INDICE

INTRODUZIONE

In questo elaborato sono presentati i concetti di raggiungibilità e controllabilità per i sistemi dinamici lineari tempo invarianti e, successivamente, sono analizzati gli effetti che la retroazione dallo stato può avere sullo studio di questi e di altri concetti (quali ad esempio la stabilizzabilità del sistema stesso).
Sono dunque dati per noti i concetti relativi all'evoluzione libera e forzata dei sistemi, alla forma di Jordan di una matrice, all'analisi modale ed allo studio della stabilità.
In contrapposizione allo studio della stabilità, che concentra la sua analisi su sistemi ad ingresso nullo (o comunque fissato), i concetti di raggiungibilità e controllabilità portano piuttosto all'analisi del sistema al variare degli ingressi e allo studio degli effetti che questi ultimi hanno su di esso.
In un primo momento si considereranno sistemi in cui l'ingresso è completamente indipendente dallo stato del sistema.
Conclusa questa analisi si passerà invece a vedere come i risultati ottenuti si modifichino considerando sistemi in cui l'ingresso porta con sè una componente determinata in ogni momento dallo stato in cui il sistema si trova.

CAPITOLO 1

Raggiungibilità dei sistemi lineari discreti

Per lo studio dei sistemi dinamici, come detto, oltre all'evoluzione libera che descrive il comportamento del sistema autonomo (ossia in presenza di ingressi nulli), è interessante e utile comprendere come gli ingressi possano influire sulla dinamica del sistema e per fare ciò è fondamentale l'introduzione dei concetti di raggiungibilità e controllabilità.

1.1 Matrice di raggiungibilità e spazio raggiungibile

Il problema della raggiungibilità per sistemi lineari consiste, dato un sistema, nel vedere quali condizioni debbano essere verificate affinché, partendo da una determinata condizione iniziale e applicando un opportuno segnale di ingresso, sia possibile raggiungere uno stato finale predefinito.
Si consideri dapprima il caso dei sistemi lineari discreti, descritti in forma compatta da equazioni del tipo:

$$\begin{cases} x(t+1) & = & F\,x(t)+G\,u(t) \\ y(t) & = & H\,x(t)+J\,u(t) \end{cases}$$

con u vettore degli ingressi ad m componenti, x vettore dello stato a n componenti, y vettore di uscita e F, G, H, J matrici di dimensioni opportune.
In un tale sistema lo stato raggiunto all'istante t è dato dalla formula

$$x(t)=F^t\,x(0)+\sum_{i=0}^{t-1} F^{t-i-1}\,G\,u(i)$$

la quale tuttavia partendo da condizioni iniziali nulle si riduce a

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{i=0}^{t-1} F^{t-i-1} G u(i) \\
&= \left[G \mid FG \mid F^2 G \mid \ldots \mid F^{t-1} G \right] \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} := R_t u_t
\end{aligned}
$$

dove viene definita la **matrice di raggiungibilità in t passi R_t** e u_t rappresenta il vettore contenente i vari ingressi impilati uno sopra l'altro nei successivi istanti di tempo.

Indicando con X = $\mathbb{R}^n$ lo spazio di stato, si definisce come **spazio raggiungibile in t passi** e si indica con $X_R(t)$, il sottospazio vettoriale di X costituito dall'insieme di tutti gli stati nei quali i diversi ingressi possono condurre il sistema dopo t passi partendo da condizioni iniziali nulle.

Dalla definizione e da $x(t) = R_t u_t$, risulta evidente come $X_R(t)$ non sia altro che l'immagine della matrice R_t (in formule $X_R(t) = \mathrm{Im} R_t$).

Gli spazi di raggiungibilità possiedono alcune importanti proprietà, una di esse è definita dal seguente

TEOREMA

Gli spazi si raggiungibilità di un sistema di dimensione n calcolati per istanti successivi soddisfano la catena di inclusioni e uguaglianze seguente:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq \ldots \subseteq X_R(t) = X_R(t+1) = \ldots \quad \textit{per qualche } t \in \mathbb{N},\ t \leq n$$

Dimostrazione:

Le inclusioni derivano banalmente dal fatto che un generico $X_R(k)$ è generato dalle colonne della corrispondente matrice di raggiungibilità in k passi R_k, la quale per costruzione contiene tutte le colonne di R_{k-1} più almeno un altra colonna che può essere o non essere linearmente indipendente dalle altre.

Il fatto che le inclusioni si trasformino in uguaglianze non dopo l'indice n segue del teorema di Cayley-Hamilton che permette di esprimere l'ennesima potenza di una matrice come combinazione lineare delle sue potenze inferiori, dimostrando così la lineare dipendenza delle ultime colonne di R_{n+1} da quelle di R_n.

Infine, considerando per semplicità il caso a un solo ingresso (ossia con m=1), dato $X_R(t)=X_R(t+1)$ per dimostrare che vale anche $X_R(t+1)=X_R(t+2)=...$ basta verificare che $Im(F^{t+1}G) \subseteq Im(R_{t+1})$, ma poiché per ipotesi $F^t G$ è combinazione lineare delle potenze precedenti, raccogliendo e sviluppando questo termine si può facilmente esprimere $F^{t+1}G$ come comb. lin. delle F^iG con $i \leq t$, in formule:

$$\begin{aligned} F^{t+1}G &= F\sum_{i=0}^{t-1} a_i F^i G \\ (\text{con } j = i+1) &= \sum_{j=1}^{t} a_{j-1} F^j G \end{aligned}$$

*

A questo punto si definisce la **matrice di raggiungibilità** del sistema come la matrice ***R***:=R_n ,

$$\boldsymbol{R} = [G \;|\; FG \;|\; F^2G \;|\; \ldots \;|\; F^{n-1}G]$$

la cui immagine è data dall'insieme di tutti gli stati raggiungibili da x=0 che si indicherà con X_R.

