduttori sparsi in tutto il mondo.
GeoGebra, in quanto software di geometria dinamica, permette la costruzione di punti, vettori, segmenti, rette, coniche e funzioni, manipolabili e modificabili in tempo reale. Ma le sue potenzialità non terminano qui: infatti, è possibile inserire direttamente equazioni e coordinate, permettendo così di trattare variabili numeriche, vettori e punti, nonché di calcolare derivate e integrali di funzioni, disponendo di diversi operatori.

Nella sperimentazione descritta al Capitolo 4, si farà riferimento proprio a questo software e andremo a vedere come può essere impiegato per introdurre il concetto di derivata a scuola.

Capitolo 4

Sperimentazione del progetto nella Scuola Secondaria di secondo grado

Questo capitolo ha lo scopo di descrivere le attività svolte durante il progetto realizzato per gli studenti di una classe quinta della Scuola Secondaria di II grado, al fine di introdurre il concetto di derivata.
Per ciascuna attività sono state indicate la durata, le modalità di lavoro, le finalità, gli eventuali materiali occorrenti per la sua realizzazione e la risposta degli studenti.
I materiali cui si farà riferimento sono stati inseriti in Appendice A.

4.1 Presentazione iniziale

La classe

Il progetto di introduzione al concetto di derivata è stato proposto in un liceo scientifico, in quanto si è ritenuto che tale contesto fosse preferibile per effettuare la sperimentazione. Vorrei però sottolineare come le diverse attività non siano state ideate per essere impiegate unicamente in classi appartenenti a tale indirizzo di studi, bensì risultino attuabili in ogni classe quinta di una scuola secondaria di secondo grado (o quarta nel caso di un istituto tecnico o professionale), apportando magari leggere modifiche a seconda si tratti di un liceo o un istituto tecnico o professionale.
Nello specifico la sperimentazione si è svolta presso il Liceo Scientifico "E. Fermi" di Padova: un docente di Matematica e Fisica di una classe quinta si è reso disponibile ad accogliere il progetto all'interno della propria classe e la Dirigenza dell'Istituto si è mostrata interessata alla sperimentazione.
La classe interessata al progetto frequenta l'indirizzo Scienze Applicate, indirizzo che, secondo le Indicazioni Nazionali, *"fornisce allo studente competenze particolarmente avanzate negli studi afferenti alla cultura scientifico-tecnologica, con particolare riferimento alle scienze matematiche, fisiche, chimiche, biologiche, della terra, all'informatica e alle loro applicazioni"*[38]
Inoltre, nel Decreto ministeriale n° 211 del 7 ottobre 2010, reperibile nel sito del MIUR [34], viene specificato come l'indirizzo Scienze Applicate condivida le medesime indicazioni nazionali previste per il liceo scientifico tradizionale, riguardanti

gli obiettivi specifici di apprendimento in relazione alle attività e agli insegnamenti compresi nei piani degli studi (fatta eccezione per la classe seconda).
Per queste ragioni, è stata accettata come classe di controllo della sperimentazione un'altra classe quinta del Liceo "E. Fermi", frequentante l'indirizzo tradizionale (nel Capitolo 5 si può trovare una valutazione complessiva dell'esperienza con un confronto tra le due classi).

La sperimentazione presso la classe quinta ASA (quinta Scienze Applicate sezione A) è stata effettuata da fine novembre 2022 a fine gennaio 2023, coprendo tutte le lezioni di matematica in modo continuativo.
La classe è composta di 20 studenti, di cui 15 ragazzi e 5 ragazze[1].
Al momento del mio inserimento in classe, era già stato affrontato lo studio e il calcolo dei limiti, prerequisito fondamentale per affrontare il capitolo sulle derivate.

Obiettivi della sperimentazione

La crescita culturale degli allievi è uno degli obiettivi fondamentali che la scuola si propone e a tal fine giocano un ruolo importante tutte le discipline, umanistiche e scientifiche. Purtroppo è però innegabile che sia più semplice, nel pensiero comune, immaginarsi in che modo le prime possano inserirsi in questo processo di crescita dello studente. Il binomio discipline umanistiche-cultura è infatti quasi scontato, mentre il binomio matematica-cultura può erroneamente apparire stonato o inconsistente. [5] Questo ruolo fondamentale della matematica viene sottolineato, come abbiamo visto nel Capitolo 3, anche dall'Unione Matematica Italiana, che evidenzia come la matematica debba diventare un vero e proprio strumento nelle mani del cittadino. Questo progetto vuole prendere un piccolo spazio all'interno di questo grande obiettivo, cercando, nel nostro piccolo, di mettere in luce agli studenti il valore culturale e concreto della matematica, contestualizzata ad un argomento specifico, ossia le derivate.
In particolare, gli obiettivi che tale progetto si propone possono essere riassunti in alcune domande, dalle quali hanno avuto origine le diverse attività:

1. Può la storia della matematica rivestire un ruolo nel processo di insegnamento e apprendimento? In particolare essa può aiutare la comprensione e la contestualizzazione dei concetti, nonché stimolare l'interesse degli studenti, aumentandone la motivazione?

2. L'utilizzo di un software di matematica dinamica (nel nostro caso GeoGebra) può aiutare a visualizzare i concetti, favorendone una miglior comprensione?

3. Cercare di avvicinarsi a un processo di "matematizzazione", quindi cercare di avvicinare gli studenti ai collegamenti tra derivate e concetti del mondo fisico

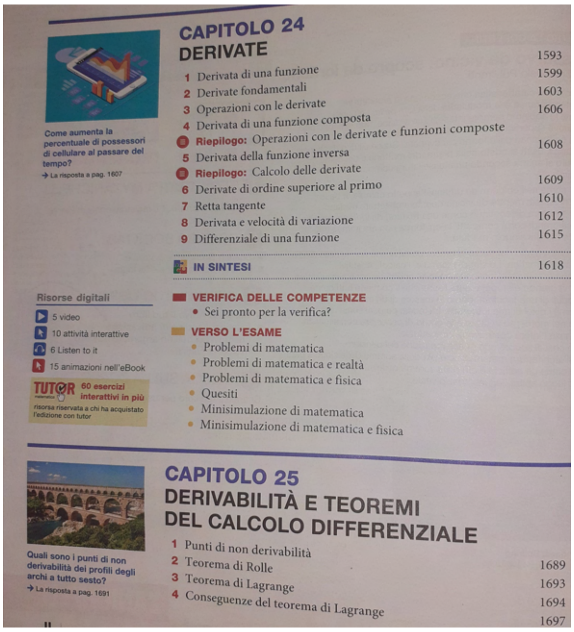
[1] Spesso durante la descrizione della sperimentazione si farà riferimento agli studenti e agli allievi utilizzando il maschile: questa scelta è adottata per rendere più scorrevole la lettura del testo, tuttavia si fa ovviamente sempre riferimento anche alle studentesse

o, in generale, situazioni del mondo reale, può aiutare a comprendere meglio non solo i contenuti matematici relativi all'argomento, ma anche i collegamenti esistenti con il mondo che ci circonda e che fa parte della nostra quotidianità?

A degli obiettivi propri di ogni singola attività, che si vedranno passo passo, si affiancano dunque obiettivi trasversali, ossia stimolare l'interesse e la curiosità degli studenti, cercando di favorire il confronto e la comunicazione tra loro e cercando così parallelamente di portarli a fare un'analisi critica dei contenuti, con una crescita delle loro capacità di ragionamento e osservazione.

Organizzazione del percorso

Il progetto è organizzato per la maggior parte con attività di tipo attivo in cui in prima persona ho spiegato alla classe e organizzato attività laboratoriali e discussioni, alle quali si affianca una parte più ristretta di ore osservative, in cui ho assistito alle lezioni del docente (la suddivisione delle attività è stata concordata prima di dare il via alla sperimentazione).
Il primo passo è stato quello di consultare il libro di testo di matematica in adozione [3], per vedere come e in che ordine tradizionalmente viene affrontato a scuola il capitolo di introduzione alle derivate. Tuttavia ho deciso, per scelte didattiche, di non seguire l'ordine scelto dal libro di testo, proposta che è stata piacevolmente accolta dall'insegnante, anch'egli incuriosito dal vedere la risposta degli studenti.
Di seguito in Figura 4.1 viene riportato l'ordine di svolgimento tradizionale



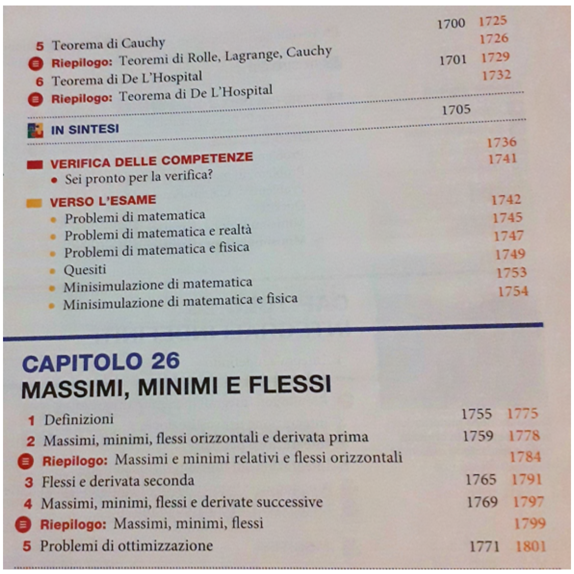


Figura 4.1

Da questo indice si può notare come la spiegazione di retta tangente e differenziale siano posti alla fine del capitolo, dopo aver trattato interamente l'algebra delle de-

rivate. Si è scelto invece di anticipare queste spiegazioni e questo per due motivi: il primo, perché ho ritenuto più coerente spiegare fin da subito agli allievi il concetto di tangente, in modo tale da seguire lo sviluppo storico che ha portato a definire la derivata, ossia partire dal problema delle tangenti ma subito dopo contestualizzare la tangente con una spiegazione rigorosa; il secondo, per poter affrontare fin da subito in laboratorio problemi legati alla retta tangente e al differenziale.
Altra scelta che trova un punto di diversità con il libro di testo, è stata quella di anticipare la spiegazione dei punti di non derivabilità e introdurre i concetti di massimo e minimo già all'interno del primo capitolo.
Ritengo infatti che possa essere un'utile attività studiare i punti di non derivabilità, magari in laboratorio, per poter anche rafforzare fin da subito la nozione di "continuità e derivabilità" di una funzione.
L'anticipazione dello studio e ricerca dei massimi e minimi non può invece di certo avvenire nei dettagli, in quanto deve essere giustamente anticipata da una spiegazione dettagliata sui teoremi di derivabilità; ritengo tuttavia che un accenno possa rilevarsi utile come approfondimento al significato geometrico di derivata, ossia come punto di raccordo tra lo studio della pendenza della retta tangente e la crescenza/decrescenza della funzione, nonché quindi la ricerca di massimi e minimi.
Decidendo di attuare queste scelte, si è dunque iniziata la sperimentazione, di cui si vedrà la descrizione di ogni attività nel prossimo paragrafo.

4.2 Il progetto

Attività 1: Somministrazione del Questionario iniziale e introduzione storica

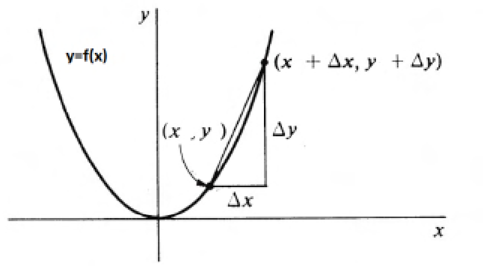
Durata: 2 ore

Struttura e Obiettivi: La prima attività può essere divisa in due parti:

- Dopo una breve presentazione del progetto alla classe, viene somministrato un questionario che ha la finalità di verificare le preconoscenze degli studenti. In questo modo si può capire il livello generale della classe e vedere se gli studenti hanno delle misconcezioni riguardo i temi che si andranno a trattare, in modo tale da sviluppare il percorso nella maniera più proficua possibile.
  Il test viene distribuito in forma cartacea e anonima (dunque non è valutato) ed è costituito da domande a risposta multipla e domande aperte. È consegnato e svolto interamente in aula per una durata complessiva di circa 50 minuti.
- Si prosegue con l'introduzione storica che, come si è visto nel Capitolo 3, si propone non solo di dare il via all'argomento, ma vuole essere anche un modo per far capire da dove sono nati gli strumenti matematici che usiamo, al fine di comprendere meglio il significato dei concetti e aumentare la motivazione.
  La spiegazione viene accompagnata da una presentazione Power Point, durante la quale gli studenti possono prendere appunti e rispondere a quesiti, posti con lo scopo di rendere la lezione più interessante e meno passiva.

Materiali utilizzati: Questionario iniziale consultabile al Capitolo 5, Presentazione Power Point consultabile in Appendice A, LIM o proiettore collegato a un computer dotato di software GeoGebra[2].

Implementazione del progetto in classe: Durante la presentazione gli studenti si sono mostrati attenti e hanno partecipato attivamente alle domande poste.
Come si può vedere dal Power Point in Appendice A, ho deciso dapprima di contestualizzare i due problemi da cui è nato il calcolo (ad esempio ripassando il concetto di velocità pensando a un atleta durante un allenamento in pista) e, dopo aver compreso questo passaggio, sono passata ad introdurre le due figure fondamentali per la nascita del calcolo, ossia Newton e Leibniz. Anche in vista della seconda lezione, ho cercato di porre l'accento sul problema della formulazione leibniziana e sulle numerose critiche mosse al matematico tedesco circa il suo uso degli infinitesimi.



Per affrontare questo passaggio ho preferito considerare un esempio particolare di funzione regolare e, nello specifico, ho mostrato ai ragazzi un esempio di calcolo "alla Leibniz" del coefficiente angolare della retta tangente in un punto di coordinate (x, y) di una parabola di equazione $f(x) = x^2$.
Ponendoci su un punto (x, y), a un incremento delle ascisse di Δx, corrisponde un incremento delle ordinate $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
Otteniamo dunque che il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ non è altro che il coefficiente angolare della secante passante per i punti (x, y) e $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, che approssima quello della tangente per Δx sempre più piccoli, ossia

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

se $\Delta x = dx$ infinitesimo.
Nel caso specifico della parabola ho quindi mostrato come segue l'imprecisione leibniziana di considerare l'infinitesimo una quantità nulla e non nulla allo stesso tempo.
In particolare si ottiene
$dy = (x + dx)^2 - x^2$
da cui, svolgendo i conti, si ottiene [3]
$dy = 2xdx + (dx)^2$
Dividendo ora per dx e considerando poi tale dx una quantità trascurabile, si giunge all'equazione cercata

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{4.1}$$

Ripercorrendo dunque i passaggi visti nel caso generale all'interno del Capitolo 1 e passando al concetto di limite, siamo giunti alla definizione odierna di derivata:

[2]Ai fini didattici è preferibile l'uso della versione GeoGebra 5 classica.
[3]I conti si possono svolgere per la validità del Principio di Estensione. Per maggiori dettagli si rimanda al Capitolo 2.

per comprendere meglio il passaggio al limite ho deciso di mostrare agli allievi un'animazione con GeoGebra che avevo precedentemente costruito. Ciò ha permesso a tutti di visualizzare in prima persona come la secante, diminuendo l'incremento delle ascisse, arrivi a coincidere esattamente con la tangente.

La domanda di uno studente mi ha inoltre permesso, già a partire da questa lezione, di far notare agli allievi il passaggio da derivata in un punto specifico a derivata come funzione: egli si chiedeva infatti se la derivata cambiasse valore per ogni punto della nostra funzione di partenza.

Attività 2: Ripresa del concetto di infinitesimo con i numeri iperreali

Durata: 2 ore

Struttura e Obiettivi: L'obiettivo di questa attività non è stato che gli studenti imparassero i numeri iperreali come strumento di calcolo, ma si è voluto mostrare loro come l'approccio di Abraham Robinson (1918-1974) permetta di non "buttare" completamente l'idea di Leibniz, bensì di andare a trovarne una sua legittimazione. Introdurre i numeri iperreali alla maniera del Capitolo 2 non risulta però possibile da un punto di vista didattico, sia per la complessità delle nozioni, sia per la mancanza di preconoscenze che si acquisiscono in ambito universitario durante corsi di logica specifici. Risulta dunque indispensabile attuare una *trasposizione didattica*.[1]
Per capire meglio con quale criterio si è strutturata questa lezione andiamo quindi a vedere cosa si intenda esattamente per trasposizione didattica, introdotta in questi termini nel 1985 da Yves Chevallard nei suoi studi di didattica della matematica.

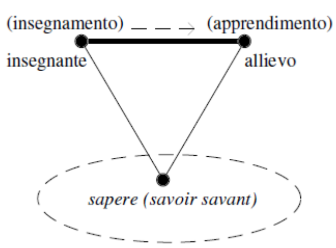
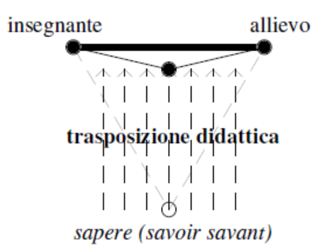


Figura 4.2: Triangolo di Chevallard & Joshua

Si consideri il diagramma di Chevallard & Joshua in Figura 4.2, che va a proporre una schematizzazione dell'attività didattica. Tale diagramma è costituito da un triangolo ai cui vertici troviamo l'insegnante, l'allievo e il "sapere", inteso come ciò che lo studioso francese chiamava *savoir savant*, ovvero il sapere accademico, quello che nasce e vede il suo sviluppo nella ricerca. Nello schema proposto tale sapere è collocato al di fuori del rapporto diretto insegnante-allievo e dunque è inutilizzabile per una proficua didattica.

Non è pensabile infatti che uno studente possa comprendere contenuti espressi direttamente in forma accademica, senza che essi siano adeguatamente modificati e resi accessibili. Da questa esigenza nasce allora il termine *trasposizione didattica*, intesa come il lavoro di adattamento e di trasformazione del sapere in oggetto di insegnamento, tenuto in considerazione il pubblico e le finalità didattiche: è in questo modo che si passa da una "matematica per i



matematici, a una "matematica per essere insegnata".

Andiamo allora a vedere come è stata affrontata questa lezione e come sono stati introdotti questi concetti evitando le nozioni viste nel Capitolo 2.
L'idea è quella di non dire fin da subito agli studenti che nella lezione si andrà ad introdurre un nuovo insieme numerico, bensì portare loro stessi, con il ragionamento, a comprendere la necessità di esistenza di un insieme numerico più esteso dei reali. Agli studenti si chiarisce però fin da subito lo scopo della lezione, cioè cercare di capire cosa siano in modo rigoroso gli infinitesimi e andare a vedere come il ragionamento di Leibniz possa essere ripreso e possa trovare una sua legittimazione.
Dopo aver ripreso brevemente la lezione precedente, si procede fornendo la definizione di infinitesimo che segue:

Definizione 4.2.1. *Un infinitesimo positivo è un numero ε tale che $0 < \varepsilon < r$ per ogni r numero reale positivo non nullo.*

A partire da ciò, viene seguito un approccio insiemistico, che permette anche di ripercorrere brevemente gli insiemi numerici conosciuti dagli allievi fino a questo momento. Viene ricordata agli studenti la proprietà archimedea dei reali

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+ a < b \implies \exists m \in \mathbb{N} : ma > b$$

e viene loro chiesto di capire se tale proprietà venga o meno rispettata dagli infinitesimi.
Dopo una discussione su questo punto, si può passare a definire i numeri iperreali come quell'insieme in cui ai reali si aggiungono gli *infinitesimi*, sottolineando l'assioma secondo cui nell'insieme dei numeri iperreali valgono tutte le proprietà algebriche e di ordinamento che valgono anche per l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

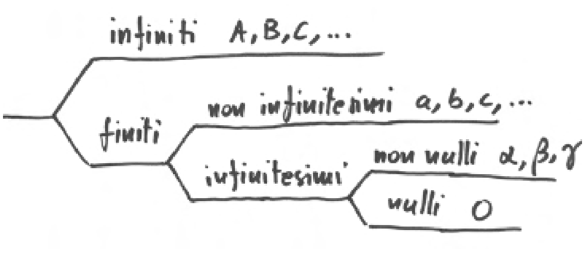


Figura 4.3: L'albero degli iperreali

Grazie a questo assioma, è possibile definire anche gli *infiniti* e in particolare si può mostrare agli studenti l'esistenza dei *numeri infiniti positivi*, ossia i reciproci degli infinitesimi e quindi quei numeri maggiori di ogni numero reale. Sebbene lo scopo non sia far lavorare gli allievi sui numeri iperreali, per contestualizzare meglio l'argomento e visualizzare i concetti può essere utile mostrare anche la rappresentazione grafica di questi numeri e la necessità di introdurre strumenti nuovi per vedere in qualche modo gli iperreali.

Si parte quindi dalla retta reale, precisando fin da subito che l'esistenza di numeri oltre ai reali non significa dire che nella retta reale ci siano dei "buchi", infatti i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti della retta reale.

Va quindi inventata un altro tipo di retta, visualizzabile attraverso strumenti che esistono solo grazie all'uso dell'immaginazione.
Uno di questi strumenti è il *microscopio ottico*, che ci permette di fare degli zoom sulla retta e, puntando la posizione di un numero iperreale x, ne ingrandisce i dintorni n volte (Figura 4.4).
A questo punto, per fare una trattazione completa, sarebbe necessario parlare dei confronti tra iperreali in modo dettagliato: purtroppo la mancanza di tempo non permette di approfondire questo punto, quindi ci si può limitare alle definizioni necessarie per il nostro scopo, ossia la definizione non standard di derivata.
Si procede dunque con la seguente definizione:

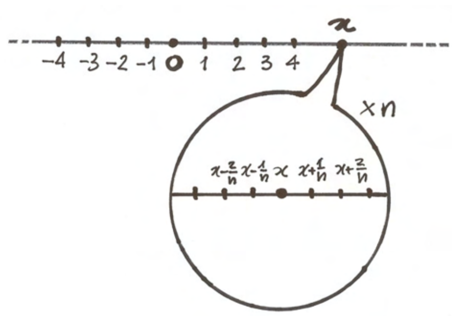


Figura 4.4: Microscopio Non Standard

Definizione 4.2.2. *Due numeri iperreali a e b sono infinitamente vicini se la loro differenza $a - b$ è un infinitesimo, e in questo caso scriveremo $a \approx b$.*

Ogni numero iperreale b finito è infinitamente vicino ad uno ed un solo numero reale, chiamato parte standard e indicato con $st(b)$.
Una volta definita la parte standard si può dunque giungere alla definizione non standard di derivata:

Definizione 4.2.3. *Sia f una funzione definita in un punto $x \in \mathbb{R}$. La derivata di f in x è definita da*

$$f'(x) = st(\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}) = st(\frac{dy}{dx})$$

per ogni infinitesimo $dx \neq 0$.

Con questa definizione, l'eliminazione degli infinitesimi di Leibniz tanto criticata nella storia della matematica prende una sua legittimazione, giungendo così allo scopo che ci si proponeva in questa lezione.

Materiali utilizzati: Power Point consultabile in Appendice A, lavagna o LIM a seconda delle disponibilità dell'aula.

Implementazione del progetto in classe: Come precedentemente anticipato, ho chiarito fin da subito lo scopo della lezione alla classe.
Ho piacevolmente notato interesse per l'argomento da parte degli studenti, che hanno partecipato attivamente rispondendo alle mie domande o ponendo loro stessi dubbi o perplessità. La metodologia utilizzata è stata la lezione frontale, supportata dall'uso della relativa presentazione Power point e arricchita da discussioni che si proponevano lo scopo di far ragionare gli studenti.

Prima materia di discussione è stata se gli infinitesimi fossero o meno numeri reali. Partendo dalla definizione di infinitesimo, dopo aver ripassato i diversi insiemi numerici e, in particolare, cosa fossero i numeri reali, ho cercato di riprodurre il ragionamento di Robinson ossia vedere se, prendendo un insieme e un numero reale all'interno dello stesso insieme, la definizione di infinitesimo veniva rispettata o meno da quel numero reale scelto (si veda la Figura 4.5[4]): mano a mano che si allargava l'insieme di riferimento, gli studenti non riuscivano più però a dare una risposta.

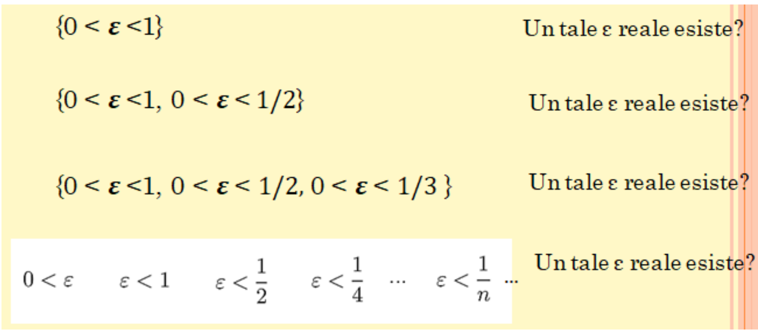


Figura 4.5: Approccio iniziale al ragionamento

Per rispondere alla domanda ho quindi preferito continuare su un'altra strada, ossia sono passata a considerare il postulato di Archimede, che sappiamo deve necessariamente valere per i reali. In particolare, la domanda che ho posto è stata se gli infinitesimi rispettassero o meno tale principio. Di primo impatto alcuni studenti hanno risposto in modo affermativo, senza però riuscire ad argomentare il motivo della loro scelta.

Sono quindi intervenuta cercando di proporre il problema sotto un altro punto di vista, ossia con un approccio geometrico. [6]
Attraverso la rappresentazione alla lavagna di segmenti come in Figura 4.6, si può riformulare il postulato in questo modo: *"Dati due segmenti diversi, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore"* (o "dati due segmenti diversi, esiste sempre un sottomultiplo del maggiore che è più piccolo del minore.").

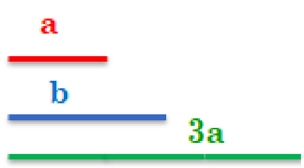
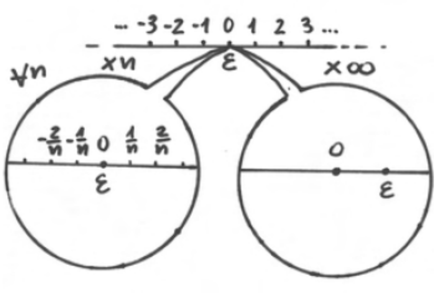


Figura 4.6: Esempio di rappresentazione geometrica del Postulato di Archimede

Ho cercato di far ragionare gli allievi sulla misura che possono assumere questi segmenti, con l'obiettivo che loro riuscissero a dedurre che gli infinitesimi e gli infiniti non rispettano il postulato di Archimede.
In particolare, infatti, non può esistere un segmento più piccolo di un qualunque altro segmento finito, così come il multiplo di un segmento finito è ancora un segmento finito, quindi è possibile considerare un segmento b grande quanto si vuole, ma sarà sempre più piccolo di un multiplo di un segmento finito e perciò non può essere infinito (un esempio particolare di ciò è riprodotto in Figura 4.6).
In questa parte ho riscontrato qualche difficoltà da parte degli studenti, ho cercato di ripetere più volte i concetti e ho notato che l'interpretazione geometrica del postulato ha favorito di molto la comprensione, portando quindi a rispondere in modo corretto alla domanda iniziale, ossia che gli infinitesimi non sono numeri reali.

[4]Tale Figura è parte del Power Point proposto agli studenti che, come già anticipato, il lettore interessato può consultare per intero in Appendice A.



Altro punto su cui mi sono dovuta soffermare è la rappresentazione grafica degli infinitesimi. Il maggior numero di domande è stato posto infatti sulla differenza tra retta reale e iperreale.
A tal proposito ho cercato di evidenziare il fatto che la retta iperreale è solamente uno stratagemma che usiamo per visualizzare quantità che altrimenti non riusciremmo a vedere e che un infinitesimo, essendo così piccolo da risultare minore di qualsiasi numero reale positivo non nullo, non può che situarsi così vicino a un numero reale da non riuscire a distinguere i due numeri con alcun microscopio standard, fatto da cui scaturisce la necessità di utilizzare un microscopio non standard, ovvero un microscopio con cui è possibile visualizzarne la differenza, permettendo un ingrandimento infinito.

A questo punto sono passata a definire la parte standard e, nel farlo, ho utilizzato alcuni esempi che permettessero agli allievi di visualizzare meglio i concetti.
Ho quindi ripreso l'esempio della parabola di equazione $f(x) = x^2$ e, dopo aver definito la derivata con l'uso della parte standard, siamo giunti a giustificare in modo rigoroso l'equazione (4.1), trovando in qualche modo una legittimazione al metodo leibniziano.

La domanda di uno studente ha portato poi a un'utile riflessione collettiva per la classe. Lo studente in questione ha chiesto:

"Ma in pratica Robinson si è solo inventato una nuova definizione per far andare bene le cose?"

Questa domanda mi ha dato modo di precisare come la trattazione matematica precisa degli argomenti, anche se complessa, esista e come ciascuna teoria matematica abbia dei fondamenti rigorosi e ogni definizione e teorema si sviluppi e si concateni come incastri perfetti di un puzzle.
Ho precisato come in logica matematica esistano delle sorta di "impalcature" alle teorie matematiche, ossia dei modelli, pensabili come strutture in cui gli enunciati di tali teorie sono veri.

Una domanda di uno studente mi ha fatto infine pensare a una modifica che potrebbe portare un miglioramento alla mia lezione, ossia una modifica della notazione.
Io infatti ho introdotto gli infinitesimi nominandoli con la lettera greca ε.
Uno studente mi ha però posto la seguente domanda *"Questo infinitesimo ε è lo stesso ε che utilizziamo per definire gli intorni, ad esempio nei limiti?"*.
Onde evitare quindi possibile confusione di concetti, potrebbe essere opportuno modificare la notazione. Sappiamo infatti che gli infinitesimi sono numeri che si indicano in generale con le lettere greche, ma, per questioni didattiche, si potrebbe pensare di usare solo un'unità infinitesima, che altro non è che un infinitesimo positivo indicato con un simbolo convenzionalmente stabilito insieme agli studenti.

Attività 3: Il differenziale e l'algebra delle derivate

Durata: 4 ore e 30 minuti

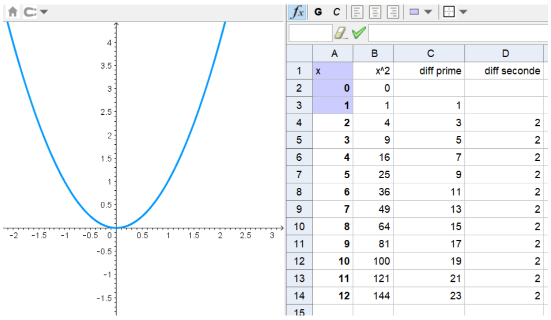
Struttura e Obiettivi: La terza attività si può dividere in due parti:

- 3 ore di tipo osservativo in cui l'insegnante prosegue con il programma tradizionale, anche se, come spiegato nel paragrafo 4.1, si è optato per non scegliere l'ordine proposto dal libro di testo. In particolare viene spiegato il differenziale, vengono introdotte le regole di derivazione e si vedono le derivate delle funzioni elementari. Oltre a introdurre argomenti necessari per i laboratori successivi, questa fase permette, attraverso l'osservazione, di vedere le metodologie attuate dall'insegnante e le reazioni degli studenti.

