UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Interazioni non lineari di campi elettromagnetici di rango arbitrario e dualità

Relatore

Prof. Kurt Lechner

Laureando

Luca Melotti

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Un concetto molto ricorrente in matematica e in fisica è quello di dualità, che consiste nel dare due descrizioni diverse, ma equivalenti, di uno stesso fenomeno o di una stessa teoria. Spesso avere due possibili approcci per affrontare un problema si rivela molto utile, poiché è possibile utilizzare uno dei due formalismi per la risoluzione ed esprimere poi i risultati nel secondo. Vediamo alcuni esempi di dualità:

- il piano proiettivo: nel piano euclideo gli enti geometrici fondamentali sono punti e rette. Per due punti qualunque, non coincidenti, passa una e una sola retta, mentre prese due rette qualsiasi, non è detto che esse identifichino un punto. Infatti, nel caso in cui esse siano parallele, non c'è modo di determinare univocamente un punto del piano da esse individuato. Per eliminare questa asimmetria tra punti e rette, è stato introdotto il piano proiettivo, ovvero un piano euclideo con una linea all'infinito che lo circoscrive. I punti antipodali di questa linea sono identificati a due a due. In questo modo si può pensare che, idealmente, due rette parallele si incontrino all'infinito e quindi anch'esse individuino uno e un solo punto nel piano, in particolare un punto all'infinito. Nel piano proiettivo i postulati fondamentali della geometria si scambiano tra loro per dualità, sostituendo il termine "punto" con "retta" e viceversa. Ad esempio "due punti individuano una e una sola retta" diventa "due rette individuano uno e un solo punto";

- la dualità onda-corpuscolo: in Meccanica Quantistica (MQ) un sistema fisico può essere descritto tramite una funzione d'onda $\psi(x)$, che è funzione della coordinata spaziale x (consideriamo un sistema unidimensionale per semplicità). Allo stesso modo, si può descrivere in modo equivalente lo stesso sistema con una funzione $\widetilde{\psi}(p)$ del momento p. La funzione $\widetilde{\psi}$ risulta essere legata alla ψ tramite la trasformata di Fourier

$$\widetilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}xp}\, dx. \tag{1.1}$$

  Questa dualità tra posizione e momento può essere interpretata come una doppia natura delle particelle quantistiche, che possono, intuitivamente, essere viste o come onde, o come corpuscoli, sebbene i due comportamenti non possano essere osservati contemporaneamente. Sottolineiamo il fatto che, indipendentemente dalla descrizione che si utilizza, il sistema e i fenomeni fisici rimangono gli stessi.

Un esempio di dualità, molto rilevante in elettrodinamica, è la dualità elettromagnetica. Consideriamo le equazioni di Maxwell nel vuoto, ovvero in assenza di cariche

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{1.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \tag{1.5}$$

Esse sono invarianti se si effettua la trasformazione $\mathbf{E} \to \mathbf{B}, \mathbf{B} \to -\mathbf{E}$. Questa simmetria viene detta dualità elettromagnetica. Passando al formalismo covariante, indichiamo con A_μ il quadripotenziale e con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ il tensore elettromagnetico. La trasformazione di dualità si può allora scrivere nella seguente forma

$$F^{\mu\nu} \to \widetilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \tag{1.6}$$

dove $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è il tensore di Levi-Civita e $\widetilde{F}^{\mu\nu}$ è detto duale di Hodge di $F^{\mu\nu}$. Tuttavia, la lagrangiana del campo elettromagnetico libero

$$\mathcal{L}_{EM}(F) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{1.7}$$

non è invariante sotto la trasformazione di dualità (1.6), infatti $\mathcal{L}_{EM} \to -\frac{1}{4}\widetilde{F}^{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\mathcal{L}_{EM}$; pertanto la dualità elettromagnetica non è una simmetria della lagrangiana, ma solo delle equazioni del moto. In realtà le equazioni del moto della teoria di Maxwell sono invarianti rispetto a trasformazioni più generali del tipo (omettendo gli indici del tensore $F^{\mu\nu}$)

$$\begin{pmatrix} F' \\ \widetilde{F}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ \widetilde{F} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

con $\alpha \in [0, 2\pi]$. Si tratta quindi di un gruppo continuo di simmetria, ovvero delle rotazioni $SO(2)$. Si noti che le due equazioni per F' e $\widetilde{F}'$ sono consistenti con la definizione del duale di Hodge (1.6), poiché vale la proprietà

$$\widetilde{\widetilde{F}}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}. \tag{1.9}$$