Ricordando che uno spazio vettoriale V è F-invariante se vale che

$$\forall\, v \in V \Rightarrow Fv \in V$$

si ha che per X_R vale il seguente

TEOREMA

X_R è il più piccolo sottospazio di X ad avere le proprietà:

1. *X_R è F-invariante*
2. *$X_R \supseteq ImG$*

Dimostrazione:

1)Preso x in X_R si dimostra che sta in X_R anche Fx, infatti, poiché vale:

$$x \in \mathrm{Im}[G \;|\; FG \;|\; F^2 G \;|\; \dots \;|\; F^{n-1} G]$$

vale anche:

$$Fx \in \mathrm{Im}[FG \;|\; F^2 G \;|\; F^3 G \;|\; \dots \;|\; F^n G]$$

ma, allo stesso modo, sapendo che per Cayley-Hamilton:

$$F^n = a_{n-1} F^{n-1} + a_{n-2} F^{n-2} + \dots + a_0 I$$

vale anche:

$$F^n G = a_{n-1} F^{n-1} G + a_{n-2} F^{n-2} G + \dots + a_0 G$$

il che dimostra chiaramente che

$$\mathrm{Im}(\boldsymbol{R}) \supseteq \mathrm{Im}(\mathrm{F}\,\boldsymbol{R}).$$

2) La dimostrazione della seconda proprietà è banale essendo G un sottoinsieme delle colonne della matrice ***R*** di cui X_R è l'immagine.

Resta da dimostrare che X_R sia il più piccolo sottospazio di X che soddisfa 1) e 2):
Preso un qualsiasi sottospazio S soddisfacente 1) e 2) si ha che

$$1) \Rightarrow S \supseteq \mathrm{Im}\, G \Rightarrow^{2)} S \supseteq \mathrm{Im}\, FG \Rightarrow^{2)} S \supseteq \mathrm{Im}\, F^2 G \Rightarrow^{2)} \dots \Rightarrow^{2)} S \supseteq \mathrm{Im}\, F^k G, \qquad \forall k \geq 0$$

e quindi come si voleva dimostrare $S \supseteq X_R$

*

Nel caso in cui $X_R = \mathbb{R}^n$ (= X), ossia se rango ***R*** = n, il sistema si dice "completamente raggiungibile" (o semplicemente "raggiungibile") e per un tale sistema, se si considera il caso con un solo ingresso, vale anche che la matrice F è ciclica, per cui il polinomio caratteristico coincide con il polinomio minimo, e la matrice di raggiungibilità ***R*** è una matrice quadrata nxn per cui la condizione necessaria e sufficiente per la completa raggiungibilità del sistema è $\det(R) \neq 0$.

Per un sistema a più ingressi, invece, si può usare la condizione $\det(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rango}[\boldsymbol{R}] = \text{n}$.

ESEMPIO:

Date F e G

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

si ha che

$$(\mathrm{R}_2 =)\, \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango 2 (avendo determinante -1) e dunque il sistema è completamente raggiungibile.

*

1.2 Forma canonica di Kalman

I sistemi completamente raggiungibili restano tali anche se si effettua un cambiamento di base. Infatti, considerando un cambiamento di variabili del tipo $z=T^{-1}x$ si ha che la nuova matrice di raggiungibilità è $\underline{\boldsymbol{R}}$ data da $\underline{\boldsymbol{R}} = T^{-1} \boldsymbol{R}$, e il rango di $\underline{\boldsymbol{R}}$ è lo stesso di quello della matrice di raggiungibilità nella vecchia base.

Avendo definito e discusso i sistemi raggiungibili si cerca ora di analizzare i sistemi non completamente raggiungibili al fine di vedere se è possibile in qualche modo separarne la parte raggiungibile da quella che non lo è.

Presi k vettori che formino una base dello spazio raggiungibile X_R e aggiungendovi n-k vettori linearmente indipendenti tra loro e dai primi, si ottiene una nuova base di n vettori nella quale un generico vettore v di X_R si esprime certamente nella forma:

$$v = [a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_k \quad 0 \quad \ldots\ldots \quad 0]^T$$

Applicando questo cambiamento di base al sistema, esso verrà a trovarsi in una forma particolare.
Tenendo presente la particolare forma dei vettori di X_R nella nuova base e la proprietà di F-invarianza di X_R, si può determinare la forma che ha la matrice F nella nuova base, infatti da:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(in cui F_{11} e F_{22} sono rispettivamente sottomatrici kxk e (n-k)x(n-k) di F)

si vede come la sottomatrice F_{21} debba necessariamente essere nulla.
Allo stesso modo dal fatto che $X_R \supseteq \mathrm{Im}(G)$ si ricava che, dato G nella forma:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix},$$

necessariamente deve essere $G_2 = 0$.
Quando il sistema si trova in questa forma si dice che è in **Forma canonica di Kalman** e le sue matrici F e G saranno del tipo:

$$F_K = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G_K = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e calcolando la matrice di raggiungibilità in questa nuova forma si ottiene:

$$R_K = \begin{bmatrix} G_1 & | & F_{11} G_1 & | & F_{11}{}^2 G_1 & | & \ldots & | & F_{11}{}^{n-1} G_1 \\ 0 & | & 0 & | & 0 & | & \ldots & | & 0 \end{bmatrix}$$

Il rango di questa matrice è k e, poiché gli ultimi n-k elementi di tutte le colonne sono zeri e quindi non influiscono per il calcolo del rango così come non influiscono neanche le ultime n-k colonne (in quando linearmente dipendenti dalle altre per Cayley-Hamilton), se ne deduce che il sottosistema (F_{11} , G_1) è completamente raggiungibile.
A questo punto, dividendo il vettore di stato in due sottovettori x_1 e x_2, è dunque possibile

esprimere in maniera esplicita il sistema suddividendolo in un sottosistema completamente raggiungibile rappresentato da $x_1(t)$ con ingresso dato dalla coppia $(u(t),x_2(t))$, ed un sottosistema autonomo completamente non raggiungibile rappresentato da $x_2(t)$.