- 1 ora e 30 di tipo attivo, svolta in *laboratorio di informatica*, in cui verrà ripreso il concetto di tangente e di differenziale, approfondendo quest'ultimo da un punto di vista geometrico. Preliminarmente si vedono degli esercizi volti a studiare le possibili variazioni di una funzione.
  Prima di iniziare l'attività laboratoriale viene fornita agli studenti una scheda di lavoro con il testo degli esercizi che si andranno a svolgere.

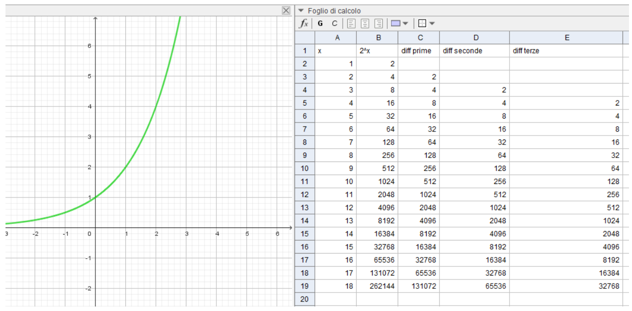
Materiali utilizzati: Un pc per studente dotato di GeoGebra versione 5 classica e un pc per l'insegnante, anch'esso dotato di GeoGebra 5, collegato a un proiettore, la scheda di lavoro presente in Appendice A.

Implementazione del progetto in classe: Sappiamo che il concetto di derivata è strettamente collegato al concetto di *variazione*.
È proprio per questo motivo che ho scelto di iniziare questa attività di laboratorio con un'analisi di come una funzione può variare.
La prima osservazione che si può banalmente fare è che, quando la variabile indipendente assume valori con intervalli costanti, la valutazione degli incrementi nelle ordinate porta a prevedere l'andamento della funzione stessa: ad esempio, se gli incrementi Δy, per Δx costanti, sono uguali, il grafico sarà una retta, così come se sono positivi possiamo dire il grafico sia crescente. Tuttavia non tutte le funzioni crescono allo stesso modo e, per osservarlo sperimentalmente, è sufficiente utilizzare un *foglio di calcolo*, messo a disposizione anche dal software GeoGebra stesso. Ripercorrendo in qualche modo lo stesso ragionamento di Leibniz, si possono così calcolare le differenze prime, seconde, terze e così via, scoprendo in particolare l'annullarsi delle differenze terze per la funzione $f(x) = x^2$, in netta contrapposizione con l'andamento dell'esponenziale $f(x) = 2^x$, in cui le differenze continuano ad essere una potenza di 2 (si vedano Figura 4.7 e 4.8).



	A	B	C	D
1	x	x^2	diff prime	diff seconde
2	0	0		
3	1	1	1	
4	2	4	3	2
5	3	9	5	2
6	4	16	7	2
7	5	25	9	2
8	6	36	11	2
9	7	49	13	2
10	8	64	15	2
11	9	81	17	2
12	10	100	19	2
13	11	121	21	2
14	12	144	23	2
15				

Figura 4.7: Variazione conica



	A	B	C	D	E
1	x	2^x	diff prime	diff seconde	diff terze
2	1	2			
3	2	4	2		
4	3	8	4	2	
5	4	16	8	4	2
6	5	32	16	8	4
7	6	64	32	16	8
8	7	128	64	32	16
9	8	256	128	64	32
10	9	512	256	128	64
11	10	1024	512	256	128
12	11	2048	1024	512	256
13	12	4096	2048	1024	512
14	13	8192	4096	2048	1024
15	14	16384	8192	4096	2048
16	15	32768	16384	8192	4096
17	16	65536	32768	16384	8192
18	17	131072	65536	32768	16384
19	18	262144	131072	65536	32768
20					

Figura 4.8: Variazione esponenziale

Oltre a poter agganciare questo risultato allo studio delle derivate, ciò ha fatto capire agli allievi la profonda differenza di crescita di una funzione rispetto a un'altra, fatto che può forse sembrare banale e magari viene dato per scontato a scuola, ma così non è. Infatti, dopo aver visto il caso di $f(x) = x^2$, ho chiesto agli studenti un pronostico di cosa potesse succedere alla funzione esponenziale e la classe si è inizialmente divisa con pareri distinti.

Infine ho guidato gli allievi/e alla costruzione del differenziale (Figura 4.9), facendo loro osservare i valori che possono assumere gli incrementi[5], e facendo poi modificare il valore dell'incremento h con uno slider, in modo da vedere che, quando h diventa infinitesimo, Δy arriva a coincidere con dy.

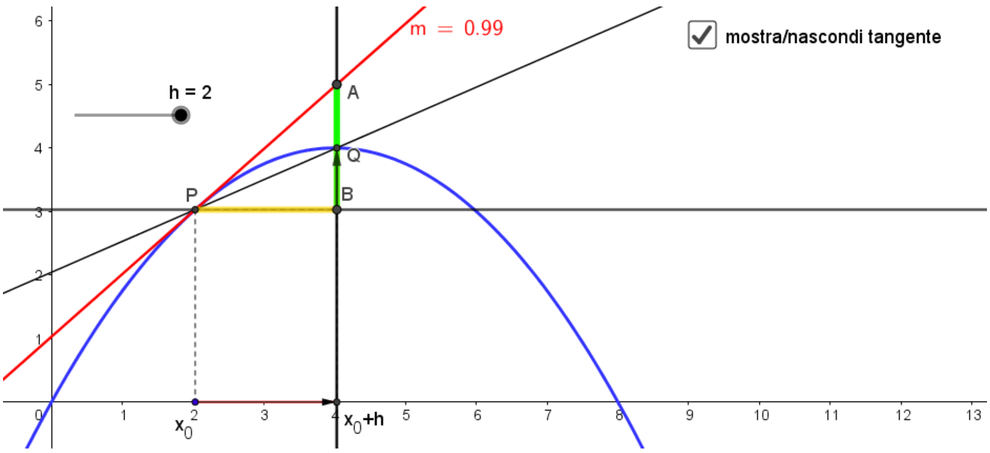


Figura 4.9: Costruzione differenziale

[5]Misconcezione comune può essere il fatto che gli incrementi Δx e Δy debbano essere necessariamente positivi.

Attività 4: Approccio sperimentale al concetto di pendenza di un grafico e costruzione della derivata

Durata: 1 ora e 30 minuti

Struttura e Obiettivi: Questa attività è svolta interamente in *laboratorio di informatica*. La prima ora ha lo scopo di spiegare i punti di non derivabilità e, nel farlo, si procede andando a vedere come si può approssimare localmente il grafico di una funzione con una funzione lineare: tale approssimazione può essere fondata sulla radice cognitiva[6] di "grafico che assomiglia sempre più a quello di una retta all'aumentare del numero di zoom effettuati".
Si procede quindi utilizzando un'applet di GeoGebra in grado di "zoommare" il grafico in un punto specifico[7]. Tale applet presenta due viste grafiche.
La prima vista mostra il grafico di $f(x)$, mentre la seconda mostra il grafico di $f(x)$ dopo aver applicato lo zoom. Tramite le apposite barre di inserimento, nella prima vista grafica è possibile fissare le coordinate del punto P in cui si vuole fare lo zoom, la funzione $f(x)$ e gli estremi del suo intervallo di definizione $[a, b]$.
Muovendo lo slider, si può scegliere il fattore di dilatazione λ e, in tal modo, contemporaneamente al movimento dello slider si vedrà nella seconda vista grafica la curva dopo aver applicato lo zoom.[49]

Figura 4.10: Applet zoom Geogebra

Nell'utilizzo di tale applet si parte con una funzione continua e derivabile in ogni punto, ad esempio $f(x) = x^2$, e si sceglie un punto qualsiasi del dominio, con lo scopo di vedere come, aumentando il coefficiente di dilatazione, il grafico assomigli sempre di più ad una retta e, in particolare, come possa essere assimilato alla retta tangente (questo può dar modo all'insegnante di riprendere il ragionamento di Leibniz, secondo il quale il grafico può essere pensato come costituito da tanti piccoli tratti rettilinei in cui si possono considerare incrementi infinitesimi).

[6]Per approfondire tale concetto si rimanda al Capitolo 3, paragrafo 3.2.
[7]L'applet è utilizzabile anche nella piattaforma online di GeoGebra al seguente link https://www.geogebra.org/m/rh4ewpvb

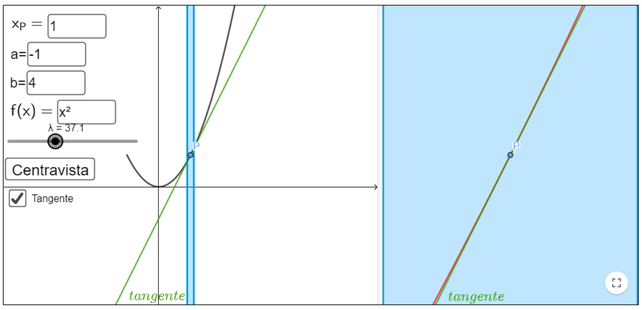


Figura 4.11: Zoom di $f(x) = x^2$ in $(1, 1)$

A questo punto si ripeterà la stessa attività andando a considerare funzioni in cui sono presenti punti di non derivabilità. Si chiede quindi agli studenti di individuare tali punti, di determinare la continuità e studiare insieme la derivabilità, giungendo così a definire in modo rigoroso punti come cuspidi, punti angolosi e flessi a tangente verticale.

Si passa poi a far costruire agli allievi/e la derivata di una funzione.
Per farlo si sceglie una delle funzioni elementari, ad esempio $f(x) = \text{sen}(x)$, e l'obiettivo è che gli studenti stessi ragionino sul modo con cui costruirla. In quest'occasione verrà introdotto lo strumento Traccia di GeoGebra, che consentirà di visualizzare anche il concetto di derivata come funzione.
Solo in un secondo momento verrà mostrata anche la possibilità di utilizzare lo strumento Luogo, strumento che costruisce direttamente il grafico della derivata, senza vederne la costruzione punto per punto.
Se il tempo lo consente, l'insegnante può anche mostrare agli allievi che non esiste solo GeoGebra come software per calcolare e visualizzare le derivate di funzioni e può presentare alcuni esempi, come il linguaggio di programmazione Phython.

Materiali utilizzati: Scheda di lavoro presente in Appendice A, un pc per studente dotato di GeoGebra versione 5 classica e connessione a internet e un pc per l'insegnante, anch'esso dotato di Geogebra 5 e connessione a internet, collegato a un proiettore.

Implementazione del progetto in classe: Dopo aver mostrato il caso generale di "rettificazione" di una curva nel caso della parabola, ho approfittato di questa applet per riprendere le prime due domande del Questionario Iniziale (si veda il Capitolo 5 per vedere il testo). Ho considerato infatti la funzione $f(x) = 2x^3$ nel punto di ascissa $x = -0,4$ per far visualizzare agli allievi/e la corretta definizione di retta tangente e, in particolare, il fatto che la tangente non deve necessariamente toccare la curva in un solo punto (Figura 4.12). Come nel caso precedente della parabola, ho fatto notare agli studenti che, aumentando il coefficiente di dilatazione λ, il grafico si appiattisce e l'"oggetto

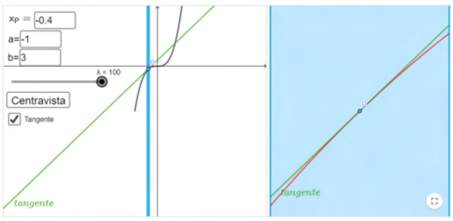


Figura 4.12: Tangente a $f(x) = 2x^3$ in (- 0.4,- 0.128)

limite" della dilatazione corrisponde a una retta non verticale che va a coincidere sempre di più con la tangente[8].
A questo punto ho cominciato a proporre delle funzioni che presentassero dei punti di non derivabilità, andando così ad analizzarle via via insieme.
Siamo partiti con la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$, applicando lo zoom nel punto P di coordinate $(0, 0)$.

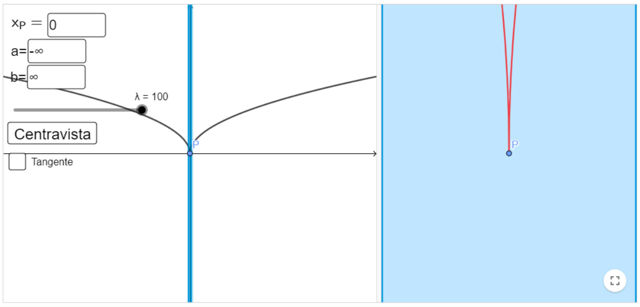


Figura 4.13: Zoom di $f(x) = \sqrt{|x|}$ in (0,0)

Ho dapprima chiesto agli studenti se riuscissero a dedurre qualcosa sulla continuità della funzione, domanda a cui tutti hanno risposto correttamente stabilendone la continuità in ogni punto.
Successivamente ho chiesto se si potesse stabilire la pendenza della retta tangente alla curva in P: qui la risposta non si è mostrata unanime, tuttavia osservando insieme il grafico ottenuto (Figura 4.13), siamo arrivati ad ipotizzare che non si potesse calcolare la pendenza in quanto l'oggetto limite di tale dilatazione è una semiretta verticale, per la quale non è definito il coefficiente angolare.
A prova di ciò ho quindi proposto agli studenti di calcolare la derivata destra e sinistra della funzione nel punto $P = (0, 0)$ e, solo dopo aver svolto i conti alla lavagna e aver quindi provato la non derivabilità, ho fornito agli allievi la definizione rigorosa di **cuspide**.
Ho seguito la stessa procedura per la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}+1$: in questo caso il punto posto in esame è $P = (0, 1)$ in cui avremo come oggetto limite una retta verticale e, con il calcolo, giungeremo a definire in modo rigoroso il **flesso a tangente verticale** (Figura 4.14).
Infine sono passata a definire il **punto angoloso**, seguendo con gli studenti sempre la stessa procedura, prima di osservazione e poi calcolo, cercando di favorire in questo modo sia lo spirito critico nella visualizzazione, sia la discussione e il ragionamento in classe.
In quest'ultimo caso la funzione scelta è stata $f(x) = |x - 5|$ nel punto di coordinate (5,0) e

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & se\ x > 2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

in $P = (2, 0)$ (Figura 4.15).

[8]Il lettore interessato può vedere la dimostrazione matematica di questo fatto in Appendice B.

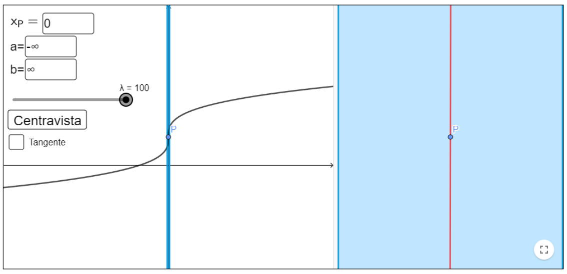


Figura 4.14

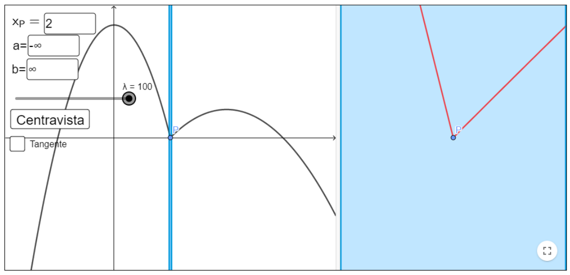
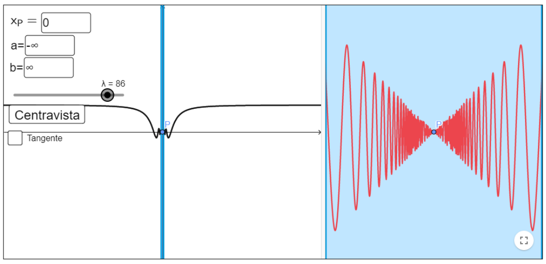


Figura 4.15



Abbiamo quindi continuato con esempi di punti di non derivabilità[9], tra cui il seguente ha destato particolare stupore negli studenti, ossia $f(x) = |x-5|$ nel punto di coordinate (5,0) e

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}) & \textit{se } x \neq 2 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

In questo caso ovviamente non è possibile calcolare la pendenza della tangente: il grafico infatti, all'aumentare di λ, non si appiattisce bensì continua ad oscillare.

Siamo dunque passati a costruire la derivata.
La funzione scelta è stata $f(x) = \mathrm{sen}(x)$. Dopo averla costruita, ho chiesto agli allievi che coordinate dovesse avere il punto P', ossia il punto corrispondente alla derivata della funzione seno nel punto P. La risposta immediata degli studenti è stata:

"Noi sappiamo che la derivata della funzione seno è la funzione coseno"

L'obiettivo di questa lezione non era però il calcolo della derivata, già visto durante la lezione di teoria, bensì capire come costruire la funzione derivata stessa.
Ho quindi chiarito ai ragazzi la necessità di trovare le coordinate di P' senza utilizzare l'algebra, ma basandosi sulle conoscenze geometriche a nostra disposizione.
Da questa esortazione, ragionando insieme in classe, gli allievi/e sono riusciti a dedurre da soli le coordinate di P', ossia $P' = (x(P), f'(x(P))$, dove $f'(x(P))$ non è altro che la pendenza della retta tangente nel punto P, definibile su Geogebra mediante l'apposito comando. A questo punto ho introdotto agli studenti lo strumento Traccia, che ha permesso di visualizzare in modo dinamico il grafico della derivata.

Avrei voluto ripetere lo stesso procedimento anche utilizzando lo strumento Luogo, ma purtroppo la mancanza di tempo non lo ha permesso. Ho quindi caricato agli studenti un file sul portale di classe Classroom, in cui li guidavo alla scoperta di questo strumento e li esortavo a provare da soli la costruzione.
La verifica della comprensione della costruzione e di eventuali dubbi si è svolta nella lezione di laboratorio successiva.

[9]Per maggiori dettagli il lettore può consultare la scheda di lavoro in Appendice A

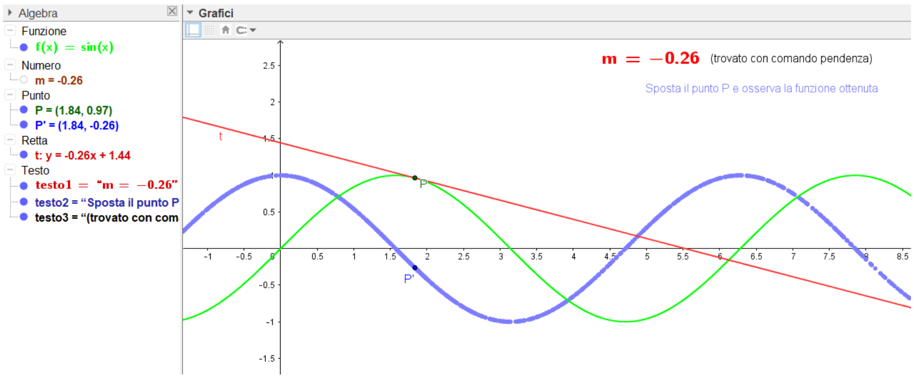


Figura 4.16: Costruzione della derivata con lo strumento Traccia

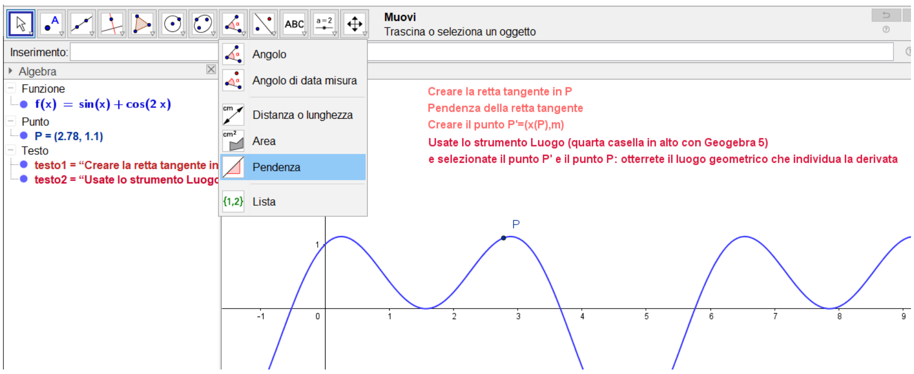


Figura 4.17: Esercizio lasciato agli studenti per utilizzare lo strumento Luogo

Attività 5: Introduzione all'ottimizzazione

Durata: 1 ora

Struttura e Obiettivi: Questa attività è svolta interamente in *laboratorio di informatica* e vuole andare ad introdurre l'ottimizzazione.
La lezione non pretende di dare un'esaustiva trattazione dello studio di massimi e minimi, che andrà svolto a seguito di un'analisi dei teoremi di differenziabilità, bensì vuole solo proporsi di essere, da un lato un modo per far comprendere agli allievi la forte connessione tra matematica e studio dei fenomeni reali, dall'altro un'occasione per riprendere il significato geometrico di derivata e consolidarlo con lo studio della crescenza e decrescenza di una funzione (funzione crescente $\Longrightarrow$ coefficiente angolare positivo della tangente $\Longrightarrow$ valore positivo della derivata).
La lezione può essere suddivisa in due parti:

- La prima parte vuole essere introduttiva all'argomento. Con il supporto di una presentazione Power Point si spiega cosa sia l'ottimizzazione e i collegamenti in molti ambiti scientifici e sociali. In questo momento si andrà quindi anche a definire cosa si intende per massimo o minimo (locale o globale) di una funzione.

- Nella seconda parte sono gli allievi a cimentarsi con un problema di ottimizzazione. La richiesta è quella di andare a costruire una scatola di volume massimo a partire da un foglio di 20 cm × 20 cm. [9] Sarà fornito agli studenti un file GeoGebra da analizzare, in cui si può osservare come varia il volume della scatola e, in un secondo momento, saranno loro a costruire con il software la funzione relativa al volume, studiandone l'andamento e, di conseguenza, la relazione tra monotonia e derivata.
  Si conclude lasciando agli studenti un esercizio simile a quello appena proposto, tratto dalle prove di maturità degli anni passati.[48] Viene lasciato loro qualche minuto per ragionare a riguardo e successivamente esporranno le loro ipotesi di soluzione confrontandosi.

Materiali utilizzati: Un pc per studente dotato di GeoGebra versione 5 classica e un pc per l'insegnante, anch'esso dotato di Geogebra 5, collegato a un proiettore, la presentazione Power Point presente in Appendice A, lavagna o LIM a seconda della disponibilità del laboratorio.

Implementazione del progetto in classe: Per introdurre l'argomento ho usato come fonti principali due conferenze tenute dal vincitore della Medaglia Fields 2018 Alessio Figalli [16, 17].
La scelta di seguire questa direzione è stata dettata dal desiderio di mostrare agli allievi come la matematica sia parte indissolubile di ciò che ci circonda, compreso ciò che a primo impatto non sembrerebbe avere legami con essa, basti pensare alla metereologia, alla medicina o al semplice invio di foto con uno smartphone[10].
È proprio in questo punto che ho potuto notare un maggior interesse da parte degli studenti, ossia nell'andare a toccare campi di loro interesse e fenomeni della quotidianità[11]. Sono dunque passata ad affrontare il problema di massimo, relativo al volume della scatola, con il fine di portare un esempio concreto dell'utilità del concetto di pendenza come strumento per ricavare determinate informazioni su funzioni e derivate.
Il problema della scatola potrebbe essere affrontato a partire da un foglio quadrato di lato 20 cm, chiedendo agli allievi di costruire con esso una scatola (andando cioè a ritagliare gli angoli del foglio e piegando quelle che dovrebbero diventare le pareti della nostra scatola, disponendole poi in verticale). Io ho invece preferito approfittare del laboratorio di informatica per riprodurre la stessa operazione attraverso il software GeoGebra.Ho quindi fornito alla classe un file GeoGebra [33] (si veda la Figura 4.18) e abbiamo discusso insieme il problema.

[10]Il lettore interessato può trovare in Appendice C questa parentesi introduttiva illustrata in modo più dettagliato

[11]Le impressioni della classe a riguardo saranno descritte in modo più dettagliato nell'analisi del Questionario di gradimento, che il lettore interessato può ritrovare al Capitolo 5.

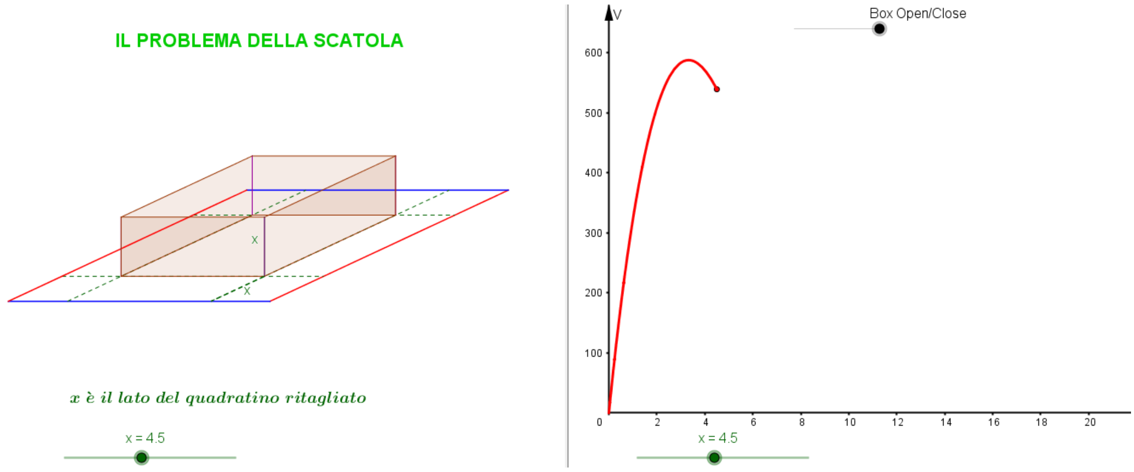
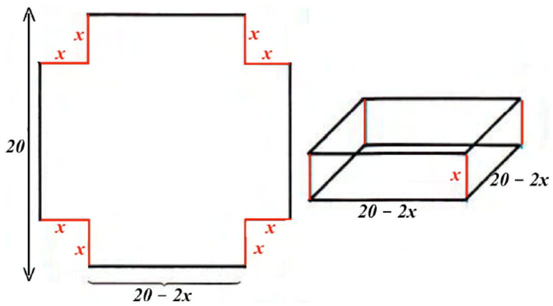


Figura 4.18: Scatola e grafico del volume



Ho iniziato chiedendo alla classe quale fosse una possibile espressione del volume e, dopo aver lasciato loro qualche minuto per pensare, abbiamo chiamato una studentessa alla lavagna, così da rendere più attiva e partecipata la lezione.
A questo punto, una volta espresso il Volume in funzione di x, ossia del lato del quadratino ritagliato, la domanda da porre agli studenti diventa

C'è un valore di x per il quale otteniamo il volume V più grande possibile?

La prima osservazione è stata la determinazione del dominio della funzione ottenuta, ossia $V(x) = 4x^3 - 80x^2 + 400x$.
Ho dunque chiesto agli studenti se ci fossero dei limiti nei valori che x può assumere. Muovendo il cursore relativo al file GeoGebra della Figura 4.18, gli allievi/e sono giunti alla risposta cercata: se non viene apportato alcun taglio, allora la scatola sarà degenere e ciò corrisponderà al valore $x = 0$, così come la scatola diventerà un filo nel caso in cui $x = 10$, ossia nel caso in cui la somma delle lunghezze dei tagli sarà uguale alla lunghezza del lato stesso.
La domanda precedente da porre agli studenti diventa quindi

C'è un valore di x, con $0 < x < 10$, per il quale otteniamo il volume V più grande possibile?

A questo punto ho chiesto ai ragazzi di disegnare con GeoGebra il grafico della funzione Volume e costruire la derivata con lo strumento Traccia (come visto durante l'attività 4). Ciò mi ha dato modo di ripassare il procedimento e riprendere anche i concetti teorici.
In particolare, chiedendo agli studenti di ricordare il legame fra andamento e pendenza, abbiamo evidenziato come nel punto di massimo $(x, V(x))$ cercato, il grafico avesse pendenza nulla.

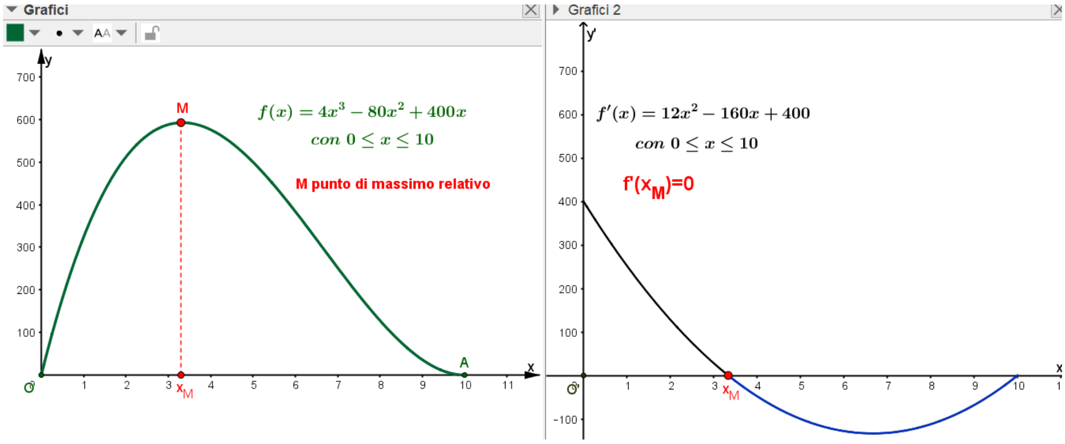


Figura 4.19: Legame tra il problema di ottimizzazione e la pendenza del grafico

In un primo momento abbiamo quindi trovato il punto di massimo della funzione Volume lavorando a livello grafico: ciò è stato possibile grazie al software, che consente di trovare il punto in cui la retta tangente al grafico ha pendenza nulla. Solo a questo punto ho discusso con gli studenti la possibilità di ricavare la stessa conclusione avendo a disposizione l'espressione analitica della derivata, ossia cercando i punti che annullano la derivata prima.

Infine, per vedere se era chiaro il problema precedente, ho proposto un problema tratto dai temi d'esame di maturità degli anni passati[12]: a coppie gli studenti hanno cercato di risolvere l'esercizio in questione, che è stato poi con buoni risultati corretto insieme.