A questo punto ci si può chiedere se esistano teorie più generali dell'elettromagnetismo classico che preservino la dualità elettromagnetica. In particolare, cerchiamo teorie in cui la lagrangiana contenga termini di ordine superiore al secondo in $F^{\mu\nu}$, detti anche termini di autointerazione o interazioni non lineari. Questo problema è interessante, poiché, in generale quando una teoria classica possiede delle simmetrie e la si vuole quantizzare, la versione quantistica deve soddisfare le stesse proprietà di simmetria, ma in essa possono comparire dei termini non presenti nella teoria classica (per una prima applicazione di questo argomento alla dualità elettromagnetica si veda [1]). Si vuole quindi determinare in che modo è possibile deformare la teoria di Maxwell mantenendo la dualità elettromagnetica. Tra i primi a considerare teorie con interazioni non lineari vi furono Born e Infeld, i quali nel 1933 pubblicarono tre articoli (l'anno seguente raccolti e ampliati in [2]) nei quali proposero una nuova teoria, in cui la lagrangiana del campo elettromagnetico libero viene sostituita con

$$\mathcal{L}_{BI}(F) = \lambda^{-2}\Big(1 - \sqrt{-det(\eta_{\mu\nu} + \lambda F_{\mu\nu})}\Big) \tag{1.10}$$

$$= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{32}\lambda^2\Big((F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2 + (F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu})^2\Big) + \mathcal{O}(F^6) \tag{1.11}$$

dove indichiamo con $\eta_{\mu\nu}$ la metrica dello spazio-tempo di Minkowski con segnatura $(1,3)$, ovvero $diag(+1,-1,-1,-1)$, e λ è un parametro della teoria. Le dimensioni di λ in unità naturali $\hbar, c = 1$ sono quelle di una lunghezza al quadrato, ovvero l'inverso di un'energia al quadrato. Se si arresta lo sviluppo di $\mathcal{L}_{BI}$ all'ordine due in $F^{\mu\nu}$, si ritrova la lagrangiana del campo libero. Pertanto, nel limite in cui i campi elettromagnetici sono deboli, ovvero a basse energie, il termine dominante è proprio la lagrangiana della teoria di Maxwell. Il motivo che spinse Born e Infeld alla formulazione di questa teoria fu l'inconsistenza dell'elettromagnetismo classico legata all'energia infinita delle cariche localizzate, ovvero puntiformi. Questa problematica viene risolta nella nuova teoria, in cui il modulo del campo elettrico generato da una particella statica di carica e posta nell'origine è

$$E(r) = \frac{e}{4\pi\sqrt{r^4 + \lambda^2}}, \tag{1.12}$$

dove r rappresenta la distanza dall'origine. Si vede chiaramente che il campo, per $r \to 0$ tende al valore $\frac{e}{4\pi\lambda}$, ovviamente finito. Si verifica inoltre che la teoria di Born-Infeld (BI) preserva l'invarianza delle equazioni del moto sotto trasformazioni di dualità. Per un teoria non lineare ciò significa che, introducendo il doppietto $\begin{pmatrix} F \\ \widetilde{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F}} \end{pmatrix}$, ed effettuando una rotazione di $SO(2)$ su di esso, i campi trasformati $\begin{pmatrix} F' \\ \widetilde{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F'}} \end{pmatrix}$ mantengono la struttura del doppietto, ovvero il secondo elemento è ancora il duale di Hodge della derivata di $\mathcal{L}$ rispetto a F'. Il primo ad accorgersi di questa proprietà fu Schrödinger, che nel 1935 sviluppò un nuovo formalismo che utilizza campi complessi per descrivere la teoria [3]. Con lo sviluppo dell'Elettrodinamica Quantistica (QED), la teoria di BI venne abbandonata, tuttavia più tardi, essa richiamò l'interesse dei fisici nell'ambito della teoria delle stringhe. La teoria delle stringhe è tra le attuali candidate per una teoria che unifichi tutte e quattro le interazioni fondamentali (si veda ad esempio [4]) e in alcune sue approssimazioni a basse energie, dette teorie di supergravità, si presenta proprio il problema di determinare possibili autointerazioni che preservino la dualità [5].