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t+1) & = & F_{11}x_1(t)+F_{12}x_2(t)+G_1u(t) \\ x_2(t+1) & = & F_{22}x_2(t) \end{cases}$$

Infatti dalla formula risulta evidente come, partendo dallo stato nullo, che è punto di equilibrio per il sottosistema autonomo in x_2, questo non possa in alcun modo discostarsi dallo stato iniziale, dimostrandosi di fatto completamente non raggiungibile.
La soluzione di un sistema in forma di Kalman con condizioni iniziali nulle risulta essere:

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad x_1(t)=R_t u_t \qquad \text{e} \qquad x_2(t)=0$$

che è quindi indipendente da F_{12} e F_{22}.

ESEMPIO:

Il sistema $\Sigma = (F,G)$ con

$$F=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad G=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

non è completamente raggiungibile infatti per la sua matrice di raggiungibilità ***R*** vale che:

$$\text{Rango}(\boldsymbol{R}) \;=\; \text{Rango}\begin{bmatrix} 0 & 6 & 24 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;=\; 2$$

Considerando tuttavia il sottosistema $\Sigma_1 = (F_{11},G_1)$ con

$$F_{11}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ G_1=\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix} \text{ e matrice di raggiungibilità } R_{(1)}=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 3 & 3\end{bmatrix}$$

si nota che $R_{(1)}$ ha rango 2 (ossia pieno) e si può quindi concludere che il sistema è in forma di Kalman.

*

Calcolando poi la matrice di trasferimento del sistema in forma di Kalman si ottiene

$$\begin{aligned}
W(z) &= H(zI-F)^{-1}G+J\\
&= \begin{bmatrix}H_1 & H_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}zI-F_{11} & -F_{12}\\ 0 & zI-F_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}G_1\\ 0\end{bmatrix}+J\\
&= \begin{bmatrix}H_1 & H_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(zI-F_{11})^{-1} & *\\ 0 & (zI-F_{22})^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}G_1\\ 0\end{bmatrix}+J\\
&= H_1(zI-F_{11})^{-1}G_1+J
\end{aligned}$$

che, come prevedibile alla luce degli antecedenti risultati, evidenzia come anche la matrice di trasferimento dipenda solamente dal sottosistema raggiungibile ossia da $\Sigma_R = (F_{11}, G_1)$.

1.3 Test PBH di raggiungibilità

Spesso, allo scopo di analizzare la raggiungibilità di un sistema, può risultare comodo l'utilizzo di altri criteri che, a differenza di quanto visto finora, non si basino sull'osservazione della matrice di raggiungibilità.

Il criterio PBH risponde a questa esigenza in quanto riconduce l'analisi della raggiungibilità allo studio del rango della **matrice PBH di raggiungibilità**

$$\left[zI-F \mid G\right]$$

ed è descritto dal seguente

TEOREMA

La matrice PBH di raggiungibilità ha rango pieno se e solo se z non è autovalore di F_{22}. Perciò se tale matrice ha rango pieno $\forall z \in \mathbb{C}$ *allora la F_{22} è assente (di dimensione nulla) ed il sistema è* completamente *raggiungibile (e viceversa).*

Dimostrazione:

Procediamo dimostrando dapprima che, se per qualche $z \in \mathbb{C}$ il rango della matrice PBH è minore di n, il sistema non è completamente raggiungibile.
Ammettendo che

$$\exists z \in \mathbb{C} \ | \ \text{rango}[F - zI \ | \ G] < \text{n}$$

si avrebbe che

$$\exists \text{un vettore } v \neq 0 \ | \ v^T [zI - F | G] = 0$$

e di conseguenza

$$zv^T = v^T F \quad , \quad v^T G = 0$$

ora, provando a pre-moltiplicare la matrice di raggiungibilità per v^T e utilizzando le due relazioni trovate si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{v}^T \boldsymbol{R} &= \mathrm{v}^T [\mathrm{G} \ | \ \mathrm{F\,G} \ | \ \mathrm{F}^2 \mathrm{G} \ | \ \dots \ | \ \mathrm{F}^{n-1} \mathrm{G}] \\ &= [\mathrm{v}^T \mathrm{G} \ | \ \mathrm{zv}^T \mathrm{G} \ | \ \mathrm{z}^2 \mathrm{v}^T \mathrm{G} \ | \ \dots \ | \ \mathrm{z}^{n-1} \mathrm{v}^T \mathrm{G}] \end{aligned}$$

ed essendo per ipotesi $v \neq 0$ si può dedurre che ***R*** non può avere rango pieno.
Ciò conclude la prova della prima tesi.

Si dimostra poi che, se il sistema non è completamente raggiungibile, per z scelto tra gli autovalori di F_{22} la matrice PBH non può avere rango pieno.

Infatti, osservando la sua forma di Kalman ottenuta con la trasformazione:

$$F_K = T^{-1} F T \ , \ G_K = T^{-1} G \quad \Rightarrow \quad [zI - F_K \mid G_K] = T^{-1} [zI - F \mid G] \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

e sapendo che poiché T è invertibile vale

$$\text{Rango}[zI - F_K \mid G_K] = \text{Rango}\begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} & G_1 \\ 0 & zI - F_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

si vede facilmente come la matrice PBH non possa avere rango pieno essendo le ultime righe linearmente dipendenti per z autovalore di F_{22}.
Allo stesso tempo, siccome scambiando tra loro le colonne di una matrice il suo rango non cambia, si può considerare la matrice

$$\begin{bmatrix} zI - F_{11} & G_1 & -F_{12} \\ 0 & 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}$$

la quale, essendo triangolare a blocchi con un primo blocco ($zI-F_{11}$, G_1) a rango pieno (a causa di quanto visto in precedenza), può scendere di rango solo a causa del blocco ($zI-F_{22}$) ossia se z è autovalore di F_{22}.

