Università degli Studi di Padova

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Analisi del gioco degli scacchi:

Dai modelli matematici agli algoritmi per calcolatori

Relatore:
Ch.mo Prof. Carlo Mariconda

Laureando:
Davide Salmaso

Anno accademico 2012/2013

24 Marzo 2013

Alla mia famiglia, che mi ha dato l'opportunita' di proseguire gli studi e che mi ha sempre sostenuto in ogni mia scelta.

Prefazione

"Gli Scacchi sono il gioco intellettuale per eccellenza. Senza far uso di strumenti casuali (come i dadi o la roulette), che inquinerebbero la contesa, due intelletti vengono contrapposti in una situazione così complessa che nessuno dei due può sperare di comprenderla completamente. Tuttavia, il gioco è sufficientemente analizzabile, di modo che ciascuno può sperare di sconfiggere l'altro. Il gioco è tanto profondo e sofisticato che ha permesso la nascita di giocatori professionisti e ha sopportato senza esaurirsi, oltre 200 anni di partite e di studi analitici intensivi. Tali caratteristiche rendono gli scacchi un'arena privilegiata per i tentativi di meccanizzazione. Se si potesse sviluppare un giocatore artificale vincente, si potrebbe affermare di aver penetrato il nucleo dell'attività intellettuale umana." [1]

Gli scacchi sono nati in India nel VI secolo e si sono diffusi in Europa attorno all'anno 1000. Ma è solo dalla metà del 1800 che si sviluppa un'approccio strategico-matematico al gioco: iniziano ad essere visti come un vero e proprio sistema formale, il cui unico assioma è costituito dalla posizione iniziale dei pezzi sulla scacchiera, le cui regole stabiliscono le possibili mosse dei pezzi e i cui teoremi sono le posizioni di scacco matto. Questo approccio assiomatico ed il modo astratto di ragionare per la risoluzione del gioco accomunano la matematica agli scacchi. Inoltre la soluzione di numerosi problemi relativi alla scacchiera si basano su elementi della teoria dei grafi, sulla topologia e sono legati all'aritmetica, all'analisi combinatoria e alla geometria. Parallelamente alcuni problemi matematici sono risolubili elegantemente utilizzando argomenti presi in prestito dagli scacchi. Non c'è da stupirsi dunque se moltissimi matematici sono rimasti affascinati da questo gioco, al punto da studiare sia un'approccio teorico, sia le varie meccaniche in dettaglio. Un esempio importante di questo connubio viene da Emanuel Lasker (1868-1941), matematico tedesco, noto per il teorema di Lasker-Noether sugli anelli polinomiali, che è alla base dell'algebra moderna e contemporaneamente Campione del Mondo di scacchi dal 1894 al 1921. Nel 1894 Alfred Binet, psicologo francese e inventore del primo test d'intelligenza, pubblico' uno studio psicologico sulle connessioni tra scacchi e matematica. Scoprì che il 90% dei giocatori di scacchi possedevano grandi abilità nel calcolo e una buona memoria. Altre qualità presenti nei migliori giocatori e riconducibili alla matematica sono l'immaginazione, la capacità di astrazione e la precisione. Successivamente, nel 1944 nasce la moderna Teoria dei giochi con l'uscita del libro "Theory of Games and Economic Behavior" di John von Neumann e Oskar Morgenstern, che analizza gli scacchi come metafora di situazioni di conflitto e modello di problemi reali. Parallelamente alla teoria dei giochi lo studio degli scacchi diventa un campo di ricerca privilegiato per lo sviluppo dell'intelligenza artificiale. Le ragioni sono molteplici. Innanzitutto è un gioco ben definito formalmente sia nella parte operativa, le mosse, che nella parte obbiettivo, lo scaccomatto, e quindi adatto alla programmazione. E' caratterizzato da regole semplici, ma con uno spazio di stati esponenziale ed esiste un sistema oggettivo di valutazione della forza del gioco (Elo rating system). Nacquero così attorno al 1950 i primi programmi in grado di giocare a scacchi. Nel trentennio successivo, soprattutto grazie all'introduzione del microprocessore e ai miglioramenti delle tecniche di progettazione di hardware specializzato(VLSI), questi programmi si sono avvicinati al livello dei campioni (grandmaster) e nel 1997 l'allora campione del mondo Garry Kasparov venne sconfitto in una famosa partita dal supercomputer dell'IBM, chiamato Deep Blue. Questo evento, anche per l'enorme seguito mediatico che ha generato è senz'altro uno dei più grandi successi del secolo e apre un'era in cui sarà il computer a insegnare all'uomo a giocare a scacchi e non più viceversa.

Indice

Prefazione **i**

1 Capitolo 1 **1**

1.1 Le origini 3

1.1.1 Charles Babbage 3

1.1.2 Leonardo Torres y Quevedo 4

1.2 I precursori della Teoria dei Giochi 6

1.2.1 Ernst Zermelo 6

1.2.2 Dénes König 9

1.3 Conclusioni 11

2 Capitolo 2 **13**

2.1 Alle origini della teoria dei giochi 13

2.1.1 Teorema del minimax 14

2.1.2 Equilibrio di Nash 14

2.2 La Teoria dei Giochi 17

2.2.1 Ipotesi di base della teoria dei giochi 18

2.2.2 Classificazione dei giochi 20

2.2.3 Applicazione al gioco degli scacchi 21

2.3 L'albero di gioco 25

2.3.1 L'algoritmo AlphaBeta 28

2.4 Modello probabilistico sull'efficacia dei singoli pezzi degli scacchi 31

2.4.1 Il valore relativo del re 32

2.4.2 Il valore relativo della torre 34

2.4.3 Il valore relativo del cavallo 36

2.4.4 Il valore relativo dell'alfiere 38

2.4.5 Il valore relativo della regina 40

2.4.6 Il valore relativo del pedone 42

2.4.7 Conclusioni 45
2.5 Rating Elo 47
2.5.1 Modello matematico del sistema ELO 48

3 Capitolo 3 **53**
3.1 Claude Shannon 53
3.1.1 Differenze tra un giocatore umano e un giocatore artificiale 55
3.2 Michail Botvinnik 56
3.3 Deep Blue e l'algoritmo parallelo 59

A Appendice A **65**

Bibliografia **67**

Webgrafia **69**

Capitolo 1

Introduzione

Gli scacchi sono un gioco da tavolo di strategia che vede opporsi due avversari, uno che gioca coi pezzi bianchi e l'altro coi pezzi neri. Il tavolo da gioco è chiamato scacchiera ed è costituito da 64 caselle di due colori alternati (normalmente il bianco e il nero), sulla quale si trovano trentadue pezzi, sedici per colore: ogni giocatore possiede un re, una regina, due alfieri, due cavalli, due torri e otto pedoni. Ogni pezzo è obbligato a muoversi secondo la sua peculiarità: le torri in verticale ed orizzontale, gli alfieri in diagonale, la regina si può muovere sia come le torri sia come gli alfieri, di quante caselle vuole; i pedoni si muovono di una casella in avanti e il re si muove di una casella in ogni direzione. Lo scopo del gioco è dare scaccomatto al re avversario, cioè attaccarlo senza cha abbia possibilità di fuggire. Il termine scacchi deriva dal persiano Shah, cioè re, adattato

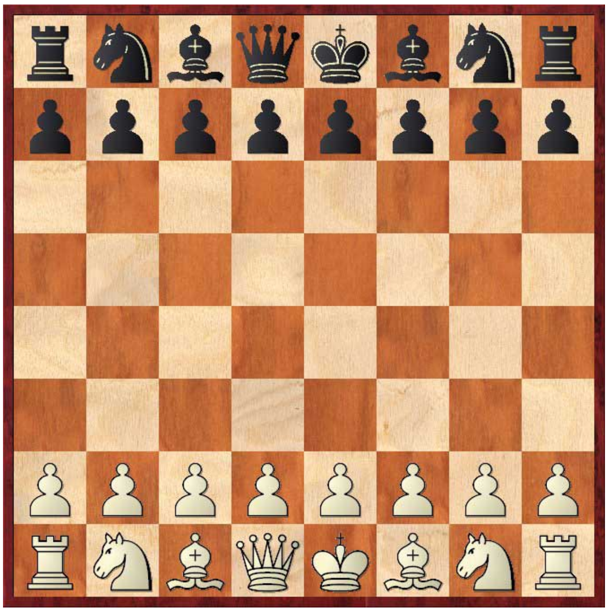
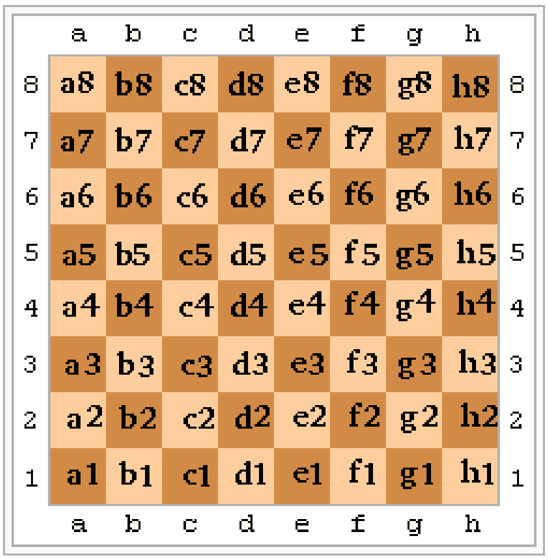
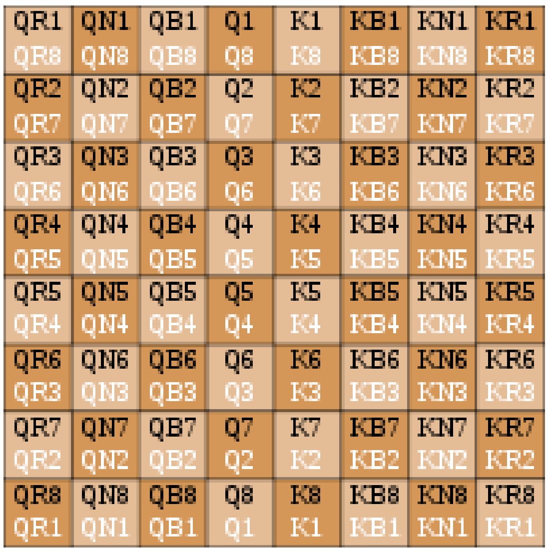


Figura 1.1: Posizioni iniziali dei pezzi sulla scacchiera

dall'arabo come es-saq e arrivato infine nel Sud Europa attorno all'anno 1000 col nome catalano escac. Dopo la sua introduzione nel nostro continente il gioco degli scacchi ha acquistato prestigio, si è diffuso sia tra i ceti più bassi sia nelle corti e nella nobiltà, tanto da essere chiamato in Francia "le roi des jeux" o "le noble jeu". Inoltre ha largamente ispirato la cultura, in particolare la pittura, la letteratura e il cinema. Verso la fine del 1400 furono modificate la caratteristiche di gioco dei vari pezzi ed introdotte alcune delle regole più familiari utilizzate ancora oggi, come l'arrocco (uno scambio di posizione tra re e torre sotto opportune condizioni) e l'avanzamento iniziale di due caselle da parte del pedone. Ma è solo 250 anni dopo che nacque il primo approfondito e sistematico ragionamento sulle strategie degli scacchi. Scritto da Francois-André Philidor, "L'analyze des Echecs" studia per la prima volta i più comuni finali di partita (le chiusure, in gergo scacchistico), alcune mosse preventive (ad esempio come difendersi da uno scacco) e le posizioni sacrificali (quando conviene sacrificare un pezzo per ottenere un vantaggio nel proseguo della partita). Questo libro fu fondamentale per lo sviluppo dello studio degli scacchi e introdusse la nomenclatura di strategie utilizzate ancora oggi (la difesa stonewall, la variante del camaleonte, i tranelli di Noah e il pedone avvelenato di Najdorf). Poi vennero introdotte le notazioni, cioè dei metodi per trascrivere le mosse degli scacchi: la prima notazione usata si chiamava notazone descrittiva ed è stata sostituita dalla notazione algebrica, introdotta da Philipp Stamma nel 1737, usata tutt'ora in qualsiasi circolo scacchistico.



(a) Notazione algebrica



(b) Notazione descrittiva

1.1 Primi matematici che si occupano di scacchi

Fin dall'inizio del 1800 molti matematici affascinati dalla complessità e dalla natura strategica del gioco degli scacchi vi si dedicarono con passione. Gli studiosi dell'epoca erano particolarmente interessati nel creare degli automi in grado di giocare a scacchi. Tuttavia i modesti progressi tecnologici in quel campo hanno impedito la realizzazione di macchine in grado di giocare un'intera partita, per questo i primi automi erano in grado di giocare solo alcune frazioni di gioco, tipicamente i finali, cioè le parti più semplici in quanto sono presenti meno pezzi. E' proprio in questo periodo che nascono i primi algoritmi per giocare a scacchi e vengono gettate le basi per la successiva Teoria dei giochi.

1.1.1 Charles Babbage

Charles Babbage (1791-1871) fu un matematico inglese, un'inventore e un ingegnere meccanico considerato il padre del computer, in quanto fu il primo scienziato ad avere l'idea di un calcolatore programmabile. I suoi due più grandi successi furono la realizzazione del Difference Engine (macchina differenziale), un'apparecchiatura meccanica in grado di svolgere varie operazioni matematiche, e la progettazione dell'Analytical engine (macchina analitica) in grado di svolgere compiti generici. Per motivi politici e finanziari quest'ultima macchina non fu mai realizzata ma rappresenta una pietra miliare alla base dei moderni computer.

Nel 1864 Babbage scrisse un articolo nel quale afferma che gli scacchi, così come altri giochi da tavolo di strategia, possono essere affrontati con successo da un automa. L'idea gli venne vedendo una macchina costruita nel 1770 da un nobile ungherse, Wolfgang von Kempelen, per la regina d'Austria Maria Teresa. Questo automa era costituito da un fantoccio con abiti in stile orientale, soprannominato "il Turco" seduto sopra una grande scrivania, all'interno della quale vi era un complesso di ingranaggi, rotelle e magneti. Ebbe molto successo nelle principali corti europee, tanto che fu esportato anche in America, ma nonostante le apparenze si trattava di un inganno. Non era affatto un miracolo di tecnologia, ma vi era un uomo di piccola statura all'interno che mediante i magneti e un complesso sistema di leve (una specie di pantografo) era in grado di giocare la partita. Babbage rimase affascinato da questa macchina e nel suo articolo del 1864 scrisse il primo algoritmo per giocare a scacchi:

L'automa esamina una posizione e poi comincia a porsi una serie di domande:

1. *L'ultima mossa fatta dal mio avversario è legale? Se no, protesto.*

2. *Ho una posizione indifendibile (ovvero, il matto è inevitabile)? Se sì, abbandono.*

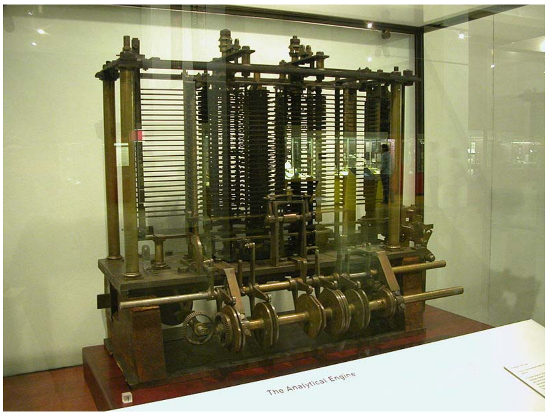
3. *Tra quelle possibili, c'è una mossa che mi dà la vittoria (cioè posso dare scacco matto)? Se sì, la dichiaro.*

4. *L'avversario sta per fare una mossa vincente? Se sì, la prevengo.*

5. *Se alla prossima mossa non c'è una mossa vincente per uno di noi due, debbo cercare una mossa che crea una doppia minaccia, in modo che il mio avversario ne possa parare una sola; se c'è, la effettuo.*

6. *Se i primi 5 test falliscono, esamino le mosse successive e in qualche modo ne scelgo una; la effettuo senz'altro.*

Quest'algoritmo è senz'altro incompleto e primordiale, ma è alla base del teorema di Zermelo-Kuhn del 1913, precursore della Teoria dei giochi.

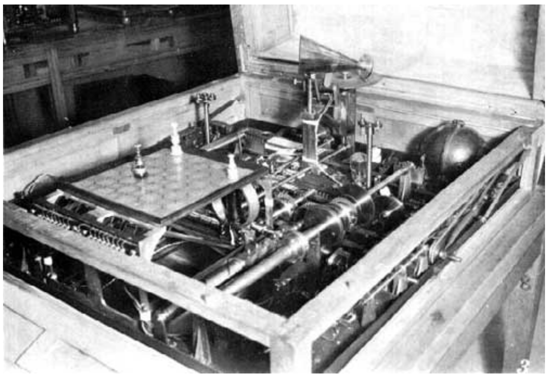


(a) Prototipo del 1871 dell'Analytic Engine, esposto al Science Museum di Londra

(b) "Il Turco" (ricostruzione)

1.1.2 Leonardo Torres y Quevedo

Leonardo Torres y Quevedo (1852-1936) è un matematico e ingegnere spagnolo noto per la progettazione di dirigibili e funicolari e per la realizzazione del primo automa fisico in grado di giocare automaticamente il finale di partite re-torre contro re. L'automa chiamato "El Ajedrecista" (lo scacchista), fu costruito nel 1912 e debuttò con successo all'Esposizione Universale a Parigi due anni dopo. Questa macchina sfruttava degli elettromagneti sotto la scacchiera per identificare le posizioni dei 3 pezzi, un braccio meccanico per muoverli e un fonografo per annunciare lo scacco al re. Era inoltre in grado di segnalare se l'avversario umano giocava una mossa illegale.



(a) El Ajedrecista

Torres y Quevedo's Mating Algorithm

Torres' scheme for effecting mate in the KRK endgame assumes an initial position with the automaton's White King on **a8**, Rook on **b8**, and the opponent's King on any unchecked square in the first six ranks. His algorithm for moving can be described in programming notation:

```
if        both BK and R are on left side {files a,b,c}
  then    move R to file h {keep R out of reach of K}
elseif    both BK and R are on right side {files f,g,h}
  then    move rook to file a {keep R away from K}
elseif    rank of R exceeds rank of BK by more than one
  then    move R down one rank {limit scope of BK}
elseif    rank of WK exceeds rank of BK by more than two
  then    move WK down one {WK approaches to support R}
elseif    horizontal distance between kings is odd
  then    {make tempo move with R}
          if      R is on a file then move R to b file
          elseif  R is on b file then move R to a file
          elseif  R is on g file then move R to h file
          else    {R is on h file} move R to g file
          endif
elseif    horizontal distance between kings is not zero
  then    move WK horizontally toward BK {keep opposition}
else      give check by moving rook down
          {and if on first rank, it's mate}
endif
```

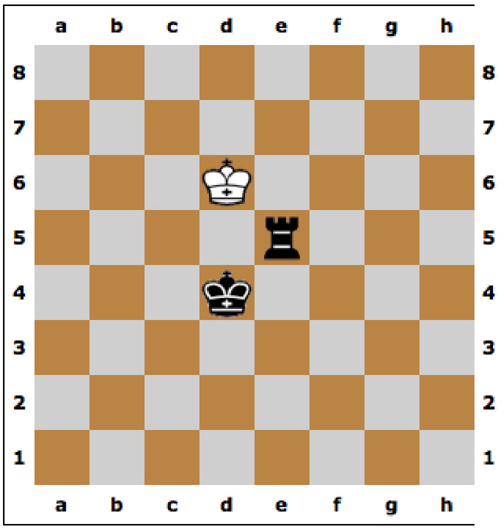
If the opponent's King is placed on **a6**, with best delaying tactics mate can be staved off for 61 moves.

(b) Algoritmo alla base dell'automa di Quevedo

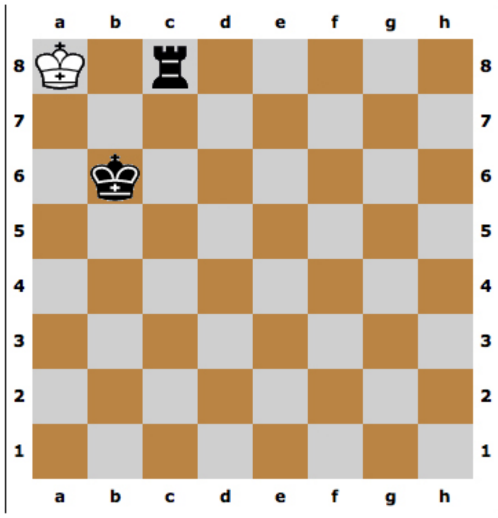
L'algoritmo alla base dell'Ajedrecista non era ottimizzato, nel senso che non riusciva a dare scacco matto nel minimo numero di mosse possibili e nemmeno entro le 50 mosse necessarie per evitare il pareggio.[1] Tuttavia riusciva a vincere tutte le partite che giocava, in quanto un finale re-torre contre re è scacchisticamente sbilanciato ed ha meno di errori grossolani il giocatore che possiede il re e la torre vince sempre. L'algoritmo di Quevedo parte da una posizione iniziale prestabilita (la si può vedere nel grafico seguente, figura (a)). La prima parte della strategia consiste nel portare in uno dei quattro angoli della scacchiera il re avversario in quanto sono le uniche quattro caselle in cui è matematicamente provato che è possibile dare lo scaccomatto avendo a disposizione il re ed una torre. Per raggiungere l'obiettivo si usa la torre per tagliare le vie di fuga del re avversario ed si cerca di avvicinare il più possibile il proprio re a quello dell'avversario al fine di limitarne i movimenti. Una volta forzato il re avversario in un angolo coordinando opportunamente i movimenti di re e torre non resta altro che dare scaccomatto e vincere la partita (un esempio di matto lo si può vedere nella seguente figura (b)). L'abilità principale dell'algoritmo di Quevedo è visibile nella parte finale della strategia in quanto evita che

[1]patta, nel gergo scacchistico

con una mossa sbagliata la partita si concluda con un pareggio: cioè il re avversario non è sotto scacco nella casella in cui si trova, ma non può muoversi senza finire sotto scacco.



(a) Posizione iniziale dell'algoritmo di Quevedo: finale re-torre vs re



(b) Esempio di possibile scaccomatto

1.2 I precursori della Teoria dei Giochi

1.2.1 Ernst Zermelo

Ernst Zermelo (1871-1953) fu un matematico e logico tedesco che contribuì allo sviluppo della teoria assiomatica degli insiemi e fu un precursore della Teoria dei giochi. Infatti è generalmente accreditato che il primo teorema formale della Teoria dei giochi venne dimostrato da Zermelo in un articolo pubblicato in tedesco nel 1913, tradotto con il titolo "On an Application of Set Theory to the Theory of the Game of Chess"[7][2].
La letteratura moderna comprende più varianti del suo teorema, la principale è:

Teorema 1 (di Zermelo)**.** *Il gioco degli scacchi è strettamente determinato ossia vale una di queste tre alternative:*

- *Vince il bianco: il bianco ha a disposione una strategia, cioè un piano completo di azione che porta alla vittoria qualunque strategia adotti il nero;*
- *Vince il nero: il nero ha a disposizione una strategia che lo porta alla vittoria qualunque strategia adotti il bianco;*

[2] il titolo originale è "Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels"

- *Patta: sia il bianco che il nero hanno ciascuno a disposizione una strategia che assicura almeno la patta qualunque cosa faccia l'altro.*

La versione più formale del teorema afferma che:

Teorema 2 (di Zermelo)**.** *Ogni gioco finito ad informazione perfetta ha un equilibrio di Nash in termini di strategie pure.*[3] *Ovvero qualunque gioco* Γ_E *in forma estesa, finito, a informazione perfetta, presenta un equilibrio di Nash che può essere trovato attraverso l'induzione a ritroso. Se il payoff* [4] *è unico per tutti i giocatori, la soluzione derivante dall'induzione a ritroso esiste ed è unica.*

Dimostrazione. Per dimostrare il primo teorema Zermelo ricorre ad un algorimo di induzione a ritroso.[5] Questa metodologia di ragionamento procede a ritroso nel tempo, cioè considera l'ultima volta che può esere presa un'azione e fa una scelta ottimale. Con questa informazione riesce a stabilire la scelta migliore per la penultima azione, poi per la terz'ultima e così via fino ad individuare la scelta ottima per ogni possibile situazione in qualsiasi punto del tempo.