Attività 6: Le derivate in fisica

Durata: 2 ore

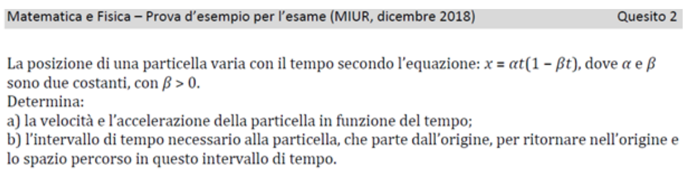
Struttura e Obiettivi: L'attività può essere suddivisa in 2 parti:

- La prima ora è svolta in *laboratorio di informatica* ed ha lo scopo di andare a vedere possibili applicazioni delle derivate in fisica.
  In particolare vengono ripresi i concetti di velocità istantanea, accelerazione istantanea e, per rendere più interessante la lezione, si può contestualizzare l'argomento nella quotidianità del mondo reale andando a vedere come funzionano Safety Tutor e Autovelox, avendo così modo di riprendere anche i quesiti posti nel Questionario Iniziale.
  Importanza viene data anche al moto armonico, solitamente non presente nei libri di testo quando si parla di derivate collegate alla fisica. Saranno proprio gli studenti a costruire poi con GeoGebra il diagramma orario di un moto rettilineo vario. Infine si può dare qualche spunto di collegamento tra le due discipline, ad esempio nel concetto di potenza istantanea come variazione

[12] Il lettore interessato al testo del problema scelto può consultare l'Appendice A

$\frac{dW}{dt}$ del lavoro, o in quello di corrente elettrica.
La spiegazione è stata supportata da una presentazione Power Point consultabile in Appendice A. In questa lezione si ha anche modo di riprendere il concetto di grandezza infinitesima e la notazione della derivata attraverso i differenziali, mostrando ai ragazzi il largo uso di questi nei testi universitari di fisica [43].

- La seconda ora è dedicata allo svolgimento di esercizi sempre collegati al mondo della fisica. In particolare la scelta è ricaduta su due esercizi: il primo tratto da un quesito di una simulazione della prova di Maturità del 2018 (Figura 4.20), il secondo un problema di ottimizzazione, ossia la dimostrazione del Principio di Fermat in ottica, principio che afferma che *di tutti i possibili cammini che un raggio di luce può percorrere per andare da un punto a un altro, esso segue quello che richiede il tempo più breve* (Dimostrazione fatta a partire dalla Figura 4.21).



Matematica e Fisica – Prova d'esempio per l'esame (MIUR, dicembre 2018) Quesito 2

La posizione di una particella varia con il tempo secondo l'equazione: $x = \alpha t(1 - \beta t)$, dove α e β sono due costanti, con $\beta > 0$.
Determina:
a) la velocità e l'accelerazione della particella in funzione del tempo;
b) l'intervallo di tempo necessario alla particella, che parte dall'origine, per ritornare nell'origine e lo spazio percorso in questo intervallo di tempo.

Figura 4.20

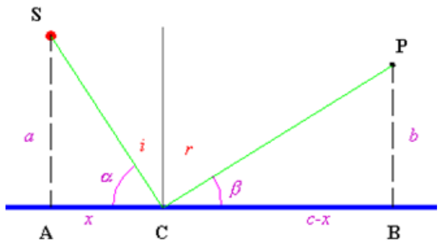


Figura 4.21

Uno scopo fondamentale di questa attività è quello di cercare di avvicinare gli studenti alla matematica, mostrando loro come, anche dietro a situazioni quotidiane, ad esempio l'utilizzo di un'automobile, una multa o un sollevamento pesi, possano esserci delle spiegazioni matematiche.
Inoltre un'attività di questo tipo permette di ripassare argomenti di fisica di particolare importanza anche in vista dell'esame di stato e degli studi futuri degli allievi, mettendo così in luce una forte interconnessione delle discipline.

Materiali utilizzati: Un pc per studente dotato di GeoGebra versione 5 classica e un pc per l'insegnante, anch'esso dotato di Geogebra 5, collegato a un proiettore, presentazione Power Point presente in Appendice A.

Implementazione del progetto in classe: L'approccio iniziale all'argomento è stato attraverso un ripasso della legge oraria del moto rettilineo uniforme e uniformemente accelerato, a cui è seguita la definizione di velocità e accelerazione istantanea (già accennate agli studenti nell'introduzione storica dell'Attività 1).
A questo punto ho voluto contestualizzare il problema nel mondo reale e, in particolare, in campo automobilistico[13].

[13] *"Lagrange vi spiega perché prendete una multa" a cura di Artusa Marco,* https://www.clipnotes.it/lagrange-vi-spiega-perche-prendete-una-multa/.

Ho iniziato proprio da una domanda concreta, ossia: *"Sapreste dirmi che cosa sono i Safety Tutor?"*

Si tratta di un sistema di controllo della velocità introdotto in alcuni tratti della rete autostradale italiana dal 2004.
Tale sistema consiste nella presenza di due centrali di rilevamento poste a diversi chilometri di distanza e permette di registrare quanto tempo è trascorso tra il passaggio per la prima stazione di rilevamento e la seconda.

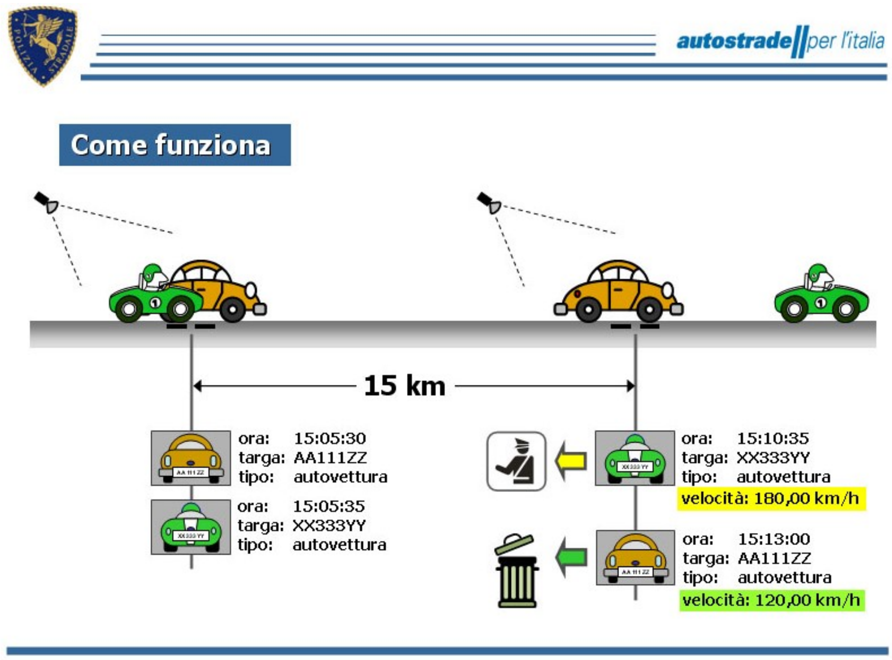


Figura 4.22: Funzionamento di un Safety Tutor autostradale

Quello che fa il Tutor quindi non è altro che calcolare la *velocità media* $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, dove Δx rappresenta la distanza tra le stazioni di rilevamento e Δt è il tempo di percorrenza registrato dal Safety Tutor.
A questo punto ho posto alla classe due domande:

- *Il fatto che in un tratto di strada la velocità media della nostra automobile nell'intervallo di tempo* $[t_1, t_2]$ *fosse superiore al limite di velocità, implica che c'è stato un istante tra* t_1 *e* t_2 *in cui la velocità istantanea fosse superiore al limite?*

- *Il fatto invece che la velocità media fosse inferiore al limite di velocità, implica automaticamente che non ci sia stato un istante in cui si sia superato il limite?*

La risposta alla prima domanda sembrerebbe banale e intuitivamente tutti gli allievi hanno risposto in modo corretto. Tuttavia se si vuole matematizzare il problema,

serve introdurre alcune nozioni specifiche.
Siamo partiti definendo la funzione $f(t)$ che indica, al variare del tempo t, la posizione che la nostra automobile assume rispetto a un punto d'origine (supponiamo il casello autostradale).
Abbiamo indicato le posizioni delle due centrali di rilevazione del Safety Tutor rispettivamente con $f(a)$ e $f(b)$ e gli istanti di tempo $t_1 = a$, $t_2 = b$ tali che $a < b$. Abbiamo indicato poi con L il limite di velocità e con v_m la velocità media, ossia $v_m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tale che $v_m > L$.
Ora, con le nostre conoscenze sulle derivate, la prima domanda al punto precedente diventa:

Sapendo che $v_m > L$, possiamo affermare che esiste un istante $c \in [a, b]$ tale che $v(c) = f'(c) > L$?

Per rispondere a questa domanda è necessario introdurre il *Teorema di Lagrange*.

Teorema 4.2.1. ***(Teorema di Lagrange)*** *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile almeno nei punti interni. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.*

Dunque all'istante c la velocità istantanea $v(c)$ è uguale alla velocità media v_m registrata dal Safety Tutor, che risulta essere maggiore al limite di velocità L.

Per quanto riguarda la seconda domanda, molti studenti, come visto nel Questionario iniziale[14], hanno ritenuto che il fatto che la velocità media v_m sia inferiore a L non garantisca che non ci sia stato un istante in cui la nostra velocità istantanea fosse superiore al limite. Per provare ciò è stato sufficiente mostrare un controesempio[15].

Questo approfondimento ha dato modo di mettere in luce la differenza tra Safety Tutor e Autovelox: infatti l'unico modo per ovviare a questo problema è quello di avvicinare sempre di più le stazioni di rilevamento, in modo che la velocità media sia sempre più assimilabile alla velocità istantanea. Questo è proprio ciò che accade con gli Autovelox, dove è presente addirittura una sola torretta, con due rilevatori a distanza di pochi centimetri.

Dopo aver ripassato la legge oraria del moto armonico $s(t) = r\cos(\alpha(t))$, ossia il moto della proiezione di un corpo che si muove di moto rettilineo uniforme[16], ho guidato gli allievi nella costruzione con GeoGebra del diagramma orario di un moto rettilineo vario (si veda la Figura 4.23).

[14]Maggiori dettagli saranno esposti nel Capitolo 5.
[15]Il lettore interessato può consultare l'Appendice A per maggiori dettagli.
[16]In tale legge oraria r è il raggio vettore che individua la posizione del punto P sulla circonferenza (nell'ipotesi che si consideri come origine il centro del cerchio corrispondente) all'istante t e $\alpha(t)$ è l' angolo che tale raggio forma con l'asse orizzontale in tale istante.

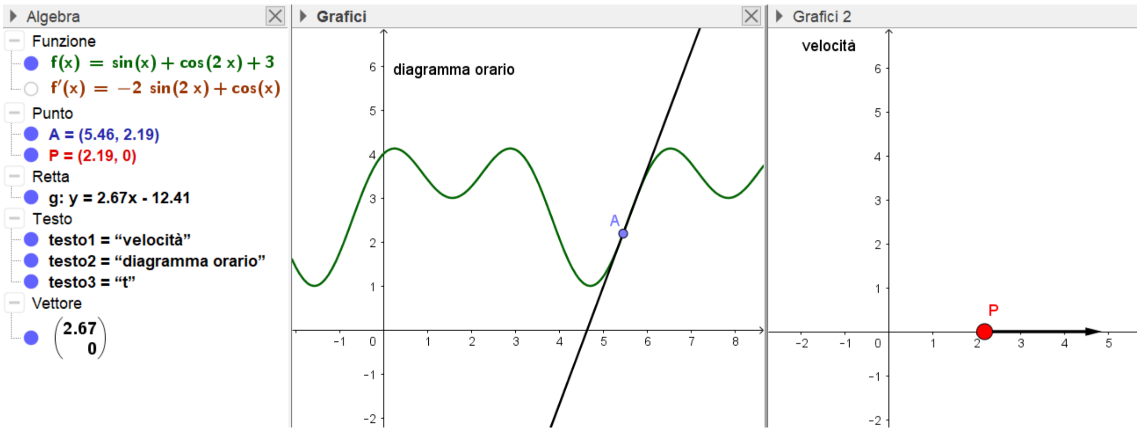


Figura 4.23: Costruzione del diagramma orario di $f(x) = sin(x) + cos(2x) + 3$

Per poter rappresentare ciò abbiamo usato due viste grafiche: una in cui rappresentare il grafico di $f(x)$, o meglio il diagramma orario, una dove poter vedere l'animazione di un punto del grafico, in modo tale da poterne studiare il moto.
In questa seconda vista grafica infatti, l'ascissa del punto che si muove è data dal valore corrispondente della funzione e la lunghezza del vettore è il modulo della derivata, la quale riesce a fornirci anche il verso.

La seconda parte della lezione si è concentrata poi sullo svolgimento di esercizi.
Ho deciso di svolgere l'esercizio in Figura 4.20 insieme agli studenti, ossia sono stata io a svolgerlo alla lavagna, chiedendo di volta in volta ai ragazzi come dovessi procedere e quali fossero le alternative corrette di risoluzione.
Prima di risolverlo dal punto di vista algebrico però, abbiamo riprodotto i dati del problema con il software e ne abbiamo fatto un'analisi grafica, soffermandoci su come variassero velocità e accelerazione.
Per il secondo esercizio ho scelto di usare un altro approccio. Ho prima proposto il problema, poi abbiamo lasciato agli allievi il tempo per pensare a coppie la soluzione. Una coppia è stata successivamente chiamata alla lavagna a svolgere l'esercizio, permettendo così di ragionare insieme e di poter fare un ripasso collettivo dei concetti.

Vorrei concludere la descrizione di questa attività con un'osservazione che vale la pena mettere in evidenza circa la proprietà di linguaggio quando si parla della costruzione di un diagramma orario. Ho infatti chiesto agli studenti come chiamassero loro abitualmente un grafico di questo tipo.
La risposta da parte loro è stata

"È un grafico spazio-tempo."

In realtà questo è un linguaggio che gli studenti trascinano dagli studi precedenti, tuttavia, non si tratta dello "spazio", ma dell'ascissa del punto, quindi sarebbe meglio precisare la nomenclatura corretta, ossia

"diagramma posizione-istante di tempo."

Attività 7: Esercizi di riepilogo a coppie con interrogazioni

Durata: 5 ore

Materiali utilizzati: Scheda di lavoro presente in Appendice A, esercizi tratti dagli esami di maturità degli anni passati consultabili nell'archivio del sito del Ministero dell'Istruzione e del Merito https://www.istruzione.it/esame_di_stato/default.htm e [48], ed esercizi tratti dal libro di testo in uso [3], lavagna o LIM a seconda della disponibilità dell'aula, pc dotato di GeoGebra 5 versione classica collegato a un proiettore.

Struttura, Obiettivi e Svolgimento: Questa attività ha lo scopo di consolidare i contenuti fin qui appresi, ripassandone i passaggi fondamentali attraverso esercizi mirati. Gli allievi divisi in coppie sono andati alla lavagna: uno svolgeva l'esercizio richiesto alla lavagna, l'altro, utilizzando il pc, mostrava graficamente, attraverso l'utilizzo del software, il problema proposto. Per l'esercizio successivo si invertivano i ruoli della coppia, così da verificare le competenze di entrambi.
In questo modo di ciascun esercizio sono stati analizzati gli aspetti algebrici, così come quelli grafici. Le domande del docente e le mie osservazioni hanno portato anche a ripassare i passaggi fondamentali già studiati e ad arricchire le conoscenze con nuovi concetti.

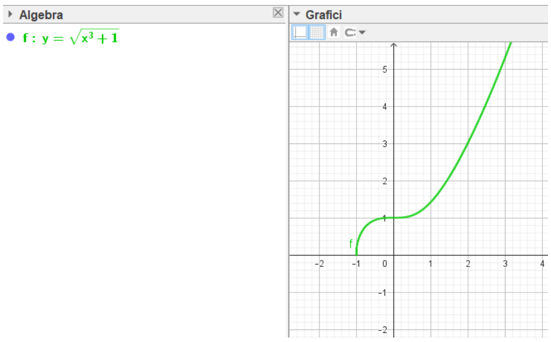


Figura 4.24

Per chiarire quest'ultimo punto porto un esempio. Un esercizio posto agli studenti richiedeva di studiare eventuali punti di non derivabilità della funzione $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ (grafico in Figura 4.24): dopo aver svolto l'esercizio, analizzando il grafico della funzione e facendo uno studio sulla pendenza della tangente ai punti del grafico, un ragazzo è riuscito a dedurre la definizione di **flesso a tangente orizzontale**, successivamente formalizzata in modo rigoroso.

Un momento particolarmente interessante è stata poi l'interrogazione di uno studente, a cui è stato chiesto di scegliere un teorema visto e spiegarlo alla classe. Lo studente in questione ha scelto il teorema di Lagrange, che avevo introdotto nell'Attività 6. Ciò ha dato modo di riprendere i concetti visti ed è stata l'occasione per anticipare la dimostrazione in classe di tale teorema.

La scelta degli esercizi non deve poi essere fatta in maniera casuale: la scelta adottata è stata quella di partire da degli esercizi che erano già stati assegnati per casa (per il testo il lettore può consultare l'Appendice A), per poi passare ad esercizi tratti dalle prove di maturità, che andassero a toccare e ripassare argomenti già affrontati durante le lezioni precedenti.

Prima di iniziare con gli esercizi, abbiamo visto le derivate fondamentali di esponenziale e logaritmo. In realtà questo punto potrebbe essere svolto fin dall'Attività 2, ma nel nostro caso, per mancanza di tempo, durante l'Attività osservativa 2 non è stata completato lo studio delle derivate di tutte le funzioni elementari: ho scelto quindi di proporre agli studenti lo studio di tali funzioni dapprima come lavoro per casa, poi come discussione in classe.
Per quanto riguarda l'esponenziale, sono stata io a fornire il file GeoGebra agli allievi, i quali avrebbero poi dovuto rispondere alle domande poste e calcolare la derivata. Per quanto riguarda il logaritmo si chiedeva agli studenti un passo ulteriore, ossia svolgere l'esercizio anche con la costruzione della derivata attraverso il software.

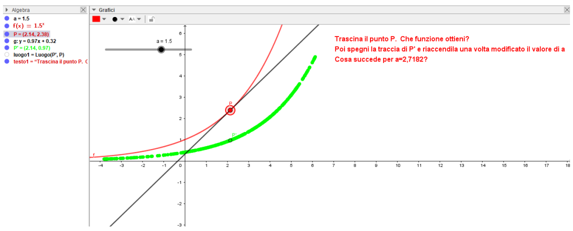


Figura 4.25: Esercizio proposto

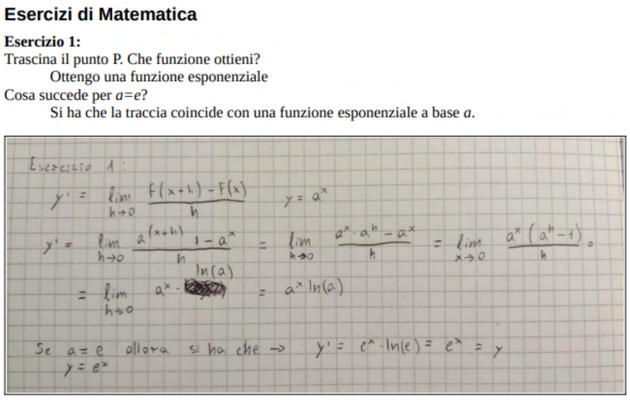


Figura 4.26: Esempio di risoluzione caricata su Classroom

Questa attività ha occupato le ore di matematica di tutta la settimana, tuttavia questo si è rivelato un metodo apprezzato dalla classe, in quanto si è trattato di un lavoro partecipato, che oltre a coinvolgerli in prima persona, ha permesso di fare esercizi e di ripassare argomenti fondamentali, anche in vista dell'esame di stato.

Attività 8: Questionario finale e chiusura del progetto

Durata: 2 ore

Materiali utilizzati: Questionario finale e Questionario di gradimento i cui testi sono consultabili al Capitolo 5, una lavagna o LIM a seconda della disponibilità dell'aula.

Struttura, Obiettivi e Svolgimento: Questa attività si propone di tirare le somme del lavoro svolto fino ad ora. Ho somministrato in forma anonima e cartacea un questionario agli studenti della durata di 50 minuti, atto a vederne le competenze raggiunte e gli eventuali progressi a seguito del progetto messo in atto.
È seguito un questionario di gradimento, anch'esso in forma anonima e cartacea, della durata di 10 minuti. Con queste domande volevo sondare l'opinione degli

studenti, in modo tale da vedere cosa li avesse maggiormente colpiti, cosa potesse aver eventualmente favorito la comprensione degli argomenti, così come possibili critiche o note negative, in modo tale da capire come eventualmente potrebbe essere migliorato in futuro il lavoro.
Dopo aver visto i questionari degli studenti, un'altra ora di lezione l'ho poi usata per correggere insieme a loro alla lavagna il questionario, discutendo sugli errori ritrovati. Ciò ha dato modo di fare un ulteriore ripasso del programma svolto, ripasso che ha portato all'introduzione dell'argomento successivo, ossia i teoremi sulla derivabilità.

Capitolo 5

Analisi dei dati relativi alla Sperimentazione didattica

Il Capitolo seguente si propone di fare uno studio dei Questionari iniziali e finali, andando ad evidenziare eventuali progressi e, in generale, le note positive e negative tratte da questo progetto, anche alla luce di un confronto fatto con un'altra classe dell'istituto, che si è gentilmente prestata come classe di controllo per questa sperimentazione.

5.1 Questionari di competenze e gradimento

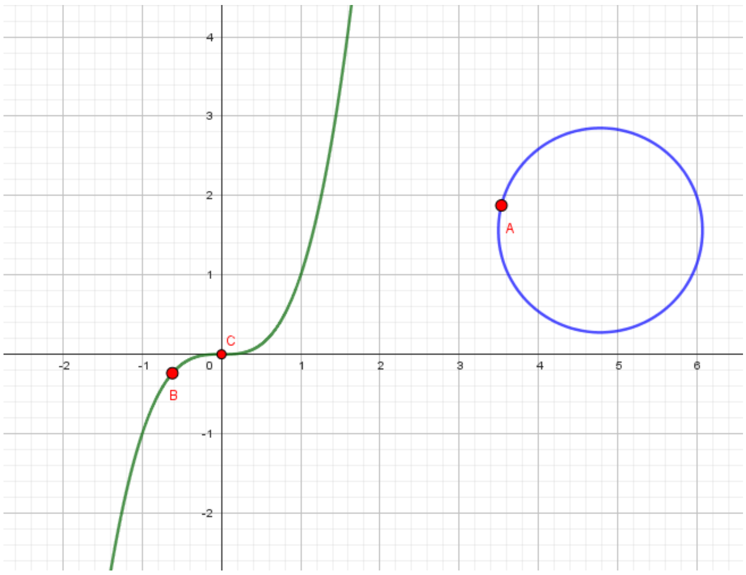
Come già anticipato al Capitolo 4, la sperimentazione ha avuto luogo per due mesi continuativi presso il liceo scientifico Enrico Fermi di Padova e ha visto protagonista la classe quinta ASA (quinta Scienze Applicate sezione A), composta di 20 studenti, nessuno dei quali ripetente. Un'altra classe quinta (5E Scientifico Tradizionale), composta di 16 studenti, si è poi prestata come classe di controllo, attraverso la quale si è potuta fare un'analisi dei dati più precisa, confrontando i test somministrati.
Nel corso della sperimentazione infatti, sono stati somministrati dei questionari, i cui testi sono di seguito riportati e i cui dati emersi verranno a breve descritti nel dettaglio:

- **Questionario iniziale**, somministrato ad entrambe le classi prima dell'inizio della sperimentazione, con i fini di verificarne il livello ed eventuali misconcezioni.
- **Questionario finale**, somministrato ad entrambi le classi a progetto concluso, con il fine di verificare le competenze e vedere se ci sono stati progressi o eventuali note positive/negative della sperimentazione.
- **Questionario di gradimento**, somministrato solo alla classe sperimentale per sondare il gradimento degli allievi/e, potendo così fare una valutazione complessiva, anche in relazione alle competenze raggiunte.

Questionario iniziale

Domanda 1 Come spiegheresti cos'è una retta tangente ad una curva? Puoi anche elencare proprietà che ritieni valide o servirti di grafici

Domanda 2 Traccia, se esistono, le tangenti alle seguenti curve nei punti A,B,C. Se pensi non esistano, spiega in basso il motivo.



Domanda 3

Il numero $3,\bar{9}$ coincide con 4 o ne rappresenta una sua approssimazione?

Motiva brevemente la tua risposta

Domanda 4 Durante i tuoi studi hai mai sentito parlare di quantità infinitesima? Sapresti dire cosa si intende per “infinitesimo” ?

Domanda 5a
Un’auto entra al casello autostradale di Bologna diretta a Venezia. Un Tutor della polizia segna l’orario di passaggio a Ferrara e l’orario di passaggio a Padova Interporto. Il viaggiatore non prende la multa.
E’ possibile che l’auto abbia viaggiato un tratto tra Ferrara e Padova a 180 km/h

- SI
- NO

Domanda 5b Motiva brevemente la risposta precedente

Domanda 6 Un autovelox rileva
- L’accelerazione istantanea
- La velocità media
- La velocità istantanea
- L’accelerazione media

Domanda 7 Considera un quadrato di lato a. Se si aumenta il lato a del 20% si ottiene un nuovo quadrato di lato b. Quali delle seguenti espressioni rappresenta la misura di b?
- 20a
- a+20
- 1,20a
- a+0,20

Domanda 8 Considera f(x)= sen(x). Incrementiamo la variabile indipendente x di un certo valore h reale. A cosa corrisponde sen(x+h)?
- (h+1)sen(x)
- sen(x) + sen(h)
- sen(x)cos(h) + cos(x)sen(h)
- – cos(x+h)

Domanda 9

Considera $f(x) = x^2 + 1$

Sia h un numero reale. A cosa corrisponde il rapporto $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$?

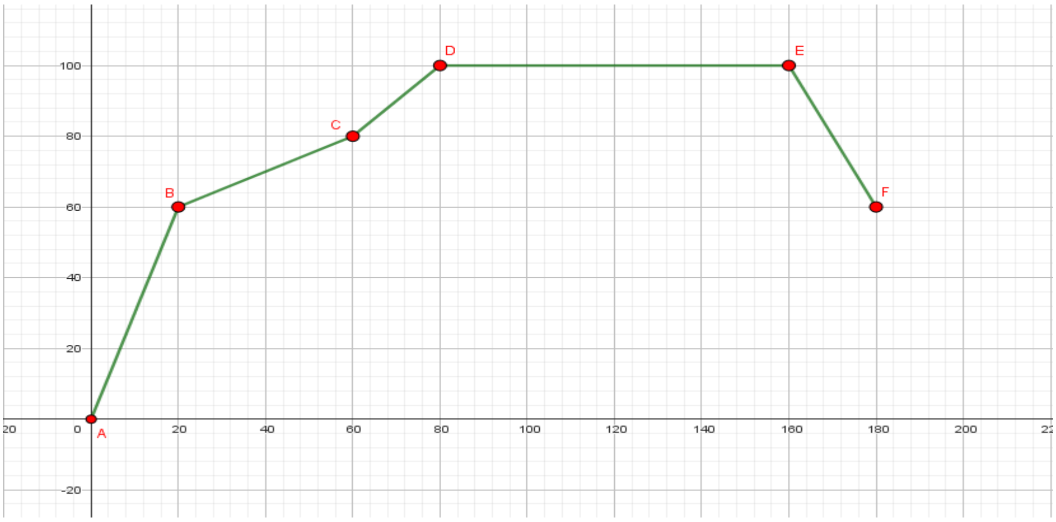
Domanda 10 Questo segnale indica la pendenza di una stradina di montagna. Barra la o le risposte corrette

- Ogni 100 metri percorsi in orizzontale la strada si innalza di 10 metri
- Ogni metro percorso in orizzontale la strada si innalza di 10 metri
- L'ampiezza dell'angolo di inclinazione della stradina è di 10°
- La retta che descrive la strada ha termine noto che vale 10
- L'ampiezza dell'angolo di inclinazione della stradina coincide con arctan(0.1)
- L'ampiezza dell'angolo di inclinazione della stradina coincide con arcsen(0.1)

Domanda 11 "La pendenza di una retta parallela all'asse delle ordinate non è nulla." Ritieni che la seguente affermazione sia

- Vera
- Falsa
- Non lo so

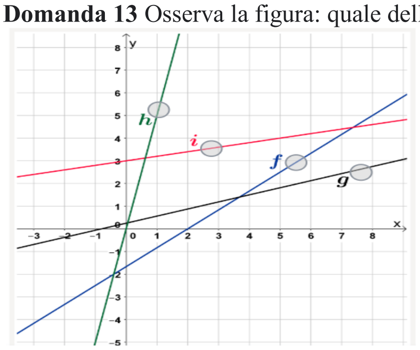
Domanda l2a Il grafico in figura rappresenta la posizione (in m) di un'auto al variare del tempo (in s) in un moto rettilineo. In quale tratto l'auto è andata in media più veloce?



- A-B
- B-C
- C-D
- C-E

Domanda 12b Osserva nuovamente il grafico precedente e barra la o le risposte che ritieni corrette
- Nel tratto EF l'auto rallenta
- Nel tratto EF l'auto cambia direzione
- In modulo la velocità nel tratto EF è minore della velocità nel tratto BC
- In modulo la velocità nel tratto EF è maggiore della velocità nel tratto BC
- L'auto nel tratto DE avanza con velocità costante
- L'auto ha percorso 100 metri
- L'auto nel tratto DE è ferma

Domanda 13 Osserva la figura: quale delle seguenti rette ha coefficiente angolare minore?



- f
- g
- h
- i

Questionario finale relativo all'attività svolta sulle derivate

Domanda 1a Dopo aver studiato le derivate, ritieni che esista un collegamento tra il concetto di derivata e la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ vista nello studio dei limiti?

- Sì
- No
- Non lo so

Domanda 1b Motiva brevemente la tua risposta alla domanda precedente.

Domanda 2 La figura riportata qui sotto rappresenta il tachimetro di un'automobile.

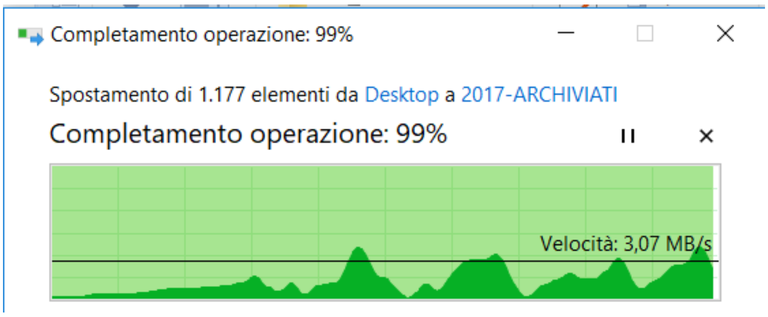
Secondo te è corretto dire che il tachimetro può essere visto come un "calcolatore di derivate prime"?

- Sì, perché calcola la velocità istantanea punto per punto.
- Sì, perché calcola la velocità media dell'automobile.
- No, perché il dato fornito non ha collegamenti con il concetto di derivata.
- No, perché esso ci fornisce l'accelerazione, dunque è un "calcolatore di derivate seconde".

Domanda 3 Secondo te il tasso di inflazione in economia:

- Non si può studiare con le derivate.
- Si può studiare con le derivate in quanto rappresenta la misura di una variazione nel tempo, esattamente come la velocità.
- Rappresenta la misura di una variazione ma non si può studiare con le derivate, che consentono di studiare solo problemi di fisica come la velocità, l'accelerazione e l'intensità di corrente.

Domanda 4



Nella figura precedente, cosa rappresenta il grafico?
Trovi un collegamento con il concetto di derivata?
Perché? (motiva la tua risposta).