*

Applicando il test PBH ad un sistema in forma di Jordan si possono infine ricavare alcune ulteriori proprietà.
Dato un sistema Σ = (F,G,H) con F in forma di Jordan, infatti, si può dimostrare che Σ è completamente raggiungibile se e solo se, per ciascun autovalore di λ_i di F, le righe di G in posizione corrispondente alle ultime righe dei miniblocchi di Jordan relativi a λ_i sono linearmente indipendenti.
Risulta dunque che un sistema a k ingressi non può certamente essere raggiungibile se qualche suo autovalore ha molteplicità geometrica maggiore di k.
Di conseguenza, ad esempio, la matrice F di un sistema a un ingresso raggiungibile deve necessariamente essere ciclica.

1.4 Calcolo dell'ingresso

Dato un sistema completamente raggiungibile è noto che dallo stato iniziale nullo esso può, con un opportuno ingresso, raggiungere qualsiasi stato in X.

Si vuole ora, preso un determinato stato $\bar{x}$ in X determinare quale sia l'ingresso capace di condurvi il sistema partendo da x(0)=0.

Ricordando che per un sistema raggiungibile in t passi con condizioni iniziali nulle vale:

$$x(t)=R_t u_t$$

ed esprimendo u_t mediante la variabile ausiliaria η_t come $u_t = R_t^T \eta_t$ si ha che

$$x(t)=R_t R_t^T \eta_t \qquad \Rightarrow \qquad \eta_t=(R_t R_t^T)^{-1} x(t)$$

da cui risulta chiara la funzione di η_t che rende possibile il calcolo dell'inversa anche nei casi a più ingressi in cui R_t non è quadrata.

Una soluzione particolare per u_t è quindi data da:

$$u_t = R_t^T (R_t R_t^T)^{-1} \bar{x}$$

Ovviamente, essendo u_t una soluzione particolare, anche una qualsiasi altra soluzione formata dalla somma di u_t e di qualsivoglia elemento del nucleo di R_t sarebbe accettabile, tuttavia si può dimostrare che u_t è la soluzione a minima energia, e quindi quella ottima.

Il fatto che per il calcolo dell'ingresso si sia supposto di partire da condizioni iniziali nulle non implica infine che nel caso di condizioni iniziali arbitrarie ($x(0) = x_0$) non si possa comunque calcolare l'ingresso.

Infatti nel caso generale si avrebbe

$$x(t)-F^t x_0 = R_t u_t$$

e con lo stesso ragionamento si arriverebbe a:

$$u_t = R_t^T (R_t R_t^T)^{-1} [x(t) - F^t x_0]$$

il che dimostra come in realtà tutti gli stati raggiungibili da un sistema a partire da condizioni iniziali nulle possano essere raggiunti, con un opportuno ingresso e un sufficiente numero di passi, anche a partire da condizioni iniziali arbitrarie.

Mediante un opportuno cambio di base, per i sistemi completamente raggiungibili a un solo ingresso, che hanno come detto in precedenza la matrice F ciclica, si può definire una particolare forma detta **Forma canonica di controllo** che si ottiene ponendo la matrice F in forma compagna.
Il sistema nella nuova base ha matrici F e G del tipo:

$$F_c = T^{-1} F T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0 & -a_{-1} & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g_c = T^{-1} g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

CAPITOLO 2

Controllabilità dei sistemi lineari discreti

Si può dire che il problema della controllabilità dei sistemi lineari discreti sia in pratica lo speculare di quello della raggiungibilità.
Mentre infatti lo studio della raggiungibilità conduce a cercare quali stati siano raggiungibili da condizioni iniziali nulle, quello della controllabilità è volto alla ricerca di quegli stati a partire dai quali è possibile, con un opportuno ingresso e in un certo numero di passi, pilotare il sistema facendogli raggiungere lo stato nullo.
Si cercano dunque le condizioni iniziali $x(0) = x_0$ che soddisfino, per qualche ingresso u_t:

$$x(t) = F^t x_0 + R_t u_t = 0$$

e quindi

$$-F^t x_0 = R_t u_t \quad \Rightarrow \quad F^t x_0 \in \mathrm{Im}[G \mid FG \mid F^2 G \mid \ldots \mid F^{t-1} G] = X_R(t).$$

2.1 Stati controllabili in t passi

Si dice che uno stato *x* di un sistema lineare discreto è **stato controllabile (a zero) in t passi** se esiste una successione di ingresso u(0), u(1), … , u(t-1) che porta il sistema in t passi dallo stato iniziale x allo stato finale 0.
Dato un sistema lineare discreto Σ = (F,G,H), il sottospazio di X (spazio di stato) costituito da tutti gli stati del sistema controllabili in t passi si indica con $X_c(t)$.
In formule:

$$X_c(t) = \{x \in X \mid F^t x \in X_R(t)\}.$$

Gli spazi controllabili in numeri successivi di passi godono, come quelli raggiungibili, di alcune proprietà.

TEOREMA

Per gli spazi $X_c(t)$ di un sistema di dimensione n, come per gli spazi raggiungibili, vale la catena di inclusioni:

$$X_c(1) \subseteq X_c(2) \subseteq \ldots \subseteq X_c(i) \subseteq \ldots$$

Dimostrazione:

La correttezza della catena di inclusioni deriva dal fatto che applicando un ingresso u(t)=0 ad un sistema che si trova nello stato nullo esso non può che rimanerci.