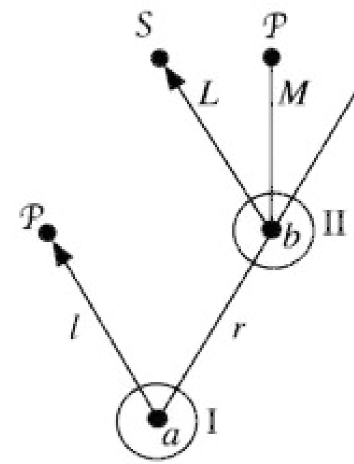


Figura 1.2: Esempio di analisi a ritroso

Dal disegno si vede che il giocatore I che si trova sul nodo a ha due possibili scelte: se sceglie il ramo a sinistra l finisce nel nodo P, cioè pareggia (patta), se sceglie la mossa r finisce nel nodo b. Nel nodo b tocca al giocatore II muoversi e ha tre possibilità: può

[3]questi argomenti saranno trattati in dettaglio nel capitolo successivo

[4]ricompensa, risultato delle scelte operate dal giocatore

[5]Alcuni studiosi (U.Schwalbe e P.Walker) non considerano questo algoritmo come una vera induzione a ritroso, affermando che i primi a realizzare una dimostrazione per induzione a ritroso furono von Neumann e Morgenstern nel 1953

finire nel nodo S (sconfitta del giocatore I, vittoria del II), nel nodo P (patta) o nel nodo V (vittoria del giocatore I, sconfitta del giocatore II). Assumiamo che ciascun giocatore giochi in maniera logica, cioè punti a vincere.
L'algoritmo di Zermelo parte dall'ultimo nodo in cui è possibile prendere una scelta, cioè il nodo b. Qui la mossa tocca al giocatore II; la scelta più logica è il ramo L che porta al nodo S, cioè alla vittoria del giocatore II. Quindi il giocatore I per evitare la sconfitta deve nel suo ragionamento sostituire il nodo b con il nodo S. Ora deve riconsiderare l'albero così formato: con una mossa finisce nel nodo P (patta) e con l'altra nel nodo S (sconfitta). Quindi la scelta ottimale per lui è che la partita finisca in parità.
Procedendo a ritroso è dunque possibile teoricamente arrivare a decidere una strategia ottimale per ogni giocatore e risolvere dunque il gioco degli scacchi. Tuttavia questo algoritmo è inutilizzabile in pratica in quanto sono state stimate 10^{120} partite possibili, valore che si riduce a 10^{43} se consideriamo solo le posizioni ammissibili dei pezzi sulla scacchiera, ma ancora troppo grande per essere analizzato da un calcolatore in un tempo ragionevole.[6] □

Quindi Zermelo parte dal presupposto che gli scacchi sono un gioco con un numero finito di posizioni[7], dove non esiste un elemento aleatorio e dove gli avversari hanno informazione perfetta. Inoltre gli scacchi sono un gioco sequenziale, a turni, e la mossa di ciascun giocatore si basa sulla conoscenza completa del contesto, cioè di tutte le mosse eseguite precedentemente.
Nel suo articolo Zermelo si occupa principalmente di due problemi. Innanzitutto analizza che cosa significa per un giocatore essere in una posizione vincente e se è possibile definire ciò in modo matematico; inoltre se è in una posizione vincente, il giocatore può forzare la vittoria[8] con un numero finito di mosse? Per la prima questione sostiene che l'insieme contenente tutte le possibili sequenze di mosse che portano un giocatore (il bianco, ad esempio) a vincere, indipendentemente dalla strategia dell'altro, dev'essere non vuoto. Se questo insieme fosse vuoto, il migliore payoff (obiettivo) per il giocatore sarebbe la patta. Definisce allora un altro insieme contentente tutte le possibli sequenze di mosse che il giocatore può utilizzare per posticipare la sconfitta mediante un numero infinito di mosse (cioè il pareggio). Anche questo insieme può essere vuoto oppure, se l'avversario gioca correttamente, può contenere solo un numero finito di mosse e questo significa che

[6]Si rimanda a pag.21 per il calcolo del numero di partite e posizioni degli scacchi
[7]da regolamento quando si verificano tre posizioni identiche consecutive la partita è patta
[8]in gergo scacchistico forzare una vittoria significa essere in una posizione in cui lo scaccomatto dell'avversario è inevitabile; non è necessariamente l'ultima mossa e l'avversario non può fare niente per evitare la sconfitta

l'avversario dopo quel numero di mosse sarà in grado di forzare la vittoria. La possibilità che entrambi gli insiemi siano vuoti implica che il bianco non può garantire che non perderà. Questo fatto contraddice l'affermazione che negli scacchi il giocatore che fa la prima mossa [9] ha un vantaggio.
La seconda questione che interessava Zermelo era: posto che un giocatore (ad esempio il bianco) sia in una posizione vincente, quanto tempo ci vorrà affinchè forzi una vittoria? Egli affermò che il numero di mosse per vincere non saranno mai superiori al numero di posizioni del gioco e lo dimostrò per contraddizione. Infatti se il bianco vince con un numero di mosse superiori a tutte le posizioni possibili dei pezzi sulla scacchiera, di sicuro almeno una posizione vincente dev'essere apparsa due volte. Quindi se nella prima occasione avesse fatto le stesse mosse eseguite nella seconda, avrebbe vinto la partita in un numero di mosse minore rispetto al numero di posizioni.

1.2.2 Dénes König

Déres König(1884-1944) è un matematico ungherese che ha lavorato per tutta la sua carriera come professore a Budapest e si è occupato di calcolo combinatorio scrivendo uno dei primi trattati sulla teoria dei grafi: "Theory of Finite and Infinite Graphs"[10]. Nei suoi scritti si può notare un naturale proseguimento delle teorie di Zermelo sugli scacchi. In particolare nel 1927, tredici anni dopo Zermelo, König pubblica un articolo dal titolo "On a Method of Conclusion From the Finite to the Infinite [11], dove introduce il seguente lemma generale:

Lemma 1 (di König)**.**
Siano $E_1, E_2, E_3,\ldots$ una sequenza finita di insiemi non vuoti e sia S una relazione binaria con la proprietà che per ogni elemento x_{n+1} di E_{n+1} esiste almeno un elemento x_n di E_n tale che x_n e x_{n+1} siano in una relazione espressa da x_nSx_{n+1}. Allora si può determinare in ogni insieme E_n un elemento a_n, per cui la relazione a_nSa_{n+1}, valga sempre per una sequenza infinita a_1,a_2,a_3,... .

Su suggerimento di von Neumann, König lo applica per dimostrare la seguente proposizione riguardante la Teoria dei Giochi ed in particolare al gioco degli scacchi:

Proposizione 1.
Se q è una posizione vincente per il bianco, allora esiste un numero N che dipende da q, tale che il bianco può forzare una vittoria in meno di N mosse.

[9]per regolamento il bianco
[10]titolo originale: "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen"
[11]titolo originale "Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unedliche"

Dimostrazione. Innanzitutto q può essere sia una posizione risultante da una mossa del nero, sia una posizione iniziale del gioco. Ora la sequenza di mosse alternate che partono da q $(w_1, b_1, w_2, b_2....w_n)$ sono chiamate sequenze iniziali del gioco. Se la sequenza finisce con uno scaccomatto del bianco, il gioco finisce. L'insieme di tutte le sequenze iniziali è chiamato Q ed esiste sempre un sottoinsieme R di Q con le seguenti tre proprietà:

1. R contiene un elemento costituito da una singola mossa del bianco, cioè n=1;

2. se $(w_1, b_1, w_2, b_2....w_n)$ è un elemento di R che genera la posizione q' e b_n è una mossa accettabile del nero, allora ci sarà una mossa w_{n+1} tale che $(w_1, b_1, w_2, b_2....w_n, b_n, w_{n+1})$ sia ancora in R;

3. se una partita che finisce con uno scaccomatto o è infinita ha come proprietà che tutte le sequenze iniziali, che consistono nelle prime $2n-1$ mosse (per $n = 1, 2, 3...$), appartengono ad R, allora il gioco finisce con una vittoria del bianco (cioè non può essere infinita).

Un siffatto sottoinsieme R stabilisce cosa deve fare il bianco per giocare correttamente (condizioni 1 e 2), mentre la condizione 3 garantisce che il bianco vince se gioca la sequenza di $2n - 1$ mosse appartenenti ad R. Quindi se una partita inizia da q (posizione vincente) e soddisfa la condizione 3, è per definizione corretta. Dunque una partita corretta è finita e finisce con la vittoria del bianco.
Con questo abbiamo dimostrato che il bianco giocando correttamente può forzare la vittoria. Ora dimostriamo che esiste un limite superiore N al numero di mosse in una partita corretta. Sia E_n l'insieme di tutti gli elementi di R che consistono in 2n-1 mosse (n=1,2,3...): allora i vari E_1, E_2, E_3,... sono tutti finiti. Definiamo a_n e a_{n+1} come sequenze iniziali di gioco di rispettivamente n e $n + 1$ mosse e S una relazione binaria tra a_n e a_{n+1}. Ora assumiamo che la proposizione iniziale sia falsa; ciò implica che ci sono delle partite corrette di lunghezza arbitraria, quindi nessuno dei E_1, E_2, E_3,... sono vuoti. L'insieme E_n e la relazione S così definiti soddisfano le condizioni del Lemma di König, quindi esiste una sequenza infinita di mosse a_1, a_2, a_3 che costituisce una partita perfetta. Ma ciò è impossibile, perchè una partita corretta è finita.

□

Si può notare come nella dimostrazione di König non dice che il numero di posizioni debba essere finito. Questa è dunque una generalizzazione al secondo problema di Zermelo sui giochi con un numero infinito di posizioni. Quindi da ogni posizione si possono raggiungere solo un numero finito di nuove posizioni.

Inoltre König mostrò come i risultati di Zermelo erano incompleti. Innanzitutto non è riuscito a dimostrare che un giocatore che è in una posizione vincente può in ogni caso forzare una vittoria in un numero di mosse minore del numero di posizioni del gioco. Questo perchè nella sua dimostrazione afferma che alla prima occorrenza di una posizione vincente il bianco deve dare il matto, come aveva precedentemente fatto solo nella seconda occorrenza, ma non tiene conto che il nero nel frattempo potrebbe aver mosso proprio in quella posizione.

1.3 Conclusioni

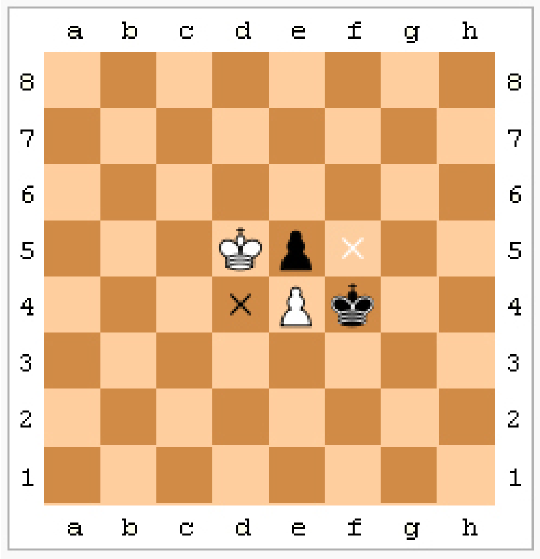
I lavori di Zermelo e König, così come altri meno noti[12], mostrano come i matematici a inizio novecento si siano occupati dei giochi di strategia tra due persone, a somma-zero e con informazione perfetta. La scelta del gioco degli scacchi deriva dal fatto che a quei tempi era un gioco molto popolare, praticato da moltissime persone e con una vasta letteratura alle spalle. Il punto in comune dell'analisi di questi studiosi è il concetto di posizione vincente, definita in modo matematico: se un giocatore è in una posizione vincente, può sempre forzare una vittoria indipendentemente dalla strategia adottata dall'avversario. Trattarono inoltre la seguente questione: dato che un giocatore è in una posizione vincente, esiste un limite superiore al numero di mosse con le quali può forzare una vittoria? Oppure, al contrario, se un giocatore si trova in una posizione perdente, quanto a lungo potrà postporre la sconfitta?
In tutti questi ragionamenti è implicito il concetto scacchistico di zugzwang, parola tedesca che significa "forzato a muovere". Nei giochi in generale rappresenta una situazione in cui il giocatore è in svantaggio perchè è costretto a fare una mossa che lo danneggia. In particolare nel gioco degli scacchi è una situazione di stallo in cui qualsiasi mossa disponibile porta alla perdita di uno o più pezzi o porta direttamente alla sconfitta, allo scaccomatto. E' più frequente nei finali di partita, ad esempio in un finale re-pedone contro re-pedone come si può vedere dalla figura a) e molto meno frequente ad inizio o metà partita. Esitono tre tipi di zugzwang negli scacchi:

1. entrambe le parti ne beneficerebbero se fosse il loro turno di muovere

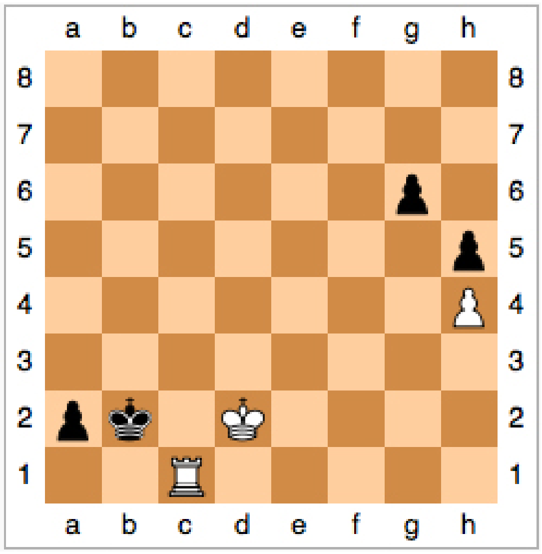
2. solo uno giocatore sarebbe in svantaggio se fosse il suo turno di muovere

3. entrambi i giocatori sarebbero in svantaggio se fosse il loro turno di muovere

[12] vedere Appendice A



(a) Zugzwang semplice



(b) Zugzwang che porta alla vittoria del bianco

Nella figura a sinistra sia che la mossa tocchi al bianco che al nero, i giocatori sono costretti ad allontare il re dal pedone; questo comporta che nella mossa successiva il re avversario può mangiare il pedone di colore opposto e quindi si arriva ad un finale re-pedone contro re, cioè ad una posizione vincente nel senso che giocando correttamente il giocatore con un pezzo in più vince in ogni caso.
Nella figura a destra l'unico modo che ha il bianco di vincere è di muovere la torre in $a1$ e di forzare lo zugzwang al nero; infatti la mossa successiva del nero sarà re in $a1$ per mangiare la torre bianca. A questo punto basta che il bianco muova il re in $c2$ per immobilizzare completamente il re nero e provocare lo zugzwang. Il giocatore nero è così obbligato a muovere il pedone in g5 dove il pedone bianco lo può mangiare facilmente. In seguito il pedone bianco arriva in g8, lo si promuove a regina ad esempio e il bianco vince così la partita.
I teoremi di Zermelo e König non si interessano di iterazione strategica o di equilibrio. Non si chiedono mai come i giocatori si devono comportare per raggiungere un risultato ottimale. Questa domanda sarà alla base delle teorie di von Neumann e del suo articolo "On the Theory of Strategic Games"[13] del 1928; in questo scritto i punti principali sono l'iterazione tra i giocatori ed il concetto di equilibrio. Queste due idee saranno alla base della moderna teoria dei giochi non cooperativi, cioè dove i giocatori non collaborano tra di loro, come negli scacchi.

[13]titolo originale: "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele"

Capitolo 2

Teoria dei giochi e analisi probabilistica degli scacchi

2.1 Alle origini della teoria dei giochi

La moderna teoria dei giochi nasce nel 1944 con l'uscita del libro "Theory of Games and Economic Behavior" di John von Neumann e Oskar Morgenstern; tuttavia non sarebbe mai nata senza le precedenti teorie di Zermelo, Borel, e dello stesso von Neumann.
Zermelo con il suo teorema del 1913 fornì la base teorica. Emile Borel (1871-1956) negli anni '20 incominciò a studiare i giochi di due persone a somma zero cercando di dimostrare l'esistenza di equilibri, ma non ci riuscì. Ci riuscì invece von Neumann con la pubblicazione nel 1928 sulla rivista Mathematische Annalen l'articolo "Zur Theorie der Gesellschaftspiele" (Sulla teoria dei giochi di società) che contiene fra le altre cose il risultato noto come teorema del minimax. A proposito di questo teorema von Neumann disse:

> "As far as I can see, there could be no theory of games... without that theorem... I thought there was nothing worth publishing until the Minimax Theorem was proved" [1]

Con questo teorema von Neumann dimostra l'esistenza di un equilibro nei giochi a somma zero a due giocatori, che può essere interpretato come un minimax. In seguito, con la collaborazione di Morgestern, generalizzò il risultato ad un numero qualsiasi di giocatori. Fu infine John Nash nel 1950 ad estendere questo risultato a tutti i giochi,

[1] traduzione: "Per come la vedo io, non ci sarebbe stata una teoria dei giochi senza quel teorema...pensavo che non valesse la pena pubblicare nient'altro fino a che il teorema del minimax non venisse dimostrato

compresi quelli non a somma zero e ai giochi non cooperativi. Questo risultato fu definito equilibrio di Nash.

2.1.1 Teorema del minimax

In generale nella teoria dei giochi una strategia minimax è una strategia mista[2] che porta alla soluzione dei giochi a somma zero. In questo tipo di giochi la soluzione minimax è la stessa soluzione che si ottiene mediante la strategia dell'equilibrio di Nash.

Teorema 3 (del minimax).
In ogni gioco a somma zero, tra due persone e con un numero finito di strategie, esistono un valore V e una strategia per ciascun giocatore tali che:

1. *data la strategia del giocatore 2, il miglior payoff possibile per il giocatore 1 è V*
2. *data la strategia del giocatore 1, il miglior payoff possibile per il giocatore 2 è -V*

Equivalentemente: i payoff che ottengono i due giocatori sono uguali ed opposti, perchè entrambi cercano di minimizzare il guadagno dell'avversario. Questo è tipico dei giochi a somma zero come gli scacchi, cioè in quei giochi dove un guadagno o una perdita di un partecipante sono perfettamente controbilanciati da una perdita o da un guadagno dell'altro partecipante. In altre parole il vantaggio di un giocatore è equivalente allo svantaggio dell'altro. Negli scacchi ogni mossa che porta un vantaggio al bianco, ad esempio la cattura di un pezzo nero, lo porta in vantaggio tanto quanto mette in difficoltà il nero. Tuttavia il concetto di somma zero negli scacchi si riferisce alla singola mossa, non ad una sequenza di mosse, in quanto una mossa può risultare vantaggiosa nell'immediato e rivelarsi dopo qualche turno un grave errore. Il nome minimax deriva dal fatto che ciascun giocatore minimizza il massimo payoff possibile dell'altro, e poichè il gioco è a somma zero, minimizza anche la sua massima perdita. Se invece consideriamo un gioco non a somma zero si parla di maximin. In seguito l'algoritmo mimimax verrà applicato per risolvere l'albero del gioco degli scacchi.

2.1.2 Equilibrio di Nash

John Forbes Nash(1928) introduce per la prima volta il concetto di equilibrio di Nash nella sua tesi di laurea nel 1950. Questo cosiddetto equilibrio consiste in un insieme di soluzioni per i giochi non cooperativi tra due o più persone, nei quali ogni giocatore gioca

[2]è una distribuzione di probabilità su tutte le strategie pure a disposizione, dove una strategia pura è come un giocatore giocherà l'intera partita mossa per mossa

in maniera razionale e nessun giocatore ha interesse ad essere l'unico a cambiare strategia. Se ciascun giocatore sceglie una strategia e nessun altro ne beneficia nel cambiarla mentre tutti gli altri mantengono la loro strategia, allora queste strategie e i corrispettivi payoff costituiscono l'equilibrio di Nash. In altre parole se un gruppo di persone deve fare una scelta, Nash sostiene che ognuno deve fare la scelta migliore per sè tenendo conto delle scelte di tutti gli altri e questo porta all'equilibrio. E una volta raggiunto l'equilibrio, se qualche giocatore decidesse di cambiare strategia, non ne beneficerebbe in nessun caso. Prima di definire l'equilibrio di Nash indroduciamo dei concetti chiave che sono alla base di questo equilibrio:

Definizione 2.1 (Gioco).
In teoria dei giochi un gioco è una coppia (S, f) *costituita da* S*, cioè l'insieme dei profili strategici di ogni giocatori, e da* f*, cioè la funzione di payoff.*

Definizione 2.2 (Insieme dei profili strategici).
In teoria dei giochi un insieme di profili strategici S *o combinazione strategica è l'insieme delle strategie di ogni giocatore che definiscono completamente tutte le azioni che prenderà durante il gioco. Un profilo strategico deve includere una sola strategia per ogni giocatore, dove per strategia si intende l'insieme di tutte le mosse che il giocatore eseguirà in tutte le possibili situazioni del gioco.*

Definizione 2.3 (Funzione di payoff).
In teoria dei giochi si definisce funzione di payoff $f(x) = (f_1(x), f_2(x)..., f_n(x))$[3]*, una funzione che associa ad ogni giocatore i il guadagno o payoff derivato da una data combinazione di strategie. Il guadagno di un giocatore non dipende solo dalla sua strategia ma anche dalle strategie degli avversari.*

Ora possiamo dare una definizione dell'equilibrio di Nash

Definizione 2.4 (Equilibrio di Nash).
Sia (S, f) *un gioco con* n *giocatori, dove* S_i *sia la strategia del giocatore* i*,* $S = S_1 \times S_2 \times ...S_n$ *sia l'insieme dei profili strategici e* $f(x) = (f_1(x), f_2(x)..., f_n(x))$ *sia la funzione dei payoff con* $x \in S$*, cioè l'insieme di tutte le strategie. Sia* x_i *il profilo strategico scelto dal giocatore* i *e* x_{-i} *il profilo strategico di tutti gli altri giocatori eccetto il giocatore* i*. Quando ogni giocatore* $i \in 1, 2, ..., n$ *sceglie la strategia* x_i *all'interno del profilo delle strategie* $x = (x_1, x_2, ...x_n)$ *allora quel giocatore ottiene un payoff* $f_i(x)$*. Quindi il payoff*

[3]il dominio e il codominio di una funzione di payoff variano a seconda del gioco che si prende in considerazione, per gli scacchi di solito lo scaccomatto è valutato 200 (vedere sezione 2.4)

di ciascun giocatore dipende dal profilo di strategia scelto. Un profilo strategico x^* è un equilibrio di Nash se ogni giocatore cambiando strategia singolarmente non ne trae vantaggio, cioè:

$$\forall i, x_i \in S_i : f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq f_i(x_i, x_{-i})$$

La definizione prevede che ci possa essere anche più di un equilibrio; inoltre si può applicare sia ad un gioco con strategie pure, sia ad un gioco con strategie miste. Nash ha dimostrato che, se consideriamo anche le strategie miste, allora ogni gioco con un numero finito di partecipanti in cui ognuno di essi può scegliere tra un insime finito di strategie pure, ha almeno un equilibrio di Nash. Se la disuguaglianza della definizione è una disuguaglianza stretta, cioè con $>$ al posto di $\geq$, si parla di equilibrio di Nash stretto. Invece se per alcuni punti di equilibrio vale l'uguaglianza tra i due payoff corrispondenti, si parla di equlibrio di Nash debole. Vediamo ora sotto quali condizioni si può adottare la strategia dell'equilibrio di Nash:

- Tutti i giocatori devono fare il possibile per massimizzare il loro payoff seguendo le regole del gioco.
- Tutti i giocatori devono rispettare le regole del gioco.
- Tutti i giocatori devono avere intelligenza sufficiente per dedurre la soluzione.
- Ogni giocatore conosce la strategia di equilibrio di tutti gli altri.
- I giocatori sanno che se cambieranno la loro strategia, quella degli altri non cambierà.
- Ogni giocatore conosce le condizioni scritte sopra e ognuno sa che anche gli altri le conoscono. Così ogni giocatore sa che gli altri le rispetteranno.