Domanda 5 È corretto affermare che la retta tangente a una curva interseca tale curva in uno e un solo punto (ossia il punto di tangenza) ?

- Sì
- No
- Non lo so

Domanda 6 La derivata è il limite (se esiste, finito) per *h* tendente a 0 del rapporto incrementale in *x*.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

In tale rapporto:

- L'incremento *h* può assumere solo valori positivi.
- L'incremento *h* può assumere sia valori positivi che negativi.
- L'incremento *h* è sempre negativo.

Domanda 7

a) Calcola nel riquadro sottostante il rapporto incrementale della funzione $f(x) = 3\,x^2 - x + 1$ nel punto $x = 1$.
b) A partire da tale rapporto calcola poi la derivata in $x = 1$ usando soltanto la definizione di derivata.

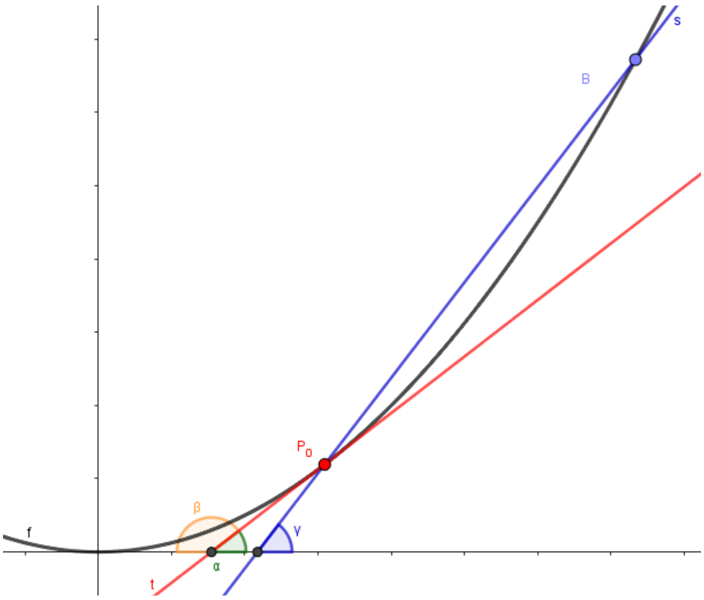
Domanda 8 Considera il seguente limite:

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \ldots$$

a) Cosa rappresenta questo limite?

b) Sai dire qual è il valore di questo limite senza eseguire il calcolo? Motiva la risposta.

Domanda 9 Siano dati una curva di equazione y=f(x), una retta s secante alla curva passante per P_0 e la retta tangente t alla curva nel punto P_0.
Scegli l'alternativa che ritieni corretta:



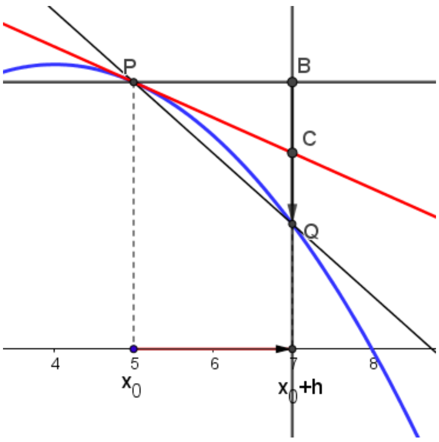
- ○ $f'(x_0) = \sin\alpha$
- ○ $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$
- ○ $f'(x_0) = \mathrm{tg}\beta$
- ○ $f'(x_0) = \mathrm{tg}\gamma$

Domanda 10a Pensa al significato geometrico della derivata. Se sappiamo che il grafico della funzione $f(x)$ è crescente, riusciamo a dire qualcosa sul grafico della funzione derivata $f'(x)$?

- ○ Sì, $f'(x)$ assume valori negativi.
- ○ Sì, $f'(x)$ assume valori positivi.
- ○ No, non abbiamo sufficienti informazioni.

Domanda 10b Motiva la risposta data alla domanda precedente, utilizzando il significato geometrico di derivata.

Domanda 11 Osserva il seguente grafico. Indica se le seguenti affermazioni sono vere o false.



L'incremento Δx è positivo.

- ○ Vero
- ○ Falso

dy coincide con il segmento BQ.

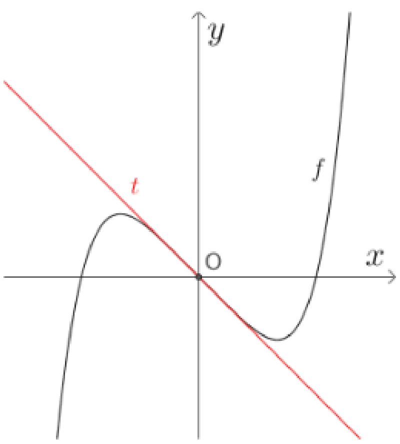
- ○ Vero
- ○ Falso

L'incremento Δy è positivo.

- ○ Vero
- ○ Falso

Domanda 12

La retta t è tangente, nell'origine O, al grafico della funzione f di equazione $f(x) = \frac{x^5}{5} - x$.



Quanto vale la pendenza della retta *t* ?

- ○ -1
- ○ 1
- ○ - 5/2
- ○ Non ci sono dati sufficienti per determinarla.

Questionario di gradimento dell'attività didattica sulle derivate

Il Questionario (anonimo) serve per rilevare il gradimento degli/delle studenti/studentesse a seguito del progetto didattico, svolto in classe, riguardo al concetto di derivata. Le tue risposte saranno molto utili per una riflessione sul progetto didattico e per un suo eventuale miglioramento. Grazie delle tue risposte!

1) A conclusione di queste attività sulle derivate, come giudichi complessivamente l'esperienza?

- ☐ Positivamente
- ☐ Negativamente
- ☐ Dipende dall'attività svolta

2) L'utilizzo del software GeoGebra nello studio delle derivate (puoi segnare più di una risposta)

- ☐ Mi ha aiutato a comprenderne il significato geometrico di derivata e a visualizzare i concetti
- ☐ Mi ha aiutato nello svolgimento degli esercizi
- ☐ Non mi ha aiutato
- ☐ Altro …….

3) A seguito di questa esperienza, ritieni che GeoGebra possa essere uno strumento utile per il tuo studio della matematica e della fisica?

- ☐ Sì, lo userei anche per gli argomenti futuri
- ☐ No, non lo userei più

4) L'approccio storico iniziale è stato utile per comprendere e contestualizzare meglio l'argomento della derivata?

- ☐ Sì, alcuni passaggi sono più chiari andando a vedere le motivazioni che hanno portato alla nascita del calcolo
- ☐ No, la spiegazione del libro di testo è sufficiente per comprendere gli argomenti
- ☐ Altro………

5) Quali delle seguenti lezioni hai preferito? (Puoi segnare più di una risposta)

- ☐ Lezione storica
- ☐ Lezione sui numeri iperreali
- ☐ Esercizi svolti in modo partecipativo
- ☐ Le derivate collegate alla fisica e al mondo reale
- ☐ Attività con Geogebra in laboratorio

6) Cosa ti è rimasto maggiormente impresso di queste attività svolte? (Puoi far riferimento a una singola attività, a più lezioni o anche solo a delle curiosità/spiegazioni interne alle lezioni)

………

………

………

……….

7) Cambieresti qualcosa delle lezioni svolte/ ci sono aspetti che, a tuo parere, potrebbero essere migliorati? Quali?

……….

……….

………

5.2 Raccolta e analisi dei dati

Nel corso del primo incontro con la classe è stato dunque somministrato il **Questionario iniziale**, per conoscere il livello di partenza di ciascuno studente.
Il test, costituito da domande a risposta multipla e domande aperte, ha consentito di sondare la preparazione iniziale degli studenti su concetti strettamente collegati agli argomenti previsti dal percorso: in particolare, come si può osservare dai testi dei questionari posti a inizio capitolo, sono state fatte domande sul concetto di velocità media e istantanea, sul concetto di variazione (anche percentuale), incremento di una funzione e coefficiente angolare.
Inoltre, in linea con le analisi fatte al Capitolo 3, sono state verificate *concept image* e *concept definitions* riguardo al concetto di tangente e di infinitesimo.
Come già anticipato il test è stato somministrato anche alla classe di controllo e, al momento dello svolgimento, la classe sperimentale vedeva presenti 16 studenti su 20, mentre la classe di controllo 13 allievi su 16.
Andiamo dunque a vedere i risultati emersi.
Una prima analisi delle domande a risposta chiusa ha rilevato una preparazione sostanzialmente simile fra le due classi. Qualche incertezza in più della classe di controllo è stata rilevata nella domanda 10, in cui solo il 15% degli studenti ha individuato entrambe le risposte corrette. Gli altri quesiti, di carattere generale e verifica delle preconoscenze, hanno rilevato invece percentuali di risposte esatte simili, come si può vedere dagli istogrammi in Figura 5.1 e Figura 5.2.

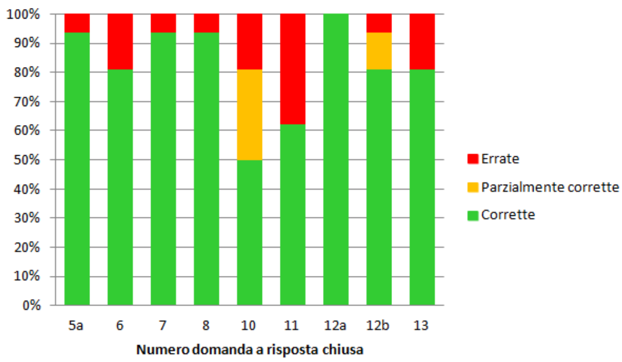


Figura 5.1: Risposte test iniziale classe sperimentale

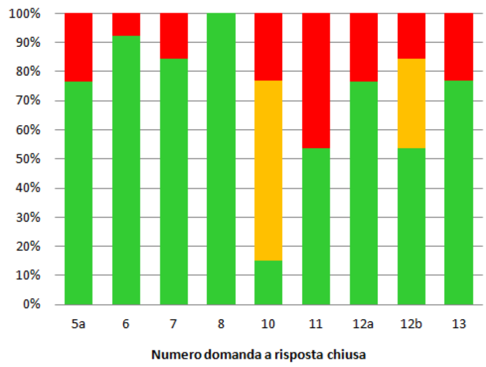


Figura 5.2: Risposte test iniziale classe di controllo

Figura 5.3: Risposte prima domanda classe sperimentale

Maggior attenzione voglio invece porre sui quesiti a risposta aperta, le cui risposte si sono rivelate un utile riscontro per le indagini didattiche affrontate al Capitolo 3. La prima domanda, ossia la richiesta di definire la tangente, non è stata risposta correttamente da nessuno studente della classe sperimentale: 2 studenti su 16 hanno risposto alla domanda riferendosi esclusivamente alla circonferenza, 13 hanno esteso le proprietà della circonferenza a tutte le curve, 1 non ha risposto al quesito. L'allievo che non ha risposto alla richiesta di dare una concept definition, è stato però l'unico a disegnare correttamente le tangenti alle curve della domanda 2, al contrario dei restanti 15 che hanno disegnato in modo esatto solo la tangente alla circonferenza. Molti di loro hanno ritenuto che gli altri punti non potessero avere una tangente, in accordo con gli studi fatti da Tall e illustrati dettagliatamente al Capitolo 3. Di seguito riporto gli errori più frequenti a queste domande.

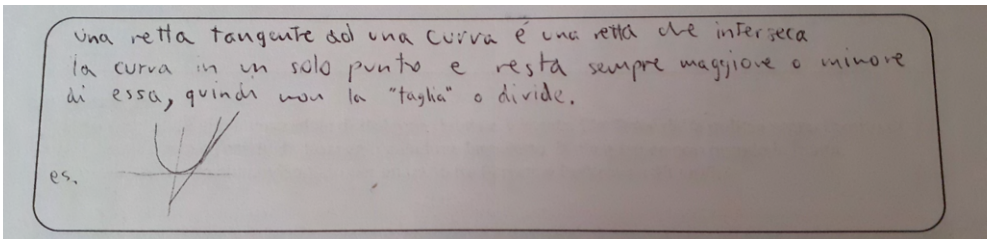


Figura 5.4: Esempio di definizione scorretta di tangente

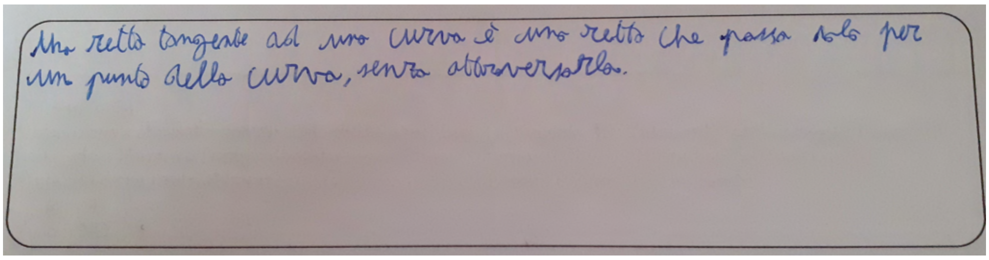


Figura 5.5: Altro esempio di definizione scorretta legata alla concept image di tangente.

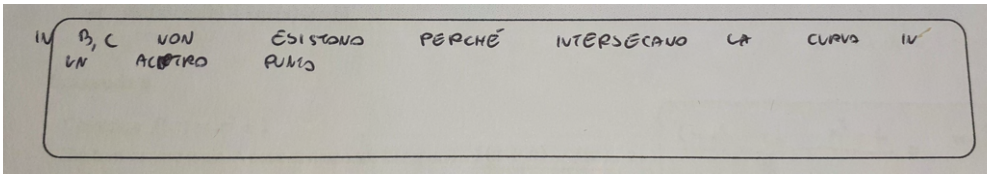


Figura 5.6: Errore più frequente alla seconda domanda del Questionario.

Tutti gli esempi qui riportati mostrano la misconcezione che abbiamo detto essere la più frequente riguardo al concetto di tangenza: la maggior parte degli studenti riteneva infatti che la tangente non potesse toccare più punti della curva e, in accordo con questa definizione, si trovano anche delle risposte come quella riportata in Figura 5.7, ossia la possibile esistenza di infinite tangenti a un punto della curva.

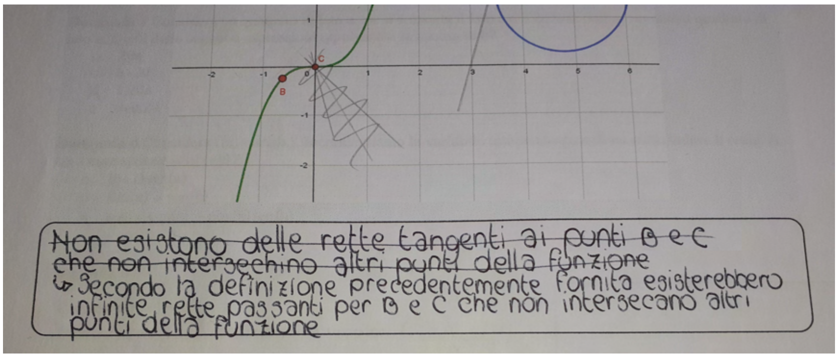


Figura 5.7: Altro esempio di errore alla seconda domanda

Figura 5.8: Risposte prima domanda classe controllo

Anche nella classe di controllo ritroviamo risposte analoghe. In questo caso però uno studente ha risposto correttamente, disegnando poi anche tutte le tangenti in modo corretto (Figura 5.9).
Ci sono stati poi 7 studenti che hanno esteso le proprietà della tangente alla circonferenza a ogni curva, andando così, come nell'altra classe, a sbagliare la seconda domanda. Due studenti hanno preferito non rispondere.

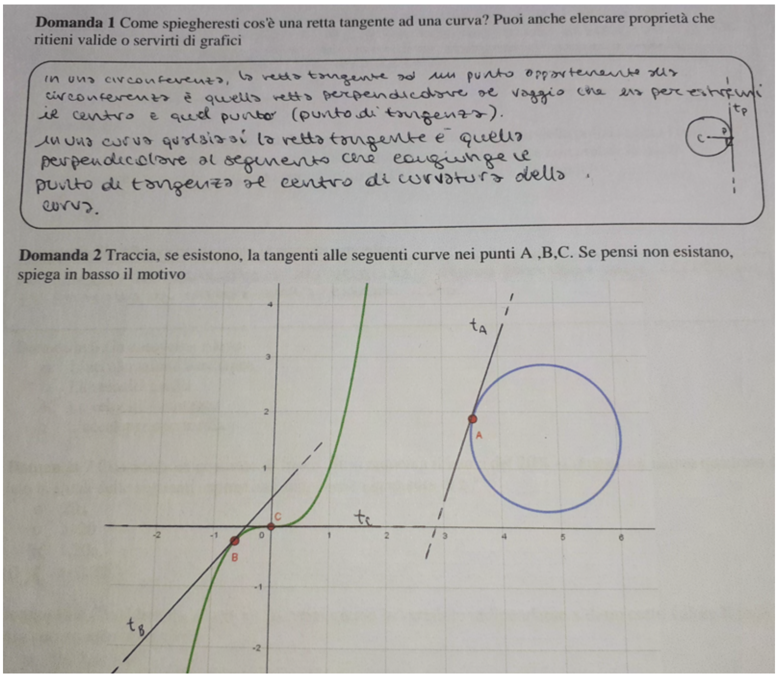


Figura 5.9: Risposte corrette svolte da uno studente della classe di controllo.

La terza e la quarta domanda riguardavano invece le quantità infinitesime: in particolare, da un lato con la quarta domanda si volevano indagare le preconoscenze degli studenti a riguardo, dall'altro la terza domanda è stata fatta per verificare le conoscenze sui numeri periodici e per venire poi ripresa durante la seconda attività del progetto, in cui si vanno ad introdurre i numeri iperreali.
Per quanto riguarda il terzo quesito ciò che è emerso è che, sia nella classe sperimentale, che in quella di controllo, più del 50% degli studenti ha scritto che $3{,}\bar{9}$ è un'approssimazione di 4.
A scuola, l'insieme considerato è l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e il procedimento per passare da un numero periodico ad una frazione, basato sulla teoria delle serie reali, viene insegnato già nella scuola secondaria di primo grado. Tale procedimento, ossia $\frac{39-3}{9} = \frac{36}{9} = 4$ è stato ricordato però solamente da 9 studenti della classe sperimentale.

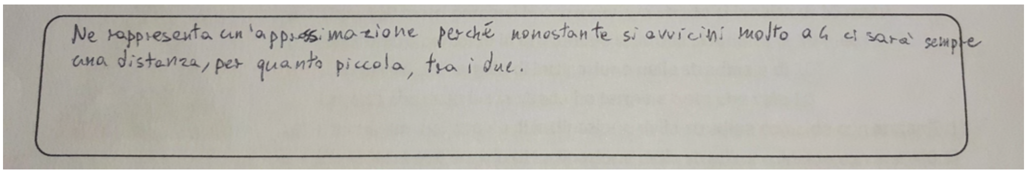


Figura 5.10: Esempio di soluzione errata al quesito 3.

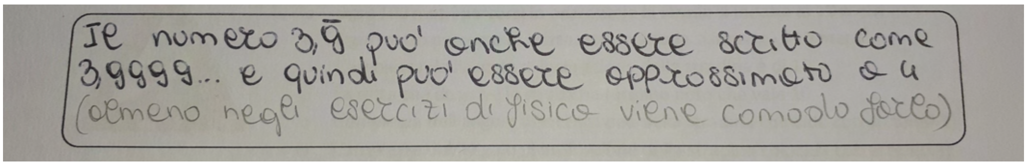


Figura 5.11: Altro esempio di risposta errata.

La risposta in Figura 5.11 è particolarmente interessante, perché denota, in accordo con quanto detto al Capitolo 3, come spesso gli allievi attingano le definizioni da immagini o esperienze passate (nella risposta in questione viene fatto riferimento a come in fisica si sia soliti approssimare), senza utilizzare il rigore che una definizione matematica prevede.

Durante l'attività 2 si scoprirà che in realtà la risposta dipende dall'insieme numerico preso in esame e il procedimento di trasformazione di un numero periodico in una frazione prende significato solo all'interno dell'insieme dei numeri reali. Al termine dell'attività 2 ho infatti proposto agli allievi di considerare la differenza $4 - 3, \bar{9}$ in ambito dei numeri iperreali. Ho proposto in particolare di fare delle stime e in tal modo abbiamo insieme dedotto che $4 - 3{,}\bar{9} < 4 - 3{,}99 < 4 - 3,\ 999 = 0{,}001$ e allo stesso modo ancora possiamo dire che $4 - 3{,}\bar{9} < 4 - 3,\ 9999 = 0,\ 0001$ e così via, ossia tale differenza tende sempre di più a 0. Ciò che si deduce è quindi che $4 - 3{,}\bar{9} = \varepsilon$ dove ε è un infinitesimo.[6]
La maggior parte degli studenti di entrambe le classi aveva indicato che $3{,}\bar{9}$ era un'approssimazione di 4, dicendo che ci tende senza mai arrivarci: in realtà questa idea non è del tutto sbagliata, ma dipende appunto da quale insieme numerico si

prende in considerazione.

Per quanto riguarda poi la definizione di infinitesimo, è interessante mettere in evidenza alcune risposte degli allievi. Nella classe sperimentale il 50% ha risposto correttamente definendo l'infinitesimo come *"una quantità infinitamente piccola"*, i restanti hanno associato all'infinitesimo una funzione o hanno fatto riferimento ai confronti tra infiniti, senza darne una definizione precisa. Lo stesso si è verificato nella classe di controllo. Qui possiamo evidenziare altre misconcezioni, con 5 studenti che identificano l'infinitesimo come *"una quantità infinitamente piccola o infinitamente grande"*.

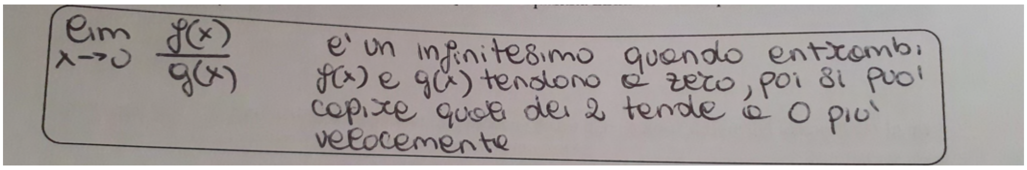

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e' un infinitesimo quando entrambi f(x) e g(x) tendono a zero, poi si puo' capire quale dei 2 tende a 0 piu' velocemente

Figura 5.12: Definizione di infinitesimo associata al confronto tra infiniti.

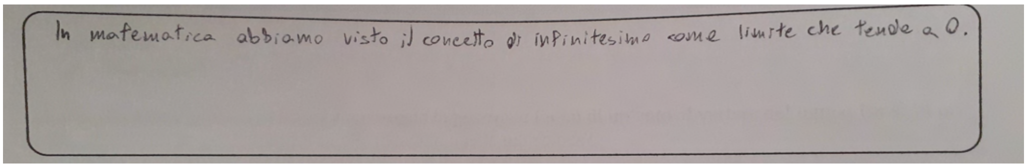

In matematica abbiamo visto il concetto di infinitesimo come limite che tende a 0.

Figura 5.13: Definizione di infinitesimo associata al concetto di limite

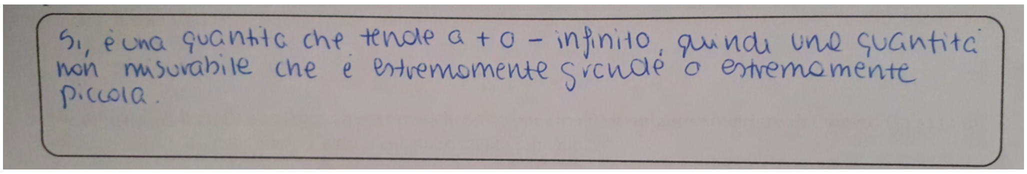

Si, è una quantita che tende a + o - infinito, quindi una quantita non misurabile che è estremamente grande o estremamente piccola.

Figura 5.14: Concept image errata sul concetto di infinitesimo.

Le domande aperte restanti sono la 5b e la 9.
La 5b è stata posta per vedere la capacità di contestualizzazione dei fenomeni reali da parte degli studenti e verrà poi ripresa nella classe sperimentale durante la lezione storica e durante l'attività 6. Più del 50% degli studenti di entrambe le classi hanno risposto in modo corretto al quesito, i restanti studenti non hanno collegato il concetto di velocità media a quella di Tutor Autostradale, limitandosi ad associare la multa al superamento del limite di velocità.
Tale errore (si veda la Figura 5.15), presente in più di un questionario, mi ha fatto riflettere sulla necessità di contestualizzazione della matematica nella vita reale, troppo spesso relegata solo alla teoria presente nei libri.

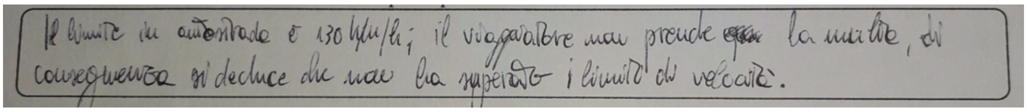


Figura 5.15: In questa risposta al quesito 5b non è stato collegato il concetto di velocità media al Tutor, bensì ci si è limitati a pensare al limite di velocità autostradale di 130 km/h.

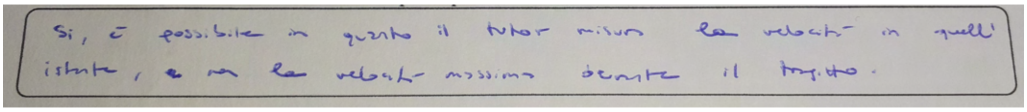


Figura 5.16: Pur avendo risposto correttamente alla domanda 5a, l'allievo in questione parla di Tutor in relazione alla velocità istantanea.

La domanda 9 è stata invece posta per capire se gli studenti fossero in grado di calcolare la variazione in una funzione. Le risposte errate (la più frequente consultabile in Figura 5.17), sono state il 65% nella classe di controllo e il 62,5% nella classe sperimentale, dati che mostrano la necessità di affiancare alla teoria esercizi mirati.

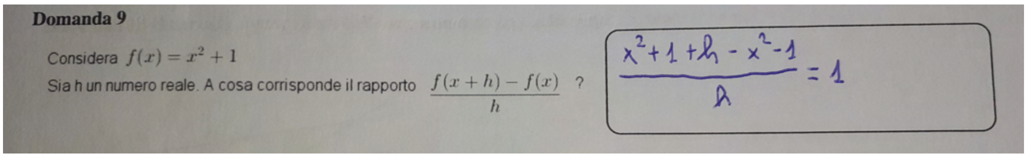
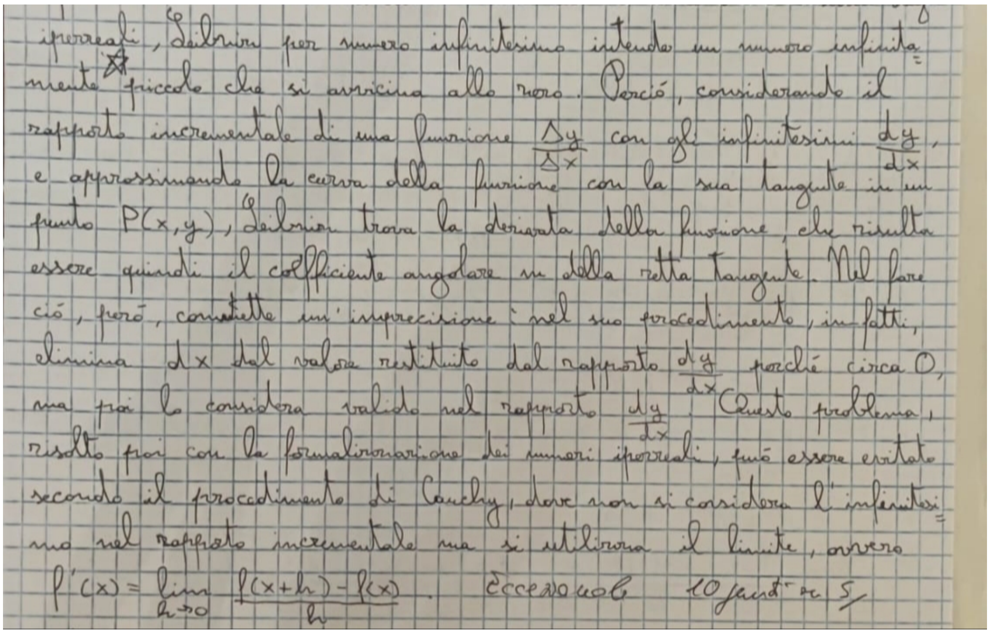


Figura 5.17: Errore più frequente alla domanda 9 del Questionario iniziale

Durante la sperimentazione ci sono state poi delle **indagini intermedie** per avere un feedback in itinere. A metà del percorso (dopo l'attività 4) il docente ha somministrato alla classe una verifica, nella quale sono state poste domande di teoria e di calcolo. Con piacere è emerso come alcuni studenti avessero tratto informazioni dagli approfondimenti proposti, citando ad esempio i numeri iperreali nonostante non venisse chiesto espressamente dalla domanda teorica proposta dal docente nella verifica (*"Come trattereste il concetto di derivata mettendo a confronto la proposta di Leibniz e la definizione che usa il concetto di limite?"*).
Di seguito, in Figura 5.18, viene riportata al quesito citato.
Inoltre una verifica delle conoscenze in itinere è stata fatta anche durante la correzione degli esercizi e le interrogazioni svolte durante l'attività 7.


iperreali, Leibniz per numero infinitesimo intende un numero infinitamente piccolo che si avvicina allo zero. Perciò, considerando il rapporto incrementale di una funzione $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ con gli infinitesimi $\frac{dy}{dx}$, e approssimando la curva della funzione con la sua tangente in un punto $P(x,y)$, Leibniz trova la derivata della funzione, che risulta essere quindi il coefficiente angolare m della retta tangente. Nel fare ciò, però, commette un'imprecisione nel suo procedimento, infatti, elimina dx dal valore restituito dal rapporto $\frac{dy}{dx}$ perché circa 0, ma poi lo considera valido nel rapporto $\frac{dy}{dx}$. Questo problema, risolto poi con la formalizzazione dei numeri iperreali, può essere evitato secondo il procedimento di Cauchy, dove non si considera l'infinitesimo nel rapporto incrementale ma si utilizza il limite, ovvero

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Eccezionale 10 punti su 5

Figura 5.18: Risposta di un allievo alla verifica di matematica: *"Leibniz commette un'imprecisione nel suo procedimento .... questo problema, risolto poi con la formalizzazione dei numeri iperreali, può essere evitato secondo il procedimento di Cauchy ..."*

Ulteriori informazioni circa gli effetti della sperimentazione, sono state reperite attraverso la somministrazione dei questionari al termine del progetto.
Il **Questionario finale**, sostenuto sia dalla classe sperimentale sia dalla classe di controllo, mostra come la classe che ha svolto la sperimentazione abbia raggiunto in alcuni punti un più profondo livello di comprensione degli argomenti.
Andiamo dunque a vedere nel dettaglio i dati raccolti.
In questo caso, il giorno in cui è stato somministrato il test, i presenti erano 19 su 20 nella classe sperimentale e 13 su 16 nella classe di controllo.