Grazie a questo fatto, dato uno stato controllabile a zero in t passi mediante una certa sequenza u(0),...,u(t-1), esso sarà per forza controllabile anche in t+1 passi mediante la sequenza u(0),....,u(t-1), u(t) che è la sequenza precedente alla quale è stato però aggiunto il (t+1)-esimo ingresso u(t)=0.

*

Come per la raggiungibilità, anche per gli spazi $X_c(t)$ la catena di inclusioni soddisfa il seguente

COROLLARIO

La catena di inclusioni del teorema diventa sicuramente una catena di uguaglianze a partire da un certo $X_c(i)$ con $i \leq n$, in formule:

$$X_c(i) = X_c(n) := X_c (\forall\, i \geq n)$$

Ciò è una conseguenza di $\operatorname{Im} F^n = \operatorname{Im} F^i$, se $i \geq n$.

Inoltre, confrontando gli spazi $X_c(t)$ con quelli di raggiungibilità $X_R(t)$, valgono anche

$$dim[X_c(t)] \geq dim[X_R(t)], \forall\, t \quad \text{e} \quad X_R \subseteq X_c$$

che derivano dalla definizione di X_c e dall'F-invarianza di X_R.

2.2 Valutazione della completa controllabilità

Un sistema si dice **completamente controllabile** se $X_c = \mathbb{R}^n$.

Poiché, come visto nel paragrafo precedente, tutti gli stati raggiungibili sono anche controllabili a zero, per valutare la completa controllabilità di un sistema ha senso concentrare l'attenzione sul suo sottosistema non raggiungibile e cercare dei criteri di controllabilità per gli stati di quest'ultimo.

Ricordando dunque la suddivisione del sistema ottenuta grazie alla forma di Kalman:

$$\begin{cases} x_1(t+1) & = & F_{11}x_1(t)+F_{12}x_2(t)+G_1 u(t) \\ x_2(t+1) & = & F_{22}x_2(t) \end{cases}$$

a questo punto si sa che tutti gli stati relativi al sottosistema raggiungibile sono controllabili a zero con un opportuno ingresso.

Risolvendo invece l'equazione relativa al sottosistema non raggiungibile si ottiene

$$x_2(t)=F_{22}^t x_2(0)$$

e l'unico modo per ottenere che per qualche t valga $x_2(t) = 0$ a prescindere dalla scelta della condizione iniziale $x_2(0)$ è che $F_{22}^t = 0$.

Tuttavia F_{22}^t si annulla solo se un suo polinomio annullatore è λ^t, cosa che accade se e solo se gli autovalori di F_{22} sono tutti nulli.

Quindi, mentre un sistema completamente raggiungibile è certamente anche completamente controllabile, un sistema non completamente raggiungibile è completamente controllabile se e solo se la sua sottomatrice F_{22} ha tutti gli autovalori nulli.

Si può inoltre affermare che se la matrice F_{22} (ammesso sia presente) è invertibile, e quindi in particolare se un sistema è reversibile, allora per un tale sistema vale che $X_c=X_R$.

ESEMPIO:

Dato il sistema in forma di Kalman $\Sigma_k = (F_k, G_k)$

$$F_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & |1 \\ 1 & 0 & |1 \\ -- & -- & -- \\ 0 & 0 & |0 \end{bmatrix} \quad , \quad G_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

esso risulta essere completamente controllabile, la matrice $F_{22} = [0]$ non ha infatti nessun autovalore diverso da 0.

*

CAPITOLO 3

Raggiungibilità e controllabilità per i sistemi continui

Nei capitoli precedenti si sono analizzati i concetti di raggiungibilità e controllabilità esclusivamente per quanto riguarda i sistemi lineari discreti.
In questo capitolo gli stessi problemi verranno invece applicati al caso dei sistemi a tempo continuo che presenta molte analogie concettuali con il discreto sottendenti tuttavia spesso calcoli più complicati.

3.1 Spazio di raggiungibilità e Gramiano

Un sistema lineare a tempo continuo si esprime generalmente in forma compatta come

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & F\,x(t)+G\,u(t) \\ y(t) & = & H\,x(t)+J\,u(t) \end{cases}$$

e la sua soluzione completa è data dalla formula:

$$x(t)=e^{Ft}x(0)+\int_0^t e^{F(t-\tau)}G\,u(\tau)\,d\tau$$

Considerando poi solo la risposta forzata del sistema, si definisce, in analogia al caso discreto, un operatore

$$\mathrm{R}_t u:=\int_0^t e^{F(t-\tau)}G\,u(\tau)\,d\tau$$

che associa ad ogni ingresso lo stato raggiunto all'istante t.

Tuttavia, sebbene valga ancora per costruzione che $Im(R_t) = X_R(t)$, il fatto che, a differenza del caso discreto, R_t sia un operatore che agisce tra spazi a dimensione infinita complica notevolmente il calcolo della sua immagine.

Per poter procedere alla valutazione degli spazi di raggiungibilità dei sistemi continui occorre dunque introdurre alcune proprietà preliminari.

Data una matrice A e due vettori v e w tali che:

$$A:\ \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \qquad v \in \mathbb{R}^k \qquad w \in \mathbb{R}^n$$

per il prodotto scalare si ha che vale:

$$< Av , w > = (Av)^T w = v^T A^T w = v^T (A^T w) = < v , A^T w > .$$

Inoltre, considerando la stessa matrice A, si può dimostrare che vale anche

$$\mathrm{Im}(A A^T) \; = \; \mathrm{Im}\, A \; = \; (Ker\, A^T)^{\perp}$$

e, applicando la proprietà alla matrice di raggiungibilità ***R***, si ha dunque che

$$\mathrm{Im}(R R^T) \; = \; (Ker\, R^T)^{\perp} \; = \; X_R$$

da cui si evince che, per un sistema discreto, il rango di ***R*** è n (ossia il sistema è completamente raggiungibile) se e solo se vale:

$$det(R R^T) \neq 0 \text{ e dunque se e solo se } Ker\, R^T = \{0\} .$$

Alla luce di quanto appena visto si vuole definire un operatore simile al trasposto per le matrici che valga per l'operatore R_t e goda di proprietà analoghe.
Tale operatore verrà chiamato **operatore aggiunto di R_t** e sarà indicato con R_t^*.