Nella sua dimostrazione Nash è riuscito a collegare due concetti apparentemente distanti: quella di punto fisso presente nel teorema di Katutani e quello di strategia più razionale che un giocatore può adoperare quando compete con un avversario anch'esso razionale. L'equilibrio di Nash non solo è fondamentale per la teoria dei giochi, ma ha avuto grande seguito quando è stato applicato in campo economico, biologico e sociologico; infatti è stato applicato a moltissimi dilemmi decisionali o paradossi. Inoltre contraddice la teoria dell'economista e filosofo Adam Smith secondo la quale il miglior risultato si ottiene quando ogni componente del gruppo fa ciò che è meglio per se. L'esempio più celebre di applicazione dell'equilibrio di Nash è il dilemma del prigioniero. Ne facciamo una breve trattazione. Abbiamo due prigionieri in celle diverse non comunicanti; entrambi possono parlare accusando l'altro o non confessare. Viene detto loro:

- se entrambi confessano, vengono condannati entrambi a 3 anni
- se solo uno dei due confessa, chi confessa, cioè accusa l'altro, è libero, l'altro è condannato a 5 anni
- se entrambi non parlano vengono condannati entrambi ad un anno

La matrice di payoff risultante è: Quindi se confessa un prigioniero rischia 0 o 3 anni,

	confessa	non confessa
confessa	$(3,3)$	$(0,5)$
non confessa	$(5,0)$	$(1,1)$

Tabella 2.1: Matrice di payoff del dilemma del prigioniero

mentre se non confessa ne rischia 1 o 5. Siccome ogni prigioniero migliora la sua situazione passando da non confesso a confesso, sapendo che la migliore decisione per l'altro prigioniero è confessare, allora per Nash questo gioco ha un singolo equilibrio: entrambi confessano. Questa sembrerebbe una scelta irrazionale in quando il risultato migliore per entrambi sarebbe non confessare, un anno in prigione invece di tre, ma questo non è un equilibrio. Quest'ultimo modo di ragionare è chiamato ottimo paretiano e si verifica quando presa una qualunque delle decisioni, non è possibile trovarne un'altra che comporti per almeno uno dei due giocatori una riduzione degli anni di carcere senza che aumentino quelli dell'altro. Questo concetto non è applicabile alla scelta confessa-confessa dell'equilibrio di Nash, in quanto esiste una soluzione, cioè non confessa-non confessa che porta ad una riduzione degli anni di carcere per entrambi e quindi in questo caso l'ottimo paretiano non coincide con l'equilibrio di Nash. Tutte le altre combinazioni, cioè confessa-non confessa, non confessa-confessa e non confessa-non confessa sono ottimi paretiani.

2.2 La Teoria dei Giochi

La moderna teoria dei giochi nasce nel 1944 con l'uscita del libro "Theory of Games and Economic Behavior" di John von Neumann (1903-1957) e Oskar Morgenstern (1902-1977), rispettivamente un matematico ed un economista.

Definizione 2.5 (Teoria dei giochi)**.**
La teoria dei giochi è una disciplina matematica che analizza situazioni di conflitto in cui vi sono interazioni tra uno o più soggetti, tali per cui le decisioni di un soggetto

possono influire sui risultati del rivale secondo un meccanismo di retroazione e finalizzate al massimo payoff del soggetto.

Innanzitutto la parola giochi non comprende tutti i giochi, ma solo quelli di strategia; inoltre con gioco si intendono anche le situazioni di conflitto o cooperazione tra due o più individui che interagiscono tra loro e determinano l'esito finale. Se non c'è interazione non c'è gioco di strategia. Inoltre i giocatori devono essere necessariamente più di uno, in quanto un gioco con un solo giocatore è definito matematicamente come un "problema di decisione". Quindi la teoria dei giochi prende in esame una situazione di interazione e si propone di modellarla come un modello matematico. Per fare ciò bisogna analizzare dall'esterno il comportamento dei giocatori ed occorre supporre che siano noti a ciascuno i seguenti punti:

- l'insieme di tutti i giocatori
- quali scelte strategiche sono disponibili a ciascuno di essi
- cosa ottiene ciascun giocatore in ciascuna delle possibili conclusioni del gioco (payoff) e quali sono gli esiti che preferisce
- se un giocatore gioca in maniera razionale

Una volta modellata come gioco una situazione di interazione strategica, la teoria dei giochi si propone di rispondere alle seguenti domande:

- Quali scelte di strategie faranno i vari giocatori?
- Come si possono ottimizzare le strategie scelte, una volta noti gli obiettivi?

Le risposte a queste domande dipendono dal modello costruito e dalle ipotesi sugli intenti che guidano i giocatori. Qui la teoria dei giochi fa una distinzione importante. Si parla di *gioco cooperativo* se i giocatori possono collaborare tra di loro per massimizzare l'interesse globale visto come somma degli interessi individuali. Si parla invece di *gioco non cooperativo* se ogni giocatore gioca in maniera indipendente e per massimizzare il proprio payoff.

2.2.1 Ipotesi di base della teoria dei giochi

La teoria dei giochi si propone un duplice obiettivo:

- fornire *indicazioni predittive* sul comportamento dei giocatori, cioè sulle scelte che faranno durante il gioco;

- fornire *indicazioni normative* sulle scelte ottimali che i giocatori dovrebbero fare;

Per raggiungere questi obiettivi bisogna considerare delle ipotesi restrittive sia sui giocatori sia sulle regole del gioco. La prima ipotesi è che i giocatori agiscano in maniera *razionale*, definendo il termine razionale con i seguenti punti:

- *Ogni giocatore ha un sistema coerente di preferenze sugli esiti del gioco.*
  Questo significa che ogni giocatore ha una relazione di preferenza $\preceq$, cioè una relazione binaria totale e transitiva sull'insieme Σ degli esiti di gioco. Totale significa che $\forall(a, b) \in \Sigma$ si verifica almeno una di queste due possibilità: $(a \preceq b), (b \preceq a)$;[4] mentre transitiva significa che $(a \preceq b), (b \preceq c)$ implica $(a \preceq c)$. Se il giocatore considera due alternative equivalenti può scegliere l'una o l'altra, ad esempio lanciando una moneta.

- *Ogni giocatore opera le sue scelte perseguendo in modo inflessibile le sue preferenze*
  Questo significa che tutti gli elementi esterni che influenzano il giocatore devono essere inglobati nelle sue preferenze.

- *Ogni giocatore è intelligente ed è un logico perfetto*
  Ciò significa che è in grado di eseguire tutte le considerazioni sul gioco ed di analizzarlo nella sua completezza.

Una seconda ipotesi che sta alla base della teoria dei giochi è in relazione al fatto che le regole del gioco siano conoscenza comune dei giocatori. Innanzitutto le regole di un gioco devono comprendere:

- la lista dei giocatori;

- l'elenco delle strategie pure disponibili per ciascun giocatore;

- i payoff che ciascun giocatore ottiene in corrispondenza di tutte le possibili combinazioni di strategie pure;

- l'ipotesi che ogni giocatore è un massimizzatore razionale;

Il concetto di conoscenza comune delle regole non significa solo che ogni giocatore conosce completamente il regolamento, ma anche che ciascuno sà che anche tutti gli altri lo conoscono completamente. Questo perchè un giocatore potrebbe preferire una strategia ad un'altra supponendo che il suo avversario non conosca una parte di regolamento.

[4] $(a \preceq b)$ si legge: a è meno preferito di b

2.2.2 Classificazione dei giochi

La teoria dei giochi esamina contesti molto differenti tra loro pertanto, per semplificarne l'analisi, raggruppa i giochi che presentano le stesse caratteristiche secondo le categorie di seguito riportate.
Innanzitutto distinguiamo i giochi con mosse *sequenziali* da quelli con mosse *simultanee*. Gli scacchi sono un gioco di mosse sequenziali: muove il bianco, poi il nero, poi il bianco e così via; la scelta della mossa attuale è determinata dai calcoli sulle conseguenze future. La caratteristica dei giochi sequenziali è che ad ogni mossa il giocatore pensa alla possibile o alle possibili contromosse che farà l'avversario in risposta. Nei giochi a mosse simultanee invece il compito di ogni partecipante è pensare alla probabile mossa del suo avversario; deve aver coscienza che mentre sta facendo i suoi calcoli, anche l'avversario sta cercando di anticiparlo. C'è quindi una logica circolare di pensiero: egli pensa che io pensi che egli pensa... . Quindi la differenza tra i due tipi di gioco non sta solo nel fatto che le mosse avvengono una dopo l'altra o in contemporanea, ma anche nel fatto che vengono richiesti due differenti tipi di ragionamento interattivo. Per rappresentarli graficamente si usano schemi ad albero per le mosse sequenziali e tabelle di payoff nel caso di mosse simultanee. Un'altra caratteristica dei giochi sequenziali come gli scacchi è il ragionamento di analisi a ritroso per analizzarne l'albero di gioco. Nella vita reale molti giochi combinano entrambi i tipi di mosse; ad esempio quando un gioco segue scelte simultanee, ma è articolato in più stadi successivi.
Un'altra tipologia di classificazione dei giochi tiene conto se gli interessi dei giocatori sono contrapposti o se ci sono degli interessi comuni. Si parla di giochi *a somma zero* quando le vincite di un giocatore sono le perdite dell'altro, quindi sono giochi puramente competitivi. Al contrario quando gli interessi sono comuni totalmente o parzialmente si parla di giochi non a somma zero: questo è il caso più frequente in ambito economico dove per fare un accordo o uno scambio è buona prassi che ci siano degli interessi comuni, anche parziali. Agli antipodi dei giochi competitivi ci sono i giochi collaborativi dove gli interessi sono completamente in comune e i giocatori si parlano e si aiutano a vicenda per raggiungere l'obiettivo comune.
Ci sono poi giochi disputati una sola volta e giochi che possono essere ripetuti più volte. In una partita singola il giocatore non deve pensare alle ripercussioni sulle altre partite, cerca semplicemente di ottimizzare il suo payoff. In più partite invece un giocatore deve valutare se gli conviene giocare al massimo delle sue possibilià o gli conviene nascondere il suo gioco e non far vedere ai suoi avversari le sue potenzialità al completo o le sue debolezze. Inoltre in una partita secca per una buona strategia si possono sfruttare il

segreto e la sorpresa. Un gioco può essere competitivo sul breve periodo, ma ammettere la possibilità di cooperazione sul lungo periodo, e questo di conseguenza cambia le strategie ed il modo di giocare di un giocatore.
A seconda del tipo di informazione che si possiede durante un partita, un gioco può essere ad *informazione perfetta* o ad *informazione imperfetta*. Se in ogni momento il giocatore conosce esattamente la situazione iniziale e tutte le mosse che lo hanno portato lì, si parla di informazione perfetta. In altri casi quando si ha una conoscenza solo parziale della situazione, tipicamente ogni giocatore conosce la propria e non quella degli altri, allora si tratta di un gioco ad informazione imperfetta. La locuzione imperfetta non vuol dire incompleta, cioè che manca qualche elemento di informazione perchè il gioco sia definito. Dalle definizioni appena date si deduce che tutti i giochi con mosse simultanee sono giochi ad informazione imperfetta.
Un gioco può essere inoltre *cooperativo* o *non cooperativo*. Nel primo tipo di gioco i partecipanti possono assumere degli impegni che hanno carattere vincolante, mentre nel secondo gli eventuali accordi sono non vincolanti. Ovviamente per rendere vincolante un accordo c'è bisogno di una figura imparziale che lo faccia rispettare o delle penalità.
L'ultima distinzione presa in considerazione da questa teoria è la differenza tra giochi *deterministici* o *stocastici*. Nei giochi stocastici sono presenti degli elementi aleatori che influiscono sull'esito della contesa; nei giochi deterministici invece domina la ragione e la logica e non ci sono elementi casuali.

	DETERMINISTICI	STOCASTICI
INFORMAZIONE PERFETTA	Scacchi, Dama, Go, Reversi	Backgammon, Gioco dell'Oca
INFORMAZIONE IMPERFETTA	Battaglia navale,Kriegspiel	Bridge, Poker, Scarabeo, Risiko

Tabella 2.2: Esempi di classificazione di giochi

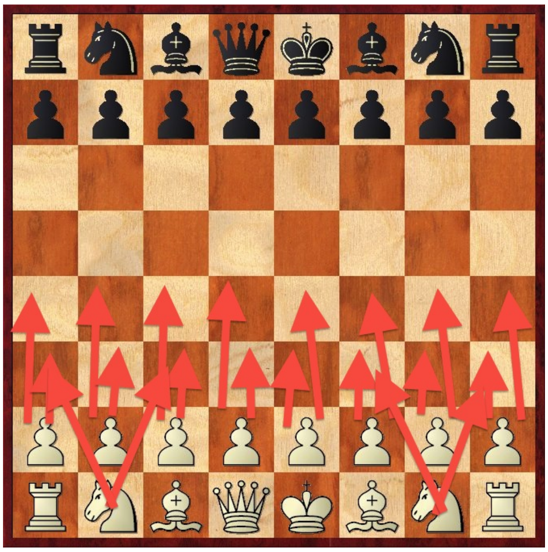
2.2.3 Applicazione al gioco degli scacchi

Nel linguaggio della teoria dei giochi gli scacchi sono un gioco con un numero di mosse finito senza elementi random, cioè deterministico, giocato da due giocatori tali che ognuno ha disposizione informazioni complete. Pertanto si dicono ad informazione perfetta perchè:

- due avversari alternano le mosse e conoscono in ogni istante le stesse informazioni sullo stato del gioco;

- ad ogni turno di gioco le mosse ammesse dalle regole sono ben definite e finite;
- la partita termina necessariamente con la vittoria di uno dei due giocatori o in parità (patta);

Gli scacchi sono inoltre un gioco non cooperativo, a somma-zero: il vantaggio di un giocatore corrisponde allo svantaggio dell'altro. Le mosse sono sequenziali: si gioca a turni, spesso regolamentati da un cronometro. Ad ogni turno corrisponde una mossa e queste sono finite in quanto il regolamento prevede la parità se si ripetono tre volte consecutivamente le stesse posizioni. Inoltre, sempre da regolamento, è possibile finire in pareggio se nelle ultime cinquanta mosse non vi è stata la cattura di nessun pezzo e non è stato mosso alcun pedone. Il teorema di Zermelo e quello del minimax garantiscono che esiste un risultato univoco, cioè una strategia ottima, una partita perfetta; tuttavia il numero di posizioni (o mosse) del gioco degli scacchi è elevatissimo, superiore anche alla capacità di analisi di qualsiasi computer. La prima mossa del bianco consiste in venti diverse aperture: gli otto pedoni che possono muoversi di una posizione, o di due posizioni in avanti, quindi sedici possibili mosse, e le quattro mosse che possono fare i due cavalli. Anche la prima mossa del nero consiste nelle stesse venti mosse. Quindi dopo due mosse



(a) Le 20 possibili prime mosse

abbiamo già $20 \cdot 20 = 400$ tipologie di mosse diverse. Da ora in poi ad ogni nuova mossa le possibiltà non saranno più venti a turno, ma moltissime di più perchè i pezzi iniziano a sbloccarsi dalla posizione iniziale e a potersi muovere liberamente sulla scacchiera. E' stato verificato che dopo tre mosse le possibilità sono 8902, dopo quattro, cioè due mosse del bianco e due del nero, sono 71852, dopo 5 8098963, e via così. La crescita del numero massimo di mosse non è uniforme, subisce un'impennata nella fase centrale del gioco dove la maggior parte dei pezzi si trova al centro della scacchiera e ci sono più possibilità di muoversi. Ma verso la fine del gioco questa crescita subisce un calo dovuto alla perdita di pezzi, fino ad arrivare nei finali dove le possibili mosse per turno sono anche inferiori alle venti iniziali. Il numero massimo di mosse per turno quando tutti i pezzi sono ancora sulla scacchiera, si ottiene sommando il numero massimo di mosse per ciascun pezzo (cioè 8 per il re, 27 per la regina, 14 per la torre, 13 per l'alfiere, 8 per il cavallo e 2 per il pedone[5])per il numero di pezzi (1 re,1 regina, 2 torri, 2 cavalli, 2 alfieri, 8 pedoni):

$$8 + 27 + (14 \cdot 2) + (13 \cdot 2) + (8 \cdot 2) + (2 \cdot 8) = 121 \tag{2.1}$$

Invece il numero medio di mosse per turno (sempre considerando tutti i pezzi sulla scacchiera) si calcola sommando il numero medio di mosse per ciascun pezzo (cioè 6,5 per il re, 22,5 per la regina, 14 per la torre, 8.5 per l'alfiere, 5 per il cavallo e 1 per il pedone[6]) per il numero di pezzi:

$$7 + 22.5 + (14 \cdot 2) + (8.5 \cdot 2) + (5 \cdot 2) + (1 \cdot 8) = 92,5$$

Nella pratica questo numero sarà inferiore in quanto non tiene conto del fatto della mancanza di uno o più pezzi, cosa molto probabile a metà match, o del fatto che alcuni pezzi, essendo sulla traiettoria di altri, ne limiteranno i movimenti. Tipicamente una posizione media ha circa 30-40 possibili mosse. Per semplificare i calcoli consideriamo che ogni volta che muove ciascuno abbia a disposizione 20 possibilità per scegliere una mossa e che la partita finisca dopo 40 mosse. Allora avremmo che il numero totale di posizioni possibili è:

$$\begin{aligned} P(40) =& 20 + 20 \cdot 20 + 20 \cdot 20 \cdot 20 + ... + 20^{40} = 20 \cdot (1 + 20 + 20^2 + ... + 20^{39}) = \\ =& 20 \cdot \frac{20^{40} - 1}{20 - 1} \simeq \frac{20}{19} \cdot 20^{40} \simeq 1.16 \cdot 10^{52} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Shannon con un calcolo più accurato ha dimostrato che in una partita di 40 mosse il numero totale di posizioni è:

$$P(40) \approx \frac{64!}{32! \cdot (8!)^2 \cdot (2!)^6} \approx 10^{43}$$

[5]la dimostrazione di questi risultati è presente nel paragrafo: Modello probabilistico sull'efficacia dei singoli pezzi degli scacchi

[6]la dimostrazione di questi risultati è presente nel paragrafo: Modello probabilistico sull'efficacia dei singoli pezzi degli scacchi

Per valutare la grandezza di questo numero basti pensare che i super computer attuali eseguono circa 10^{18} operazioni al secondo e che un anno è composto da circa $3.15 \cdot 10^7$ secondi. Supponendo di poter analizzare circa 10^{18} posizioni al secondo calcolo il numero di anni che occorrono per analizzare le 10^{43} posizioni individuate da Shannon:

$$\frac{10^{43}}{3.15 \cdot 10^7 \cdot 10^{18}} \simeq 3.17 \cdot 10^{17} \; anni$$

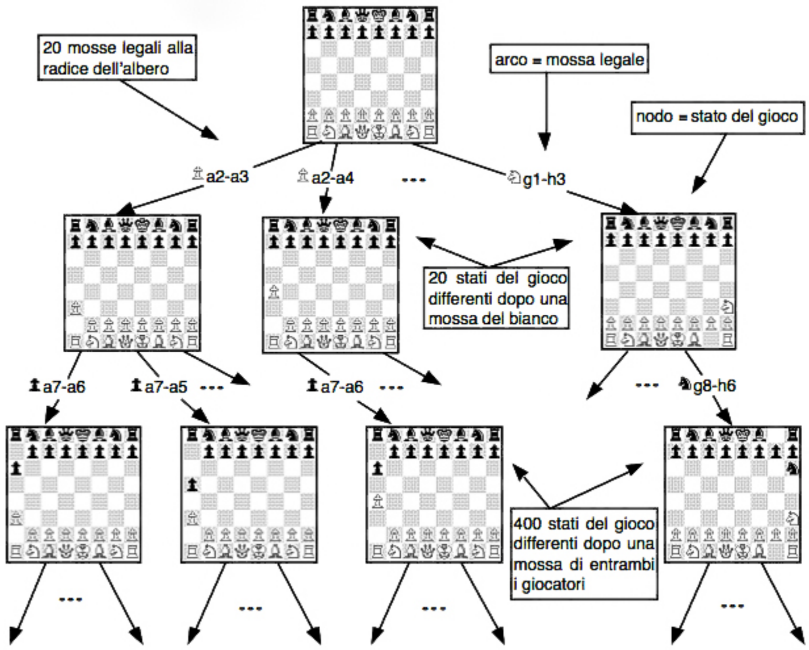
Quindi ad un processore moderno occorrono circa $3.17 \cdot 10^{17}$ anni per analizzare tutte le posizioni possibili. Per fare un confronto l'universo ha circa 10^{10} anni.
Tuttavia il numero di possibili posizioni calcolato da Shannon include alcune posizioni illegali, come i pedoni che si muovono di due caselle o quando entrambi i re sono sotto scacco ed esclude le posizioni che si ottengono dalla promozione dei pedoni. Tenendo conto di questi aggiustamenti Victor Allis ha calcolato un limite superiore di $5 \cdot 10^{52}$ ed un valore reale di circa 10^{50} posizioni. Stime più recenti, in particolare un programma creato da John Tromp, ha calcolato un upper bound per il numero di posizioni di

$$2^{155} \simeq 4.56 \cdot 10^{46}.$$

Dopo aver calcolato il numero stimato di posizioni possibili, calcoliamo il numero di partite possibili, che sarà un numero molto superiore in quanto include tutte le posizioni ripetute all'interno del gioco. Consideriamo il gioco degli scacchi come un albero: assumiamo di media 35 mosse possibili a turno, quindi 35 figli per ogni nodo dell'albero e che la partita duri 80 mosse (40 mosse il bianco, 40 il nero). Quindi si ottengono

$$35^{80} \approx 3.35 \cdot 10^{123}$$

possibili partite. Anche Shannon diede una stima di questo valore e ottenne 10^{120}. Questo numero venne chiamato in suo onore numero di Shannon ed è superiore ad un googol (10^{100}) e al numero di atomi nell'universo osservabile, che è stimato tra $4 \cdot 10^{79}$ e 10^{81}. Questi valori dimostrano che con la tecnologia attuale e con questo metodo a "forza bruta" è impossibile risolvere il gioco degli scacchi.