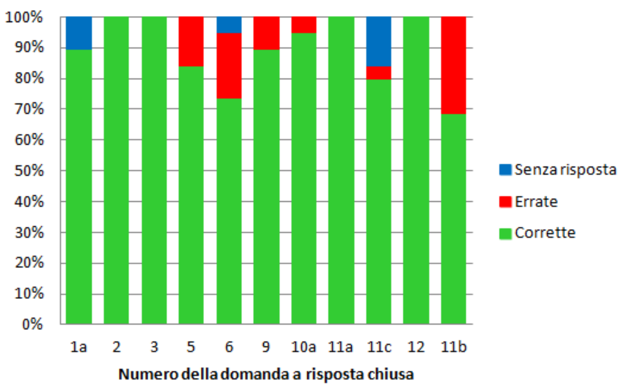


Figura 5.19: Risposte test finale classe sperimentale

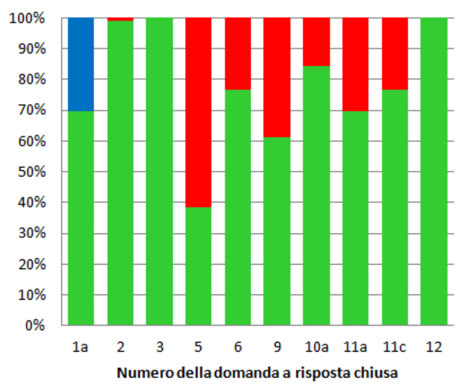


Figura 5.20: Risposte test finale classe di controllo

In Figura 5.19 e 5.20 si può vedere la percentuale di risposte corrette avuta nelle

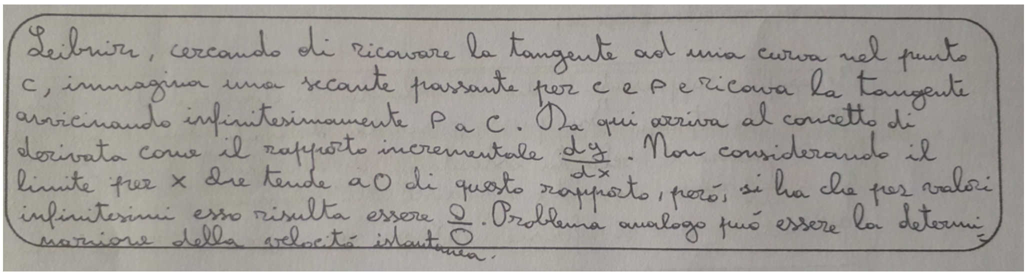
domande a risposta multipla[1].
Si può notare che tutte le domande hanno ottenuto più del 50% di risposte corrette in entrambe le classi, fatta eccezione per la domanda 5b nella classe di controllo, che ha visto solo il 38,5% di risposte corrette, contro l'84,2% di risposte esatte della classe sperimentale. Il quesito in questione aveva lo scopo di vedere se si fossero risolte le misconcezioni riguardanti il concetto di tangente e, in particolare, richiedeva di stabilire se fosse corretto associare alla tangente la proprietà di intersecare la curva in un solo punto. Questo fatto non è specificato dal libro di testo, che si limita a dare la definizione di tangente attraverso il concetto di derivata.
La percentuale più alta di risposte corrette nella classe sperimentale mette in luce come sia opportuno evidenziare questo passaggio agli studenti e come l'uso di GeoGebra possa aiutare a eliminare possibili misconcezioni e eventualmente a correggere quelle *concept images* scorrette createsi negli studenti.

Un altro dato su cui vale la pena porre l'attenzione è la domanda 11, in cui viene chiesto di analizzare un grafico e, in particolare, di identificare gli incrementi Δx e Δy di una funzione. La scelta è stata quella di scegliere un tratto decrescente di una curva, scostandosi così dal libro di testo in cui tutti gli esempi sono fatti su tratti crescenti. Questo cambiamento ha trovato più preparati gli studenti della classe sperimentale, che hanno risposto tutti correttamente alla domanda riguardante l'incremento Δx (contro il 70% della classe di controllo) e l'80% al quesito riguardante l'incremento Δy (contro il 76,9% della classe di controllo).
Un dato positivo è stato rilevato anche in merito alla domanda 10 in cui si andava a indagare il significato geometrico della derivata. Tale domanda ha visto il 94,7% delle risposte corrette nella classe sperimentale, contro l'84,6% della classe di controllo.
Gli ottimi risultati di queste domande portano a una promozione dell'uso del software dinamico, che permette di lavorare sui grafici e, sia visualizzare concetti come la pendenza, sia essere più pronti ad affrontare esercizi leggermente diversi da quelli generalmente proposti dal libro di testo.

Passiamo ora a vedere i risultati riguardanti le domande aperte proposte.
In particolare, per quanto riguarda la richiesta se ci fosse o meno una correlazione tra il concetto di derivata e la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ studiata nei limiti, 17 studenti dei 19 della classe sperimentale e 9 dei 13 della classe di controllo hanno risposto correttamente in modo affermativo.
Tuttavia solo 6 ragazzi della classe sperimentale hanno centrato il punto dando la motivazione corretta, ossia si sono collegati alla lezione storica spiegando che il limite è stato introdotto come strumento per superare un rapporto tra quantità infinitesime tendenti a 0. La restante parte della classe, così come tutti gli studenti della classe di controllo, si è limitata a fare un'analisi "a posteriori" constatando cioè che il limite del rapporto incrementale è una forma $\frac{0}{0}$ (si veda Figura 5.24 e 5.25).

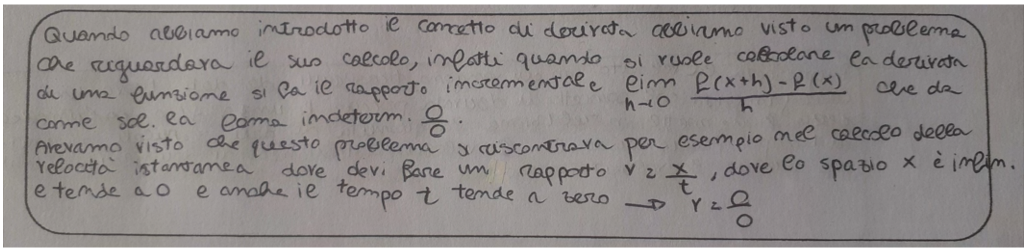
[1] Nella classe di controllo manca una domanda, ossia la 11c, in quanto al momento della somministrazione del test non aveva ancora affrontato la nozione di differenziale. La classe di controllo, seguendo l'ordine del libro di testo, aveva infatti concluso il capitolo sulle derivate omettendo però l'ultimo paragrafo riguardante il differenziale. Ho comunque riportato le risposte della classe sperimentale come dato per verificare le conoscenze.

Sebbene in questo caso i risultati non abbiano visto una grande quantità di risposte corrette, si può osservare come alcuni degli studenti della classe sperimentale abbiano colto il messaggio della lezione storica, potendo in questo modo raggiungere una comprensione più profonda del significato di derivata rispetto a coloro che hanno svolto il programma in maniera tradizionale, senza alcuna trattazione storica.
Dal questionario di gradimento, di cui di seguito verrà svolta un'analisi dettagliata, è stato inoltre rilevato come la parte storica sia stata trovata interessante solamente da 10 studenti su 19, dato che potrebbe spiegare anche il basso numero di risposte corrette alla domanda appena presa in esame.
Per incentivare l'uso della storia si potrebbe pensare ad un utilizzo più frequente di essa all'interno della matematica, in modo tale da convincere anche gli studenti più scettici di come essa possa rappresentare un'arma in più a loro favore per comprendere la ragione di alcuni ragionamenti matematici.
Di seguito riporto quindi le risposte più frequenti di entrambe le classi in modo tale da poter dare un'idea più chiara dei dati raccolti.



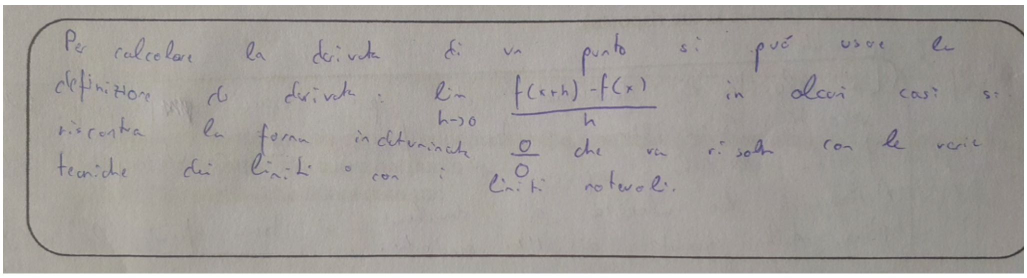
Leibniz, cercando di ricavare la tangente ad una curva nel punto C, immagina una secante passante per C e P e ricava la tangente avvicinando infinitesimamente P a C. Da qui arriva al concetto di derivata come il rapporto incrementale $\frac{dy}{dx}$. Non considerando il limite per x che tende a 0 di questo rapporto, però, si ha che per valori infinitesimi esso risulta essere $\frac{0}{0}$. Problema analogo può essere la determinazione della velocità istantanea.

Figura 5.21: Esempio di risposta corretta alla domanda 1 nella classe sperimentale.



Quando abbiamo introdotto il concetto di derivata abbiamo visto un problema che riguardava il suo calcolo, infatti quando si vuole calcolare la derivata di una funzione si fa il rapporto incrementale $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ che da come sol. la forma indeterm. $\frac{0}{0}$.
Avevamo visto che questo problema si riscontrava per esempio nel calcolo della velocità istantanea dove devi fare un rapporto $v = \frac{x}{t}$, dove lo spazio x è infin. e tende a 0 e anche il tempo t tende a zero $\to v = \frac{0}{0}$

Figura 5.22: Esempio di risposta corretta alla domanda 1 nella classe sperimentale.



Per calcolare la derivata di un punto si può usare la definizione di derivata: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ in alcuni casi si riscontra la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ che va risolta con le varie tecniche dei limiti o con i limiti notevoli.

Figura 5.23: Esempio di risposta errata alla domanda 1 nella classe sperimentale: *"Per calcolare la derivata di un punto si può usare la definizione di derivata con il limite: in ALCUNI casi si riscontra la forma indeterminata 0/0 che va risolta con le varie tecniche dei limiti o con i limiti notevoli."*

In Figura 5.23 si può osservare un altro errore frequente, ossia ritenere che la forma indeterminata sia legata al concetto di derivata solo in alcuni casi.

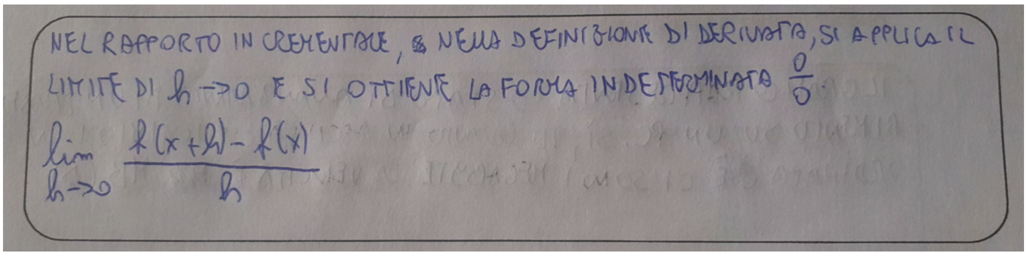


Figura 5.24: Risposta frequente alla domanda 1 nella classe di controllo: qui il rapporto 0/0 è visto solamente come una conseguenza dell'applicazione del limite.

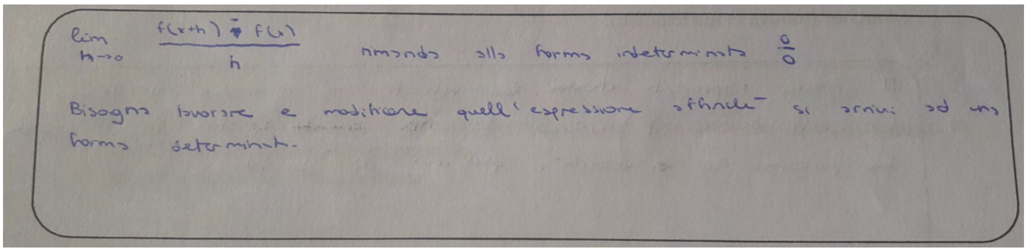


Figura 5.25: Altra risposta ricorrente nella classe di controllo: *"Il limite del rapporto incrementale rimanda alla forma indeterminata 0/0. Bisogna lavorare e modificare quell'espressione affinché si arrivi ad una forma determinata".*

Una più alta percentuale di errori è stata invece evidenziata nelle domande 7 e 8, in cui si andavano a proporre due esercizi di calcolo (Figura 5.26).

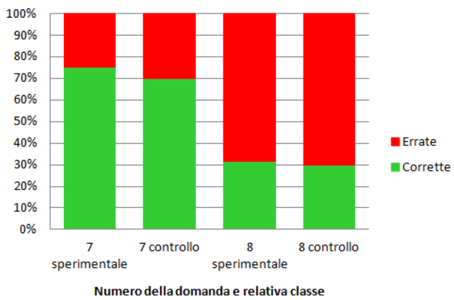
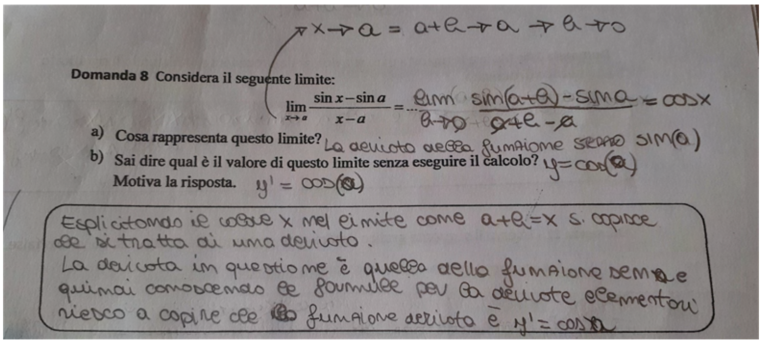


Figura 5.26: Risultati domande 7-8

I risultati ottenuti nelle due classi sono simili, tuttavia non brillanti in entrambi i casi.
Questo dato mostra la necessità di svolgere più esercizi durante il percorso, anche diversi da quelli solitamente proposti dai libri di testo, che spesso si limitano a puntare sullo svolgimento corretto dei calcoli.
La domanda 8 infatti, richiedeva un ragionamento in più a cui spesso gli studenti non sono abituati: vediamo allora a tal proposito le risposte più frequenti.



x → a = a+h → a → h → 0

Domanda 8 Considera il seguente limite:

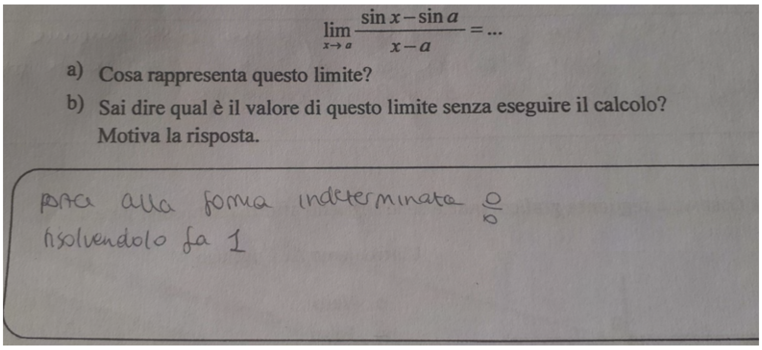
$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \ldots \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{a+h-a} = \cos x$$

a) Cosa rappresenta questo limite? La derivata della funzione seno sin(a)

b) Sai dire qual è il valore di questo limite senza eseguire il calcolo? y = cos(a)
Motiva la risposta. y' = cos(a)

Esplicitando il valore x nel limite come a+h=x si capisce che si tratta di una derivata.
La derivata in questione è quella della funzione seno e quindi conoscendo le formule per le derivate elementari riesco a capire che la funzione derivata è y' = cos a

Figura 5.27: Esempio di risposta corretta alla domanda 8.



$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \ldots$$

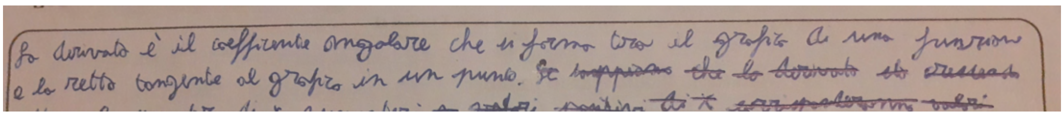
a) Cosa rappresenta questo limite?

b) Sai dire qual è il valore di questo limite senza eseguire il calcolo?
Motiva la risposta.

porta alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$
risolvendolo fa 1

Figura 5.28: Errore più frequente alla domanda 8.

Per quanto riguarda poi la domanda 4, in cui veniva richiesto di descrivere un fenomeno reale in termini matematici, tutti gli allievi della classe sperimentale e 12 allievi della classe di controllo hanno individuato il legame tra la velocità e la derivata prima. Tuttavia in entrambe le classi non sono mancate imprecisioni da un punto di vista lessicale. Una nota generale riscontrata infatti sia nelle risposte, sia nelle interrogazioni, è la mancanza molto spesso di un linguaggio preciso, che porta a commettere errori nonostante magari i concetti siano stati appresi in modo chiaro (un esempio di ciò è riportato in Figura 5.29 in cui nella domanda 10b sembra che il coefficiente angolare sia ritenuto impropriamente dallo studente un angolo).
In questo senso potrebbe essere opportuno fare degli esercizi mirati su definizioni, teoremi, dimostrazioni, precisando il rigore che essi richiedono.



La derivata è il coefficiente angolare che si forma tra il grafico di una funzione e la retta tangente al grafico in un punto. Se

Figura 5.29: Esempio di linguaggio improprio nella risposta 10b data da uno studente della classe sperimentale: *"La derivata è il coefficiente angolare che si forma tra il grafico di una funzione e la retta tangente al grafico in un punto"*.

Per poter avere un bilancio generale su tutta la sperimentazione, ho infine somministrato un **questionario di gradimento**. Lo scopo era quello di avere un feedback degli studenti, sia per vedere i punti di forza e quelli migliorabili del progetto, sia per mettere in relazione questi alle competenze raggiunte, in modo tale da poter

disegnare un quadro complessivo il più completo possibile.
Il questionario di gradimento è stato somministrato alla classe sperimentale subito dopo il questionario finale, dunque gli allievi presenti erano ancora 19 su 20.
Di seguito andiamo allora a vedere le risposte date.

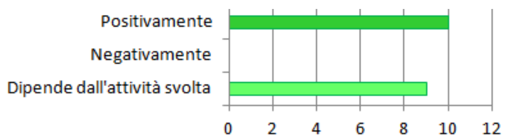


Figura 5.30: A conclusione di queste attività come giudichi l'esperienza?

Nel complesso nessuno studente ha valutato negativamente il progetto svolto: in particolare 10 studenti hanno avuto un giudizio positivo su tutte le lezioni proposte e 9 hanno mostrato una preferenza su singole attività. In particolare in Figura 5.31 sono riportate le diverse attività e le relative preferenze degli allievi (la risposta non era limitata a una singola scelta e ciascuno studente poteva segnare più di una risposta).

Figura 5.31: Quali delle seguenti attività hai preferito?

Come si può notare dalla Figura 5.31, l'attività che ha ricevuto un maggior numero di preferenze è stato l'approfondimento legato a fisica e realtà, testimonianza del fatto che gli studenti sono incuriositi a scoprire i collegamenti con il mondo che ci circonda, spesso non affrontati dai libri di testo.

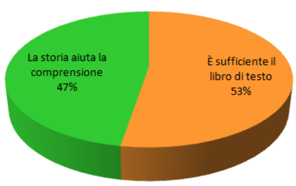


Figura 5.32: "L'approccio storico iniziale è stato utile per comprendere e contestualizzare meglio l'argomento?"

Solamente 3 studenti su 19 hanno invece preferito la lezione storica e l'approfondimento teorico sui numeri iperreali, dato emerso anche dalla domanda 4 (Figura 5.32), nella quale meno del 50% ha ritenuto l'approccio storico utile alla comprensione degli argomenti. Uno studente ha anche specificato che *"l'approccio storico è interessante ma non aiuta la comprensione dell'argomento"*, fatto che, come già accennato precedentemente, si è mostrato però in contraddizione con gli esiti del questionario finale, in cui si è vista una conoscenza più approfondita e corretta da parte di coloro che avevano studiato la storia e si erano soffermati su essa.

L'utilizzo di GeoGebra ha avuto gli esiti previsti: gli studenti infatti, oltre ad aver apprezzato l'attività, considerata la preferita da ben 9 di loro (Figura 5.31), sono stati aiutati nella visualizzazione dei concetti, nello svolgimento degli esercizi e solo una piccola parte di loro (per la precisione 5 su 19) non userebbe più il software in futuro (si vedano i grafici in Figura 5.33 e 5.34).

Figura 5.33: "Cosa puoi dire dell'utilizzo del software GeoGebra nello studio delle derivate?"

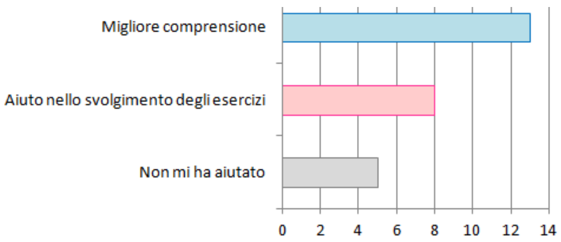
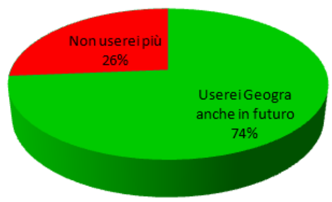
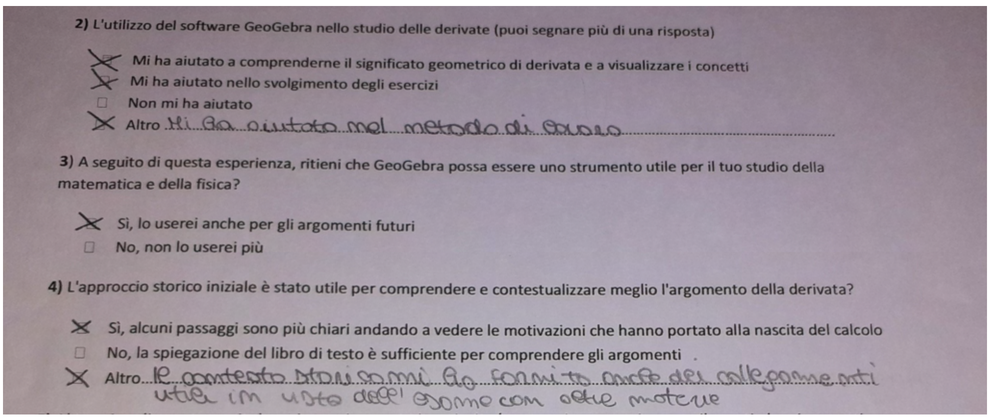


Figura 5.34: "A seguito di questa esperienza, ritieni che GeoGebra possa essere uno strumento utile per il tuo studio della matematica e della fisica?"



In figura 5.35 emergono poi altre considerazioni che vale la pena evidenziare: tale risposta alla domanda 4 mette in luce infatti un ulteriore aspetto, ossia la possibilità di collegare la matematica ad altre materie e quindi un modo per ampliare le conoscenze, mostrando le possibili interconnessioni degli argomenti studiati a scuola. Inoltre viene fatto presente come il lavoro con GeoGebra abbia fornito in alcuni anche un *nuovo metodo di lavoro* per affrontare lo studio.



2) L'utilizzo del software GeoGebra nello studio delle derivate (puoi segnare più di una risposta)

X Mi ha aiutato a comprenderne il significato geometrico di derivata e a visualizzare i concetti
X Mi ha aiutato nello svolgimento degli esercizi
☐ Non mi ha aiutato
X Altro Mi ha aiutato nel metodo di studio

3) A seguito di questa esperienza, ritieni che GeoGebra possa essere uno strumento utile per il tuo studio della matematica e della fisica?

X Sì, lo userei anche per gli argomenti futuri
☐ No, non lo userei più

4) L'approccio storico iniziale è stato utile per comprendere e contestualizzare meglio l'argomento della derivata?

X Sì, alcuni passaggi sono più chiari andando a vedere le motivazioni che hanno portato alla nascita del calcolo
☐ No, la spiegazione del libro di testo è sufficiente per comprendere gli argomenti
X Altro Il contesto storico mi ha fornito anche dei collegamenti utili in vista dell'esame con altre materie

Figura 5.35: "Altre considerazioni riguardo l'utilità dell'approccio storico e dell'uso di GeoGebra".

Si riportano infine alcune fra le risposte più significative degli studenti alle ultime domande del questionario di gradimento, ovvero:

- **Cosa ti è rimasto maggiormente impresso di queste attività svolte?**

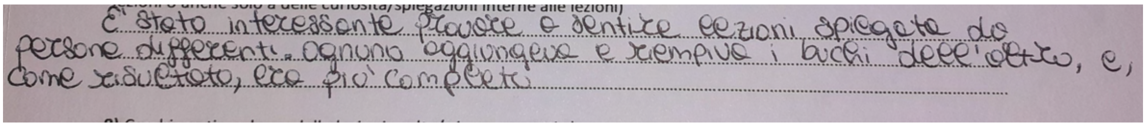


Figura 5.36: "È stato interessante provare a sentire lezioni spiegate da persone differenti. Ognuno aggiungeva e riempiva i buchi dell'altro e era più completo."

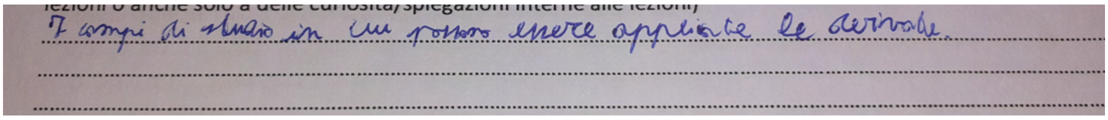


Figura 5.37: "I campi in cui possono essere applicate le derivate."

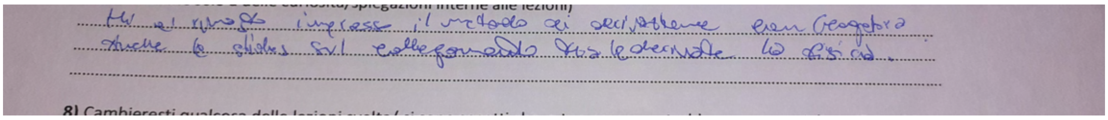


Figura 5.38: "Mi è rimasto impresso il metodo di derivazione con GeoGebra. Anche le slides sul collegamento tra derivate e fisica."

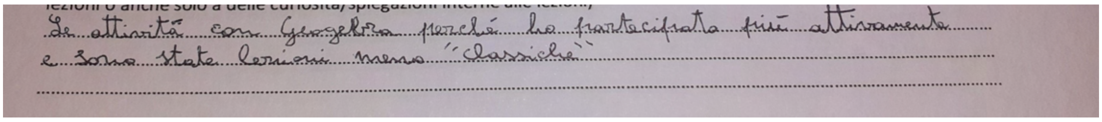


Figura 5.39: "Le attività con GeoGebra perché ho partecipato più attivamente e sono state lezioni meno classiche."

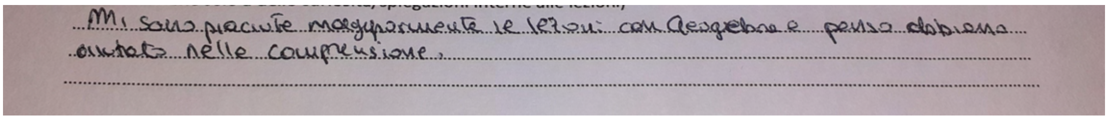


Figura 5.40: "Mi sono piaciute maggiormente le lezioni con GeoGebra e penso abbiano aiutato nella comprensione."

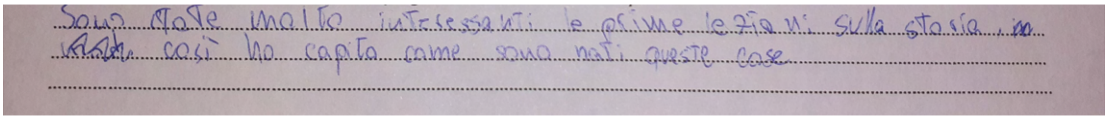


Figura 5.41: "Sono state molto interessanti le prime lezioni sulla storia così ho capito come sono nate queste cose."

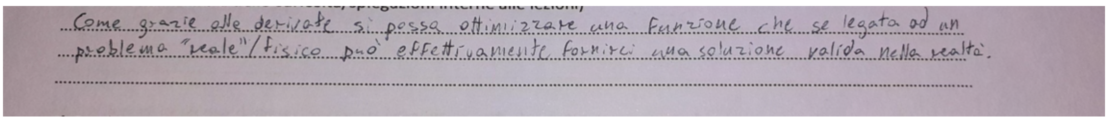


Figura 5.42: "Come grazie alle derivate si possa ottimizzare una funzione che se legata ad un problema "reale"/fisico può effettivamente fornirci una soluzione valida nella realtà."

- **Cambieresti qualcosa delle lezioni svolte/ ci sono aspetti che, a tuo parere, potrebbero essere migliorati?**

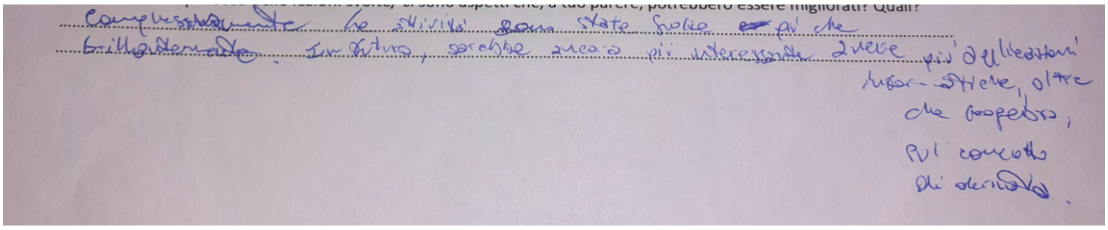


Figura 5.43: "Complessivamente le attività sono state svolte più che brillantemente. In futuro, sarebbe ancora più interessante avere più applicazioni informatiche, oltre che GeoGebra, sul concetto di derivata."

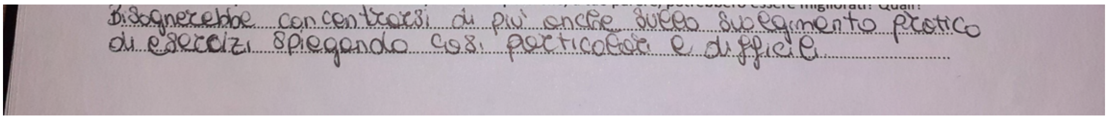


Figura 5.44: "Bisognerebbe concentrarsi di più anche sullo svolgimento di esercizi spiegando casi particolari e difficili."