Avendo dunque definito il prodotto scalare tra segnali continui u_1 e u_2 come

$$<u_1, u_2> = \int_0^t u_1^T(\tau) u_2(\tau) d\tau$$

e imponendo che R_t^* rispetti la proprietà del prodotto scalare vista sopra, con qualche calcolo risulta essere:

$$R_t^* x = G^T e^{F^T(t-\tau)} x, \quad 0 \le \tau \le t.$$

Si definisce dunque come **Gramiano di Raggiungibilità** la matrice quadrata $W_t := R_t R_t^*$, e per esso vale che:

- **i)** W_t è sempre una matrice quadrata, simmetrica e semidefinita positiva;
- **ii)** Lo spazio di raggiungibilità è dato da $X_R(t) = \mathrm{Im}\, W_t = (Ker\, R_t^*)^{\perp}$;
- **iii)** Se $det\ W_t \neq 0$, ossia W_t è definita positiva, allora il sistema è completamente raggiungibile.

In questo modo lo studio viene ricondotto a quello, più semplice, della matrice quadrata W_t.

3.2 Analogie e differenze con il caso discreto

Sebbene il Gramiano abbia di fatto risolto il problema della raggiungibilità, esso risulta comunque piuttosto scomodo da calcolare.
Tuttavia, analizzando il nucleo di R_t^* e sviluppando in serie di potenze l'esponenziale che ne deriva si giunge, dopo alcuni conti, a poter esprimere, in perfetta analogia al caso discreto, lo spazio di raggiungibilità come:

$$X_R = \mathrm{Im}\, R$$

Potendo dunque analizzare la raggiungibilità per mezzo della matrice *R*, l'intera analisi condotta per i sistemi discreti può quindi essere adattata anche al caso continuo.
Vi sono tuttavia anche alcune differenze, infatti mentre nel discreto $X_R(t)$ era una funzione

del numero di passi in cui si valutava la raggiungibilità, nel continuo lo spazio raggiungibile X_R è totalmente indipendente dal tempo.

Infine per i sistemi a tempo continuo è inutile studiare separatamente anche la controllabilità.

Infatti, poiché tutti i sistemi continui sono anche reversibili, i concetti di raggiungibilità e controllabilità per essi coincidono.

CAPITOLO 4

Retroazione dallo stato

Finora la raggiungibilità e la controllabilità sono state studiate per sistemi privi di retroazione.
Le soluzioni trovate per gli ingressi in grado di condurre i sistemi da uno stato iniziale x_0 ad uno stato finale x predefiniti infatti erano soluzioni "in catena aperta" e dipendevano solamente dai valori di x_0 e x (oltre che, ovviamente, dalle caratteristiche del sistema) senza considerare tuttavia la dinamica del sistema durante l'intervallo di tempo in cui l'ingresso agiva.
Allo scopo di colmare questa lacuna si possono dunque considerare soluzioni "in catena chiusa", in cui l'ingresso porta con sè anche informazioni riguardanti lo stato del sistema istante per istante, utilizzando quindi la retroazione dallo stato.

4.1 Sistemi retroazionati e forma di Kalman

Dato un sistema lineare $\Sigma = (F,G,H,J)$, se vi si applica una retroazione dallo stato, il nuovo ingresso si può esprimere come

$$u(t) = K\,x(t) + v(t)$$

in cui si vede come u(t) sia formato da una componente dovuta alla retroazione che si indica con Kx(t) e una componente indipendente dallo stato indicata con v(t).

Applicando un tale ingresso le equazioni del sistema diventano dunque:

$$\begin{cases} x(t+1) &= (F+GK)x(t)+Gv(t) \\ y(t) &= (H+JK)x(t)+Jv(t) \end{cases}$$

Il sistema risulta essere dunque equivalente a un sistema non retroazionato dove F è sostituita da F+GK ed H è sostituita da H+JK.

Fatte queste premesse, con un breve calcolo si può osservare come, applicando un cambiamento di base con matrice T al sistema retroazionato, le sue matrici diventano:

$$F \rightarrow T^{-1} F T \qquad G \rightarrow T^{-1} G \qquad K \rightarrow K T$$

In particolare, per farsi un'idea di come la retroazione possa modificare gli autovalori del sistema, risulta interessante considerare la forma di Kalman di un sistema retroazionato non completamente raggiungibile.
Partizionando K_K in K_1 e K_2 si ottiene:

$$F_K + G_K K_K = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 K_1 & G_2 K_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}+G_1 K_1 & F_{12}+G_2 K_2 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

Dalla formula risulta evidente come applicando la retroazione ad un sistema in forma di Kalman il blocco F_{22} rimanga invariato e con esso ovviamente i suoi autovalori.
Gli unici autovalori che risentono della retroazione sono dunque quelli del blocco F_{11} che diventa infatti $F_{11} + G_1K_1$.

4.2 Allocazione degli autovalori

Uno dei vantaggi derivanti dall'utilizzo della retroazione dallo stato nei sistemi consiste nel fatto che, scegliendo in modo opportuno la matrice di retroazione K, è possibile modificare a piacimento alcuni (e sotto certe condizioni tutti) gli autovalori della matrice F del sistema di partenza.
Nel paragrafo precedente si è visto che, dato un sistema, indipendentemente dalla scelta di K, non è possibile modificare gli autovalori del suo sottosistema non raggiungibile.

Sarà quindi possibile avere la completa allocabilità degli autovalori solo per i sistemi completamente raggiungibili.