2.3 L'albero di gioco

Per descrivere graficamente i giochi sequenziali come gli scacchi si utilizza un albero di gioco. I nodi sono le posizioni e gli archi le mosse legali. Nell'albero degli scacchi la radice è la posizione iniziale dei pezzi sulla scacchiera, i figli sono le posizioni raggiungibili dalle mosse legali e le foglie[7] sono le posizioni terminali, cioè lo scaccomatto o la parità. Come abbiamo visto nel paragrafo precedente la radice ha venti figli, mentre il numero medio di figli per ogni nodo varia tra trenta o quaranta. Il numero di nodi, cioè il numero di partite possibili è di circa 10^{120} secondo la stima di Shannon, mentre le posizioni differenti sono 10^{43}, valori impensabili da analizzare o memorizzare per qualsiasi calcolatore. Perciò l'analisi deve essere limitata ad un albero parziale e, per ottenerlo, esistono due strategie principali, chiamate strategie di Shannon:

- strategia di tipo A: esplorazione per "forza bruta". Si valutano tutte le mosse possibili per ogni posizione, fino ad un certo livello dell'albero di gioco (effetto orizzonte). Il livello in cui ci si ferma dipende dalla massima potenza computazionale del calcolatore usato. Oggi un computer ottimizzato nell'analisi dell'albero di gioco arriva ad esplorare in media alberi profondi 12/14 semimosse in 3 minuti, il tempo medio di mossa di torneo.

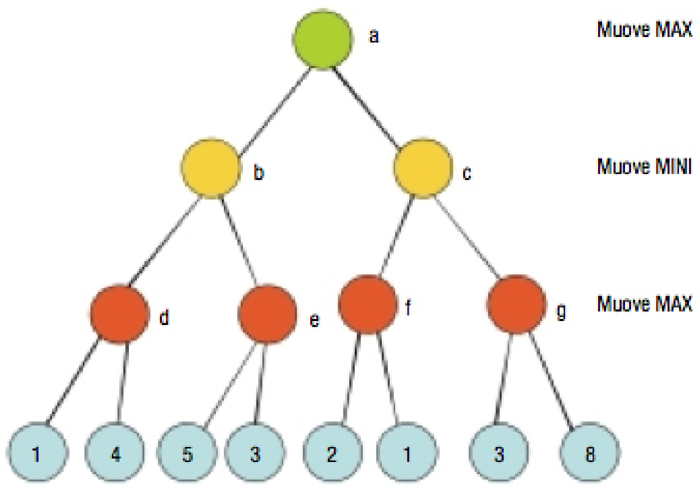
[7] i nodi esterni

- strategia di tipo B: esplorazione con valutazione euristica. Si valutano solo le mosse più "interessanti" per ogni posizione. Mediante una certa euristica si valutano le mosse migliori e si tralasciano i rami che portano alle altre. Per questo motivo questa strategia garantisce un'esplorazione più in profondità all'albero di gioco.

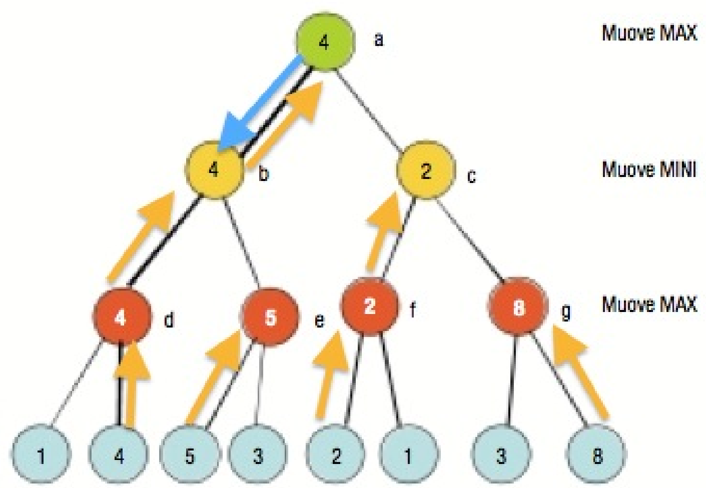
Durante i primi vent'anni (1955-1975) la ricerca si è concentrata su una strategia di tipo B, tuttavia non fu mai scoperta una combinazione di euristiche sufficientemente intelligente per stabilire a priori quali siano le mosse interessanti e quali quelle da scartare. Per analizzare l'albero di gioco fu dunque adottata la strategia A. Quindi tutte le possibili evoluzioni di una partita, a partire da una certa mossa, vengono rappresentate in un albero i cui nodi sono caratterizzati da un certo peso. Lo scopo dei calcolatori è di ricercare la miglior mossa possibile all'interno di una determinata strategia. Per raggiungere questo scopo si utilizza un algoritmo chiamato *minimax*, ricavato dal teorema del minimax di von Neumann. Questo algoritmo sceglie ogni mossa in modo da ridurre al minimo il massimo dei vantaggi che l'avversario potrà conseguire. Per fare ciò l'algoritmo esplora tutti i possibili nodi dell'albero fino all' "effetto orizzonte" e mediante una funzione di valutazione posizionale misura la bontà di quell'ultima posizione, cioè quanto è vantaggio per il giocatore raggiungere quella posizione. Siccome lo scopo dell'algoritmo è minimizzare il valore della migliore posizione raggiungibile dall'avversario, il peso di ogni mossa è proporzionale a quanto la mossa diminuirà il valore della posizione dello sfidante. Per convenzione adottiamo i valori di $+\infty$ e $-\infty$ per le mosse che portano allo scaccomatto di un giocatore o dell'altro. Chiamiamo il primo giocatore che deve muovere Max (massimizzante) e lo sfidante Min (minimizzante). Lo pseudocodice dell'algoritmo minimax è il seguente:

```
    int minimax (nodo, profondità)
if nodo è una foglia oppure profondità = 0
return (valore(nodo));
if tocca all'avversario
α := +∞
for (ogni figlio di nodo)
α := min(α, minimax (figlio, profondità-1))
else tocca a noi α := −∞
for (ogni figlio di nodo)
α := msx(α, minimax (figlio, profondità-1))
return α;
```

Questo algoritmo riceve come input il nodo da valutare e la massima profondità analizzabile dall'albero e come output il valore del nodo dato, di modo che il giocatore scelga la mossa che minimizza la contromossa dell'avversario.
Un esempio di funzionamento dell'algoritmo minimax è descritto dalle seguenti figure:



(a) Situazione iniziale del minimax



(b) Situazione finale del minimax; la freccia azzura indica la mossa migliore

L'algoritmo inizia stabilendo con la funzione di valutazione tutti i pesi dei nodi del livello più profondo dell'albero. A questo punto li tramette verso l'alto secondo la regola del minimax. Se nel penultimo livello deve muovere Max come da figura, il valore dei nodi del penultimo livello saranno il massimo delle valutazioni dei rispettivi figli. Quindi ad esempio in posizione f, dove i due figli hanno peso 2 e 1, ci andrà il peso maggiore cioè 2. Passando al livello successivo verso l'alto, la mossa tocca a Min e otterrà come valore

il minimo tra i valori delle sue posizioni sottostanti. L'algoritmo continua a valutare i valori massimi e minimi dei figli e ad assegnarli alternativamente ai genitori, finchè non raggiunge la radice, per la quale sceglie, nel nostro esempio, il nodo con valore massimo, cioè quello che gli permette di minimizzare la massima perdita.
L'ipotesi che sta alla base di questo metodo è che più profondo è l'albero da valutare, più efficiente è l'algoritmo. Contrariamente alle aspettative, cioè che se un albero è più profondo è più difficile valutarne le posizioni finali, risultati empirici confermano che i programmi con harware più veloce, in grado di analizzare più estesamente i nodi, sconfiggono sistematicamente lo stesso programma che usa un harware più lento.
Una possibile semplificazione del minimax è chiamata *negamax*. Questo algoritmo sfrutta il fatto che nei giochi a somma zero $max(a, b) = -min(-a, -b)$. Più precisamente nel nostro caso il valore della posizione di un giocatore è la negazione del valore dell'altro. Così nel percorso di propagazione dei valori verso la radice non ci interessa più distinguere tra il giocatore Max e Min, ma basta semplicemente assegnare al nodo padre il massimo dei valori cambiati di segno dei figli. Quindi rispetto al minimax dove si sceglieva alternativamente il massimo o il minimo valore tra i vari figli, con il negamax basta un solo calcolo per dare valore a tutte le posizioni. Lo pseudocodice di questo algoritmo è il seguente:

```
   int negamax (nodo)
if nodo è una foglia
return (valore-per-chi-muove(nodo));
for (ogni figlio[i] di nodo)
valore[i]= -negamax (figlio[i]);
return (max(val[i]));
```

La complessità di questi algoritmi è $O(b^d)$, dove b corrisponde al branching factor (numero medio di figli per nodo, che coincide con il numero medio di mosse per posizione) e d è la profondità dell'albero (depth).

2.3.1 L'algoritmo AlphaBeta

L'algoritmo AlphaBeta deriva dall'osservazione che i due precendenti algoritmi eseguono una visita completa dell'albero di gioco (fino al livello orizzonte), anche se molti dei nodi visitati non contribuiscono alla valutazione della radice, quindi non influiscono sulla mossa migliore da prendere. L'idea è quindi quella di tagliare i rami che non influenzano la valutazione finale. Questo produce due effetti vantaggiosi: si riduce la complessità della ricerca e si riducono i tempi. Per prima cosa si esegue una ricerca in profondità (depth-first-search) da sinistra a destra. Poi si usano due valori detti α e β, che rappresentano in ogni punto la migliore e la peggiore posizione raggiungibile. In particolare se Max è il primo giocatore a muovere (giocatore massimizzante) e Min il giocatore minimizzante allora:

- α è il punteggio minimo che Max può raggiungere; all'inizio dell'algoritmo vale $-\infty$. Durante il calcolo coincide con il valore della peggiore mossa possibile attualmente calcolata per Max.
- β è il punteggio massimo che Min può raggiungere; all'inizio dell'algoritmo vale $+\infty$. Durante il calcolo coincide con il valore della migliore mossa possibile attualmente calcolata per Min.

Quindi è come se ogni nodo contenesse una etichetta coi valori di α e β, e questi si aggiornano automaticamente man mano che la ricerca si approfondisce. Se durante l'algoritmo in un certo nodo il valore di α diventa maggiore di β, la ricerca al di sotto di quel nodo si blocca e il programma passa ad un altro sottoalbero. Si può quindi togliere quel ramo e tutti quelli al di sotto. Si parla di *taglio alpha* quando:

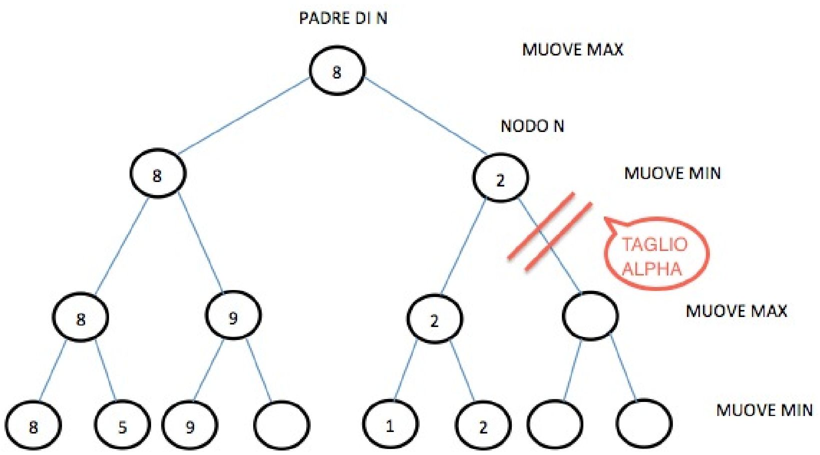
- è in esame un nodo N con mossa all'avversario (Min)
- il genitore di N ha un valore provvisorio maggiore del valore di N
- il nodo N ha altri figli non ancora considerati che possiamo tagliare.

Si parla di *taglio beta* quando:

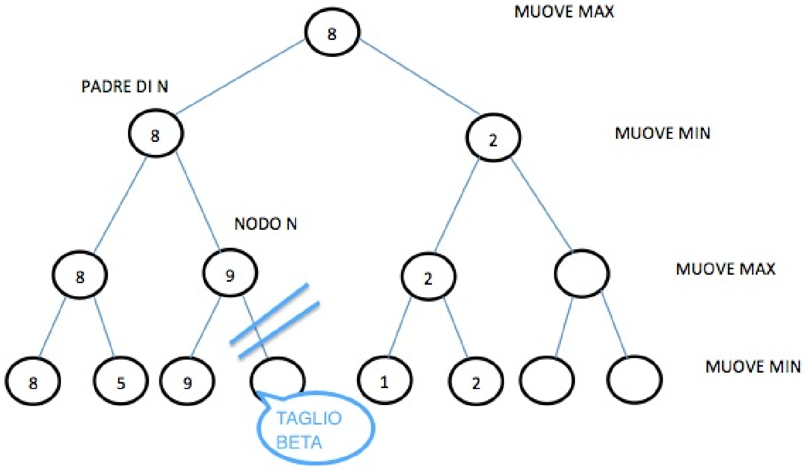
- è in esame un nodo N con mossa al giocatore Max
- il genitore di N ha un valore provvisorio minore del valore di N
- il nodo N ha altri figli non ancora considerati che possiamo tagliare.

Lo pseudocodice dell'algoritmo è il seguente:

```
int alphabeta(nodo, profondità, α ,β, giocatore)
if (profondità = 0 o nodo è una foglia)
return (valore(nodo));
if giocatore=Max
for (ogni figlio di nodo)
```



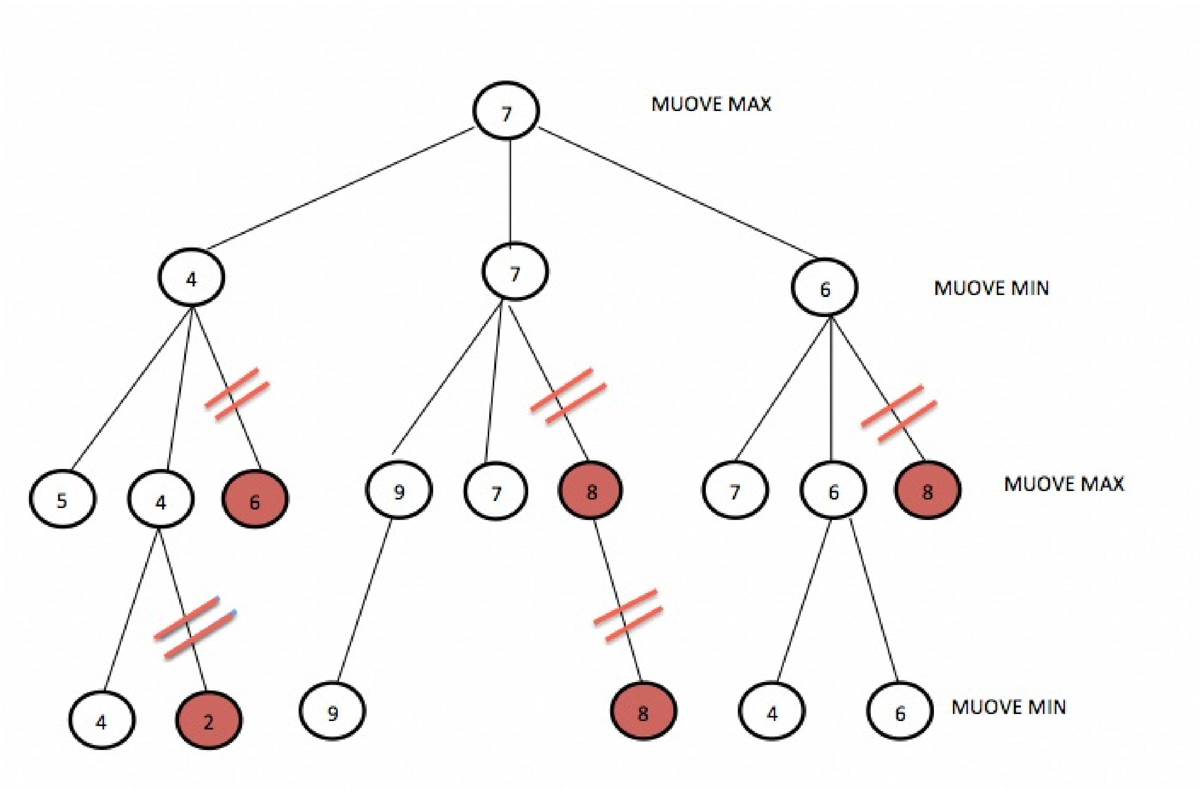
(a) Esempio di taglio alpha



(b) Esempio di taglio beta

```
α :=max(α, alphabeta(figlio, profondità-1, α ,β, not(giocatore) ))
if β ≤ α
break; taglio beta
return α;
else for (ogni figlio di nodo)
β :=min(β, alphabeta(figlio, profondità-1, α ,β, not(giocatore) ))
if β ≤ α
break; taglio alpha
return β;
```

Vediamo ora un esempio generale di algoritmo alphabeta:



(a) Esempio di ricerca alphabeta con i relativi tagli

Mediante i tagli cancelliamo i valori che non influiscono sul valore della radice, cioè sulla valutazione della mossa che ci interessa compiere. Il risultato è che riusciamo a migliorare le prestazioni, in termini di complessità rispetto agli algoritmi minimax e negamax. In particolare se ci troviamo nel caso peggiore, quello in cui non ci sono tagli, la complessità è la stessa del minimax e cioè $O(b^d)$. Tuttavia in media a causa dei tagli la complessità scende a $O(b^{\frac{d}{2}}) = O(\sqrt{b^d})$. In pratica se minimax e negamax visitano k nodi, alfabeta ne visita $\sqrt{k}$.

2.4 Modello probabilistico sull'efficacia dei singoli pezzi degli scacchi

Lo scopo di questa sezione è creare un modello probabilistico che valuti l'efficacia dei vari pezzi, intesa come probabilità di mettere sotto scacco il re avversario. Si comincia scegliendo a turno uno dei sei pezzi differenti del gioco degli scacchi (re, regina, alfiere, cavallo, torre, pedone) e lo si posiziona a caso su una delle 64 caselle della scacchiera, mentre si posiziona il re avversario in una delle 63 caselle rimanenti. Supponiamo che

il posizionamento dei due pezzi sia equiprobabile. Il fine è di calcolare la probabilità P che il pezzo scelto in posizione x metta il re avversario in posizione y sotto scacco; se esprimiamo questa probabilità con un denominatore comune, definiamo il numeratore di queste frazioni come *la forza relativa di ciascun pezzo* o *valore relativo*. Si confronteranno queste probabilià con l'effettiva efficacia dei vari pezzi valutata nelle tre situazioni di gioco principali: l'apertura, il mediogioco ed il finale. Lo scopo è di valutare come cambia la forza di ogni pezzo in base al momento di gioco in cui lo si analizza.
Innanzitutto bisogna definire uno spazio campionario Σ, cioè l'insieme di tutti i possibili esiti. Definiamo Σ come l'insieme di coppie (x, y) dove x rappresenta la posizione del pezzo da studiare e y la posizione del re avversario. Siccome la scacchiera ha 64 caselle, x avrà 64 possibili valori, mentre y ne avrà 63 perchè una casella è già stata occupata dal pezzo precedente. Ci saranno dunque $64 \cdot 63$ coppie possibili: quindi la cardinaliià di Σ sarà di 4032 elementi. Per identificare i valori della x e della y si utilizzerà la notazione algebrica, già vista nel cap[1]. Per ragioni di comodità tutte le probabilità, espresse in frazioni, avranno come denominatore comune 36.

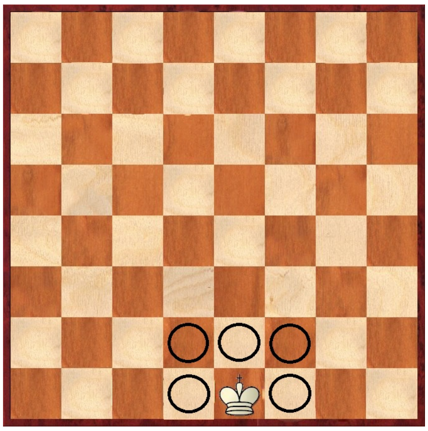
2.4.1 Il valore relativo del re

Il re è il pezzo principale del gioco degli scacchi, è unico e insostituibile e quando si trova intrappolato senza nessuna possibilità di fuga (lo scaccomatto) si perde la partita. In teoria è possibile avere nove regine, o dieci torri, o dieci cavalli o dieci alfieri, come risultato della promozione dei pedoni, ma non si può mai avere più di un re. Nonostante ciò la sua efficacia è molto limitata: è in grado di muoversi di una sola casella in qualsiasi direzione. Essendo il pezzo il più importante ma nello stesso tempo debole, il re è costretto a nascondersi per quasi tutta la partita; gli altri pezzi devono proteggerlo (ad esempio mediante l'arrocco[8]). Tuttavia è impossible il contrario. Per regolamento il re non può essere mangiato (la partita termina quando il re è completamente in trappola) e non può dare scacco. Quindi la probabilià che dia scacco al re avversario P(R)=0. Si può calcolare invece il numero medio di caselle minacciate dal re a seconda della sua posizione. Ci sono tre possibili situazioni:

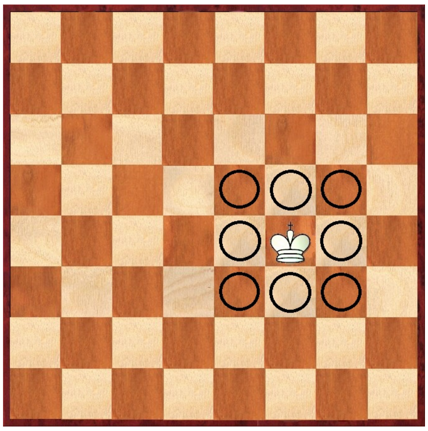
- il re si trova a bordo scacchiera (non in un angolo). Il bordo è costituito da 28 caselle; tolti i 4 angoli, ne risultano pertanto 24. Come si vede dalla figura (a), in questa posizione il re può minacciare 5 riquadri

[8]sotto particolari condizioni si può invertire la posizione del re con una delle due torri, al fine di allontanare il re dalla zona centrale della scaccchiera e di proteggerlo. Esistono due tipi di arrocco, uno effettuato sull'ala di re (notazione algebricaO-O) e uno sull'ala di regina (O-O-O)

- il re si trova al centro della scacchiera. Per trovare il numero di caselle centrali basta sottrarre al totale il numero di caselle del bordo e si ottengono 36 riquadri. Come si vede dalla figura (b) in questa posizione il re può minacciare 8 riquadri
- il re si trova in uno dei 4 bordi della scacchiera. Come si vede dalla figura (c), in questa posizione il re può minacciare 3 riquadri.