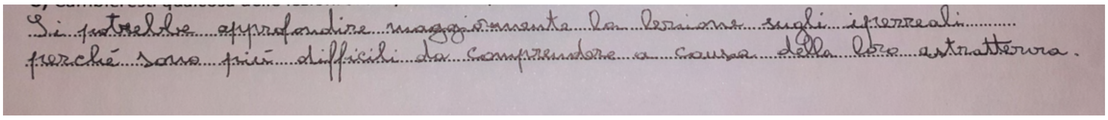


Figura 5.45: "Si potrebbe approfondire maggiormente la lezione sugli iperreali perché sono più difficili da comprendere a causa della loro astrattezza."

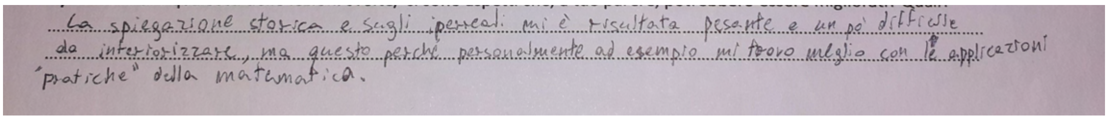


Figura 5.46: "La spiegazione storica e sugli iperreali mi è risultata pesante e un po' difficile da interiorizzare, ma anche perché personalmente ad esempio mi trovo meglio con le applicazioni "pratiche" della matematica."

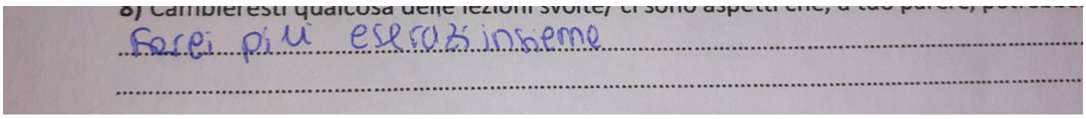


Figura 5.47: "Farei più esercizi insieme."

5.3 Osservazioni e riflessioni finali

Nel complesso possiamo affermare che il progetto di sperimentazione didattica si è rivelato efficace. I risultati conseguiti nel questionario finale e i dati in generale raccolti hanno restituito l'immagine di una classe che ha appreso i contenuti dell'unità didattica e ha sviluppato delle competenze centrali per il proseguimento del percorso scolastico.

Sicuramente molto positive si sono rivelate le osservazioni effettuate durante l'attività laboratoriale, attività che ha favorito l'apprendimento degli studenti, come si può vedere dai risultati emersi al questionario finale. Possiamo quindi dire che la seconda domanda di ricerca che ci eravamo posti, ossia se il software di geometria dinamica potesse aiutare nell'insegnamento e apprendimento dell'analisi matematica, ha avuto una risposta più che positiva: il software infatti, oltre ad aumentare la motivazione negli allievi, ha permesso loro di visualizzare i concetti, favorendo la risoluzione di quesiti anche leggermente diversi da quelli tradizionalmente proposti dal libro di testo.
In relazione alla terza domanda di ricerca, possiamo poi dire come in questo progetto si sia rivelata fondamentale la contestualizzazione della matematica nella realtà. Oltre ad essere stato uno dei punti maggiormente apprezzati dagli studenti, la contestualizzazione nel mondo reale ha permesso di visualizzare in modo concreto dei concetti che nel libro di testo sembravano totalmente slegati dalla vita quotidiana.
Per quanto riguarda invece la prima domanda, ossia il ruolo svolto dall'approccio storico, possiamo ritenerci soddisfatti solo parzialmente. Nel complesso infatti non possiamo dire che tale attività abbia aumentato la motivazione dei ragazzi: solo pochi di loro hanno ritenuto le nozioni utili e interessanti, opinione riscontrata anche riguardo la lezione di approfondimento sugli iperreali, nonostante alcuni studenti abbiano espresso il desiderio di maggior approfondimento della suddetta parte (si vedano le Figure 5.45 e 5.46). D'altro canto, per motivi tempistici, è difficile portare in classe un maggior approfondimento di tale argomento, che comunque ricordiamo voleva solo presentarsi come uno spunto di riflessione per gli studenti, nonché un modo per mostrare loro come lo sviluppo del pensiero matematico porti a risultati fondamentali. Nonostante nel complesso questa parte iniziale non sia stata particolarmente apprezzata, possiamo però vederne i risultati da un punto di vista contenutistico, in quanto nel questionario finale è evidente la miglior preparazione di coloro che hanno affrontato lo studio di questi approfondimenti.
Esiti non brillanti sono stati invece rilevati negli esercizi di calcolo più complessi, per i quali in futuro potrebbero essere pensate delle ulteriori attività da poter poi inglobare nel progetto.

Va comunque tenuto presente che la sperimentazione è stata svolta su un piccolo campione di studenti, di conseguenza non è stato possibile valutare il progetto nelle molteplici realtà scolastiche esistenti.
Sarebbe interessante allargare la sperimentazione ad indirizzi di studio differenti, al fine di verificare se le conclusioni cui si giunge sono le medesime: un esempio interessante che mi sentirei di proporre è quello di presentare tale progetto in un liceo a indirizzo umanistico, ad esempio un liceo classico, per vedere se in questo

ambiente può essere maggiormente apprezzato l'approccio storico e per constatare se tale apprezzamento potrebbe portare, da un lato ad un avvicinamento alla materia, spesso presa poco in considerazione dagli studenti di tali indirizzi, dall'altro a una miglior comprensione della stessa.

Conclusioni

Il lavoro svolto in questa tesi può essere essenzialmente suddiviso in tre parti, che presentano come comune denominatore l'argomento da cui è partita questa ricerca, ossia il calcolo infinitesimale e, in particolare, lo sviluppo del concetto di derivata nell'Analisi Matematica.
Le prime due parti vogliono essere una sorta di impalcatura matematica a partire dalla quale poter andare a sviluppare un progetto didattico, che occupa la terza parte di questa tesi e che ho implementato in prima persona in una classe quinta Liceo Scientifico indirizzo Scienze Applicate del Liceo E. Fermi di Padova.

Inizialmente è stata studiata la nascita del calcolo infinitesimale, creazione contesa tra due grandi matematici, Newton e Leibniz, dei quali sono state viste nel dettaglio le opere principali. Si è visto in particolare come entrambi riuscirono contemporaneamente e indipendentemente a elaborare le basi del calcolo differenziale, fatto che abbiamo visto non deve stupire il lettore, in quanto l'introduzione del concetto di funzione e i principali problemi scientifici del Seicento avevano rappresentato un terreno fertile per questo tipo di costruzione.
Abbiamo però osservato come i matematici inizialmente fossero più interessati a capire e a sfruttare la potenza degli strumenti in loro possesso, piuttosto che a chiarire la definizione degli strumenti stessi: in questo modo strumenti e concetti dell'analisi sono stati creati ed usati per anni pur in presenza di problemi che oggi definiremo fondazionali [50]. Un esempio di ciò lo abbiamo visto nell'uso degli infinitesimi fatto da Leibniz e Newton, problema ampiamente criticato e portato alla piena soluzione solamente nell'Ottocento con Weierstrass, a seguito di profondi tentativi di portare rigore all'interno dell'analisi.
Con l'ottica di portare in classe questa questione di fondamentale importanza sull'uso degli infinitesimi, si è voluto poi continuare con un approfondimento sul ruolo che questi ebbero negli anni successivi, tramite uno sguardo a quella che ora viene definita Analisi Non Standard, ossia il risultato del processo di ricostruzione logica dell'Analisi ad opera del matematico Abraham Robinson, il quale, con l'introduzione dei numeri iperreali, trovò un modo per rendere rigoroso l'uso degli infinitesimi introdotto da Leibniz.
Infine, prima di descrivere nei dettagli il progetto didattico, ho sottolineato l'importanza del ruolo del calcolo infinitesimale in ambito disciplinare e all'interno delle Indicazioni Nazionali/Linee Guida, proponendo una breve trattazione delle questioni didattico-metodologiche relative a un'introduzione efficace del concetto di derivata nella scuola secondaria di secondo grado.

Il progetto, le cui domande di ricerca trovano la loro origine proprio all'interno delle questioni didattiche approfondite all'interno del Capitolo 3, vuole infatti proporre un approccio al concetto di derivata a scuola.
In particolare, ho inizialmente scelto di presentare agli studenti un'introduzione storica, nella quale discutere della scoperta e dello sviluppo del calcolo, facendo così loro conoscere, previa un'adeguata trasposizione didattica, i tratti salienti dei primi due Capitoli di questa tesi. Il progetto è poi continuato, per la durata complessiva di due mesi, alternando lezioni frontali ad attività in laboratorio di informatica con l'uso del software GeoGebra e ad attività collettive con lavori di gruppo.
Complessivamente, la sperimentazione didattica si è rivelata efficace.
I dati raccolti attraverso i questionari conclusivi e le osservazioni svolte nel corso del progetto hanno evidenziato un aumentato interesse degli studenti nei confronti dell'argomento e una maggiore consapevolezza sull'importanza della matematica nella vita di tutti i giorni.
In particolare è emerso l'interesse degli studenti per la contestualizzazione del concetto di derivata nel mondo reale, mettendo in luce come le applicazioni si rivelino essenziali nel dare un senso sociale all'attività matematica. Naturalmente l'insegnante deve tenere presente che l'analisi non è riducibile ad una collezione di sole applicazioni, che non possono sostituire la teoria e da sole non garantiscono nemmeno l'applicabilità dei concetti. [50]
Al termine della sperimentazione gli stessi studenti sembrano aver poi riconosciuto le potenzialità e i vantaggi dell'utilizzo del software di matematica dinamica GeoGebra per visualizzare i concetti e approcciarsi agli esercizi di analisi matematica, sfatando un po' il mito che lega l'uso di tale software solo alla geometria.
L'uso di Geogebra ha per esempio permesso la quasi completa eliminazione di misconcezioni legate al concetto di tangente, di cui quasi tutti gli allievi possedevano delle *concept images* e *concept definitions* errate.
È infine emerso che l'uso della storia, se pur non ritenuto particolarmente interessante dalla maggior parte della classe, ha portato in alcuni studenti una comprensione più approfondita degli argomenti. Questo risultato potrebbe essere indice della necessità di incentivare l'uso della storia all'interno dell'insegnamento della matematica: in tal senso l'insegnante potrebbe pensare ad un utilizzo più frequente di essa all'interno delle sue lezioni, in modo tale da convincere anche gli studenti più scettici di come essa possa rappresentare un'arma in più a loro favore per comprendere la ragione di alcuni fondamentali ragionamenti matematici.
Alla luce di questi dati, possiamo quindi affermare che la sperimentazione, se pur migliorabile (ad esempio con l'aggiunta di attività mirate allo svolgimento di esercizi di calcolo, in cui a fine sperimentazione sono state rilevate delle difficoltà), ha avuto un esito positivo, portando in generale a dei miglioramenti. Lo stesso docente della classe, il professor Giuseppe Zampieri, si è mostrato soddisfatto dello svolgimento della sequenza didattica, avendo potuto apprezzare un livello di partecipazione da parte degli studenti superiore rispetto alla media usuale della classe.

Vorrei infine concludere questo elaborato con una riflessione di carattere personale. Questo progetto infatti, non mi ha solamente permesso di raccogliere dati utili per le mie ricerche per lo sviluppo di questa tesi, ma è stato anche un modo per mettermi in gioco in prima persona e per sperimentare il lavoro che spero a breve entrerà stabilmente a far parte della mia vita, ossia l'insegnamento.
Questo progetto mi ha dato infatti la conferma di come l'insegnamento non sia per me una semplice professione, bensì rappresenti uno scambio continuo di ragionamenti e punti di vista con gli studenti, scambio che diventa un arricchimento non solo per loro, ma anche per noi docenti, andando in questo modo ben oltre quella che può essere una semplice spiegazione teorica.
È anche in quest'ottica che ho scelto le due citazioni introduttive a questa tesi.
La prima, dell'illustre matematico Carl Friedrich Gauss, *"La matematica è la regina delle scienze"*, vuole essere un omaggio alla matematica che, in tutte le sue sfaccettature, è stata per me in questi anni molto di più di una disciplina, con la speranza di contribuire nel mio piccolo a sradicare l'opinione, spesso comune tra gli studenti, secondo la quale essa sarebbe una materia complessa e poco utile.
Per testimoniare agli studenti la sua utilità sono sufficienti dei banali esempi di vita quotidiana e anche il progetto di questa tesi ha cercato di dare dei contributi in questo senso.
Per quanto riguarda invece la complessità, non credo, né tanto meno voglio convincere gli studenti, che la matematica sia una disciplina semplice, ma vorrei cercare di mostrare loro come il fascino della matematica molto spesso risieda proprio nelle difficoltà che può presentare, ma che non sono mai insuperabili.
La seconda citazione è del fisico Albert Einstein, il quale, pur non essendo un pedagogista, parla dell'insegnamento, descrivendolo come *"l'arte suprema"* in grado di *"risvegliare la gioia della creatività e della conoscenza"*.
Dunque queste due citazioni rappresentano due passioni, che sono state il motore di questa tesi e delineano per me due punti fermi: il primo, che già è presenza stabile nella mia vita, ossia *la matematica*, il secondo, che spero entrerà a farne parte presto, ovvero *l'insegnamento*.

Appendice A

Materiali utilizzati per il progetto

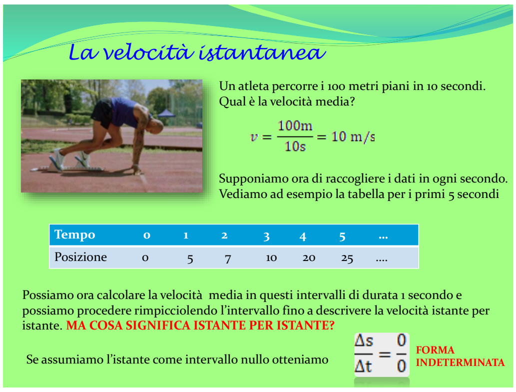
La presente Appendice raccoglie i materiali utilizzati nel corso della sperimentazione presso la classe quinta A Scienze Applicate del Liceo Scientifico E.Fermi di Padova.
Per consultare il *Questionario iniziale*, il *Questionario finale* e il *Questionario di gradimento* si rimanda al Capitolo 5 in cui è stata fatta una valutazione di preconoscenze e risultati ottenuti.

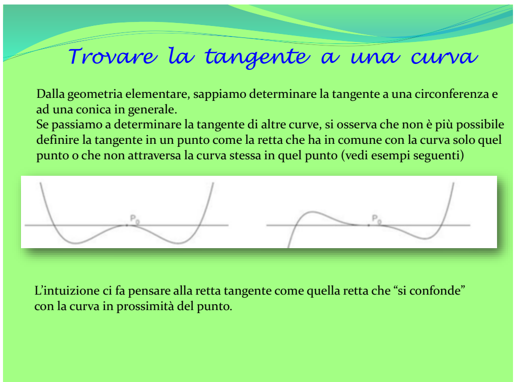
In ordine è possibile consultare i seguenti file:

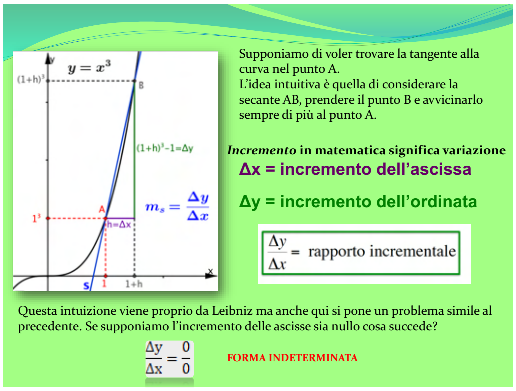
- *Presentazione Power Point di introduzione storica* utilizzato per la prima attività;
- *Presentazione Power Point su infinitesimi e iperreali* utilizzato per la seconda attività;
- *Scheda di lavoro*, utilizzata per l'attività laboratoriale con GeoGebra;
- *Presentazione Power Point per l'introduzione all'ottimizzazione*;
- *Presentazione Power Point per la contestualizzazione delle derivate in fisica*;
- *Scheda di lavoro* con attività da svolgere con il software, lasciate agli studenti e corrette a coppie in classe;

Seguono i file indicati in precedenza, secondo l'ordine in cui sono stati presentati.

Presentazione: Introduzione storica







Ma facciamo un passo indietro e vediamo allora come hanno affrontato questi problemi Newton e Leibniz

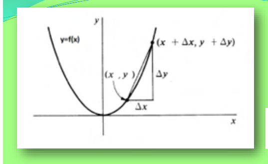
•**Gottfried Wihelm Von Leibniz** nacque a Lipsia nel 1656 e morì ad Hannover nel 1716.

•Studiò non solo matematica, ma anche filosofia, teologia, legge. Nel 1673 visitò Londra, dove fu accusato di aver letto gli scritti di Newton.

•Diede un grosso contributo alla notazione matematica e mise a punto le idee del calcolo che usiamo ancora oggi.

Leibniz risolve il problema della retta tangente lavorando con gli **incrementi infinitesimi,** ossia incrementi infinitamente piccoli non nulli. Chiamò *dx* e *dy* le minime differenze possibili (differenziali) di x e y.

Cerchiamo allora di ripercorrere il metodo di Leibniz

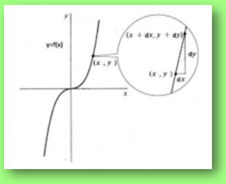


Consideriamo una funzione y=f(x) regolare in ogni suo punto (x,y).
Incrementiamo x di Δx, ottenendo un corrispettivo aumento della variabile y che risulta $\Delta y=f(x+\Delta x) - f(x)$.
Tracciamo la secante passante per (x,y) e $(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è il coefficiente angolare della secante che approssima quello della tangente per Δx sempre più piccoli

Per passare da un'approssimazione alla tangente supponiamo di porre un microscopio sulla funzione nel punto (x,y).
La curva qui è indistinguibile dalla sua tangente

Per tratti infinitesimi la curva è rettilinea.
Ora poniamoci nell'ingrandimento e ripetiamo l'operazione precedente con un incremento infinitesimo dx.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

con dx infinitesimo

Per dx troviamo vari nomi:
- **differenza fra due valori infinitamente vicini**
- **differenza infinitesima;**
- **differenziale**

Esempio di calcolo alla Leibniz del coefficiente angolare della retta tangente in un punto di coordinate (x,y) di una parabola

$$dy = f(x+dx) - f(x)$$
$$per\ y = x^2$$
$$dy = (x+dx)^2 - x^2$$
$$dy = x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2$$
$$dy = 2xdx + (dx)^2$$
$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$$

Per il principio di Estensione con gli infinitesimi si possono applicare le regole aritmetiche dei numeri reali

dx trascurabile rispetto a 2x e lo annulla

• **Isaac Newton** nasce il 4 Gennaio 1643 (25 Dicembre 1642 secondo il calendario Giuliano) e muore il 31 Marzo 1727.

•Nel 1655 si ritira nel suo paesino di campagna a causa della diffusione della peste e fa le sue principali scoperte

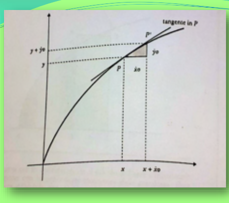
Formula di binomio

Calcolo differenziale

Legge di gravitazione universale

Teoria dei colori (legge di riflessione/ rifrazione)

Newton concepiva le grandezze geometriche come generate da un moto continuo, per esempio una curva è concepita come generata dal moto continuo di un punto.
Le grandezze così generate sono chiamate da Newton "**fluenti**" o "quantità che scorrono" e rappresentano le funzioni che dipendono dalla variabile temporale.
Le loro velocità istantanee sono invece dette "**flussioni**".



o intervallo infinitamente piccolo
$\dot{x}$ $\dot{y}$ flussioni
$o\dot{x}$ $o\dot{y}$ momenti (corrispondono ai differenziali dx dy di Leibniz)

Il calcolo Newtoniano è sostanzialmente analogo e usa le stesse regole per gli infinitesimi usate da Leibniz.
Egli ha però una concezione meccanica della geometria, considerando le variabili come grandezze il cui valore aumenta in continuità e quindi l'equazione della curva come traiettoria di un punto.

Restano però delle domande

Perché Newton e Leibniz eliminano le quantità infinitesime se di fatto non sono nulle?

Quali regole seguono gli infinitesimi?

Non mancarono però le critiche

Jonathan Swift (1667-1745) nel terzo libro dei viaggi di Gulliver descrive un'accademia in cui Newton viene aspramente criticato per elaborare teorie incomprensibili.

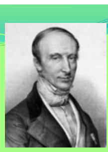
Dure critiche arrivarono da l vescovo e filosofo **George Berkeley** (1685-1753), il quale nel saggio "*The Analyst* -a Discourse addressed to an Infidel Mathematician" del 1734 definì gli infinitesimi come "**ghost of departed quantities**" ossia "fantasmi di quantità defunte".

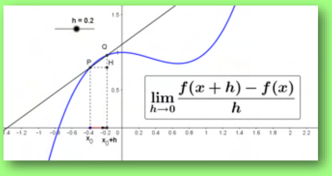
$$\frac{2xdx + (dx)^2}{dx} = 2x + dx = 2x$$

Qui dx diverso da zero

Qui dx uguale a zero

Una svolta la si ebbe con **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857), il quale affrontò il problema ridefinendo il coefficiente angolare della retta tangente (la **derivata**) attraverso il concetto di limite (concetto che verrà formalizzato completamente con i matematici Bernard Bolzano (1781-1848) e Karl Weierstrass (1815-1897) con la definizione epsilon-delta)





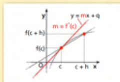
Il procedimento è simile al precedente, ma al posto dell'infinitesimo dx, ora abbiamo un numero reale h che tende a zero. **Nasce così il calcolo *differenziale* o calcolo *infinitesimale***

Giungiamo così alla definizione moderna di derivata

DEFINIZIONE

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, la **derivata della funzione** nel punto c interno all'intervallo, che indichiamo con $f'(c)$, è il limite, se esiste ed è *finito*, per h che tende a 0, del rapporto incrementale di f relativo a c:

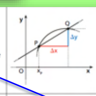
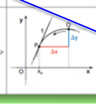
$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$



La derivata di una funzione in un punto c rappresenta il **coefficiente angolare m della retta tangente** al grafico della funzione nel suo punto di ascissa c.

Rappresenta la pendenza della secante

Rappresenta la pendenza della tangente e indica la **rapidità di variazione**

Rapporto incrementale		$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Coefficiente angolare della **secante** al grafico della funzione nei punti P e Q
Derivata in x_P		$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$	Coefficiente angolare della **tangente** al grafico della funzione nel punto P

Le Notazioni

Usata tutt'oggi

Simbolo Per la derivata di $y = f(x)$	Autore
$y' = f'(x)$	Lagrange (1736 - 1813)
$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$	Leibniz (1646 - 1716)
$Df(x)$	Eulero (1707 – 1783)
$\dot{y}$	Newton (1642–1727)

Ora usata in fisica

Ma allora gli infinitesimi sono stati solo un' "invenzione" di Leibniz e la definizione di derivata con gli infinitesimi è del tutto sbagliata?

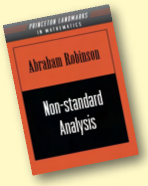
NO!

Nella prossima lezione vedremo come nel '900 il matematico Abraham Robinson (1918 - 1974) trovò un modo per rendere rigoroso l'uso degli infinitesimi e capiremo meglio cosa siano questi infinitesimi.

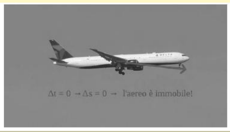
Presentazione: La rinascita degli infinitesimi

LEZIONE 2

La rinascita degli INFINITESIMI



Riprendiamo da una foto che potrebbe sembrare un paradosso ...



L'aereo in foto sembra immobile, sospeso a mezz'aria, eppure questa foto è stata scattata mentre l'aereo era in fase di atterraggio, quindi ad una velocità di circa 200 km/h.

Secondo te com'è possibile che questa foto appaia così nitida e ferma nonostante la velocità dell'aereo?

Un fotografo risponderebbe: *è una foto istantanea*!

Qual è la misura di un istante?

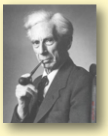
Un istante è una quantità impercettibile.
Per una foto è facile verificare che un istante non è nullo: in fotografia l'istante prende il nome di tempo di esposizione, coincide circa con 1/800 di secondo, tempo piccolissimo, a cui corrisponde uno spostamento di pochi centimetri, impercettibile per il cervello umano. Per questo motivo il nostro occhio non percepisce il movimento, ma ciò non toglie però che 1/800 sia diverso da zero.

Se un istante fosse nullo avremmo **Δt=0**, ma in un tempo uguale a zero lo spostamento è anch'esso nullo e la velocità diventerebbe una forma indeterminata:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0}{0}$$

Newton e Leibniz trovarono una soluzione al problema supponendo che l'istante non fosse nullo, bensì infinitesimo, quindi piccolissimo: $v = \frac{ds}{dt}$

Abbiamo visto però come la mancanza di regole precise nel procedimento di Newton e Leibniz non passò inosservata e fu oggetto di diverse critiche.
Nell'Ottocento Cauchy e Weierstrass rifondarono il calcolo sul concetto di limite, dimenticando così gli infinitesimi.

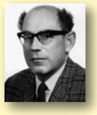


Il logico matematico **Bernard Russel** (1872-1970) scrisse:

"Gli infinitesimi [. . .] devono essere considerati non necessari, erronei e auto-contraddittori."

La logica sembrerebbe dunque aver dato il colpo di grazia agli infinitesimi, ma è la logica stessa a farli rinascere.

Il logico matematico **Abraham Robinson** (1918-1974) riprese gli infinitesimi, definendoli e formalizzandone in modo rigoroso il calcolo.
Robinson diede vita all'Analisi non standard.



Ma allora cosa sono questi infinitesimi?

Fin'ora abbiamo capito che gli infinitesimi sono delle quantità piccolissime, che Leibniz usa per lavorare con incrementi piccolissimi.

Non sappiamo ancora se questi infinitesimi siano dei veri e propri numeri, per adesso supponiamo lo siano e proviamo a darne una definizione.

Un ***infinitesimo positivo*** *è un numero ε tale che $0 < \varepsilon < r$ per ogni r numero reale positivo non nullo.*
Un ***infinitesimo negativo*** *è un numero δ tale che $-r<-\delta < 0$ per ogni r numero reale positivo non nullo.*

Ma questi infinitesimi sono davvero dei numeri intesi come li conosciamo?
Li possiamo inserire dentro a questo insieme?

Che un infinitesimo non possa essere un numero naturale è evidente ...
ma può essere un numero reale?

$\{0 < \boldsymbol{\varepsilon} < 1\}$ Un tale ε reale esiste?

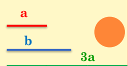
$\{0 < \boldsymbol{\varepsilon} < 1,\ 0 < \boldsymbol{\varepsilon} < 1/2\}$ Un tale ε reale esiste?

$\{0 < \boldsymbol{\varepsilon} < 1,\ 0 < \boldsymbol{\varepsilon} < 1/2,\ 0 < \boldsymbol{\varepsilon} < 1/3\}$ Un tale ε reale esiste?

$0 < \varepsilon \quad \varepsilon < 1 \quad \varepsilon < \frac{1}{2} \quad \varepsilon < \frac{1}{4} \quad \cdots \quad \varepsilon < \frac{1}{n}$ ... Un tale ε reale esiste?

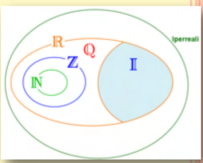
Ricordiamo che i numeri reali soddisfano il principio di Archimede

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+ \forall b \in \mathbb{R}^+ a < b \implies \exists m \in \mathbb{N} : ma > b}$$



Evidentemente la risposta alla domanda precedente è **NO!!**
GLI INFINITESIMI NON SONO NUMERI REALI!

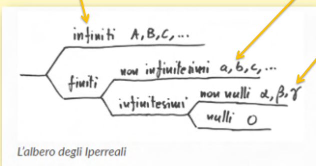
Attraverso la logica matematica si può però dimostrare che si possono estendere i numeri reali e considerare così dei nuovi numeri, in cui i reali sono contenuti, ma in cui ritroviamo anche queste quantità infinitesime.



La struttura matematica in cui esistono gli infinitesimi prende il nome di Insieme di *Numeri iperreali.*
Per un principio detto **principio di Estensione** nell'insieme dei numeri iperreali valgono le proprietà algebriche e di ordinamento che valgono nei reali.

I reciproci degli infinitesimi.
Un infinito positivo è quindi un numero maggiore di qualunque numero reale.

I numeri reali



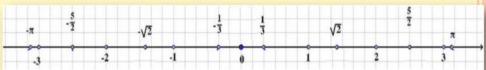
Infinitesimi positivi: ε tale $0 < \varepsilon < r$ per ogni r numero reale positivo non nullo.

Infinitesimi negativi δ tale che $-r < -\delta < 0$ per ogni r numero reale positivo non nullo.

I numeri iperreali possono rappresentarsi come somma di una parte reale e di una parte infinitesima, per esempio:

13+ε → 13+dx
Notazione di Leibniz

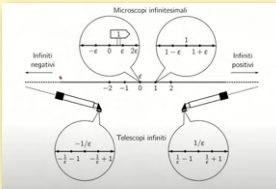
ATTENZIONE: Per visualizzare i numeri reali usiamo spesso la retta reale, ma dire che esistono dei numeri oltre ai reali non significa dire che nella retta reale ci siano dei "buchi"!!
Infatti sappiamo che i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti della retta reale, quindi tutti i punti della retta sono in qualche modo "già impegnati" con i numeri reali.



Rimane però un problema, *come facciamo allora a visualizzare i numeri iperreali?*

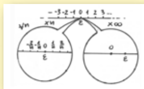
In qualche modo dobbiamo inventare un'altra retta che possieda altri punti oltre a quelli reali. Chiameremo questa retta con il nome di retta iperreale, ovvero una retta che oltre ai punti della retta reale ha anche altri punti che corrispondono agli infinitesimi e agli infiniti.

Ma come facciamo a vederli, dato che tutti i punti della retta sono già occupati a rappresentare i numeri reali? Abbiamo bisogno di **microscopi immaginari** che ci permettano di fare degli zoom sulla retta.



ATTENZIONE: Questa retta è solamente uno stratagemma che usiamo per visualizzare quantità che altrimenti non riusciremmo a vedere!
Teniamo sempre a mente che:
- La retta reale non ha "buchi"!
- I punti della retta reale sono in corrispondenza biunivoca con i numeri reali, non con i numeri iperreali, che noi vediamo attraverso ingrandimenti immaginari.

Noi vogliamo vedere numeri distanti da un certo numero x di un valore multiplo di 1/n e per farlo ci servono degli **strumenti immaginari**. →



Due numeri iperreali *b* e *c* sono **infinitamente vicini** se la loro differenza *c – b* è un infinitesimo, e in questo caso scriveremo $b \approx c$.
I numeri iperreali a distanza infinitesima da uno specifico numero iperreale *a* formano un insieme, chiamato **monade** di *a* e si indica con *Mon(a).*

Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino a uno e un solo numero reale e questo numero reale è definito **parte standard** del numero iperreale.

La parte standard di un numero iperreale a è denotata dal simbolo st(a).