Lo studio dell'allocabilità degli autovalori che segue verrà condotto considerando per semplicità solo sistemi ad un unico ingresso in quanto i risultati trovati saranno validi anche nel caso a più ingressi per il quale tuttavia i calcoli sarebbero più complicati.

Si consideri dunque consideri un sistema Σ = (F,g) completamente raggiungibile.
Esso, come si è visto nel paragrafo 1.4, può essere trasformato mediante un cambiamento di base in forma canonica di controllo $\Sigma_c = (F_c, g_c)$, ed applicando poi la retroazione u(t) = K_cx(t)+v(t) si ottiene

$$x(t+1)=(F_c+g_c K_c)x(t)+g_c v(t) \quad \text{dove} \quad g_c K_c=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

Prendendo, per esempio, un sistema in cui n = 4, la nuova matrice che sostituirà F nel sistema sarà dunque:

$$F_c+g_c K_c=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0+k_1 & -a_1+k_2 & -a_2+k_3 & -a_3+k_4 \end{bmatrix}$$

La matrice risultante è dunque ancora in forma compagna e si vede che, scegliendo in modo opportuno la matrice K_c, si possono allocare arbitrariamente tutti gli autovalori scegliendo di fatto quale sarà il polinomio caratteristico $\Delta_{F_c+g_c K_c}(z)$ del sistema retroazionato.

Volendo quindi che per la matrice 4x4 precedente risulti:

$$\Delta_{F_c+gK_c}(z)=p(z)=\beta_0+\beta_1 z+\beta_2 z^2+\beta_3 z^3+z^4$$

basterà prendere la matrice $K_c = [k_1\ \ k_2\ \ k_3\ \ k_4]$ in modo che

$$k_1 = a_0 - \beta_0, \quad k_2 = a_1 - \beta_1, \quad k_3 = a_2 - \beta_2, \quad k_4 = a_3 - \beta_3.$$

ESEMPIO:

Dato il sistema completamente raggiungibile $\Sigma_c = (F_c, g_c)$ con

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16 & 0 & 11 & 1 \end{bmatrix}, \qquad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

essendo Σ_c in forma canonica di controllo si vede facilmente che il polinomio caratteristico di F_c è:

$$\Delta_{F_c}(z) = z^4 - z^3 - 11z^2 - 16$$

Applicando una retroazione con $K_c = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]$ si avrà:

$$F_c + g_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 + 16 & k_2 & k_3 + 11 & k_4 + 1 \end{bmatrix}$$

Volendo ad esempio stabilizzare il sistema si può scegliere K_c come:

$$K_c = [-16 \quad 0 \quad -11 \quad -1]$$

in questo modo gli autovalori del sistema retroazionato vengono infatti tutti spostati in 0. Una tale retroazione che stabilizza il sistema annullandone tutti gli autovalori è chiamata ***Dead Beat Controller*** (DBC) e, in questo caso, modifica il polinomio caratteristico in modo da ottenere $\Delta_{F_c + g_c K_c}(z) = z^4$.

*

Si possono generalizzare le considerazioni appena fatte sull'allocabilità degli autovalori al caso di un sistema $\Sigma = (F,g)$ raggiungibile ma non espresso in forma canonica di controllo: essendo T la matrice del cambio di base che trasforma il sistema in forma canonica di controllo ed essendo p(z) il polinomio che si desidera essere polinomio caratteristico del sistema dopo la retroazione, si ha che p(z) dovrà essere polinomio caratteristico anche di

$$\begin{aligned} T(F_c+g_c K_c)T^{-1} &= T F_c T^{-1}+T g_c K_c T^{-1} \\ &= F+g K_c T^{-1} \end{aligned}$$

e da ciò si deduce immediatamente la matrice K da scegliere perché p(z) sia polinomio caratteristico del sistema retroazionato $\Sigma_R = (F+gK,g)$.
Essa risulta infatti $K=K_c T^{-1}$, dove K_c si calcola come sopra.

4.3 Raggiungibilità e retroazione

Nel paragrafo 1 di questo capitolo si è visto che un sistema in forma di Kalman a cui viene applicata una retroazione rimane in forma triangolare a blocchi e mantiene la sottomatrice F_{22} inalterata.
Inoltre si può dimostrare che la coppia $(F_{11}+G_1K_1,G_1)$ forma un sottosistema raggiungibile e dunque che anche il sistema retroazionato si trova in forma di Kalman.
Vale infatti il seguente:

TEOREMA
I sottospazi di raggiungibilità di un sistema sono invarianti rispetto alla retroazione.

Dimostrazione:
Dati i sistemi $\Sigma = (F,G)$ e $\Sigma_k = (F+GK,G)$, si indichino con X_R e X_R^k i rispettivi sottospazi raggiungibili.
Si dimostra dapprima che:

$$X_R^k \subseteq X_R$$

Essendo X_R il più piccolo sottospazio F-invariante che contiene Im(G) si ha che:

$$(F+GK)X_R \subseteq FX_R + \operatorname{Im} G \subseteq X_R + \operatorname{Im} G = X_R$$

quindi X_R è anche (F+GK)-invariante e deve dunque contenere X_R^k che è il più piccolo sottospazio (F+GK)-invariante che contiene Im(G).
Avendo dunque dimostrato che X_R^k è contenuto in X_R ora non resta che da dimostrare l'inverso, ossia che:

$$X_R \subseteq X_R^k$$

Questa parte tuttavia si dimostra facilmente poiché, utilizzando la matrice -K, si può ottenere Σ per retroazione da Σ_k e quindi, considerando questa volta Σ_k come sistema di partenza e Σ come sistema retrazionato, si può applicare il risultato già ottenuto e la dimostrazione è conclusa.

*

Dal teorema appena dimostrato si può desumere quindi che se un sistema è completamente raggiungibile tali sono anche tutti i possibili sistemi ottenuti applicandovi una retroazione e viceversa.