(a) Il re sul bordo può minacciare 5 caselle



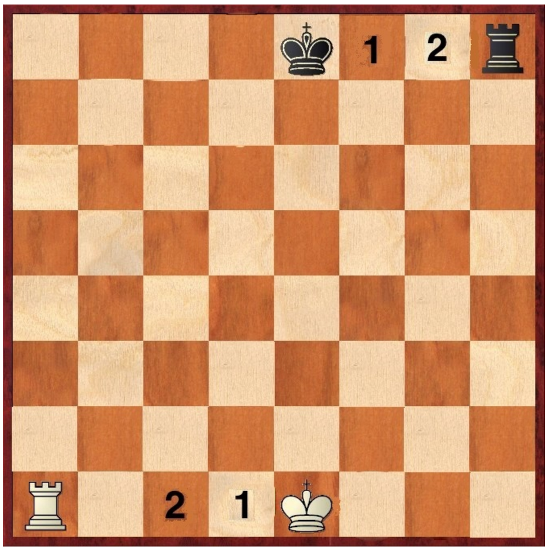
(b) Il re al centro della scacchiera può minacciare 8 caselle

(c) Il re su un angolo può minacciare 3 caselle

Il numero medio di caselle minacciate si ottiene sommando i prodotti tra il numero di posizioni e le caselle minacciate per posizione e dividendo il tutto per il totale di caselle, cioè:

$$\frac{(24 \cdot 5) + (36 \cdot 8) + (4 \cdot 3)}{64} = \frac{420}{64} = \frac{105}{16} \approx 6.5$$

Quindi il re in media minaccia 6 o 7 caselle. Tuttavia questa sua pecularità offensiva non viene sfruttata nelle fasi iniziali e nel mediogioco in cui il re, che è posizionato inizialmente al centro del bordo, viene difeso e portato verso gli angoli, dove è più protetto. Spesso per fare ciò si usa l'arrocco, come si può vedere nelle figure sottostanti. Il re diventa



(a) Posizione iniziale

(b) Il bianco ha arroccato sull'ala di regina, il nero sull'ala di re

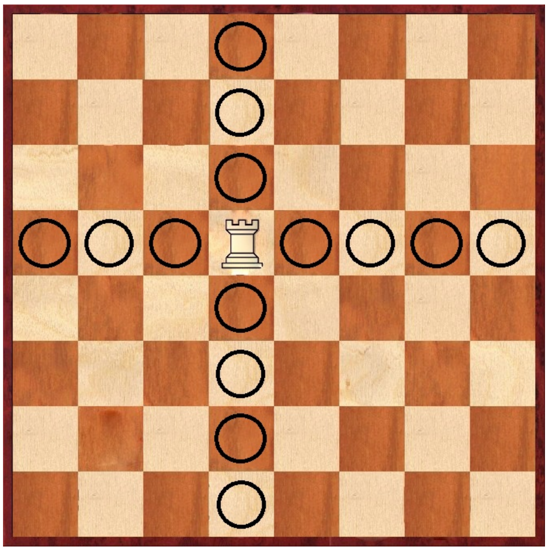
una pedina attiva nei finali, dove ci sono molti meno pezzi in gioco ed è fondamentale il suo contributo per minacciare i pezzi avversari e concludere la parita. Infatti i finali più frequenti di una partita, se non è avvenuto uno scaccomatto nel mediogioco, sono i seguenti: re-pedoni contro re-pedoni, re-regina contro re, re-torre contro re. Tutti risolvibili con il contributo attivo del re.

2.4.2 Il valore relativo della torre

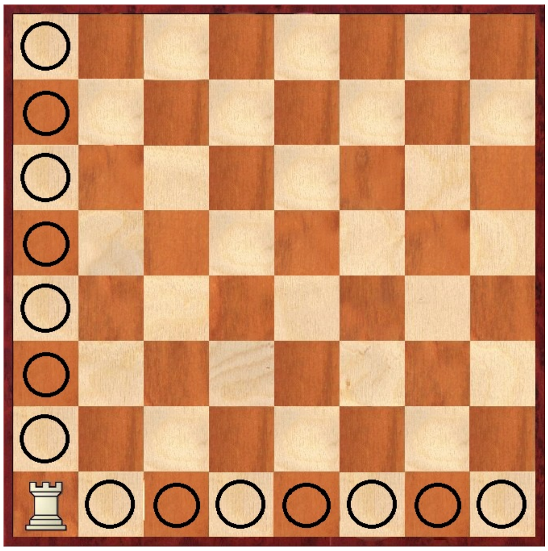
La torre è uno dei pezzi più forti del gioco degli scacchi. La sua peculiarità è quella di muoversi in orizzontale o in verticale di quante caselle si vuole. Ad inizio partita le quattro torri sono posizionate ai quattro angoli della scacchiera. Proprio per il suo tipo di movimento in qualsiasi riquadro posizioniamo la torre sarà sempre in grado di minacciare 14 caselle, 7 in orizzonate, 7 in verticale, come si può vedere dalle figure a pagina seguente. Quindi la probabilità che una torre metta in scacco il re avversario posto aleatoriamente sulla scacchiera è:

$$P(T) = \frac{64 \cdot 14}{64 \cdot 63} = \frac{14}{63} = \frac{2}{9}$$

L'evento T è un sottoinsieme di Σ e rappresenta l'insieme delle caselle minacciate dalla torre. Al denominatore è presente la cardinalià di Σ, cioè tutte le caselle possibili per due pezzi, mentre al numeratore troviamo le caselle in cui una torre mette sotto scacco il re. In particolare possiamo disporre una torre in uno qualsiasi dei 64 riquadri e il re in uno dei 14 minacciati dalla torre quindi $14 \cdot 64$. Come già accennato in precedenza esprimiamo tutte le probabilità con un denominatore comune; scelto per ragioni di comodità 36,



(a) Caselle minacciate dalla torre



(b) In qualunque posizione si trovi la torre minaccia sempre 14 caselle

allora $P(T) = \frac{2}{9} = \frac{8}{36}$. Tuttavia questa stima non è del tutto corretta in quanto, se il re si trova in una casella adiacente alla torre e minacciata da essa (cioè adiacente alla torre in verticale e in orizzontale), potrebbe mangiare la torre. Riassumento la $P(T)$ trovata finora rappresenta la probabilità che ha una torre di mettere sotto scacco il re, ma per essere utilizzata in campo pratico ha bisogno di un accorgimento: bisogna tenere conto delle possibili posizioni in cui il re potrebbe mangiare il pezzo. Questa è una probabilità condizionata, perchè non dipende solo dalla torre, ma anche dalla posizione del re. La indichiamo come $P(T|R)$, cioè la probabilità che la torre dia scacco al re data la posizione del re. Quindi ricordando il ragionamento fatto nel paragrafo precedente per il calcolo della mobilità del re abbiamo:

- 36 caselle centrali in cui la torre minaccia il re 14 volte, meno le 4 in cui il re potrebbe essere adiacente alla torre, quindi 10 (non si contano le caselle diagonali attorno alla torre in quanto la torre non si può muovere in diagonale)

- 24 caselle sul bordo in cui la torre minaccia il re 14 volte, meno le 3 volte in cui il re potrebbe essere adiacente, quindi 11

- 4 caselle agli angoli della scacchiera in cui la torre minaccia il re 14 volte, meno le 2 volte in cui il re potrebbe essere adiacente, quindi 12.

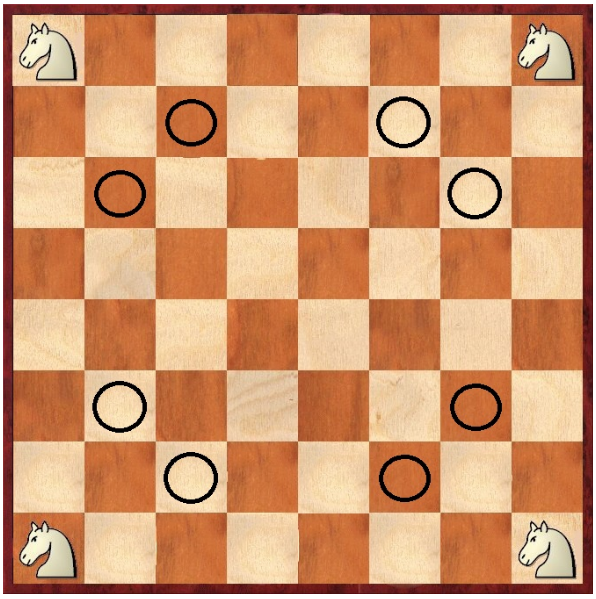
La probabilità così corretta è pari a:

$$P(T|R) = \frac{(36 \cdot 10) + (24 \cdot 11) + (4 \cdot 12)}{64 \cdot 63} = \frac{672}{4032} = \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$$

Per quanto concerne le meccaniche di gioco l'efficacia della torre è prevalente nel mediogioco e nei finali. Questo perchè inizialmente è posizionata agli angoli della scacchiera e i pedoni laterali che la circondono nella maggior parte delle partite sono di norma tra gli ultimi pezzi ad essere mossi. Infatti le aperture di gioco più utilizzate dai professionisti hanno lo scopo di controllare il maggior numero di caselle centrali, cioè quelle che permettono uno sviluppo più rapido del gioco, e tralasciano le zone laterali.

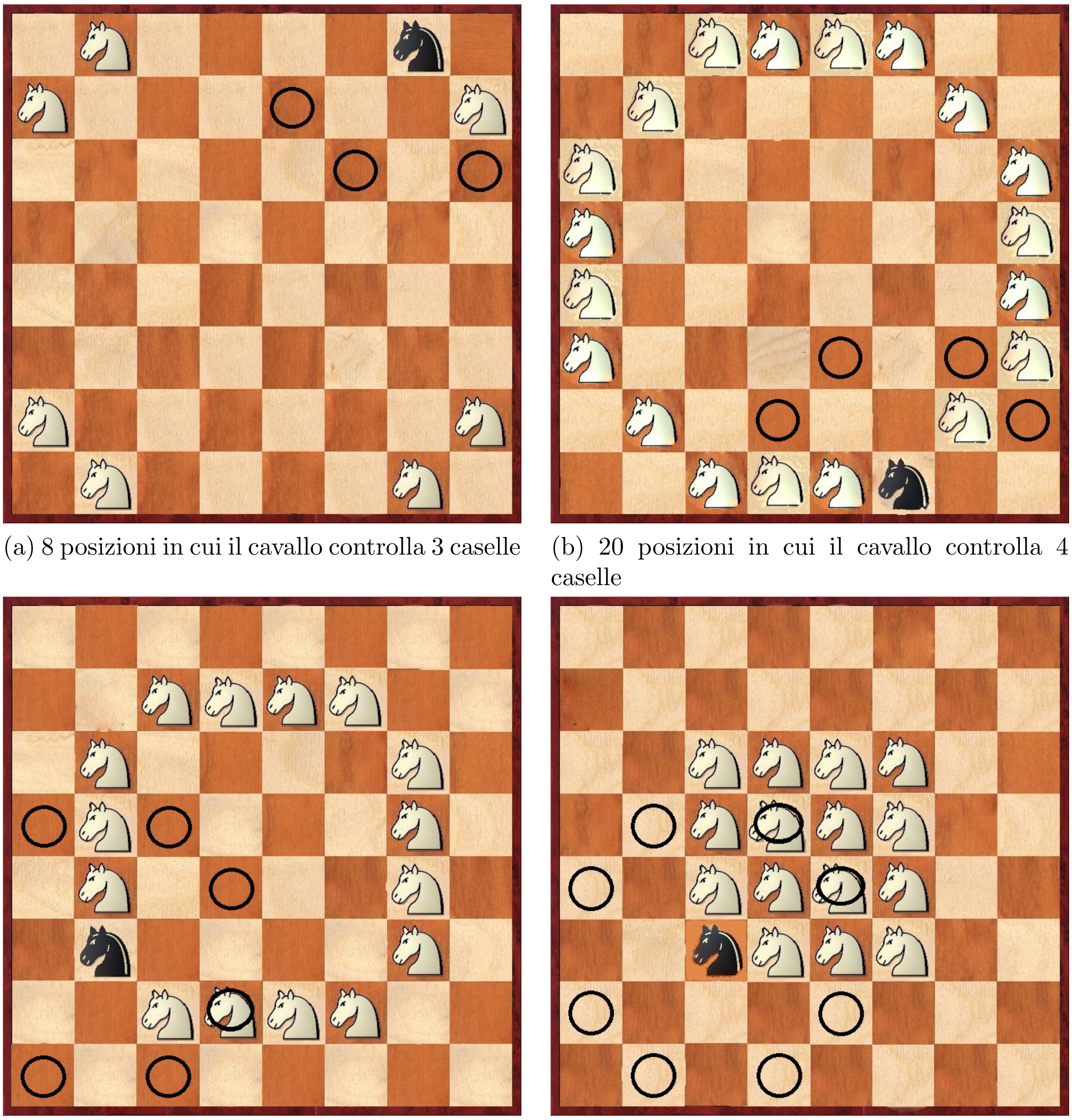
2.4.3 Il valore relativo del cavallo

All'interno del gioco il cavallo si muove a L, cioè può muoversi in ogni direzione di due passi in orizzontale (o verticale) seguito da un passo in verticale (o orizzontale). Inoltre è l'unico pezzo a cui è permesso saltare gli altri, sia alleati, sia avversari. Questa peculiarità compensa lo svantaggio per cui il cavallo non riesce a minacciare i pezzi che gli sono immediatamente adiacenti. Sempre per questo fatto non ci sarà bisogno di operare correzioni a P(C) come invece abbiamo fatto con la torre. Per trovare questa probabilità osserviamo tutte le possibili situazioni in cui si può trovare un cavallo. Ci sono 4 posizioni (i 4 angoli) in cui ogni cavallo può minacciare esattamente 2 caselle. Nei grafici successivi sono evidenziate per semplicità solo i movimenti del cavallo nero: tutti i cavalli della stessa figura sono in grado di controllare lo stesso numero di caselle. Esistono 8 posizioni in



(a) 4 posizioni in cui il cavallo controlla 2 caselle

cui il cavallo controlla 3 caselle, ne esistono 20 in cui ne controlla 4, ne esistono 16 in cui ne controlla 6 e ne esistono ulteriori 16, quelle centrali, in cui il cavallo ne controlla 8. Le quattro figure illustrano i quattro esempi. Quindi se sommiamo i prodotti delle posizioni



(a) 8 posizioni in cui il cavallo controlla 3 caselle

(b) 20 posizioni in cui il cavallo controlla 4 caselle

(c) 16 posizioni in cui il cavallo controlla 6 caselle

(d) 16 posizioni in cui il cavallo controlla 8 caselle

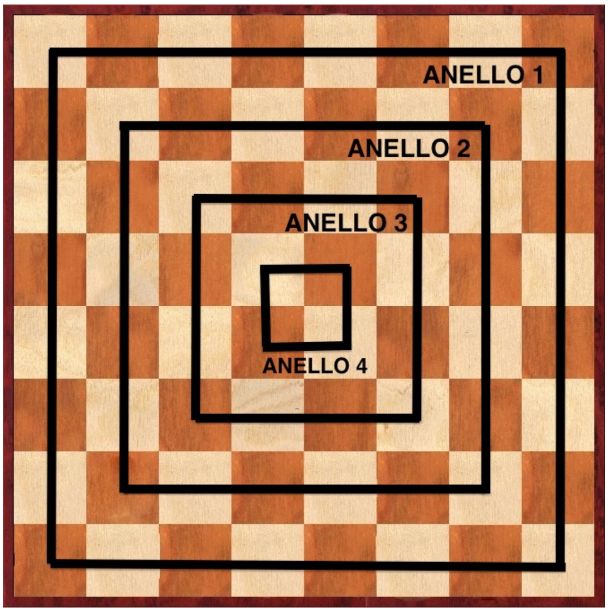
con le rispettive caselle controllate e dividiamo per la cardinalità di Σ, si ottiene che

$$P(C) = \frac{(4 \cdot 2) + (8 \cdot 3) + (20 \cdot 4) + (16 \cdot 6) + (16 \cdot 8)}{64 \cdot 63} = \frac{336}{4032} = \frac{1}{12} = \frac{3}{36}$$

L'evento C è un sottoinsieme di Σ e rappresenta l'insieme delle caselle minacciate dal cavallo. Dai calcoli eseguiti si può vedere come il cavallo sia più efficace se posizionato al centro della scacchiera (minaccia 8 caselle) e molto meno quando si trova ai bordi (minaccia 2 o 3 caselle). Questo, abbinato all'abilità di saltare gli altri pezzi, ne fa un elemento fondamentale ad inizio partita. Infatti saltando i pezzi riesce a superare agevolmente la barriera di pedoni che l'avversario ergerà agli inizi del gioco. In tutte le aperture più famose i cavalli sono, dopo i pedoni centrali, i secondi pezzi a muoversi.

2.4.4 Il valore relativo dell'alfiere

L'alfiere è un pezzo caratterizzato dal potersi muovere solamente in diagonale di quante caselle si vuole. Ogni giocatore possiede due alfieri, uno che si muove solo sulle caselle nere e uno che si muove solo su quelle bianche. Per analizzarne meglio i movimenti dividiamo la scacchiera in 4 anelli. Il più grande è composto da 28 caselle, il secondo ne

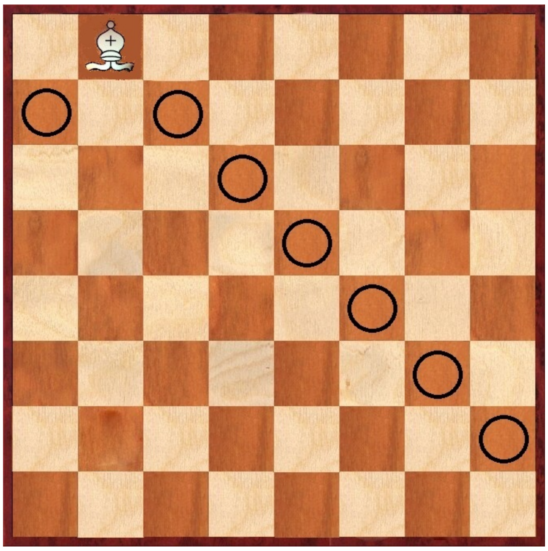


(a) I 4 anelli

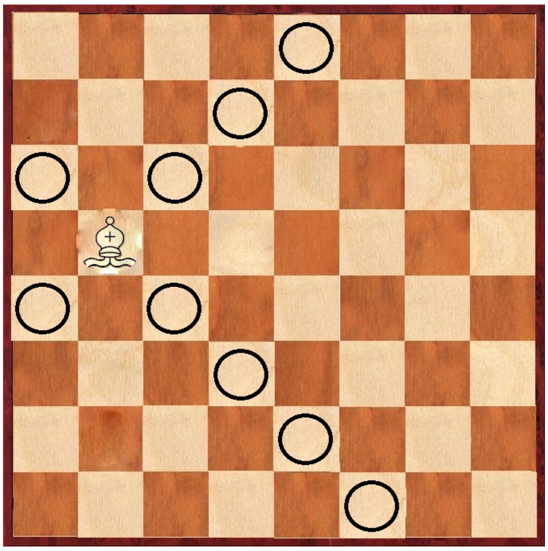
possiede 20, il terzo 12 e il quarto 4. Si può vedere come gli alfieri posizionati sugli stessi anelli possono controllare lo stesso numero di riquadri e quindi minacciare il re avversario quando si trova in una di queste posizioni. Un alfiere sul primo anello controlla 7 caselle, un alfiere sul secondo ne controlla 9, un alfiere sul terzo ne controlla 11 e un alfiere sul 4 ne controlla 13. Le quattro figure a pagina seguente illustrano i quattro esempi. Con lo stesso metodo utilizzato per il cavallo calcoliamo la probabilità P(A), cioè la probabilità che un alfiere metta sotto scacco il re avversario posto aleatoriamente sulla scacchiera.

$$P(A) = \frac{(28 \cdot 7) + (20 \cdot 9) + (12 \cdot 11) + (4 \cdot 13)}{64 \cdot 63} = \frac{560}{4032} = \frac{5}{36}$$

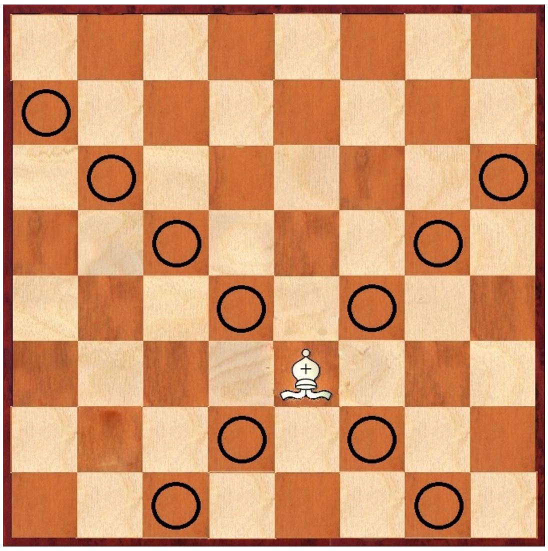
L'evento A è un sottoinsieme di Σ e rappresenta l'insieme delle caselle minacciate dall'alfiere. Tuttavia, come per la torre, questa probabilità è corretta matematicamente ma, durante una partita di gioco, bisogna considerare la probabilità condizionata $P(A|R)$, cioè la probabiltà che l'alfiere dia scacco al re, condizionata dalla sua posizione. Bisogna



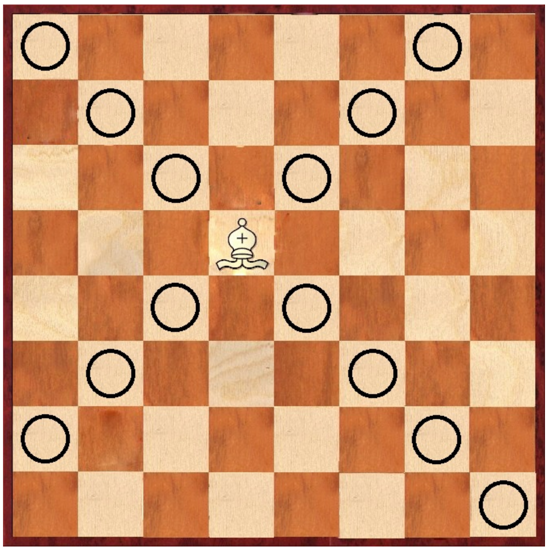
(a) 28 posizioni (primo anello) in cui il cavallo controlla 7 caselle



(b) 20 posizioni (secondo anello) in cui il cavallo controlla 9 caselle



(c) 12 posizioni (terzo anello) in cui il cavallo controlla 11 caselle



(d) 4 posizioni (quarto anello) in cui l'alfiere controlla 13 caselle

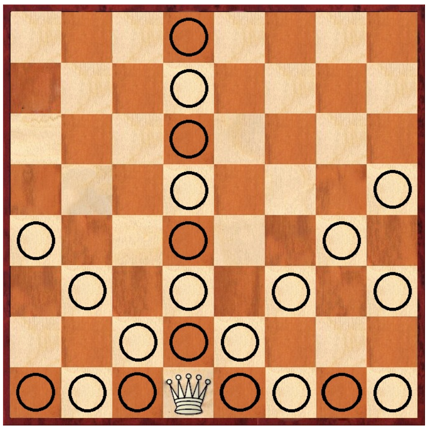
escludere le caselle adiacenti in diagonale all'alfiere in quanto, se il re si trovasse lin quella posizione, potrebbe mangiarlo. Escludiamo dunque una posizione se l'alfiere si trova in uno dei quattro angoli, escludiamo due posizioni se si trova nell'anello uno (senza contare gli angoli che abbiamo già contato). Escludiamo quattro posizioni se l'alfiere si trova indistintamente negli anelli due, tre e quattro. Ora ricalcoliamo la probabilità, ottenendo:

$$
\begin{aligned}
P(A|R) = & \frac{(4 \cdot (7-1)) + (24 \cdot (7-2)) + (20 \cdot (9-4)) + (12 \cdot (11-4)) + (4 \cdot (13-4))}{64 \cdot 63} = \\
& = \frac{364}{4032} = \frac{13}{144} = \frac{3.25}{36}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

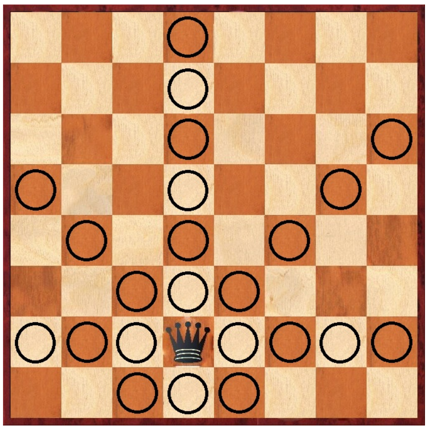
Così come il cavallo, anche l'alfiere è più efficace se si trova al centro della scacchiera, quindi è un pezzo molto efficace ad inizio partita. Nel mediogioco l'alfiere perde parte della sua efficacia in quanto si trova circondato da altri pezzi che ne limitano i movimenti. Ritorna invece efficace nei finali dove la maggior parte dei pezzi sono già stati mangiati e può raggiungere rapidamente ogni angolo della scacchiera.