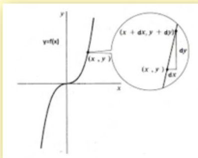
Esempi. Sia ε un infinitesimo:

- $3+\varepsilon$ è infinitamente vicino a 3 perché $(3+\varepsilon)-3=\varepsilon$ è infinitesimo:
$$\mathrm{st}(3+\varepsilon)=3$$
- $7+\varepsilon$ è infinitamente vicino a 7, ma anche a $7+2\varepsilon$ e a $7+\varepsilon^2$. Sia $7+\varepsilon$ che $7+2\varepsilon$ che $7+\varepsilon^2$ sono infinitamente vicini a 7 e a nessun altro numero reale:
$$\mathrm{st}(7+\varepsilon)=\mathrm{st}(7+2\varepsilon)=\mathrm{st}(7+\varepsilon^2)=7$$

Numero iperreale	parte standard	parte infinitesima
14-ε+ε^2	14	-ε+ε^2
2ε	0	2ε
97	97	0

Ora abbiamo un'idea più chiara di cosa sia un infinitesimo.
Riprendiamo dunque il ragionamento di Leibniz e vediamo come si riesce a formalizzare con i numeri iperreali.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$ **con dx infinitesimo**

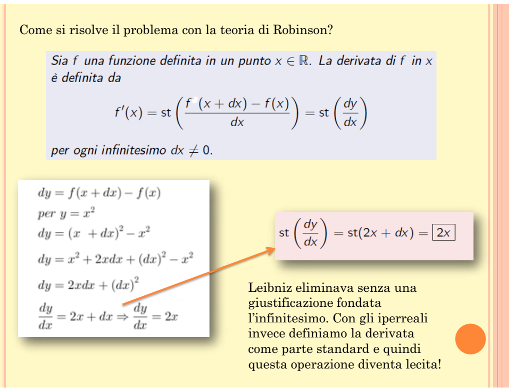


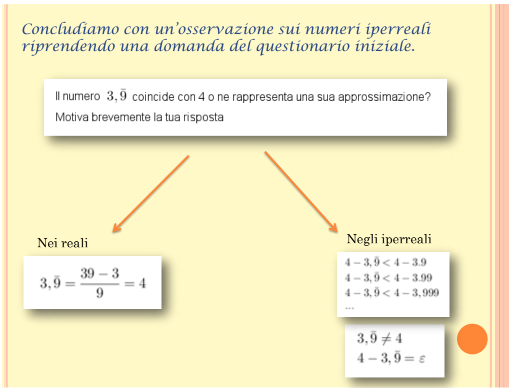
$$dy = f(x+dx) - f(x)$$
$$per\ y = x^2$$
$$dy = (x + dx)^2 - x^2$$
$$dy = x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2$$
$$dy = 2xdx + (dx)^2$$
$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$$

Leibniz considerava incrementi infinitesimi.

$$\frac{2xdx+(dx)^2}{dx} = 2x + dx = 2x$$

Qui dx diverso da zero   Qui dx uguale a zero

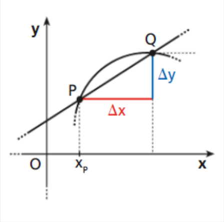
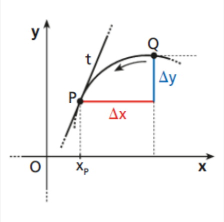

Come si risolve il problema con la teoria di Robinson?
Sia f una funzione definita in un punto $x \in \mathbb{R}$. La derivata di f in x è definita da
$f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{f\ (x+dx) - f(x)}{dx}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{dy}{dx}\right)$
per ogni infinitesimo $dx \neq 0$.
$dy = f(x+dx) - f(x)$
$per\ y = x^2$
$dy = (x\ + dx)^2 - x^2$
$dy = x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2$
$dy = 2xdx + (dx)^2$
$\frac{dy}{dx} = 2x + dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$
$\mathrm{st}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mathrm{st}(2x + dx) = \boxed{2x}$
Leibniz eliminava senza una giustificazione fondata l'infinitesimo. Con gli iperreali invece definiamo la derivata come parte standard e quindi questa operazione diventa lecita!

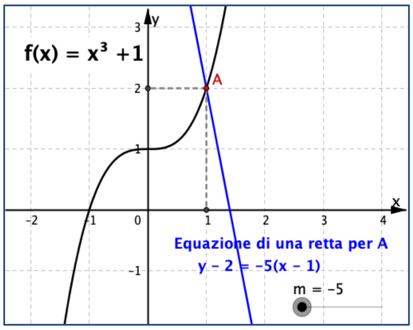

Concludiamo con un'osservazione sui numeri iperreali riprendendo una domanda del questionario iniziale.
Il numero $3,\bar{9}$ coincide con 4 o ne rappresenta una sua approssimazione?
Motiva brevemente la tua risposta
Nei reali
$3,\bar{9} = \frac{39-3}{9} = 4$
Negli iperreali
$4 - 3,\bar{9} < 4 - 3.9$
$4 - 3,\bar{9} < 4 - 3.99$
$4 - 3,\bar{9} < 4 - 3,999$
...
$3,\bar{9} \neq 4$
$4 - 3,\bar{9} = \varepsilon$

LE DERIVATE CON GEOGEBRA

LABORATORIO

Riepilogo in sintesi dei concetti

Rapporto incrementale		$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	Coefficiente angolare della **secante** al grafico della funzione nei punti *P* e *Q*
Derivata in x_P		$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ esiste finito	Coefficiente angolare della **tangente** al grafico della funzione nel punto *P*

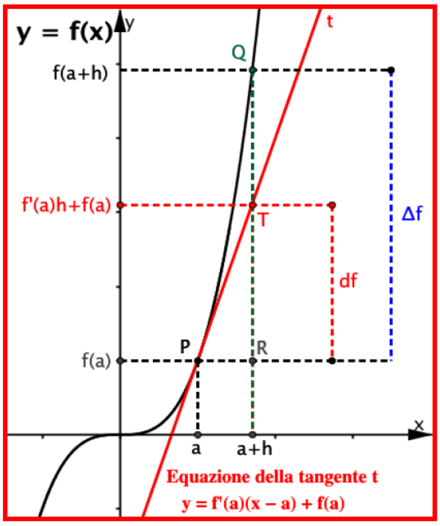


La retta che 'gira' attorno ad A(1; 2) ha equazione: $y - 2 = m(x - 1)$ [tranne quella parallela all'asse y]

Per scegliere la tangente, dobbiamo fissare la pendenza: $m_t = f'(1) = 3$

L'equazione della tangente è

$$y - 2 = 3(x - 1)$$



1

In generale, approssimare la curva con la tangente nell'intorno di P porta ad approssimare la variazione Δf con df.

$$\Delta f = f(a+h) - f(a)$$

$$df = f'(a)h$$

df prende il nome di differenziale

Differenziale in $x = a$ per la funzione f

Prima parte: studiamo le variazioni di una funzione, il differenziale

Esercizio 1: Considera la funzione $f(x) = x^2$.

1. Rappresenta tale funzione su GeoGebra.
2. Usa il foglio di calcolo per trovare le differenze finite. Parti ad esempio da x=0 e incrementa **Δ**x=1 fino a 20. Trova i valori della funzione e determina le differenze prime e seconde.

x	$y = x^2$	$\boldsymbol{\Delta y}$	Δ^2y

3. Cosa accade alle differenze terze?

Esercizio 2: Ripercorri l'esercizio 1, questa volta con la funzione $f(x) = x^3$. In questo caso cosa otteniamo calcolando le differenze terze? E le quarte?

Esercizio 3: Ripercorri l'esercizio 1, questa volta con la funzione $f(x) = 2^x$. In questo caso cosa si osserva? (Arriva a calcolare fino alle differenze quarte)

Esercizio 4 : Disegna il grafico della funzione $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 2x$.
Crea uno slider da chiamare h (da -1 a 1, incremento 0.1). Crea un punto P sul grafico. Poni $x_0 = x(P)$. Crea il punto Q di coordinate $(x_0 + h, f(x_0 + h)$ .Traccia la retta PQ e rendi piccolo h (non 0). Traccia la tangente al punto P. Stima il valore della derivata nel punto P.

Δx secondo te può assumere valori negativi? E **Δ**y?

Confronta dy con **Δ**f(x).

Seconda parte: Approccio sperimentale al concetto di pendenza di un grafico

https://www.geogebra.org/m/rh4ewpvb

In questo link trovate un applet GeoGebra che vi permette di fare degli zoom ai vostri grafici. Tale applet presenta due viste grafiche. La vista grafica 1 mostra il grafico di f(x) mentre la vista grafica 2 mostra il grafico di f(x) dopo aver applicato lo zoom. Tramite le apposite barre di inserimento nella vista grafica 1 è possibile fissare le coordinate di P in cui vogliamo fare lo zoom, la funzione f(x) e gli estremi del suo intervallo di definizione [a, b]. Muovendo lo slider, si può scegliere liberamente il fattore di dilatazione λ; contemporaneamente al movimento dello slider si vedrà nella vista grafica 2 la curva immagine dopo aver applicato lo zoom.

Considera la funzione $f(x) = x^2$. Considera l'intervallo [-1,4] e fai uno zoom sul punto P di coordinate(1,1). Cosa osservi? Confronta lo zoom con la rette tangente. Riusciresti a determinare la pendenza attraverso un numero reale?

Considera la funzione $g(x) = 2x^3$. Considera l'intervallo [-1,3] e fai uno zoom sul punto P di coordinate (-1,-2). Cosa osservi? Riusciresti a determinare la pendenza attraverso un numero reale?

Considera la funzione $h(x) = \sqrt{|x|}$. Fai uno zoom sul punto P di coordinate (0,0). Cosa osservi? Riusciresti a determinare la pendenza attraverso un numero reale?

Considera la funzione $l(x) = \sqrt[3]{x} + 1$. Fai uno zoom sul punto P di coordinate (0,1). Cosa osservi? Riusciresti a determinare la pendenza attraverso un numero reale?

Considera la funzione definita a tratti $p(x)$

$$\begin{cases} -x^2+4 & \text{per}\, x<2 \\ -\frac{1}{4}x^2+2x-3 & \text{per}\, x\geq 2 \end{cases}$$

Fai uno zoom sul punto P di coordinate (2,0). Cosa osservi? Riusciresti a determinare la pendenza attraverso un numero reale?

Considera la funzione definita a tratti $q(x)$

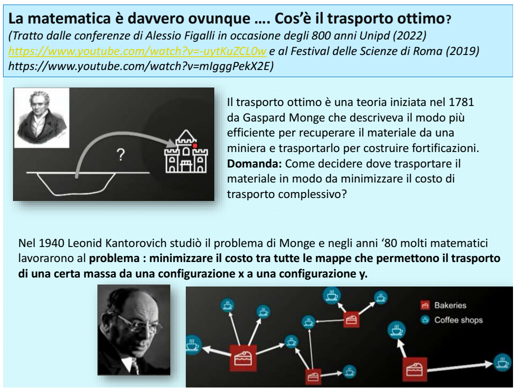
$$\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per}\, x\neq 0 \\ 0 & \text{per}\, x=0 \end{cases}$$

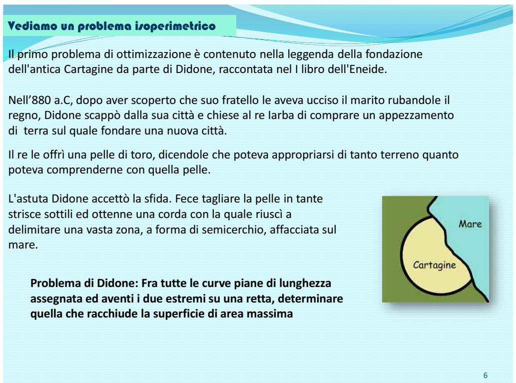
Fai uno zoom sul punto P di coordinate (0,0). Cosa osservi? Riusciresti a determinare la pendenza attraverso un numero reale?

Completa la tabella

FUNZIONE	OGGETTO LIMITE	PENDENZA CALCOLABILE?
$g(x)$		
$h(x)$		
$l(x)$		
$p(x)$		
$q(x)$		

Presentazione: Ottimizzazione





Il problema di Didone è equivalente al famoso problema isoperimetrico:

Fra tutte le figure piane di egual perimetro, anche non poligonali, determinare quella avente area massima.

I Greci avevano intuito la risposta fosse il cerchio, la dimostrazione rigorosa la si ebbe però nel XX secolo e risiede nella disuguaglianza isoperimetrica, che nel piano coincide con

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

Il problema di Didone in dimensione 3: Fissato il volume che si vuole racchiudere in una superficie, scegliere la forma che minimizza l'area.

La risposta a tale problema ce la suggeriscono le bolle di sapone

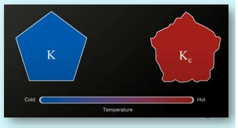
7

Le bolle di sapone assumono forme tali da rendere minima la tensione superficiale.
In fisica tutti gli stati tendono ad andare nella configurazione di energia minima.

Fra tutte le superfici contenenti un dato volume, quella sferica ha area minima.

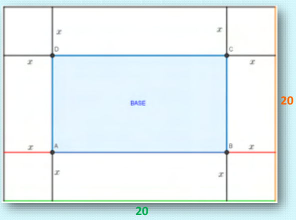
Nel 1878 Gibbs capì che i cristalli, come le bolle, tendono ad assumere una forma che minimizza l'energia, la cui formula fu trovata nel 1901 da Wulff.

Alessio Figalli studiò il trasporto ottimo per capire qual è la minima trasformazione della forma di un cristallo a seguito della somministrazione di una certa quantità di energia.

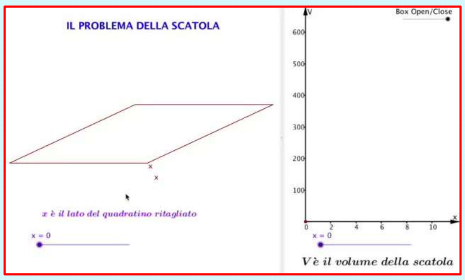


Abbiamo visto alcuni problemi di ottimizzazione che hanno applicazioni attuali e che sono oggetto di studio tutt'oggi **…** Proviamo ora a risolvere noi un problema di ottimizzazione

Riusciamo a costruire una scatola partendo da un foglio di dimensioni 20 cm x 20 cm in modo che abbia il volume massimo?



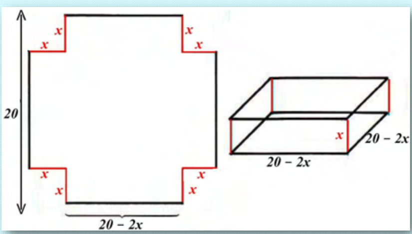
'Vedere' il volume delle scatole



Materiale tratto da http://www.matemat.it/page-900/page-A10/#stacks_in_10563_myModal
A cura di Stefano Volpe (2022)

10

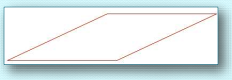
Esprimo il volume y in funzione di x

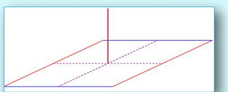


$$y = x(20 - 2x)^2$$

11

Casi limite





la scatola si schiaccia sul quadrato di lato 20

x=0

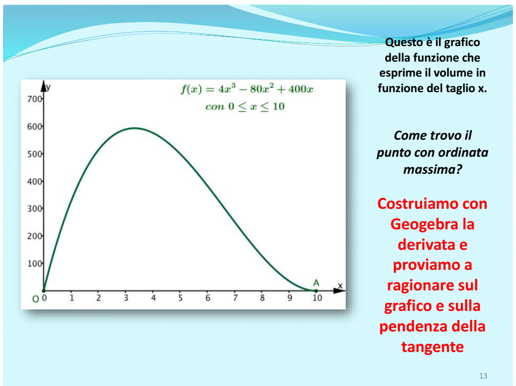
la scatola diventa 'un filo' lungo 10

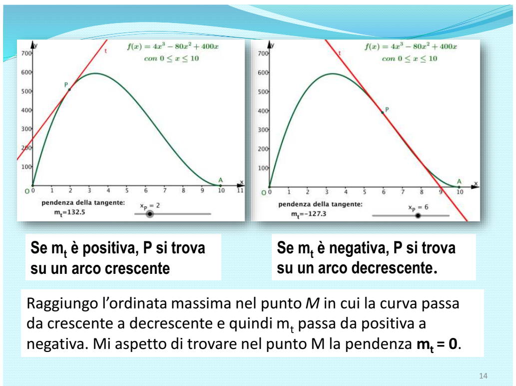
taglio n°1 + taglio n°2 = 20
x + x = 20
2x = 20
x = 10

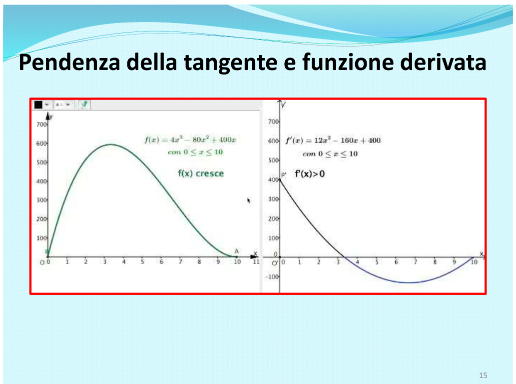
In entrambi i casi il volume *y* vale zero.

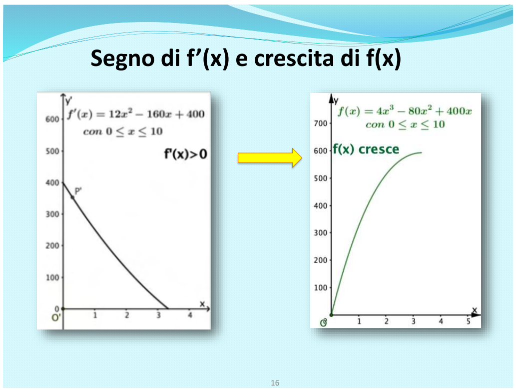
Dominio della funzione: $0 \leq x \leq 10$

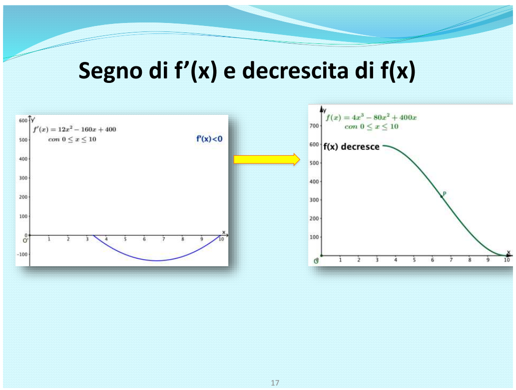
12











1. **Calcolo la derivata della funzione f(x):**
   $f'(x) = 12x^2 - 160x + 400$ con $0 \le x \le 10$
2. **Calcolo la *x* che rende zero la derivata, cioè risolvo l'equazione**
   $12x^2 - 160x + 400 = 0$ con $0 \le x \le 10$

   $12x^2 - 160x + 400 = 4(3x^2 - 40x + 100)$

Perciò basta risolvere l'equazione di 2⁰ grado
$3x^2 - 40x + 100 = 0$

18

Risolvo l'equazione

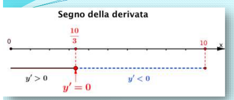
$$3x^2 - 40x + 100 = 0$$

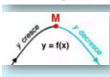
$$\Delta = 40^2 - 4 \cdot 3 \cdot 100 = 400$$

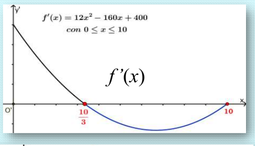
$$x = \frac{40 \pm \sqrt{400}}{6} = \begin{cases} \dfrac{40-20}{6} = \dfrac{20}{6} = \dfrac{10}{3} \\ \dfrac{40+20}{6} = \dfrac{60}{6} = 10 \end{cases}$$

19

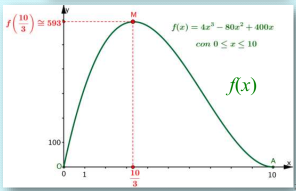
Segno di $f'(x)$ e grafico di $f(x)$







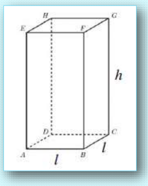
Il volume massimo vale
$f(10/3) \cong 592{,}6\ cm^3$



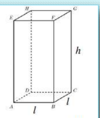
20

Un'azienda commercializza il suo prodotto in lattine da 5 litri a forma di parallelepipedo a base quadrata. Le lattine hanno dimensioni tali da richiedere la minima quantità di latta per realizzarle. Quali sono le dimensioni, arrotondate ai millimetri, di una lattina?

(*Quesito 6, dato nel 2014 agli Esami di Stato del liceo scientifico*)



21

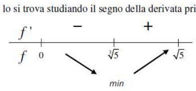


Sia l lo spigolo di base del parallelepipedo e h la sua altezza.
Si sa che $V = l^2 \cdot h = 5\, l = 5\ dm^3$.
Si vuole trovare il parallelepipedo che abbia superficie totale minima, noto che:
$S_{tot} = 2l^2 + 4lh$

Ponendo $l = x$, con $x > 0$, si ha che $h = \frac{5}{x^2}$, da cui $S_{tot} = 2x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{5}{x^2}$.

Il minimo della funzione $y = 2x^2 + \frac{20}{x}$ lo si trova studiando il segno della derivata prima $y' = 4x - \frac{20}{x^2}$

$\frac{4x^3 - 20}{x^2} > 0 \ \Rightarrow\ x^3 > 5 \ \Rightarrow\ x > \sqrt[3]{5}$.



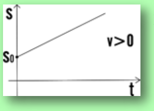
Il parallelepipedo di superficie totale minima ha $l = \sqrt[3]{5}$ e $h = \frac{5}{\sqrt[3]{25}} = \sqrt[3]{5}$.

22

Presentazione: Le derivate in fisica

Le derivate in fisica

In fisica per lo studio di un moto rettilineo si scrive la **legge oraria** $s=s(t)$ ossia una funzione in cui la posizione s è la variabile dipendente e il tempo t è la variabile indipendente.



Nel moto rettilineo uniforme la legge oraria è

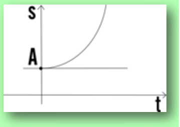
$$s(t) = vt + s_0$$

con v velocità costante.

Nel moto uniformemente accelerato la legge oraria è

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

con a accelerazione costante.



La **velocità media** relativa all'intervallo di tempo tra t e Δt è definita dal rapporto tra lo spazio percorso Δs (differenza tra posizione finale e iniziale) e il tempo Δt impiegato a percorrerlo. La velocità media è il rapporto incrementale della legge oraria.

La **velocità istantanea** è il limite della velocità media per $\Delta t \to 0$ ossia il limite del rapporto incrementale per $\Delta t \to 0$.

Moto uniforme Sia

$$f(t) = mt + q.$$

Allora

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = \frac{[m(t_0+h)+q]-[mt_0+q]}{h} = m.$$

La velocità istantanea è costante

Moto uniformemente accelerato Sia

$$f(t) = mt^2.$$

Allora

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = \frac{m(t_0+h)^2-mt_0^2}{h} = \frac{2mt_0h+mh^2}{h} = 2mt_0+mh.$$

La velocità istantanea è una funzione lineare

Accelerazione $a_{media} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ $\quad a_{istantanea} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = v'(t) = f''(t)$

IL TEOREMA DI LAGRANGE VI SPIEGA PERCHÉ PRENDETE UNA MULTA

In autostrada spesso gli automobilisti si imbattono nei "**Safety Tutor**": tale Tutor prevede la presenza di due centrali di rilevamento poste a diversi chilometri di distanza che registrano quanto tempo è trascorso tra il passaggio per la prima stazione di rilevamento e la seconda. Quello che calcola il Safety Tutor è dunque la **velocità media**.

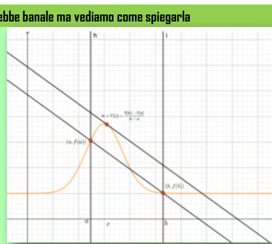
Il fatto che in un tratto di strada la velocità media della nostra automobile nell'intervallo di tempo [t1,t2] fosse superiore al limite di velocità implica che c'è stato un istante tra t1 e t2 in cui la velocità istantanea fosse superiore al limite?

Il fatto invece che la velocità media fosse inferiore al limite di velocità implica automaticamente che non ci sia stato un istante in cui si sia superato il limite?

La risposta alla prima domanda sembrerebbe banale ma vediamo come spiegarla

f(t) indica, al variare del tempo t, la posizione (in metri) che la nostra automobile assume rispetto a un punto d'origine (il casello autostradale).

a < b le posizioni delle due centrali di rilevazione del Safety Tutor



TEOREMA

Teorema di Lagrange o teorema del valore medio

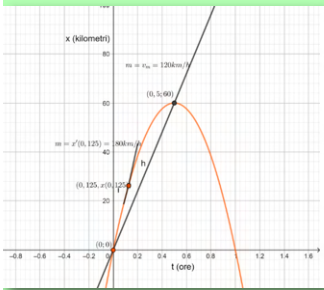
Se una funzione $f(x)$ è

- continua nell'intervallo limitato e chiuso $[a;b]$,
- derivabile in ogni punto interno a esso,

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo per cui vale la relazione:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Passiamo ora alla seconda domanda



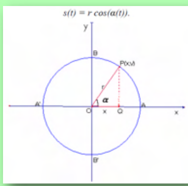
$$f(t) = -240t^2 + 240t$$
$$t_0 = 0$$
$$t_1 = 0,5$$
$$v_m = 120km/h$$
$$f'(t) = -480t + 240$$
$$f'(0,25) = 180km/h$$

L'unico modo per ovviare a questo problema è quello di avvicinare sempre di più le stazioni di rilevamento, in modo che la velocità media sia sempre più assimilabile alla **velocità istantanea**: in effetti è quello che accade con gli **autovelox**, dove è presente addirittura una sola torretta, con due rilevatori a distanza di pochi centimetri.

IL MOTO ARMONICO

Il **moto armonico** è definito come il moto della proiezione di un corpo che si muove di moto rettilineo uniforme.

Sia r il raggio vettore che individua la posizione del punto P sulla circonferenza (nell' ipotesi che si consideri come origine il centro del cerchio corrispondente) all' istante t e α(t) è l angolo che tale raggio forma con l asse orizzontale in tale istante allora il moto armonico semplice orizzontale è descritto dalla legge oraria:



$$\alpha(t) = \frac{vt}{r} \qquad \omega = \frac{v}{r} \quad \Rightarrow \quad s(t) = rcos(\omega t)$$

$$s'(t) = -\omega r sin(\omega t)$$
$$a(t) = s''(t) = -\omega^2 r cos(\omega t) = -\omega^2 s(t)$$

L'accelerazione è proporzionale ma opposta allo spostamento

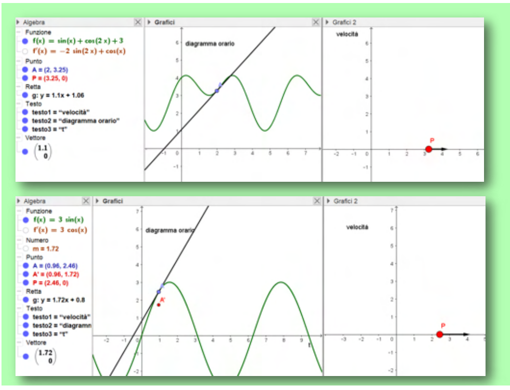
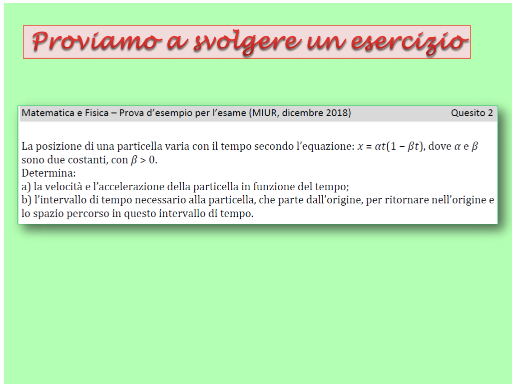
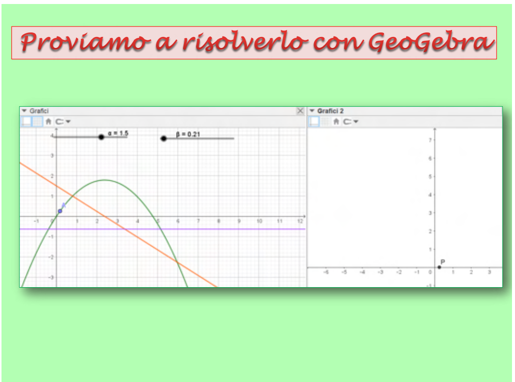
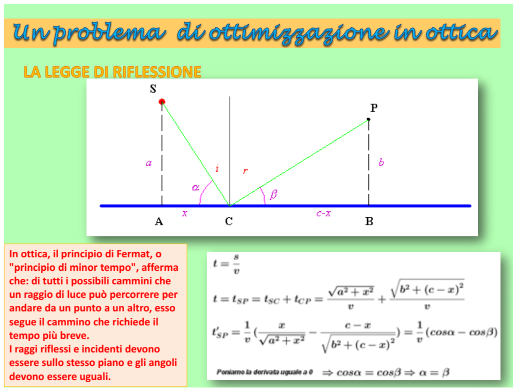
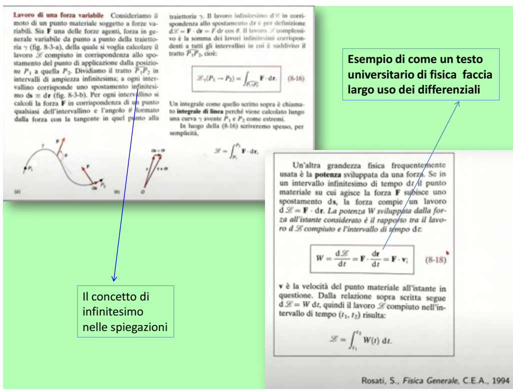


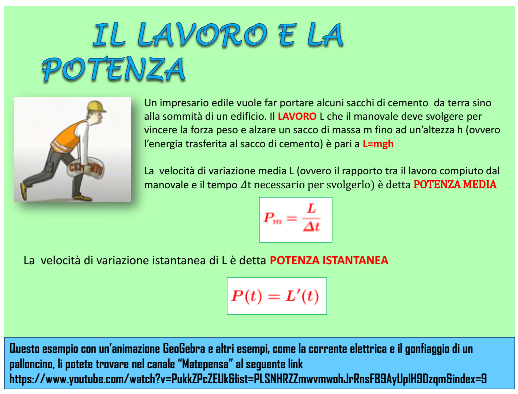
diagramma orario
velocità


Proviamo a svolgere un esercizio
Matematica e Fisica – Prova d'esempio per l'esame (MIUR, dicembre 2018)
Quesito 2
La posizione di una particella varia con il tempo secondo l'equazione: $x = \alpha t(1 - \beta t)$, dove α e β sono due costanti, con $\beta > 0$.
Determina:
a) la velocità e l'accelerazione della particella in funzione del tempo;
b) l'intervallo di tempo necessario alla particella, che parte dall'origine, per ritornare nell'origine e lo spazio percorso in questo intervallo di tempo.