4.4 Controllabilità e stabilizzabilità

Lo studio della controllabilità e della stabilizzabilità per i sistemi a cui viene applicata una retroazione può avvalersi dei risultati del test PBH, questi infatti non vengono in alcun modo modificati dalla retroazione in quanto, come si è visto, la matrice F_{22} viene mantenuta intatta ed il sottosistema raggiungibile rimane tale.

Alla luce delle considerazioni fatte si possono riassumere le condizioni necessarie e sufficienti per la controllabilità dei sistemi discreti mediante il seguente

TEOREMA

Dato un generico sistema lineare discreto Σ = (F,G,H), sono equivalenti le seguenti proposizioni:

i) *è controllabile;*

ii) *In forma di Kalman il sottosistema non raggiungibile, se presente, ha tutti gli autovalori nulli;*

iii) *Il sistema ammette un Dead Beat Controller (DBC);*

iv) *La matrice [zI-F | G] ha rango pieno* $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dimostrazione:

Il fatto che i) implichi ii) è già stato provato nel paragrafo 2.2.

Il fatto che ii) implichi iii) è una conseguenza diretta della definizione di DBC.
Infatti, poiché con la retroazione si possono allocare arbitrariamente tutti gli autovalori del sottosistema raggiungibile, se F_{22} ha tutti autovalori nulli o addirittura non è presente, esiste per forza una retroazione che annulla tutti gli autovalori del sistema.

Il fatto che iii) implichi iv) deriva dal fatto che la matrice PBH può scendere di rango solo per z autovalore di F_{22}.
Infatti, ponendo che esista un DBC e sapendo che la retroazione non può modificare gli autovalori di F_{22}, questi devono per forza essere già nulli.

Infine il fatto che iv) implichi i), dalle considerazioni precedentemente svolte su come scende il rango della matrice PBH, può essere ricondotto a ii) implica i) già provato nel paragrafo 2.2.

*

Allo stesso modo, per la stabilizzabilità vale il seguente teorema

TEOREMA

Dato un sistema lineare discreto Σ = (F,G,H) sono equivalenti le seguenti proposizioni:

i) *In forma di Kalman il sottosistema non raggiungibile, se presente, ha solo autovalori con modulo minore di 1 (e dunque asintoticamente stabili);*

ii) *La matrice PBH* [zI-F | G] *ha rango n* $\forall z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1$ *;*

iii) *Esiste una retroazione dallo stato che stabilizza asintoticamente il sistema.*

La dimostrazione è analoga a quella del teorema precedente e viene pertanto omessa.

Approfondendo infine i casi analoghi a tempo continuo si ha che:

Il teorema per la controllabilità perde di significato in quanto la controllabilità coincide con la raggiungibilità e inoltre a tempo continuo non esiste un Dead Beat Controller (i sistemi a tempo continuo partendo da c.i. non nulle non possono mai raggiungere lo stato nullo ma solo tenderci asintoticamente).

Per quanto riguarda invece il teorema per la stabilizzabilità ne vale uno del tutto analogo in cui però gli autovalori di cui al punto i) devono ora avere parte reale minore di zero e la condizione al punto ii) diventa dunque:

$$\text{Rango}[sI\text{-}F \mid G] = n \quad , \quad \forall s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) \geq 0$$

4.5 Funzione di trasferimento

Avendo studiato sotto vari punti di vista gli effetti della retroazione dallo stato per i sistemi lineari discreti, risulta interessante osservare come la retroazione possa modificare la funzione di trasferimento dei sistemi stessi.

Dato un sistema completamente raggiungibile (sempre per semplicità ad un solo ingresso)

$\Sigma = (F,g,H)$, si ricorda che la sua funzione di trasferimento è data da

$$W(z)=H(zI-F)^{-1}g$$

Poiché, indipendentemente dalla base scelta per esprimere le matrici del sistema, W(z) resta la stessa, si può considerare senza perdita di generalità il sistema equivalente in forma canonica di controllo $\Sigma_c = (F_c,g_c,H_c)$.

Sviluppando dunque la precedente formula per Σ_c si ottiene

$$W(z) = \frac{H_c adj(zI-F_c)\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z+a_0} = \frac{H_c\begin{bmatrix}1\\ z\\ \vdots\\ z^{n-1}\end{bmatrix}}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z+a_0}.$$

Analizzando la formula si vede chiaramente come in realtà il numeratore non dipenda in alcun modo da F_c e ma solo da H_c la quale, poiché J = 0, rimane invariata anche in seguito ad una retroazione.

Si può dunque concludere come la retroazione modifichi solo il denominatore della funzione di trasferimento lasciandone invariato il numeratore, al più introducendo (od eliminando) alcune cancellazioni zero-polo.

La funzione di trasferimento del sistema retroazionato sarà dunque:

$$W_k(z) = \frac{H_c[1 \quad z \quad ... \quad z^{n-1}]^T}{z^n+(a_{n-1}-k_n)z^{n-1}+...+(a_1-k_2)z+(a_0-k_1)}$$

Nonostante, infine, per la trattazione precedente si sia considerato J = 0 si può dimostrare, seppur con calcoli più complicati, che i risultati ottenuti valgono anche nel caso generale.

Infine, prendendo un sistema non completamente raggiungibile, si sarebbe potuto applicare lo stesso ragionamento, in quanto dal paragrafo 4.3 si sa che W(z) dipende solo dal sottosistema raggiungibile.

Pertanto $W_k(z)$ mantiene la stessa espressione che deve essere tuttavia calcolata utilizzando solo le matrici (F_{11}, G_1, H_1).

Bibliografia

- M. Bisiacco, S. Braghetto, Teoria dei sistemi dinamici, Esculapio, Bologna, cap. 1-5.

- E. Fornasini, G. Marchesini, Appunti di teoria dei sistemi, Progetto, Padova, cap.5-6.