2.4.5 Il valore relativo della regina

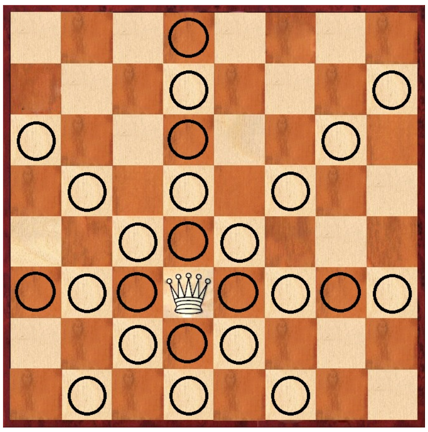
La regina è il pezzo più forte del gioco perchè è in grado di muoversi in verticale, in orizzontale e in diagonale di quante caselle si vuole. Unisce dunque le caratteristiche di movimento di una torre con quelle di un alfiere. Poichè le mosse della torre hanno intersezione nulla con quelle dell'alfiere, intuitivamente per trovare $P(Reg)$ basterà sommare $P(T)$ con $P(A)$. Verifichiamo questo risultato con i calcoli. Dividiamo la scacchiera



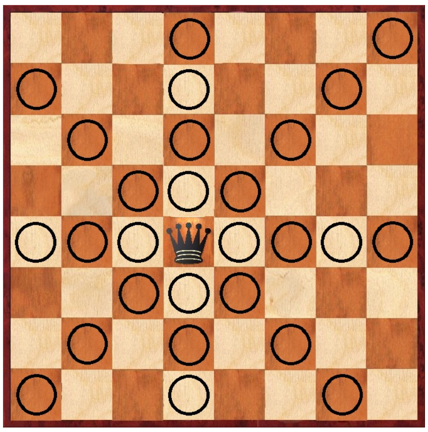
(a) 28 posizioni (primo anello) in cui la regina controlla 21 caselle



(b) 20 posizioni (secondo anello) in cui la regina controlla 23 caselle



(c) 12 posizioni (terzo anello) in cui la regina controlla 25 caselle



(d) 4 posizioni (quarto anello) in cui la regina controlla 27 caselle

in quattro anelli come fatto per l'alfiere e, in base all'anello in cui si trova la regina, contiamo le posizioni in cui può dare scacco ad un re avversario. Se la regina si trova nel primo anello, più esterno, formato da 28 caselle, può minacciare 21 riquadri. Se si trova in una delle 20 posizioni del secondo anello minaccia 23 riquadri. Se si trova nel terzo anello, formato da 12 caselle, ne minaccia 25, se infine si trova nell'ultimo anello composto dalle 4 caselle centrali, la regina riesce a controllare ben 27 caselle. I risultati sono illustrati nelle figure a pagina precedente. Con lo stesso procedimento eseguito per ricavare le probabilità di scacco degli altri pezzi, si ottiene che:

$$P(Reg) = \frac{(28 \cdot 21) + (20 \cdot 23) + (12 \cdot 25) + (4 \cdot 27)}{64 \cdot 63} = \frac{1456}{4032} = \frac{13}{36}$$

L'evento Reg è un sottoinsieme di Σ e rappresenta l'insieme delle caselle minacciate dalla regina. Ricordando che $P(A) = \frac{5}{36}$ e $P(T) = \frac{8}{36}$ risulta che

$$P(A) + P(T) = \frac{5}{36} + \frac{8}{36} = \frac{13}{36} = P(Reg)$$

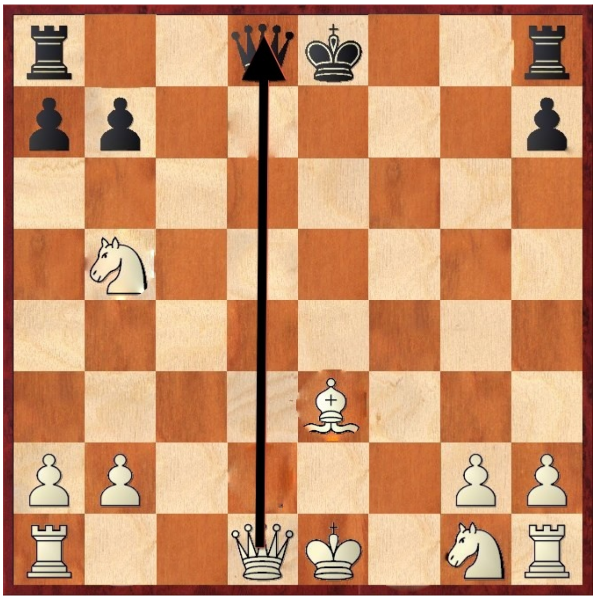
Questo conferma l'intuizione precedente. Ora aggiustiamo la probabilità escludendo tutte le posizioni in cui il re avversario è adiacente alla regina, cioè calcoliamo la probabilià condizionata $P(Reg|R)$, come fatto per la torre e l'alfiere. Nel primo anello se la regina si trova in uno dei quattro angoli è circondata da 3 caselle quindi togliamo 3 posizioni, mentre se si trova in una qualsiasi delle 24 caselle centrali dei bordi è circondata da 5 caselle, che togliamo dal calcolo. Se si trova in uno qualsiasi degli altri tre anelli è sempre circondata da 8 caselle che eliminiamo dunque. Il risultato è:

$$\begin{aligned} P(Reg|R) = & \frac{(4 \cdot (21-3)) + (24 \cdot (21-5)) + (20 \cdot (23-8)) + (12 \cdot (25-8)) + (4 \cdot (27-8))}{64 \cdot 63} = \\ & = \frac{1036}{4032} = \frac{37}{144} = \frac{9.25}{36} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Anche in questo calcolo, ricordando che $P(A|R) = \frac{3.25}{36}$ e $P(T|R) = \frac{6}{36}$, risulta che:

$$P(A|R) + P(T|R) = \frac{3.25}{36} + \frac{6}{36} = \frac{9.25}{36} = P(Reg|R)$$

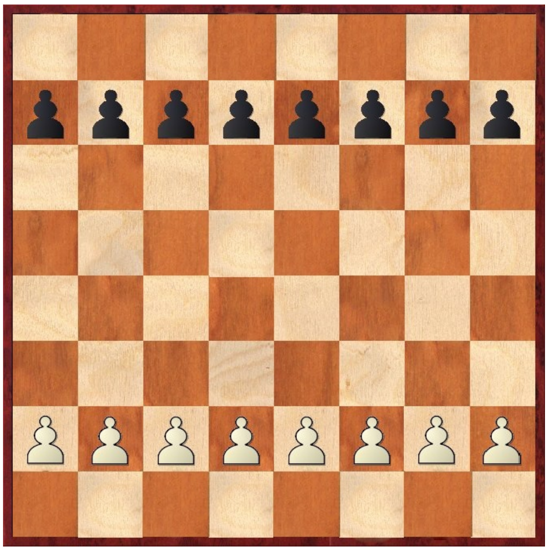
Questi risultati mostrano come la regina è il pezzo più efficace del gioco e come perderla sia molto svantaggioso. Come il cavallo e l'alfiere, anche la regina è in grado di minacciare più caselle se si trova al centro del gioco. Proprio per la sua importanza è rischioso utilizzarla ad inizio partita. E' fondamentale invece nel proseguo del gioco, dove è il pezzo più pericoloso ed è fondamentale nella maggior parte delle vittorie durante il mediogioco. Una possibile scelta strategica è di sacrificare la propria regina per mangiare quella dell'avversario. Ad inizio partita le due regine sono disposte una di fronte all'altra e spesso i pedoni centrali vengono mangiati nel corso delle prime mosse, quindi è frequente la possibilità di sacrificare la regina mangiando la regina avversaria. Ovviamente questa è una strategia difensiva, da attuare preferibilmente quando si è già in vantaggio. In questo modo si sacrificano i due pezzi più forti del gioco, ma la perdita dell'avversario è maggiore, perchè perde il suo pezzo migliore per recuperare lo svantaggio.



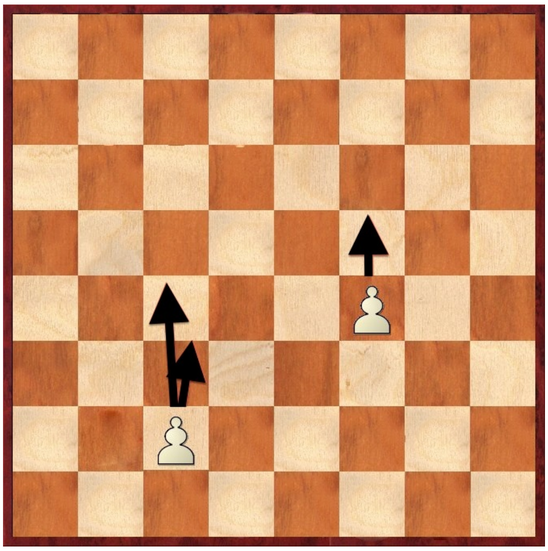
(a) Il bianco sta vincendo: sacrificare la regina può essere una mossa vantaggiosa

2.4.6 Il valore relativo del pedone

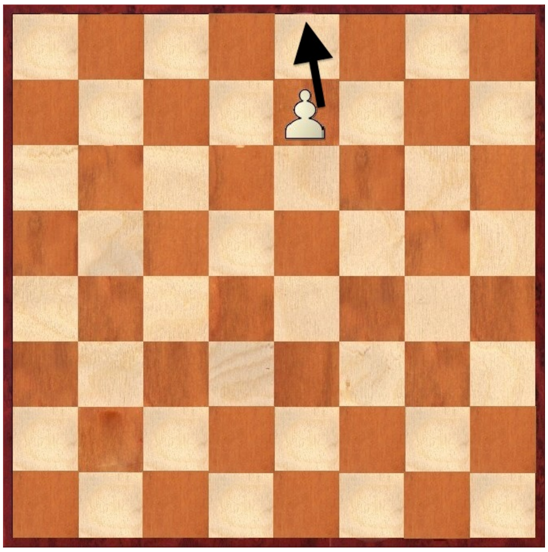
I pedoni sono i pezzi più numerosi, ma più deboli della scacchiera. Ogni giocatore possiede 8 pedoni che si possono muovere di una sola casella in avanti; la prima volta che si muove può avanzare eccezionalmente di due caselle. A dispetto del movimento in verticale, un pedone mangia i pezzi avversari che si trovano in una delle due caselle oblique a lui adiacenti. E' l'unico pezzo che può mangiare in modo diverso dal proprio normale movimento. Parte sempre dalla seconda fila, ma se riesce a raggiungere l'ottava, il proprietario del pedone lo deve promuovere sostituendolo con un qualsiasi altro pezzo, ad eccezione del re. Affinchè un pedone riesca a dare scacco ad un re avversario, devono distare di una casella, e il pedone non può avvicinarsi così tanto senza una copertura (cioè un altro pezzo che lo protegge) senza essere mangiato dal re. Quindi $P(Ped|R) = 0$, mentre per calcolare P(Ped), cioè la probabilità che un pedone, protetto da un altro pezzo, dia scacco al re, bisogna fare alcune considerazioni:



(a) Posizione iniziale dei pedoni



(b) Il movimento del pedone



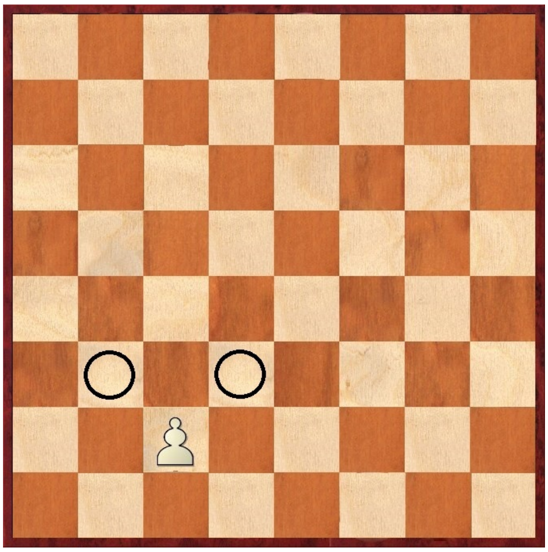
(c) Promozione del pedone

- i pedoni partono sempre dalla seconda fila; se il re si trova in prima fila è impossibile metterlo sotto scacco. Escludiamoli per semplicità; ci ritroviamo dunque con una scacchiera di 56 caselle

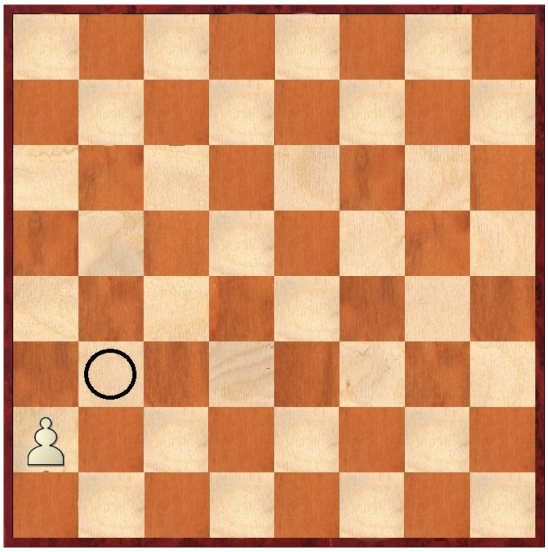
- escludiamo il fatto che i due pedoni si muovano di due caselle alla prima mossa. E' un'ipotesi ben posta in quanto è molto raro che i pedoni vengano a contatto con il re avversario al di fuori dei finali di partita. Questo perchè il re è un pezzo sempre ben protetto fino ai finali; inoltre i pedoni, muovendosi di una sola casella, sono dei pezzi lenti

- ipotizziamo che nell'ultima fila i pedoni possano dare scacco al re come in tutte le altre precedenti, cioè trascuriamo la promozione del pedone. Altrimenti bisognerebbe valutare di volta in volta in quale pezzo il giocatore ha intenzione di promuoverlo.

- rimangono sette file composte da 8 caselle. I pedoni nelle 2 caselle laterali di ogni fila minacciano 2 sole caselle. I pedoni delle sei caselle centrali di ogni fila minacciano 2 caselle ciascuno.



(a) Pedoni centrali minacciano 2 caselle



(b) Pedoni laterali minacciano 1 casella

Con queste ipotesi la probabilità che un pedone metta il re avversario sotto scacco è:

$$P(Ped) == \frac{(7 \cdot 6 \cdot 2) + (7 \cdot 2 \cdot 1)}{56 \cdot 55} = \frac{88}{3080} = \frac{7}{220} \simeq \frac{1.12}{36}$$

L'evento Ped è un sottoinsieme di Σ e rappresenta l'insieme delle caselle minacciate dal pedone. Arrotondiamo il valore del pedone ad $\frac{1}{36}$, tenendo anche conto delle semplificazioni precedenti. Nonostante il pedone sia un pezzo debole, esso è importante in ogni sezione del gioco. Ad inizio partita è fondamentale conquistare il centro della scacchiera mediante i pedoni che stanno a protezione degli altri pezzi più importanti. Nel medio gioco hanno sempre una funzione protettiva, in particolar modo nei confronti del re. Nei finali invece sono spesso fondamentali per la vittoria: arrivando infatti dall'altra parte della scacchiera devono essere promossi in un pezzo a scelta. In teoria è possibile avere 9 regine (8 pedoni promossi e la regina iniziale), 10 cavalli, 10 alfieri e 10 torri. Nella maggior parte dei casi si sceglie di far diventare un pedone regina, perchè è il pezzo più forte.

2.4.7 Conclusioni

Escludendo il re che ha probabilità nulla di mettere sotto scacco il re avversario, tutte le altre cinque tipologie di pezzi sono in grado di minacciare il re avversario con un certa probabilità. Innanzitutto ricordiamo queste probabilità nel caso generale, cioè considerando anche le caselle in cui il re avversario è adiacente al pezzo. Abbiamo che

$$P(Ped) = \frac{1}{36}; \quad P(C) = \frac{3}{36}; \quad P(A) = \frac{5}{36}; \quad P(T) = \frac{8}{36}; \quad P(Reg) = \frac{13}{36}$$

dove Ped, C, A, T, Reg sono gli eventi appartenenti a Σ che corrispondono alla probabilità che il rispettivo pezzo dia scacco al re.[9] Come abbiamo discusso in precedenza queste probabilià sono corrette matematicamente, ma non nella pratica del gioco, perchè non tengono conto che il re adiacente a questi pezzi potrebbe mangiarli. Tuttavia se il pezzo fosse protetto da un altro, non ci sarebbe questo inconveniente. Quindi queste probabilità mostrano l'efficacia dei vari pezzi nel minacciare il re avversario, quindi dare scacco, nel caso in cui siano protetti da un altro pezzo. Si può notare come la regina è il pezzo più forte, seguita da torre, alfiere, cavallo ed infine pedone. Confrontiamo queste probabilità con le probabilità reali di ogni pezzo di dare scacco al re, cioè le probabilità condizionate definite nei paragrafi precedenti:

$$P(C|R) = \frac{3}{36}; \quad P(A|R) = \frac{3.25}{36}; \quad P(T|R) = \frac{6}{36}; \quad P(Reg|R) = \frac{9.25}{36}$$

Notiamo subito come l'efficacia del cavallo è rimasta la stessa in quanto è l'unico pezzo che riesce a dare scacco senza essere circondato dal re. Cala invece l'efficacia dell'alfiere da 5 a 3.25: questo ci dice come un alfiere protetto da un pezzo sia più efficace di un cavallo, mentre un alfiere solo sia efficace quasi come un cavallo. Calano inoltre, come da aspettativa, l'efficacia della torre e della regina, che comunque rimangono i pezzi più forti del gioco; per questa ragione vengono chiamati pezzi pesanti, al contrario di cavallo e alfiere che sono i pezzi leggeri. Si può notare inoltre come la regina abbia le stesse probabilità di torre ed alfiere messi insieme; d'altronde possiede le mosse di entrambi. Tuttavia a dispetto delle probabilità una regina è più importante di una torre ed un alfiere insieme, perchè ha la funzione di entrambi, ma occupa una sola casella. Sempre guardando le probabilità due torri sono più forti di una regina, così come lo sono alfiere, un cavallo e una torre.

Ora, se moltiplichiamo per 36 le varie probabilità, troviamo i valori di forza relativi di ogni pezzo:

[9] Ped sta per pedone, C per cavallo, A per alfiere, T per torre, Reg per regina

- Re=$+\infty$
- Regina =9.25
- Torre=6
- Alfiere=3.25
- Cavallo=3
- Pedone=1

Il pedone vale 1 per convenzione, mentre il re vale $+\infty$, un valore simbolico per mostrare come sia il pezzo più importante della scacchiera. Ogni programma per computer che gioca a scacchi ha una sua versione di valore di forza relativo dei pezzi, che serve per implementare la funzione di valutazione, cioè la funzione che valuta la bontà di ogni mossa. Il valore del re è altissimo affinchè il computer valuti lo scaccomatto e lo scacco come preferibili a qualsiasi altra mossa. Ovviamente esiste anche un'altra funzione che agisce su questi valori in base alla posizione dei vari pezzi, cioè in base alla loro efficacia reale nella determinata situazione di gioco. Anche i pezzi più forti, se completamente circondati da altri che ne limitano i movimenti, possono avere efficacia nulla. Inoltre un pedone sulla settima fila che sta per essere promosso è una mossa con efficacia reale altissima, a dispetto dell'efficacia relativa del pedone pari a 1. I fattori determinanti che fanno variare la forza di un pezzo sono essenzialmente la posizione in cui si trova ed il momento della partita. Ad inizio partita conviene occupare la parte centrale della scacchiera, dove i pezzi quali l'alfiere, il cavallo e la regina sono più efficaci, come abbiamo visto studiando le loro probabilità. Poichè sarà una zona circondata da moltissimi pezzi, questi limitano i movimenti dell'alfiere e della regina, mentre favoriscono il cavallo che è in grado di saltare tra le varie caselle. Invece nei finali, o comunque se si aprono varchi nella scacchiera, il cavallo perde la sua forza in favore di pezzi più veloci che possono in una sola mossa attraversare da un lato all'altro la scacchiera, come la torre. Avendo in mente i valori relativi e adattandoli alla situazione di gioco, un giocatore può applicare un approccio strategico nel sacrificare i pezzi: sapendo il loro valore può studiare i casi in cui gli conviene perdere un pezzo in favore di un altro.

2.5 Rating Elo

L'argomento di questo paragrafo è lo studio di un metodo matematico oggettivo per stimare il rendimento dei giocatori di scacchi. Il metodo in questione è stato inventato da Arpad E. Elo, da cui il nome *"sistema ELO"* ed è utilizzato dalla FIDE[10] per calcolare la forza relativa di uno scacchista e in particolare per stilare la classifica dei migliori. Questo sistema, oltre a valutare i giocatori, ha contribuito a stimolare moltissimi scacchisti e fu una grande forma di propaganda per gli scacchi, tanto che è stato riadattato per stilare le classifiche di molti sport americani quali il baseball e il football. Venne implementato per la prima volta nel 1960 e da allora viene riconosciuto come il sistema ufficiale di valutazione in ogni torneo ufficiale di scacchi. Nel corso degli anni sono state applicate delle modifiche, ma per rispetto al contributo fornito dal professor Elo, i nuovi metodi sono ancora chiamati sistema ELO.