Proviamo a risolverlo con GeoGebra


Un problema di ottimizzazione in ottica
LA LEGGE DI RIFLESSIONE
In ottica, il principio di Fermat, o "principio di minor tempo", afferma che: di tutti i possibili cammini che un raggio di luce può percorrere per andare da un punto a un altro, esso segue il cammino che richiede il tempo più breve.
I raggi riflessi e incidenti devono essere sullo stesso piano e gli angoli devono essere uguali.
$t = \frac{s}{v}$
$t = t_{SP} = t_{SC} + t_{CP} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v}$
$t'_{SP} = \frac{1}{v}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}\right) = \frac{1}{v}(\cos\alpha - \cos\beta)$
Poniamo la derivata uguale a 0 $\Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \alpha = \beta$


Esempio di come un testo universitario di fisica faccia largo uso dei differenziali
Il concetto di infinitesimo nelle spiegazioni
Rosati, S., Fisica Generale, C.E.A., 1994


IL LAVORO E LA POTENZA
Un impresario edile vuole far portare alcuni sacchi di cemento da terra sino alla sommità di un edificio. Il LAVORO L che il manovale deve svolgere per vincere la forza peso e alzare un sacco di massa m fino ad un'altezza h (ovvero l'energia trasferita al sacco di cemento) è pari a L=mgh
La velocità di variazione media L (ovvero il rapporto tra il lavoro compiuto dal manovale e il tempo Δt necessario per svolgerlo) è detta POTENZA MEDIA
$P_m = \frac{L}{\Delta t}$
La velocità di variazione istantanea di L è detta POTENZA ISTANTANEA
$P(t) = L'(t)$
Questo esempio con un'animazione GeoGebra e altri esempi, come la corrente elettrica e il gonfiaggio di un palloncino, li potete trovare nel canale "Matepensa" al seguente link
https://www.youtube.com/watch?v=PukkZPcZEUk&list=PLSNHRZZmwvmwohJrRnsFB9AyUplH9Dzqm&index=9

ESERCIZI da svolgere a casa individualmente

Esercizio 1 : Su Classroom vi ho caricato un file "**derivata di a^x**". Guardate il file GeoGebra e provate a rispondere alle domande presenti all'interno. Provate a ricavare la formula della derivata di a^x usando la definizione di derivata con il limite. Dalla formula ottenuta riuscireste a trovare una spiegazione per capire cosa succede se a si avvicina a *e=2.7182*…?

Esercizio 2: Ripercorriamo l'esercizio 1 questa volta con il logaritmo di x in base a. Provate voi a costruire il file GeoGebra: Costruire uno slider e chiamarlo "a" (con a che va da 0.001 a 10). Disegnare la funzione **f(x)=log(a,x)**. Disegnare la derivata di f(x) come abbiamo fatto a lezione per la funzione seno. Modificare la base a. Cosa succede questa volta se a si avvicina a *e=2.7182*..? Anche in questo caso provate a ricavare la formula della derivata usando la definizione di derivata con il limite.

Esercizio 3: In laboratorio abbiamo visto i **punti di non derivabilità** (cuspide, flesso a tangente verticale, punto angoloso, punti non derivabili che non appartengono alle tre categorie).
Costruite con GeoGebra queste funzioni, provate a studiarne la derivabilità (osservate i punti in cui è definita la funzione, se è continua e provate a vedere dove è definita la derivata). Provate a individuare i punti di non derivabilità e a classificarli.

$$|x^2 - 3x|$$

$$\sqrt[3]{x^2} + 2x$$

$$\sqrt{x^3 + 1}$$

$$\sqrt{|\boldsymbol{x}| - \mathbf{1}}$$

Abbiamo visto come le derivate siano parte integrante di molti concetti della fisica.
La derivata è anche lo strumento che ci consente di studiare la velocità con la quale cambiano fenomeni che evolvono nel tempo e potrebbero sembrare molto distanti dalla matematica.

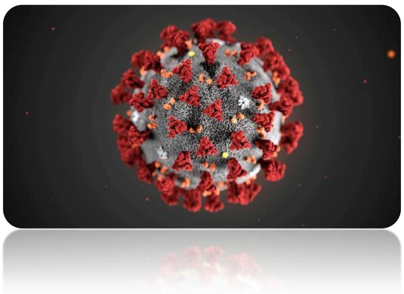
Vediamo qualche modellizzazione che si potrebbe fare (MATEMATICA e REALTA')...

Un analista finanziario ci propone un investimento che promette una crescita dei guadagni nel tempo secondo la funzione

$$G(t) = 6\sqrt{t}$$

dove il tempo t è misurato in anni e i guadagni G sono misurati in migliaia di euro.

Calcolando i rapporti incrementali per diversi intervalli di tempo potete vedere come aumentano i guadagni e calcolare la variazione media. Attraverso la derivata, potete determinare la variazione istantanea dei guadagni.

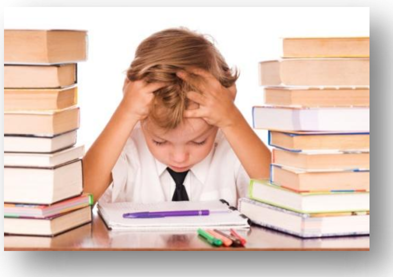


Ma possiamo modellizzare anche fenomeni appartenenti alla biologia, ad esempio la crescita di una popolazione, o alla medicina, ad esempio la velocità di assorbimento di un farmaco o la diffusione di un virus.
Ad esempio nei primi 6 mesi dalla comparsa del COVID 19 il numero cumulativo N dei casi totali nel mondo ha seguito una legge esprimibile attraverso la seguente funzione matematica

$$N(t) = 1000(e^{\frac{t}{60}} - 1)$$

con N misurato in migliaia di persone e t in giorni. Anche qui possiamo studiare la velocità di variazione del numeroo di nuovi casi.

E ancora possiamo studiare la capacità della memoria di trattenere le informazioni apprese. Secondo la curva della memoria di Ebbinghaus, la percentuale p∊[0,100] di conoscenze che rimangono impresse nella memoria dopo t giorni dall'apprendimento segue la relazione



$$p(t) = \frac{100K}{Clogt + K}$$

dove C e K sono costanti legate alla tipologia di apprendimento ed alla capacità della memoria (ad esempio dopo un mese dall'apprendimento circa metà delle informazioni sono dimenticate e ciò coincide con il prendere K=10 e C=3).

Appendice B

Lo zoom con il software da un punto di vista geometrico

Nel progetto didattico illustrato nei dettagli al Capitolo 4, una delle attività proposte è stato un approccio sperimentale alla nozione di pendenza di un grafico.
Uno dei dati emersi da questi studi è stato che, applicando uno zoom, l'oggetto limite del grafico G_f di una funzione $f(x)$ in un suo punto $P = (x_P, f(x_P))$ è la retta tangente al grafico in P, se $f(x)$ è derivabile in x_P. [49]
Matematicamente quello che fa l'applet GeoGebra con cui si sono effettuati gli esperimenti, non è altro che visualizzare l'azione dell'***omotetia*** di coefficiente λ centrata in $P = (x_P, f(x_P))$, ossia

$$T_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad T_\lambda(A) := P + \lambda(A - P)$$

che, scritto in coordinate, corrisponde a dire

$$T_\lambda(x, f(x)) = (x_P + \lambda(x - x_P), f(x_P) + \lambda(f(x) - f(x_P)) \tag{B.1}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Si definisca

$$t := x_P + \lambda(x - x_P)$$

da cui si ricava

$$x = x_P + \frac{t - x_P}{\lambda}$$

che, sostituito nella seconda componente di (B.1) permette di trovare che la curva $T_\lambda(G_f)$, grafico della funzione

$$f_\lambda(t) = f(x_P) + \frac{f(x_P + \frac{t - x_P}{\lambda}) - f(x_P)}{\frac{1}{\lambda}}$$

che si può riscrivere come

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} f(x_P) + \frac{f(x_P + \frac{t-x_P}{\lambda}) - f(x_P)}{\frac{t-x_P}{\lambda}}(t - x_P) & se \quad t \neq x_P \\ f(x_P) & se \quad t = x_P \end{cases}$$

Ora, se $\lambda \to +\infty$, si ha

$$f_\lambda(t) \to f(x_P) + f'(x_P)(t - x_P) \tag{B.2}$$

Traducendo a parole l'equazione (B.2), si ottiene esattamente il risultato che si era dedotto nell'Attività 4, ossia che

l'oggetto limite del grafico in un suo punto $P = (x_P, f(x_P))$ è la retta tangente al grafico in P se $f(x)$ è derivabile in x_P.

Appendice C

Una parentesi sull'ottimizzazione

Come visto al Capitolo 4, si è scelto di accennare all'ottimizzazione già con l'introduzione del concetto di derivata. La presentazione data agli allievi/e è stato un breve accenno che voleva solo dare l'idea dell'importanza dell'argomento e dei possibili collegamenti al mondo che ci circonda. In questo piccolo spazio diamo dunque una rapidissima sequenza di alcune tappe che hanno portato allo sviluppo dell'ottimizzazione fino ai giorni d'oggi. La presentazione fornita agli studenti ha seguito questo ordine, senza pretendere però gli approfondimenti più matematici (come si può osservare nella presentazione Power Point presente in Appendice A)[1].

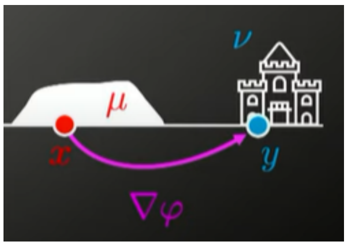
Il primo problema di ottimizzazione che possiamo citare è il *problema isoperimetrico*, del quale possiamo trovare le origini all'interno della mitologia classica.

Didone, regina di Tiro, costretta all'esilio dal fratello Pigmalione, si rifugiò nelle terre del re Iarba, re dei Getuli, a cui chiese della terra per costruire una nuova città, che sarebbe diventata poi la famosa Cartagine. Iarba, re geloso dei suoi averi, concesse alla regina tutta la terra che ella fosse riuscita a ricoprire utilizzando della pelle di bue. Didone tuttavia, secondo la leggenda, agì in modo astuto: ella tagliò la pelle a striscioline e costruì una lunga corda, andando così a riformulare il problema nel seguente modo: "quale forma dare a questa corda per racchiudere la maggior superficie possibile?"
Tale problema, definito come *problema isoperimetrico del piano*, può essere matematicamente letto in due modi:
"Data una curva di lunghezza fissata, scegliere la forma che massimizza l'area da

[1] Il lettore interessato a una trattazione esaustiva può consultare, tra le altre ricerche, ad esempio *"Eleonora Cinti, Il problema isoperimetrico:una storia lunga 2000 anni Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 4 (2019), n.2, p. 95–106. Unione Matematica Italiana"* o *"Alessio Figalli, Il problema isoperimetrico,Department of Mathematics and Institute for Computational Engineering and Sciences The University of Texas at Austin, Ithaca: Viaggio nella Scienza II, 2013"*, come può vedere le conferenze di Alessio Figalli [16, 17] da cui ho tratto io stessa materiale per la presentazione esposta ai ragazzi e per la stesura di questa Appendice.

essa racchiusa" o, equivalentemente, "fissata l'area che si vuole racchiudere con una curva, scegliere la curva che minimizza la lunghezza".
La soluzione di questi problemi dipende dalle condizioni al contorno: nel caso del problema di Didone, ad esempio, se ci si trova nell'entroterra, allora la forma migliore è un cerchio, se, come nel caso di Cartagine, la terra si affaccia sul mare, la scelta migliore diventa un semicerchio.

Ma lo stesso problema può essere riletto anche in dimensione più alta: nello spazio tridimensionale ad esempio, fissato un volume, qual è la forma ottimale per contenerlo usando una superficie la cui area sia la più piccola possibile?
La risposta ci viene data dalle bolle di sapone, che aggiustano la loro forma per minimizzare l'energia di tensione superficiale disegnando delle sfere.
Solo negli anni '50 del XX secolo il matematico italiano Ennio De Giorgi sviluppò tutta l'impalcatura teorica grazie alla quale riuscì ad arrivare alla risoluzione completa del problema isoperimetrico.
Una teoria poi accennata agli studenti è il *trasporto ottimale*, teoria strettamente legata all'ottimizzazione, che permise, tra le altre cose, di dimostrare anche la famosa disuguaglianza isoperimetrica. Andiamo quindi a dare un accenno di cosa intendiamo per trasporto ottimale.
Il trasporto ottimale è una teoria iniziata nel 1781 con il matematico francese Gaspard Monge, il quale nel suo *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais* descriveva il modo più efficiente per recuperare il materiale da una miniera e trasportarlo per costruire delle fortificazioni. Monge suppose che il costo di trasporto per unità di massa fosse proporzionale alla distanza da coprire, quindi il problema si riducesse a minimizzare una distanza.
Nel 1940 venne ripreso il problema di Monge con gli studi di Leonid Kantorovich, il quale elaborò una formulazione che gli permise di considerare trasporti non deterministici. Per completezza diamo uno sguardo al problema da un punto di vista strettamente matematico.
L'idea è quella di trovare una *mappa di trasporto* T che, tra tutte le mappe che permettono di passare da una particella x a una particella y, minimizzi il costo di trasporto $c(x, y)$.



Per garantire l'esistenza di tale mappa, viene in aiuto il matematico Yann Brenier con il suo teorema del 1991:

Teorema C.0.1. *Se si considera il costo c(x,y)=* $\|x-y\|^2$ *e sia* μ *la densità di distribuzione iniziale che si vuole trasportare, allora esiste un unico trasporto ottimo* T *tale che* $T = \nabla\varphi$ *dove* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è una mappa convessa.*

Tale teoria del trasporto ottimo ci consente di dimostrare il problema isoperimetrico.

Diamo quindi l'enunciato preciso di tale disuguaglianza[2].

Disuguaglianza isoperimetrica classica *Per ogni insieme aperto limitato* $E \subset \mathbb{R}^n$*, il perimetro P(E) controlla il volume* $|E|$

$$P(E) \geq n|B_1|^{\frac{1}{n}}|E|^{\frac{n-1}{n}} \tag{C.1}$$

L'uguaglianza vale se e solo se E è una palla.

Dimostrazione. L'idea è quella di definire una mappa di trasporto T che goda di certe proprietà e che trasporti un generico insieme E nella palla B_1 avente lo stesso volume di E, facendo vedere così che il perimetro di E è più grande del perimetro di B_1.

In particolare dato E insieme limitato e regolare, possiamo considerare le distribuzioni di probabilità

$$\mu := \frac{\chi_E(x)}{|E|} \qquad\qquad \nu := \frac{\chi_{B1}(x)}{|B_1|}$$

Ora possiamo pensare di utilizzare un costo quadratico ed usare il Teorema C.0.1, dal quale sappiamo che esiste $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mappa convessa tale che $T = \nabla\varphi$ manda μ in ν.

Si possono poi dimostrare le seguenti tre proprietà relative a T:[3]

$$|T| \leq 1 \quad in \quad E \tag{C.2}$$

$$det(DT) = \frac{|B_1|}{|E|} \tag{C.3}$$

$$div(T) \geq n(det(DT))^{\frac{1}{n}} \tag{C.4}$$

da cui possiamo completare la dimostrazione. Infatti

P(E) $= \int_{\partial E} 1 \geq \int_{\partial E} |T|$ per (C.2). Ma, sapendo che la normale di un vettore ha modulo unitario, possiamo dire che $\int_{\partial E} |T| \geq \int_{\partial E}$ T $\cdot \vec{n}_{\partial E}$.

Questo non è altro che un flusso e, per il teorema di Stokes, un flusso di un campo sul bordo è uguale all'integrale della divergenza al suo interno, dunque

$$\int_{\partial E} T \cdot \vec{n}_{\partial E} = \int_E div(T) \tag{C.5}$$

Ora, applicando a (C.5) le proprietà (C.4) e (C.3) otteniamo la disuguaglianza cercata:

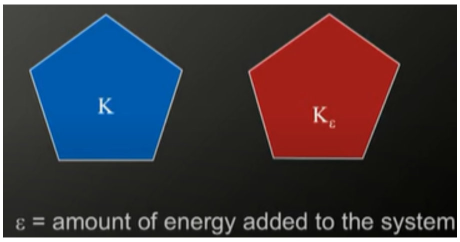
$$P(E) \geq \int_E div(T) \geq n \int_E (det(DT))^{\frac{1}{n}} = n|B_1|^{\frac{1}{n}}|E|^{\frac{n-1}{n}}$$

□

[2]In classe ci si deve ovviamente limitare ad enunciare la proprietà isoperimetrica del cerchio ossia $L^2 \geq 4\,\pi$ A.

[3]In questa sede omettiamo la dimostrazione, che il lettore interessato può trovare nella conferenza tenuta da Alessio Figalli https://www.youtube.com/watch?v=-uytKuZCL0w.

Ovviamente la dimostrazione appena vista non può essere affrontata a scuola, tuttavia è interessante mostrare agli studenti l'attualità di tali problemi, e, con tale scopo, citare loro gli studi odierni in questo campo e come l'ottimizzazione sia centrale nella vita quotidiana: esempi si possono trovare in urbanistica (basti pensare le infrastrutture dei trasporti), biologia (ad esempio le ramificazione delle radici e il convoglio dei nutrienti nella pianta per ottimizzarne il trasporto),ma anche per il riconoscimento di immagini (basti pensare alla diagnostica per immagini, in cui si può associare ad ogni pixel dell'immagine una certa massa e studiarne il movimento). In particolare ho deciso di accennare agli allievi gli attuali studi di *Alessio Figalli*,vincitore della Medaglia Fields nel 2018.
Un esempio lo ritroviamo nello studio dei cristalli.
Abbiamo già citato le bolle di sapone come esempi fisici della proprietà isoperimetrica della palla. Esse infatti hanno una forma sferica perché tendono ad assumere una forma che minimizza l'energia di tensione. L'energia totale di legame sull'interfaccia della bolla non è altro che l'integrale sulla sua superficie della tensione superficiale dunque, l'energia minima non corrisponderà ad altro se non a minimizzare l'area della superficie esterna a volume fissato.



Già nel 1900 si scoprì che un processo analogo lo si ritrova nei cristalli, che sono proprio al centro degli studi di Figalli. Egli infatti, supponendo di somministrare una certa energia a un cristallo alzandone la temperatura, si chiese come potesse cambiare la forma di tale cristallo (a parità di energia somministrata): ciò equivale a un problema di trasporto ottimo in cui si vuole vedere come si muovono le particelle del cristallo durante un processo di riscaldamento.
Detta ε la quantità di energia somministrata, Figalli arrivò al risultato secondo cui la forma del cristallo potesse variare al più di $\sqrt{\varepsilon}$.

Ma questo è solo un esempio dei campi di applicazione. Un altro interessante studio è in ambito metereologico, dove un processo di minimizzazione permetterebbe di prevedere il movimento delle nuvole. In tale studio si immagina la nuvola come un insieme di particelle, in cui ogni particella ha una certa massa che passa da una configurazione a un'altra.[4]

Ovviamente gli argomenti trattati in questa Appendice non sono esaustivi, ma l'obiettivo voleva essere quello di dare una breve panoramica e spunti di riflessione che, se trattati con le opportune modifiche, possono entrare anche tra i banchi di una scuola secondaria di secondo grado.

[4]Per maggiori dettagli si rimanda a [16].

Bibliografia

[1] BACCAGLINI FRANK ANNA, DI MARTINO PIETRO, NATALINI ROBERTO,ROSOLINI GIUSEPPE, *Didattica della matematica*, Milano, Mondadori Università, (2018).

[2] BAGNI GIORGIO TOMASO, *Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche*, Dipartimento di Matematica, Università di Roma La Sapienza, La matematica e la sua didattica, 3, 51-74 (2004).

[3] BERGAMINI MASSIMO, BAROZZI GRAZIELLA,TRIFONE ANNA, *5 Matematica.Blu 2.0 di matematica* (3 ed), Bologna,Zanichelli Editore (2020).

[4] BOYER CARL B., *Storia della matematica*, Introduzione di Lucio Lombardo Radice, Milano, Mondadori (2007).

[5] BRAGA FRANCESCA, *Approccio didattico al concetto di derivata*, Tesi di abilitazione all'insegnamento secondario, supervisore Prof. Davide Neri e relatore Prof Valter Roselli, Università degli Studi di Ferrara, (2008).

[6] CASAGRANDE STEFANO, *Il concetto di infinito matematico tra storia,didattica e numeri iperreali*, Tesi di laurea magistrale relatore Prof.ssa Cinzia Bonotto e correlatore Prof. Francesco Ciraulo, Università degli Studi di Padova, (2022).

[7] CASTELNUOVO GUIDO, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna con scritti di Newton, Leibniz, Torricelli*, Milano, Biblioteca Scientifica Feltrinelli, (1962).

[8] DE MARCO GIUSEPPE, *Analisi Uno*, Zanichelli, (2015).

[9] *Dicomat-Percorso a spirale sul concetto di derivata*, Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento, consultabile online https://edulab.unitn.it/dicomat/percorso-a-spirale-sul-concetto-di-derivata/.

[10] DI NASSO MAURO, *Ultrafiltri e metodi non standard in teoria combinatoria dei numeri*, Università di Pisa,(2010).

[11] DONINELLI DAVIDE, Canale Youtube *Matepensa*, (2020) https://www.youtube.com/@matepensa/featured.

[12] DOSSENA RICCARDO, *Introduzione all'Analisi Non-Standard*,(2017).

[13] DOSSENA RICCARDO, *Introduzione all'Analisi Non-Standard*, conferenza sull'analisi non standard tenuta da Riccardo Dossena in occasione della Settimana della Scienza, (2021), visibile online https://www.youtube.com/watch?v=lP4F_nAiPtM&t=1081s.

[14] DOSSENA RICCARDO, *Il mondo iperreale attraverso i microscopi ottici*, Sesta giornata di studio NSA, Lucca, (2016).

[15] DREYFUS TOMMY, *Solid Findings:Concept Images in Students' Mathematical Reasoning*, Israel, Tel Aviv University, (2014).

[16] FIGALLI ALESSIO, *Ubiquità del Trasporto ottimale*, conferenza tenuta in occasione degli 800 anni Unipd, Padova, (2022), visibile online https://www.youtube.com/watch?v=-uytKuZCL0w.

[17] FIGALLI ALESSIO, *Matematica Ottimale* conferenza tenuta in occasione del Festival delle scienze, Roma, (2019) visibile online https://www.youtube.com/watch?v=mIgggPekX2E.

[18] GAVAGNA VERONICA, *Dal metodo delle tangenti al calcolo differenziale: un percorso storico-didattico*, dispense del laboratorio *Dal metodo delle tangenti al calcolo differenziale*, Dipartimento di Matematica di Salerno, (2012).

[19] *GestInv*, Archivio Prove Invalsi, Disponibile in https://www.gestinv.it/Matematica.aspx.

[20] GIACARDI LIVIA, *La Storia della matematica nell'insegnamento «Far interagire la matematica con la cultura»*, Università degli Studi di Roma, (2013).

[21] GIUSTI ENRICO, *Dalla Géométrie al calcolo: il problema delle tangenti e le origini del calcolo infinitesimale*, Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol 1, (2016).

[22] GOLDBLATT ROBERT, *Lectures on the Hyperreals. An Introduction to Nonsatandard Analysis*, Springer,(1998).

[23] GRABINER JUDITH V., *The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass*, University of California, (1983).

[24] GRUGNETTI LUCIA, SPERANZA FRANCESCO, *Riflessioni sul problema della Storia e Didattica della matematica*, Dipartimento di Matematica Università degli Studi di Parma, nota redatta in occasione dell'ICMI Study sul *Ruolo della Storia della Matematica nell'insegnamento e nell'apprendimento della Matematica*,(2000).

[25] KEISLER H. JEROME, *Elementary calculus: An infinitesimal approach* (3 ed.), New York, Dover Pubblications inc., (2012).

[26] KEISLER H. JEROME, *Foundations of infinitesimal calculus*, Boston: Prindle, Weber, Schmidt, (1976).

[27] KLINE MORRIS, *Storia del pensiero pensiero matematico*, Vol. 1, Torino, Einaudi, (1991).

[28] KLINE MORRIS, *Storia del pensiero pensiero matematico*, Vol. 2, Torino, Einaudi, (1991).

[29] KRAKOFF GIANNI, *Hyperreals and a Brief introduction to Non-Standard Analysis*, Math 336, (2015).

[30] LAGHI GIORGIA, *Origini e Applicazioni dell'Analisi Non Standard*, Tesi di laurea Magistrale in Matematica, relatore Prof. Paolo Negrini, Alma Mater Studiorum Università di Bologna, (2013).

[31] LAMBERTI PIER DOMENICO, Appunti del corso *Storia del pensiero matematico*. Università degli Studi di Padova. A.A. 2021/2022.

[32] LARI GIORGIA, *Storia del calcolo differenziale e la disputa tra Leibniz e Newton*, Tesi di laurea magistrale relatore Giorgio Bolondi, Alma Mater Studiorum Università di Bologna, (2017).

[33] *Matemat*, Materiali multimediali di matematica per la scuola secondaria di secondo grado, http://www.matemat.it/#stacks_in_9743_myModal.

[34] MIUR., *Decreto ministeriale n° 211 del 7 ottobre 2010* , Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali, (2010), disponibile in https://www.gazzettaufficiale.it.

[35] MIUR., *Indicazioni nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento per i licei*, (2010), disponibile in http://nuovilicei.indire.it/.

[36] MIUR., *Istituti Tecnici.Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento*, (2010), disponibile in http://nuovitecnici.indire.it/.

[37] MIUR., *Istituti Professionali.Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento*, (2010), disponibile in https://nuoviprofessionali.indire.it/linee-guida-prof/.

[38] MIUR., *Liceo scientifico opzione scienze applicate*, (2010), disponibile in https://www.miur.gov.it/liceo-scientifico-opzione-scienze-applicate.

[39] MIUR., *Matematica2004*, Direzione Generale Ordinamenti Scolastici, Unione Matematica Italiana, Società Italiana di Statistica. La Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica. Ciclo secondario: quinta classe. Lugo di Romagna: Liceo Scientifico Statale "G.Ricci Curbastro", (2004).

[40] PAOLA DOMINGO, *L'insegnamento apprendimento del Calculus e le nuove tecnologie: una rivoluzione a portata di mano*, Progetto Alice, vol. VI, n. 16 43 - 87, Dipartimento di Matematica Università di Genova, (2005).

[41] RAPELLA LUCIA, *Analisi infinitesimale*, lezioni consultabili in https://sites.google.com/site/profrapella/.

[42] ROBINSON ABRAHAM, *Non Standard Analysis*, University of California, Los Angeles, North Holland Publishing Company Amsterdam, (1966).

[43] ROSATI SERGIO, *Fisica Generale 1*, (2 Ed), CEA, (1994).

[44] TALL DAVID, VINNER SHLOMO, *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169 (1981).

[45] TALL DAVID, *Intuition and Rigour: The Role of Visualization in the Calculus*, pubblicato in *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* Editors Walter Zimmermann, Steve Cunningham, (1991).

[46] TOMASI LUIGI, Appunti del corso *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*. Università degli Studi di Padova. A.A. 2021/2022.

[47] TOMASI LUIGI, BONOTTO CINZIA, Appunti del corso *Fondamenti della matematica*. Università degli studi di Padova. A.A. 2018/2019.

[48] TOMASI LUIGI, *Prove scritte di Matematica-Fisica - Liceo scientifico*, online `http://www.matematica.it/tomasi/matls/index.htm`.

[49] TONOLI ALESSIA, *Lezione 3: Approccio sperimentale alla nozione di pendenza di un grafico*, Università degli studi di Trento, consultabile online `https://www.geogebra.org/m/zfqmkhan#material/hvdvkfkh`.

[50] VILLANI VINICIO, BERNARDI CLAUDIO, ZOCCANTE SERGIO, PORCARO ROBERTO, *Non solo calcoli. Domande e risposte sui perché della matematica*, Milano: Springer, (2012).

Ringraziamenti

Con questa tesi oggi non solo si conclude il mio percorso universitario, ma si realizza anche un sogno che nutro fin dal primo giorno di triennale.
Vorrei allora usare questo piccolo spazio per ringraziare coloro che mi sono stati vicini, accompagnandomi in questa avventura e contribuendo così al raggiungimento di questo traguardo tanto desiderato.

Prima di tutto voglio ringraziare i due "pilastri" su cui ho sempre potuto contare: i miei genitori! Con me avete festeggiato i successi e mi avete sostenuta nei momenti più difficili: grazie perché non avete mai smesso di credere in me e se ora sono qui a festeggiare è anche merito vostro, sappiate che la vostra matematica un po' svampita vi vuole un mondo di bene!

Un grazie "polloso" va al mio cuginetto Samuele per aver portato un po' di allegria durante le lunghe giornate di studio.

Vorrei ora spendere queste poche righe per ringraziare in particolare chi ha vissuto con me questo percorso, certa che l'università rappresenti solo il primo capitolo delle nostre amicizie.
Grazie a Carlotta e a Mirian. Ciascun esame porta con sé un ricordo di cui voi fate parte e senza di voi questi anni non sarebbero stati gli stessi: grazie per il sostegno che ci siamo date e per tutto ciò che abbiamo vissuto insieme fuori dalle aule della Torre, dalle semplici chiacchierate alle nostre indimenticabili "gitarelle".
Grazie Angelica (Ng) perché, tra consegne di analisi e esercizi di algebra, abbiamo legato fin da subito scoprendo quella che è diventata la nostra "speciale bbfriendship".
Grazie Luca perché con te, oltre ad aver dato un volto allo spazio L^p, ho trovato un amico da convertire all'ottimismo (prima o poi ce la farò) e una perfetta "mascotte universitaria" verde (ovviamente Drillo).

Pur non avendo condiviso questa magistrale a Padova, un ringraziamento non può poi non andare ad Alessia per il quartetto formato con Carlotta e Mirian in triennale.
Grazie a Monica per tutti i consigli dati in questi anni e a Gloria per aver contribuito a rendere più bella l'impaginazione di questa tesi.

Ringrazio i miei relatori Francesco Ciraulo e Luigi Tomasi, che hanno dato fiducia al mio progetto, supportandomi con i loro consigli durante la stesura di questa tesi.

Un ringraziamento va poi al professor Giuseppe Zampieri, che fin da subito si è mostrato disponibile ad accogliermi in classe per sviluppare il mio progetto didattico.
A tal proposito voglio ringraziare anche i ragazzi della quinta A Scienze Applicate del liceo scientifico E.Fermi di Padova, che mi hanno seguita durante le lezioni e si sono messi a disposizione per le mie indagini.
Grazie alla professoressa Tiziana Carron e alla sua quinta E per essersi prestata come classe di controllo. In generale, ringrazio tutto il personale dell'istituto E.Fermi per avermi accolta a tutti gli effetti come se fossi stata una loro collega e la dirigente per aver permesso lo svolgimento della sperimentazione.

GRAZIE DI CUORE A TUTTI, nessuno escluso, anche a coloro che qui, per motivi di spazio, non ho potuto citare e a coloro che non fanno parte del mondo "Math Unipd", ma che mi sono stati vicini in tutti questi anni, fin da quando, in quinta liceo, ho deciso di intraprendere questa strada!