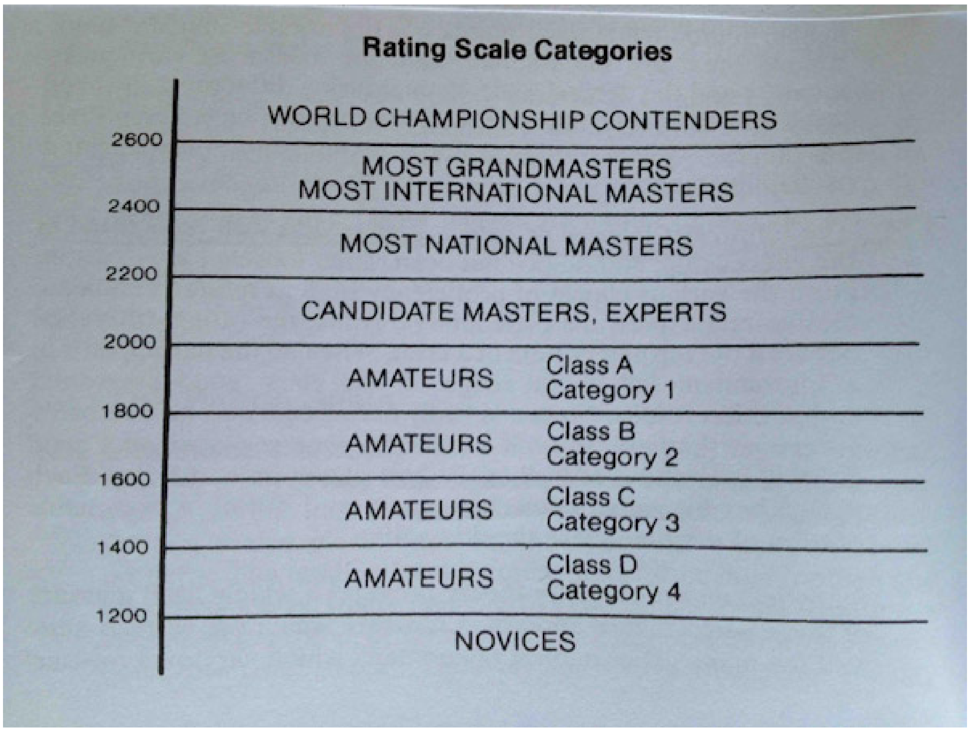
Rank	Name	Title	Country	Rating	Games	B-Year
1	Carlsen, Magnus	g	NOR	2872	0	1990
2	Kramnik, Vladimir	g	RUS	2810	0	1975
3	Aronian, Levon	g	ARM	2809	0	1982
4	Radjabov, Teimour	g	AZE	2793	0	1987
5	Karjakin, Sergey	g	RUS	2786	0	1990
6	Anand, Viswanathan	g	IND	2784	10	1969
7	Topalov, Veselin	g	BUL	2771	0	1975
8	Nakamura, Hikaru	g	USA	2767	0	1987
9	Mamedyarov, Shakhriyar	g	AZE	2766	0	1985
10	Grischuk, Alexander	g	RUS	2764	0	1983
11	Caruana, Fabiano	g	ITA	2760	10	1992
12	Morozevich, Alexander	g	RUS	2758	0	1977
13	Ivanchuk, Vassily	g	UKR	2757	10	1969
14	Svidler, Peter	g	RUS	2747	0	1976
15	Leko, Peter	g	HUN	2744	0	1979
16	Wang, Hao	g	CHN	2743	0	1989
17	Kamsky, Gata	g	USA	2741	10	1974
18	Gelfand, Boris	g	ISR	2740	0	1968
19	Gashimov, Vugar	g	AZE	2737	0	1986
20	Jakovenko, Dmitry	g	RUS	2734	0	1983

(a) I primi 20 giocatori al mondo secondo il rating ELO, Marzo 2013

[10] federazione internazionale degli scacchi

2.5.1 Modello matematico del sistema ELO

L'idea di un sistema di ranking globale è nata osservando che i primi ranking, cioè le classifiche dei vari tornei, non erano del tutto affidabili in quanto le performance individuali degli scacchisti variavano di volta in volta ed inoltre non era possibile comparare le prestazioni di giocatori che partecipavano a tornei diversi. Per queste ragioni il professor Elo decise di introdurre un sistema di ranking basato sulla statistica e sulla probabiltà: il sistema ELO. La scala scelta per misurare le prestazioni è una scala ad intervalli che ha come unità di misura un E, cioè un ELO rating point. Ogni 200E si passa ad un livello successivo della scala, dove 200E corrispondono ad un intervallo di classe chiamato C, che in termini probabilistici è pari ad una deviazione standard σ, intesa come la variabilità dei dati attorno ad un valore atteso. Ricapitolando $200E = C = 1\sigma$. A seconda dell'intervallo in cui si trova uno scacchista gli vengono attribuiti i seguenti titoli: L'idea

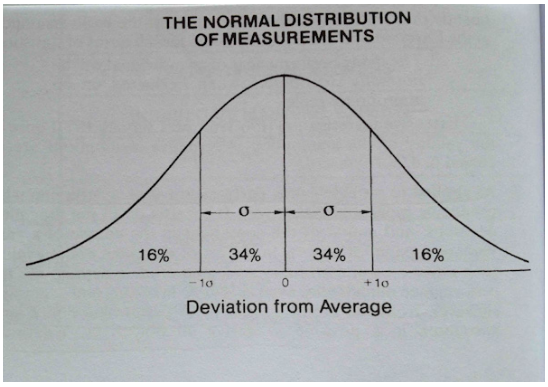


(a) I livelli della scala ELO con i relativi titoli

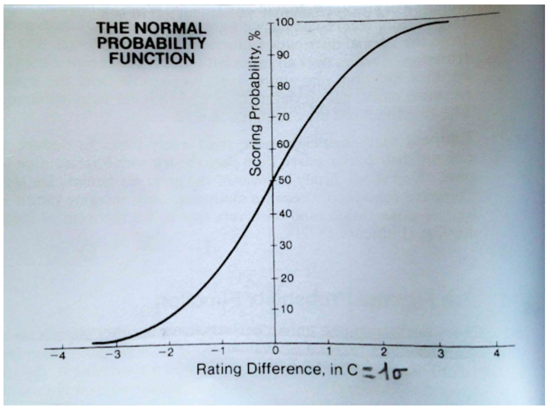
di Elo è di considerare che l'abilità di uno scacchista è descritta da una variabile casuale distribuita in modo normale, che ha come valor medio il reale valore di forza di un giocatore e che ha una deviazione standard che tiene conto della variabilità delle prestazioni di un giocatore. Si è valutato che circa i due terzi di tutti i punteggi, più precisamente il 68.2 su 100, cade nel range di 1σ rispetto al valor medio.

Di seguito sono riportati i grafici della funzione di densità normale considerata da Elo e del suo integrale da $-\infty$ ad x, cioè della funzione di ripartizione.

Il grafico della funzione di ripartizione è fondamentale in quanto ci mostra la relazione

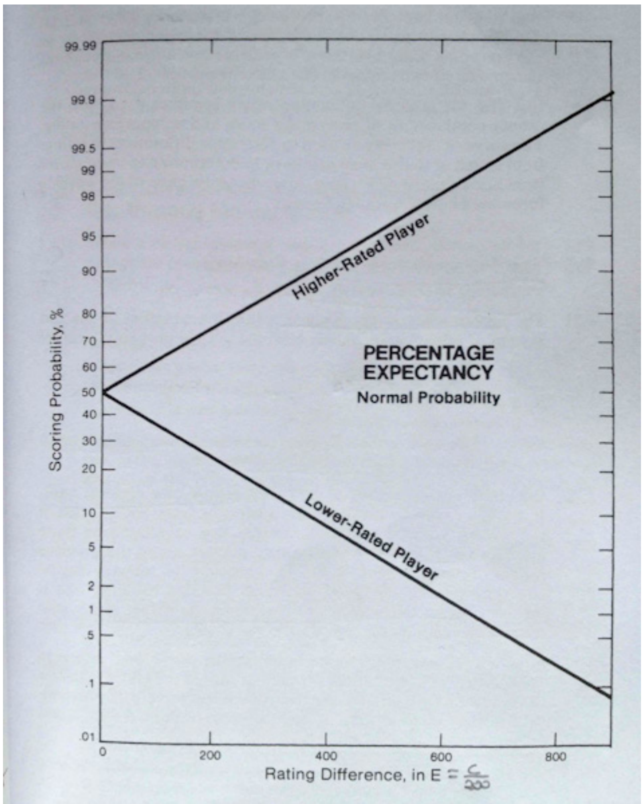


(a) Funzione di densità



(b) Funzione di ripartizione

che sarà alla base del sistema ELO, cioè come sono legati la probabilità di vittoria di un giocatore sull'altro e la differenza tra i loro punteggi. A tale proposito se si sostituisce la scala in $C = 1\sigma$ con la scala in E, ricordando che $E = 200C$, si ottiene un altro grafico fondamentale chiamato curva delle percentuali. In questo grafico è racchiusa l'idea



(a) Curva delle percentuali di probabilità

principale del ragionamento di Elo, cioè di calcolare il punteggio di un giocatore in base al punteggio dell'avversario, nel senso che un giocatore aumenta il suo punteggio se vince contro avversari con rating superiore e perde punti ogni volta che perde con avversari di livello inferiore. Inoltre il grafico stabilisce con quale percentuale prevista un giocatore sarà in grado di vincere contro un avversario, in base alla loro differenza di punteggio. Dalla curva funzione di ripartizione, Elo ha ricavato le due formule di seguito riportate. La prima formula è utilizzata per una misurazione periodica, di solito di anno in anno, del rating:

$$R_p = R_c + D(P)$$

dove:

- R_p è il rating della performance, cioè il punteggio ottenuto in un torneo, o comunque nel periodo di tempo in cui uno scacchista viene valutato
- R_c è il rating medio della competizione, cioè la media tra i rating dei partecipanti ad un certo torneo
- $D(P)$ è la percentuale di vittoria contro un avversario con un determinato rating, ricavabile dalla curva delle percentuali o più facilmente dalla seguente tabella.

D	P		D	P		D	P	
Rtg. Dif.	H	L	Rtg. Dif.	H	L	Rtg. Dif.	H	L
0-3	.50	.50	122-129	.67	.33	279-290	.84	.16
4-10	.51	.49	130-137	.68	.32	291-302	.85	.15
11-17	.52	.48	138-145	.69	.31	303-315	.86	.14
18-25	.53	.47	146-153	.70	.30	316-328	.87	.13
26-32	.54	.46	154-162	.71	.29	329-344	.88	.12
33-39	.55	.45	163-170	.72	.28	345-357	.89	.11
40-46	.56	.44	171-179	.73	.27	358-374	.90	.10
47-53	.57	.43	180-188	.74	.28	375-391	.91	.09
54-61	.58	.42	189-197	.75	.25	392-411	.92	.08
62-68	.59	.41	198-206	.76	.24	412-432	.93	.07
69-76	.60	.40	207-215	.77	.23	433-456	.94	.06
77-83	.61	.39	216-225	.78	.22	457-484	.95	.05
84-91	.62	.38	226-235	.79	.21	485-517	.96	.04
92-98	.63	.37	236-245	.80	.20	518-559	.97	.03
99-106	.64	.36	246-256	.81	.19	560-619	.98	.02
107-113	.65	.35	257-267	.82	.18	620-735	.99	.01
114-121	.66	.34	268-278	.83	.17	over735	1.00	.00

(a) Tabella per calcolare D(P)

Tuttavia, se il sistema di rating viene applicato su base continua, cioè per tutta la durata della carriera di uno scacchista, Elo ha introdotto la seguente formula:

$$R_n = R_o + K(W - W_e)$$

dove:

- R_n è è il nuovo punteggio
- R_o è il vecchio punteggio
- K è un coefficiente che varia con il tipo di torneo o evento; di norma varia tra 10 e 32
- W è il punteggio di gioco: ogni vittoria vale 1 punto, ogni pareggio 0.5 punti
- $W_e = \sum P_i$, cioè il punteggio atteso, dato dalla somma di tutte le probabilità di vittoria ricavate dalla tabella, che dipendono dalla differenza tra il proprio rating e quello dell'avversario.

Queste due equazioni stanno alla base del sistema ELO, tuttavia se noi consideriamo la curva della funzione di ripartizione, tra $-1.5C$ e $+1.5C$, possiamo approssimarla ad una retta. Le formule linearizzate diventano così:

$$R_p = R_c + 400\frac{(W-L)}{N} \quad e \quad R_n = R_o + K\frac{(W-L)}{2} - \frac{K}{4C}\sum D_i$$

dove:

- W è il numero di vittorie
- L è il numero di sconfitte
- N è il numero di match giocati
- C è l'intervallo di classe, pari a 200 punti Elo
- D_i è la differenza tra il rating del giocatore e quello del suo sfidante; la sommatoria somma le differenze tra un giocatore e tutti i suoi sfidanti.

Mediante queste formule è stato possibile negli ultimi quarant'anni stabilire una valutazione il più oggettivo possibile dell'abilità di ogni scacchista. Tuttavia è difficile confrontare i giocatori di epoche diverse, in particolare a livello di top player, a causa dell'inflazione. Questo incremento consiste nell'aumento generalizzato dei punteggi che fa sì che i giocatori prendono più punti ad ogni vittoria e la media dei punteggi Elo diventi così sempre più alta. Questo fenomeno dovuto ad un aumento generale delle abilità dei giocatori di livello alto, implica che i migliori giocatori attuali abbiano un punteggio più alto dei migliori giocatori dei decenni passati. Per bilanciare questo fenomeno inflazionario la FIDE adotta un fattore correttivo K, variabile a seconda della forza di un giocatore e di altri fattori come l'età.

Capitolo 3

Come i computer giocano a scacchi

Sin dalla fine degli anni '40 molti studiosi tra i quali Touring, Shannon, Simon, K. Thompson, J. McCarthy ed altri si sono interessati ad un tentativo di meccanizzazione del gioco degli scacchi. In contemporanea con i fautori della Teoria dei giochi (von Neumann, Morgenstern, Nash...), hanno visto negli scacchi il gioco ideale per studiare le procedure astratte che usano gli esseri umani quando prendono decisioni. Il ragionamento che hanno fatto è che se riusciamo a far giocare bene un computer, possiamo sperare di insegnargli a ragionare come noi, e forse meglio, per via della potenza in termini di calcolo ed elaborazione dati di una macchina. In un articolo del 1950 Newell, Shaw e Simon affemano che se si potesse sviluppare un giocatore artificiale vincente, si potrebbe affermare di aver penetrato il nucleo dell'attività intellettuale umana. [1]

3.1 Claude Shannon

Qualche anno dopo i primi esperimenti di Touring, Claude Shannon (1916-2001), matematico e ingegnere statunitense, pubblicò un saggio intitolato "Programming a computer for playing chess" in cui fece un'analisi teorica dei vari aspetti che intervengono nella realizzazione effettiva di un programma in grado di giocare a scacchi. Questo programma sfruttava l'algoritmo minimax, descritto nel capitolo precedente, per analizzare mediante analisi a ritroso l'albero di gioco troncato. Per primo prese in considerazione gli aspetti tecnici per definire una generica posizione del gioco degli scacchi. Suggerì inoltre una funzione di valutazione approssimata per valutare la bontà di ogni mossa. Con un modello probabilistico adottò i seguenti valori di forza relativi per i pezzi: pedone 1, cavallo 3, alfiere 3, torre 5, regina 9, re 200 (non molto dissimili dai valori calcolati con il modello probabilistico del capitolo precedente). Indrodusse inoltre un altro parametro che valutava il vantaggio posizionale o lo svantaggio del bianco rispetto al nero, tenendo in considerazione alcune posizioni frequenti del gioco. Fu il primo a proporre l'idea di inserire nella memoria del calcolatore un libro di aperture (le varianti più utilizzate delle prime mosse di gioco); questo diventò negli anni settanta una delle caratteristich chiave di ogni elabore in grado di giocare bene a scacchi. Questo comporta che durante le prime mosse, il computer muova istantaneamente perchè le legge dal suo database, senza la necessità di analizzare l'albero di gioco. Poi suggerì che il programma possa compiere scelte aleatorie, nel senso che se si ritrova nella stessa posizione di un partita precedente è in grado di cambiare le sue scelte, per evitare la ripetizione della stessa partita. L'idea di Shannon è che questo programma giovasse allo sviluppo di altre macchine di utilità pratica come:

- macchine in grado di progettare componenti elettroniche
- macchine in grado di sostituire le centrali telefoniche elettromeccaniche
- macchine capaci di tradurre frasi da una lingua all'altra
- macchine capaci di decisioni strategiche in campo economico e militare
- macchine capaci di creare una melodia
- macchina capaci di deduzione logica

E' incredibile vedere come, anche grazie al contributo delle ricerche sui giocatori artificiali, tutti gli obiettivi proposti da Shannon siano stati realizzzati. Tuttavia egli non riuscì mai a costruire una macchina fisica, per mancanza di una tecnologia all'altezza. Il primo programma di una certa forza, che riprendeva lo schema standard di Shannon usando l'algoritmo Alphabeta (l'evoluzione del minimax), fu realizzato da un gruppo di fisici russi a Mosca, diretti da Adelson-Velsky e Arlazarov, tra il 1961 ed il 1966. Lo sviluppo di questo programma russo portò alla realizzazione di Kaissa, il programma che nel 1974 vinse il primo campionato del mondo di scacchi per elaboratori. In seguito le idee di Shannon furono utilizzate da moltissimi programmi, sempre più efficaci grazie soprattutto all'aumento di potenza dei calcolatori, al raffinamento degli algoritmi di potatura dell'albero di gioco e all'immissione di un grande numero di database di aperture e finali di match.

3.1.1 Differenze tra un giocatore umano e un giocatore artificiale

Dall'inizio degli anni '60 in poi vi fu un netto cambiamento nell'approccio nella meccanizzazione del gioco degli scacchi. Il nuovo approccio considerato è per così dire più umano, più legato al modo di giocare degli esseri umani, piuttosto che dei calcolatori. L'idea era quella di non puntare solamente sulla potenza computazionale dell'elaboratore, ma di insegnare ad esso a ragionare come un maestro di scacchi. Vennero ripresi dunque gli studi fatti da due psicologi: A. Binet e A. de Groot. Le loro conclusioni sono che gli scacchi mettono in rilievo certi aspetti dell'intelligenza a preferenza di altri: in particolare questi quattro aspetti sono predominanti:

- la *memoria*. Infatti per giocare bene è necessario ricordarsi centinaia, probabilmente migliaia di posizioni precedenti. E' stato dimostrato come un maestro[1] di scacchi possa giocare simultaneamente su più di cinquanta scacchiere, andando da una all'altra e facendo una mossa su ciascuna. Inoltre se la posizione dei pezzi di qualsiasi scacchiera viene modificata, anche un cambiamento minimo, egli si accorgerà immediatamente del cambiamento. Senza essere conscio si porta con sè ricordi molto precisi di tutte le cinquanta scacchiere.

- la *visualizzazione*. Infatti il regolamento afferma che non è possibile toccare o addirittura muovere i pezzi, se non l'unico pezzo che si vuole muovere. Il livello estremo di visualizzazione lo si trova nella capacità dei maestri di scacchi di giocare alla cieca, senza vedere la scacchiera. Qualsiasi maestro è in grado di giocare senza difficoltà una partita scrivendo o avendo in testa le mosse espresse in notazione algebrica, e molti sono in grado anche di giocarne più d'una. La visualizzazione dipende in buona parte anche dalla memoria, infatti di regola dopo una partita alla cieca, un giocatore è in grado di ripeterla mossa per mossa. Viene paragonato questo procedimento a quello della ricerca scientifica, nella quale si sottopongono al vaglio del metodo sperimentale le varie ipotesi, con la differenza che un scacchista può metterle alla prova solo mentalmente.

- l'*organizzazione*. E' essenziale che un giocatore pensi in maniera razionale. Deve essere in grado di coordinare e unificare le azioni dei pezzi di modo che esse acquistino il massimo di efficacia. In questo senso la strategia degli scacchi è simile alla strategia militare ed è per questo che in molte accademie militari si studiano gli scacchi.

[1] titolo ricavato dalla scala Elo

- l'*intuizione*. Intesa come capacità di analizzare di analizzare una posizione e capire immediatemente qual'è la strategia migliore. E' proprio questa una differenza fondamentale con calcolatori. Mentre una macchina analizza fino a quanto è in grado la maggior parte dell'albero di gioco, un uomo è in grado di vedere istantaneamente quali sono i rami che conducono a mosse migliori e ad escludere immediatamente gli altri.

E' proprio sulla base di queste abilità che si fondano i moderni programmi in grado di giocare a scacchi. Innanzitutto la maggior parte usa l'algoritmo Alphabeta o delle sue varianti e in secondo luogo tutti nel corso degli anni hanno adottato delle euristiche per cercare di replicare il ragionamento umano. Queste euristiche si possono riassumere in quattro diversi punti.

- *libro delle aperture*. Vengono memorizzate un elenco di prime mosse famose o comunque utilizzate dai migliori giocatori di modo che se il computer si trova in una situazione nota saprà già come muoversi.

- *euristiche per la costruzione dell'albero di gioco*. Viene aumentata l'efficacia dell'algoritmo Alphabeta integrando le partite dei migliori giocatori, in modo da ottenere un risparmio in termini di tempo di elaborazione a parità di profondità di ricerca.

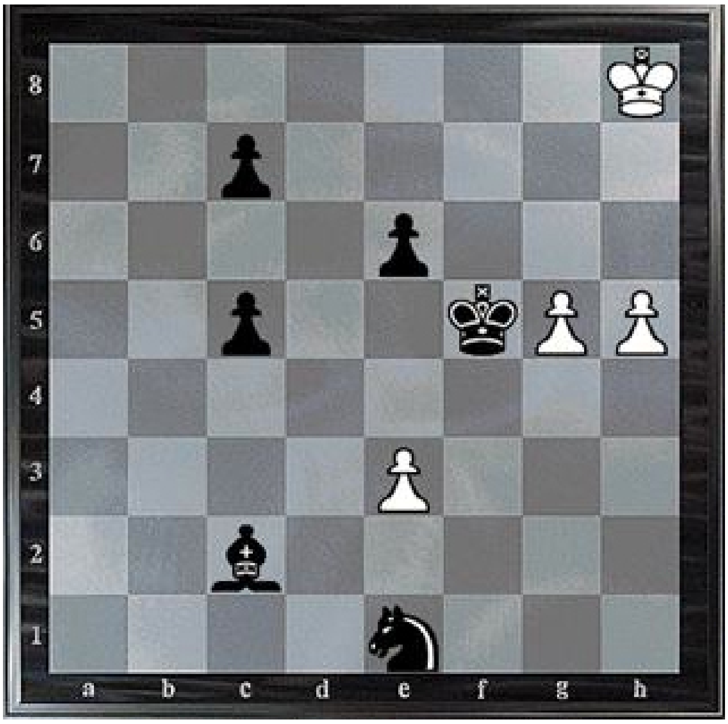
- *funzione di valutazione*. E' una delle componenti più importanti e delicate di un giocatore artificiale, in quanto valuta la posizione di gioco in cui ci si trova e indica quanto una determinata posizione è buona per un giocatore. Anche in questo caso si cerca di rifarsi alle partite o comunque all'aiuto dei maestri nel valutare la bontà di una certa posizione.

- *database di finali*. Sono archivi in cui sono registrate le mosse migliori per vincere alcuni tipi di finali con pochi pezzi. Attualmente i computer più avanzati sono in grado di giocare alla perfezioni finali con al massimo 6 pezzi rimanenti.

3.2 Michail Botvinnik

Michail Botvinnik è stato campione del mondo di scacchi dal 1948 al 1963 ed ha contribuito enormemente nella meccanizzazione degli scacchi. Il suo lavoro è stato finalizzato allo sviluppo di un programma per computer in grado di imitare il modo di prendere scelte dei grandi maestri di scacchi. A causa di tale lavoro, che lo ha portato a realizzare un programma chiamato Pionere, è stato insignito, il 7 settembre 1991, della laurea ad honorem in matematica dall'Università di Ferrara. Innanzitutto l'idea di Botvinnik non è più quella di avere come obiettivo lo scaccomatto, ma di guadagnare pezzi. Per realizzare tale scopo egli utilizza l'algoritmo minimax e una funzione di valutazione della posizione analoga a quella usata da Shannon. Questo modello vede lo scaccomatto come un caso particolare di guadagno di materiale, valutando il re 200 punti, cioè molto di più dell'insieme di tutti gli altri pezzi, e adotta per la prima volta una piccola libreria di aperture e di finali. La differenza tra il modello di Shannon e quello di Botvinnik sta nella costruzione dell'albero di gioco. Botvinnik costruisce nel suo programma, per ogni posizione, una albero lungo e stretto che non è ottenuto con la troncatura ad un livello fissato (orizzonte), ma con la costruzione di un sottoalbero, con orizzonte variabile, in cui solo i "rami migliori" sono presi in considerazione. Per realizzare tale idea, egli si serve di alcuni principi per la limitazione dell'analisi e un complesso modello matematico. All'interno di questo modello le caratteristiche essenziali sono l'orizzonte variabile e un albero delle traiettorie che rappresenta un insieme di azioni e obiettivi ammissibili. Questo albero delle traiettorie è costituito da tutti i pezzi, che nei limiti dell'orizzonte, sono in grado di partecipare alle azioni prese in considerazione e dall'insieme delle case che essi possono attraversare. Questa schematizzazione è simile al modo di ragionare di un maestro di scacchi: egli inizia a valutare le possibilità di attaccare o di difendersi entro i limiti dell'orizzonte e non si concentra su tutti i pezzi, ma solo su quelli che intervengono nei suoi calcoli e quella parte di case che tali pezzi attraversano. Un'altra novità introdotta da Botvinnik, e che sarà copiata successivamente da tutti gli elaboratori, è un approccio bottom-up nella risoluzione dei finali di gioco. In pratica, poichè il computer ha una libreria di finali, se si trova in una delle situazioni che ha in memoria, può giocare in maniera perfetta senza bisogno di analizzare l'albero di gioco; mentre se non si trova in una di queste situazioni l'approccio bottom-up prevede di cercare di riportarsi ad una di queste posizioni che ha in memoria, mediante mosse specifiche. Quindi il computer non cerca più la mossa migliore per vincere, ma quelle più adatte per ricondursi ad un finale noto.

Sfortunatamente il periodo in cui Botvinnik era più attivo come ricercatore coincidette con il periodo in cui l'accesso ai calcolatori era limitato nell'Unione Sovietica. Dunque il suo programma non ha mai partecipato a tornei per elaboratori e quindi non è mai stato valutato con il sistema Elo, affinchè si potesse fare un confronto oggettivo con le altre macchine. Tuttavia, in base ai test di laboratorio eseguiti, si è visto come fosse in grado di risolvere situazioni strategiche complesse con un numero molto basso di mosse esaminate. L'esempio più significativo che si evince da questi test è la risoluzione della seguente posizione, nota come lo studio di Nadareisvili, che non fu risolto dal programma Chess 4.6, vincitore nel 1977 del secondo campionato del mondo di scacchi per elaboratori, ma fu risolto dal programma chiamato “Pioniere” di Botvinnik. Le mosse usate



(a) Lo studio di Nadareisvili: il bianco vince

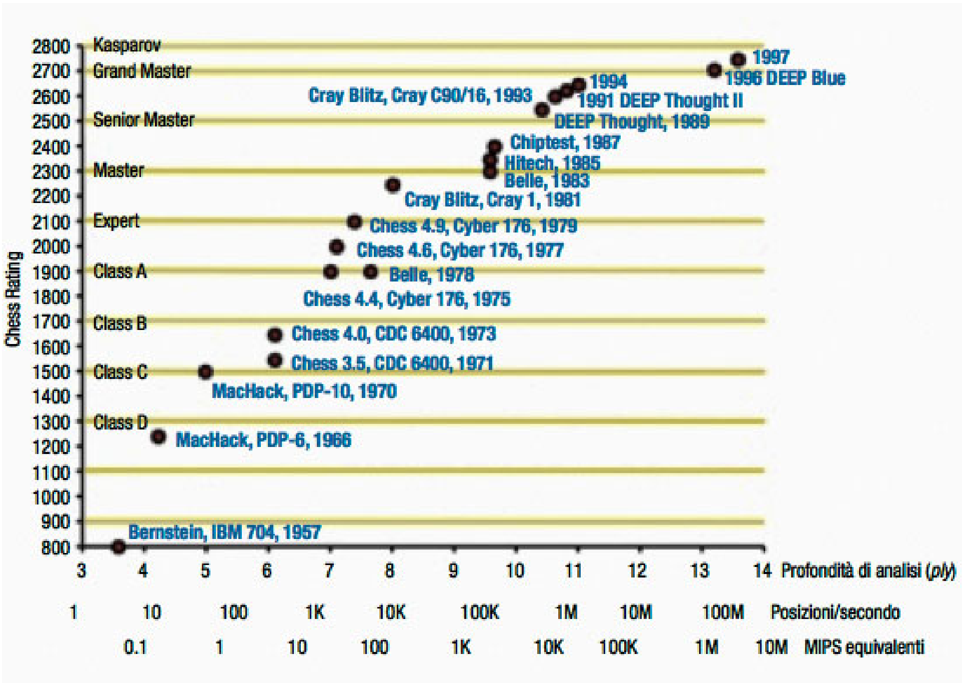
sono le seguenti (tocca al bianco a muovere):[2]:

1. g5-g6 Rf5-f6
2. g6-g7 Ac2-h7!
3. e3-e4 Ce1-f3
4. e4-e5+ Cfexe5
5. Kh8xh7 Ce5-f7
6. g7-g8=D Cf7-g5+
7. Dg8xg5+ Rf6xg5
8. h5-h6 c5-c4
9. Rh7-g7 c4-c3
10. h6-h7 c3-c2
11. h7-h8=D c2-c1=D
12. Dh8-h6+! e il bianco vince

Il Pioniere di Botvinnik fu l’unica macchina ad adottare una strategia di Shannon di tipo

[2]mosse in notazione algebrica: D sta per regina, C sta per cavallo, R sta per re, x indica una cattura, + indica uno scacco, ! una buona mossa

B, cercando cioè di giocare a scacchi in maniera "intelligente". Tutti gli altri calcolatori adoperarono una strategia di tipo A, cioè basata sulla pura potenza di calcolo dell'elaboratore, tuttavia in ognuno di essi vennero applicate le euristiche principali della macchina di Botvinnik. E fu proprio grazie a questi accorgimenti che le macchine arrivarono a sfidare i migliori giocatori al mondo dell'epoca. Ovviamente contribuì anche il progresso tecnologico: in particolare l'introduzione del microprocessore e i grandi miglioramenti delle tecniche di progettazione di hardware specializzato (VLSI).
Nel grafico che segue sono illustrati i progressi dei calcolatori in termini di punteggio Elo nel corso degli anni e il numero di semimosse che erano in grado di analizzare, cioè a fino a quale profondità dell'albero di gioco arrivavano per ogni mossa.



(a) Evoluzione dei computer in grado di giocare a scacchi

3.3 Deep Blue e l'algoritmo parallelo

La storia di Deep Blue, la prima macchina in grado di battere un campione del mondo di scacchi, inizia nel 1987 con la collaborazione di uno studente cinese FH. Hsu con uno studente canadese M. Cambell nel Computer Science Department dell'Università di Carnegie Mellon a Pittsburgh. Il loro primo progetto inizialmente chiamato "Chiptest" venne rinominato "Deep Thought", in onore di un computer immaginario presente in una serie radiofonica, e si basava sul principio di analisi per forza bruta. Era in grado di analizzare 700.000 posizioni al secondo, con una profondità media di 10 semimosse in apertura e 9 semimosse nel mediogioco. La bontà di questo progetto attirò l'attenzione di numerose grandi aziendi, e i due studenti vennero assunti nel 1990 dai laboratori di ricerca dell'IBM, dove svilupparono la macchina che oggi conosciamo come "Deep Blue"[3]. La forza di questa macchina deriva dalla sua eccezionale potenza computazionale, basata sul calcolo parallelo, cioè l'esecuzione simultanea di codice sorgente su più microprocessori o più core dello stesso processore allo scopo di aumentare le prestazioni, in particolare di analizzare il maggior numero possibile di mosse nel minor tempo. L'architettura parallela di Deep Blue è costituita da un modello SP-2 con 24 processori che controllano 512 processori VLSI[4] specializzati per la generazione delle mosse. Ciascuno di questi processori analizza 1 milione di posizioni al secondo e complessivamente i 512 processori arrivano a 200 milioni di posizioni al secondo utili. Questo permetteva a Deep Blue di esplorare alberi profondi fino a 14 semimosse in circa 3 minuti, il tempo medio per mossa in un torneo. Vediamo in dettaglio come funziona questa architettura ed in particolare

Sistema	Posizioni/sec	HW
Ananse	6.000	Intel 486/66
MChess	10.000	Pentium 90
Amy	10.000	Sun Sparc10
Arthur	20.000	Sun Sparc20
Cray Blitz	750.000	Cray C90
*Socrates	1.000.000	CM5 / 512
DeepThought 2	4.000.000	IBM/6000
Deep Blue (1997)	200.000.000	IBM SP/2 (24 processori) + 512 chip speciali
Fritz, Junior, Shredder (2004)	3-5 milioni	Quadriprocessore su PC di ultima generazione

(a) Evoluzione del numero di posizioni al secondo analizzate da alcuni sistemi

l'algoritmo parallelo, in quanto il risultato di Deep Blue va considerato in primo luogo come un successo della ricerca sul calcolo parallelo.

Un parametro importante per misurare l'efficenza di un algoritmo parallelo è lo *speed-up*, cioè il rapporto tra il tempo di una implementazione in parallelo con il tempo di una sua versione sequenziale. L'obiettivo ideale è di ottenere valori di speed-up che aumen-

[3] il nome deriva da un gioco di parole: infatti il soprannome dell'IBM era "Big Blue"

[4] very large scale integration: indica un'elevata integrazione di transistor all'interno di un singolo chip

tano in maniera lineare con l'aumentare del numero n di processori utilizzati. Tuttavia per gli algoritmi paralleli basati sulla ricerca sugli alberi di gioco ci sono dei ritardi di tempo, chiamati *overhead time* (OT). Questi ritardi esprimono la perdita percentuale di speed-up, rispetto allo speed-up ideale e sono espressi dalla seguente formula:

$$(OT) = (tempo\ con\ n\ CPU) \cdot \frac{n}{(tempo\ con\ 1\ CPU)}$$

In particolare l'overhead time è in funzione di tre fattori: $(OT) = f(OR, OC, OS)$.

- L'*overhead di ricerca* (OR) costituisce il ritardo di tempo dovuto alla crescita sempre maggiore dell'albero di gioco e poichè le informazioni sono contenute su macchine diverse, ci possono essere delle inefficienze. Tale forma di degrado può essere approssimata osservando che la dimensione dell'albero esplorato è proporzionale ad tempo di ricerca, quindi OR è definito in tale modo:

$$(OR) = \frac{nodi\ visitati\ da\ n\ CPU}{nodi\ visitati\ da\ 1\ CPU} - 1$$

- L'*overhead di comunicazione* (OC) costituisce il ritardo dovuto alla trasmissione dei messaggi tra le varie CPU. Questo parametro può essere limitato in fase di progettazione scegliendo opportunamente le dimensioni e la frequenza dei messaggi. Una stima possibile per calcolare OC è la seguente:

$$(OC) = (numero\ messaggi\ inviati) \cdot (costo\ medio\ di\ un\ messaggio)$$

- L'*overhead di sincronizzazione* (OS) è il costo dovuto quando alcuni dei processori sono inattivi. In teoria tutti i processori dovrebbero essere attivi nello svolgere lavoro utile per tutto il tempo di esecuzione, in realtà questo comportamento viene meno quando un processo deve sincronizzarsi con un altro, magari aspettando che finisca la sua parte di lavoro.

Per massimizzare le prestazioni di un algoritmo parallelo bisogna minimizzare i vari tipi di ritardo. Tuttavia essi non sono indipendenti e il minimizzare di uno di essi può causare l'aumento di un altro.
In particolare nella meccanizzazione del gioco degli scacchi i ricercatori dell'IBM hanno studiato tre tipi differenti di parallelismi:

- *Il parallelismo nella funzione di valutazione statica.* La qualità di una macchina in grado di giocare a scacchi è legata in buona parte ad una adeguata funzione di valutazione, in grado di valutare la bontà delle mosse. Il tempo dedicato a valutare le varie posizioni può essere ridotto distrubuendolo su più processori, ciascuno dedicato a valutare differenti termini di questa funzione. I risultati ottenuti saranno poi riuniti per creare un unico valore per la posizione esaminata. Deep Blue usa un hardware specifico per l'esecuzione della funzione di valutazione, formato da due componenti: il valutatore veloce e quello lento.

- *La generazione in parallelo delle mosse.* E' un'operazione molto frequente ed incide pesantemente sul tempo di esecuzione. Si applica una generazione in parallelo di tutte le mosse relative ad un nodo. Ogni colonna della scacchiera è assegnata ad un processore che genera tutte le mosse per tutti i pezzi della colonna. C'è bisogno di una forma di bilanciamento in quanto le colonne contengono un numero diverso di pezzi e per questo bisogna sfruttare in maniera ottimale i processori. Una volta che i processori hanno generato le mosse legali nelle caselle a cui sono associati, assegnano alla mossa un certo valore di priorità. Poi ogni processore deposita la priorità della sua migliore mossa su un bus accessibile da tutti gli altri: qui viene selezionata la mossa con priorità più alta, che verrà poi generata nella scacchiera.

- *La decomposizione dell'albero di gioco.* Il metodo consiste nel dividere l'albero in sottoalberi e stabilisce che sottoalberi diversi siano esplorati da processori diversi. L'elevata quantità di processori in Deep Blue ha permesso di svolgere agevolmente questo compito.

L'algoritmo per il gioco degli scacchi è scritto in linguaggio C e gira sotto il sistema operativo AIX, di proprietà dell'IBM. Le sue funzioni di valutazione erano inizialmente scritte in forma generale, con molti parametri ancora da definire; fu il sistema stesso che determinò questi parametri analizzando migliaia di partite dei migliori giocatori. In particolare la sua funzione di valutazione è stata divisa in 8.000 parti, la maggior parte che analizzavano posizioni particolari nella scacchiera. Riprendendo le idee di Botvinnik, Deep Blue possedeva un libro di aperture con 4.000 posizioni e 700.000 partite di campioni memorizzate. Disponeva inoltre di database di finali che conteneva la maggior parte dei finali con 6 pezzi rimanenti e tutti i finali con 5 o meno pezzi. Questo database fu fornito da alcuni dei migliori giocatori del tempo quali M. Illescas, J. Federowicz e N.Firmiam.
Deep Blue divenne famoso per le sfide contro il campione del mondo dell'epoca Garry Kasparov. Vi furono due sfide: la prima il 10 febbraio 1996 a Philadelphia e la seconda l'11 maggio del 1997. Ogni sfida consisteva in 6 partite, seguendo il regolamento ufficiale della FIDE, con 120 minuti a disposizione per ogni giocatore. La prima sfida del 1996 fu

vinta da Kasparov per 4-2 con tre vittorie, una sconfitta e due pareggi, tuttavia dopo 4 partite il punteggio era sul 2-2. La prima delle 6 partite fu vinta da Deep Blue e fu la prima volta che un computer sconfisse il campione di scacchi in una singola partita sotto le regole ufficiali. La partita più interessante e decisiva fu senza dubbio la quinta, con Kasparov che propose una patta alla 23-esima mossa, il programma rifiutò e abbandonò poi alla 47-esima mossa in favore del campione russo.
Un anno dopo ci fu la rivincita a New York. Numerose modifiche vennero fatte a Deep Blue durante quell'anno. Innanzitutto la funzione di valutazione è passata ad analizzare da 6400 a 8000 posizioni particolari, poi venne ridisegnato il chip centrale della macchina, fu aumentato sia il numero che la velocità di generazione delle mosse e venne testato da alcuni dei migliori maestri dell'epoca, come J. Benjamin. La seconda sfida venne vinta da Deep Blue per 3.5-2.5 con 2 partite vinte, una sconfitta e tre pareggiate di comune accordo. Dopo cinque partite la sfida era in perfetta parità: fu decisiva l'ultima partita vinta da Deep Blue. In questa sesta partita un errore in apertura costò la sconfitta di Kasparov che abbandonò dopo solo 19 mosse e meno di un'ora di gioco. Nella conferenza stampa dopo la sfida Kasparov accusò i creatori della macchina di aver barato, in quanto a suo dire aveva visto in certe mosse del computer intelligenza umana e cioè che alcune mosse non erano state generate dalla macchina. Ne nacque una controversia e alla fine mentre Kasparov chiedeva una rivincita alle sue condizioni e IBM ne proponeva altre, il tutto si risolse con il ritiro e lo smantellamento di Deep Blue. Tuttavia quella domenica dell'11 maggio 1997 passò alla storia come il giorno in cui una macchina aveva battuto il campione del mondo di scacchi e di sicuro come uno dei grandi successi scientifici del secolo. Dopo questa partita Kasparov sfidò altre macchine: "“Deep Junior” nel 2003 e “X3D Fritz” sempre nel 2003, entrambe le sfide concluse con un pareggio. Anche negli anni seguenti ci furono numerose sfide tra le macchine e i migliori giocatori e la maggior parte degli incontri si è conclusa in pareggio, a segno che la superiorirà degli automi non è affatto netta. Poichè i computer dispongono di un database elevatissimo di aperture e finali, è solo nel mediogioco che i migliori scacchisti al mondo possono ancora vincere. Per tutte le altre persone il computer è diventato un avversario potenzialmente imbattibile, ma da cui si può imparare tanto.

Appendice A

Approfondimento: altri matematici che si sono occupati di scacchi

- **Emanuel Lasker** (1868-1941), scacchista e matematico tedesco. Fu campione del mondo di scacchi per ben 27 anni, dal 1894 al 1921. L'altra sua grande passione fu la matematica. Dopo essere stato studente di Hilbert e aver preso un dottorato a Erlagen nel 1902, formulò nel 1905 il teorema di Lasker-Noether, derivato dal teorema fondamentale dell'aritmetica di Euclide, che prova l'esistenza e l'unicità della scomposizione in fattori primi di un numero intero. Lasker estese il suo teorema agli elementi di un anello, cioè un qualunque insieme sul quale si possono eseguire le operazioni di somma e prodotto. Benchè potesse insegnare matematica o giocare a scacchi da professionista, preferì considerarsi un filosofo e dedicarsi liberamente a quello che via via lo interessava. Per un lungo tempo fu in rapporti amichevoli con Einstein, che scrisse anche una prefazione ad una sua biografia. Tra le altre cose i due ebbero lunghe discussioni sulla teoria della relatività.
- **Emile Borel** (1871-1956), matematico francese. Ha dato un contributo importantissimo all'algebra moderna con l'introduzione della σ-algebra di Borel, dello spazio boreliano e del teorema di Heine-Borel sugli insiemi compatti. Diede importanti contribuiti nel campo della topologia, della teoria della misura, della probabilità e fu un precursore della teoria dei giochi.
- **Godfrey Harold Hardy**(1877-1947), matematico inglese che si occupò di teoria dei numeri ed analisi matematica. Formulò la legge di Hardy-Weinberg riguardante la gentica delle popolazioni e si interessò al gioco degli scacchi e in particolare a fornire un limite superiore al numero di partite giocabili. Il risultato da lui ottenuto fu di $10^{10^{50}}$.

- **Làzlò Kalmàr** (1905-1976), matematico ungherese. Studiò matematica e fisica a Budapest. Dal 1930 in poi lavorò all'Università di Szeged, prima come assistente, poi come professore. I suoi principali campi di ricerca furono la logica matematica, l'intelligenza artificiale e la cibernetica. Si occupò di scacchi generalizzando i risultati ottenuti da König e Zermelo, provando la seguente proposizione: *se q si trova in una posizione vincente, è possibile vincere senza ripetere nessuna posizione già vista.*

- **Shizuo Kakutani** (1911-2004), matematico giapponese, noto soprattutto per il suo teorema sul punto fisso, che estende il teorema di Brouwer alle funzioni polidrome. Questo teorema venne dimostrato nel 1941 e viene usato per la prima volta da John Nash nella dimostrazione dell'equilibrio di Nash. In seguito ha trovato una vasta applicazione nella teoria dei giochi e in economia. In particolare è stato utilizzato da K. Arrow e G. Debreu nella loro teoria degli equilibri dei mercati.

Bibliografia

[1] A.Newell, C. Shaw, H.Simon *Chess Playing Programs and the Problem of Complexity*, IBM Journal of Research and Development, Vol. 4, No. 2, pp. 320-335. Reprinted (1963) in Computers and Thought (eds. Edward A. Feigenbaum and Julian Feldman), pp. 39-70, New York, McGraw-Hill, 1958

[2] D.Shenk *The Immortal Game: A History of Chess*, Souvenir Press Ltd, 13 Oct 2008

[3] P.Cinciarini *Il computer gioca a scacchi*, Mondo digitale, No. 3, pp. 3-16, settembre 2005

[4] U. Schwalbe, P.Walker *Zermelo and the early History of Game*, August 1997, revised Oct 1999

[5] R.Fine *La psicologia del giocatore di scacchi*, Milano, Adelphi, settima edizione, maggio 2008

[6] E.Zermelo *On an Application of Set Theory to the Theory of the Game of Chess*, 1913

[7] A.E.Elo *The Rating of Chessplayers*, New York, Ishi Press International, 1978

[8] D.Levy, M.Newborn *How computer play chess*, New York, Ishi Press International, 1991

[9] P. Odifreddi *Incontri con menti straordinarie* Saggistica TEA, 15 novembre 2007

[10] F. H. Hsu *Behind Deep Blue: Building the computer that defeated the World Chess Champion*, Princeton, Princeton Univ Pr, gennaio 2004

Webgrafia

[1] http://matematica.unibocconi.it/articoli/lo-scacchista-ideale

[2] http://matematica.unibocconi.it/articoli/michail-botvinnik-un-programma-intelligente-giocare-scacchi

[3] http://matematica.unibocconi.it/articoli/i-computer-giocano-scacchi-che-punto-siamo

[4] http://www.chess.com/chessopedia/view/mathematics-and-chess

[5] http://blogdemaths.wordpress.com/2012/03/01/valeur-relative-des-pieces-aux-echecs-et-probabilites/

[6] http://wdjoyner.wordpress.com/2012/11/12/mathematicians-and-chess/

[7] http://web.unife.it/utenti/ettore.santi/AppuntiTdG/

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Minimax_theorem#Minimax_theorem

[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Nash_equilibrium

[10] http://chessprogramming.wikispaces.com/History