Una delle caratteristiche della teoria delle stringhe è che in generale essa è consistente solo in uno spazio-tempo di dimensione $D \geq 4$, tipicamente $D = 10, D = 11$, e in essa compaiono oggetti estesi di dimensione p generica, chiamati p-brane, a cui si accoppiano le cosiddette p-forme, al posto del quadripotenziale A_μ, che è una 1-forma (per ulteriori dettagli si veda [4]). Per questa ragione è interessante affrontare lo studio della dualità anche in dimensione superiore a $D = 4$. In questo lavoro analizziamo il caso $D = 2n$ con n pari. Le motivazioni di questa scelta sono le seguenti. Lavorando in dimensione D pari e considerando un potenziale $A_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$ di rango $n-1$ completamente antisimmetrico, il tensore elettromagnetico $F_{\mu_1 \dots \mu_n} = n\, \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_n]}$ ha rango n pari a metà della dimensione dello spazio-tempo. In questo modo il suo duale di Hodge $\widetilde{F}$, definito in precedenza per il caso $D = 4$, ha lo stesso rango di F (e il potenziale duale è ancora di rango $n-1$). Inoltre, indicando con $*$ il duale di Hodge, per D pari vale la proprietà $(*)^2 = (-)^{\frac{D}{2}+1} = (-)^{n+1}$, che rende i casi con n pari o dispari profondamente differenti. Nel caso di n dispari ($D = 2, 6, 10, \dots$), vale $(*)^2 = 1$ e ogni tensore completamente antisimmetrico ϕ_n di rango n si può scomporre in una parte self-duale (o autoduale) ϕ_n^+ e una antiself-duale ϕ_n^- tali che:

$$* \, \phi_n^+ = \phi_n^+ \qquad * \, \phi_n^- = -\phi_n^- . \tag{1.13}$$

Nel caso di n pari ($D = 4, 8, \dots$) vale invece $(*)^2 = -1$, pertanto non si può decomporre il tensore elettromagnetico $F_{\mu_1 \dots \mu_n}$ in parte autoduale e parte antiautoduale, sicché i relativi campi elettrico e magnetico restano "allacciati" tra di loro, esattamente come accade in $D = 4$. Ci limitiamo, dunque, allo studio di quest'ultimo caso, in quanto la fisica per n dispari assume aspetti completamente diversi. Un fatto rilevante, ad esempio, è che in $D = 6, 10, \dots$ la dinamica è invariante solamente per un gruppo discreto di trasformazioni di dualità e non per un gruppo continuo (per maggiori dettagli si vedano [6] e [7]).

Vi sono due possibili approcci allo studio della dualità elettromagnetica per generiche teorie non lineari. Il primo, introdotto da Gaillard e Zumino (GZ) nel 1981 in [8], preserva l'invarianza di Lorentz manifesta; tuttavia in questa formulazione la dualità SO(2) è una simmetria delle equazioni del moto, ma non della lagrangiana che le genera, esattamente come nell'elettrodinamica usuale in $D = 4$ basata sulla lagrangiana (1.7). Data una generica lagrangiana $\mathcal{L}(F)$, si può ricavare la condizione che essa deve soddisfare affinché le equazioni del moto siano invarianti sotto dualità. La condizione risulta essere un'equazione differenziale non lineare del primo ordine alle derivate parziali e, come ci si aspetta, è verificata sia dalla teoria di Maxwell classica, sia dalla teoria di Born-Infeld. Tuttavia, esistono soluzioni più generali.

Il secondo approccio fu sviluppato da Pasti, Sorokin e Tonin (PST) (si veda [9], [10] per il caso lineare e [11] per il caso non lineare): con esso si mantiene l'invarianza di Lorentz manifesta e si realizza anche l'invarianza per dualità a livello dell'azione. Per fare ciò, è però necessario introdurre due potenziali di gauge $A^I_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}(x)$ ($\mu = 0, \dots D-1$, $I = 1, 2$) e un campo scalare $a(x)$. Poiché si è introdotto il campo ausiliario $a(x)$, va imposto che esso non si propaghi, cosa che avviene sotto determinate condizioni sulla lagrangiana $\mathcal{L}(A^I, a)$. In seguito, tramite le equazioni del moto per uno dei due potenziali, ad esempio $A^2_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$, si ricava una relazione "di dualità" tra A^1 e A^2 e si elimina quest'ultimo dalla lagrangiana, che a questo punto dipende solo da $A^1_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$ e ci si è quindi ricondotti a una teoria dipendente da un solo campo. Rimane la problematica di dimostrare l'equivalenza tra questa formulazione e quella di GZ. L'equivalenza risulta verificata almeno nei casi della teoria di Maxwell usuale e della teoria di BI.

In questo lavoro applichiamo questi due metodi ad una generica teoria non lineare in dimensione $D = 2n$, con n pari, che all'ordine quadratico nei campi si riduce all'elettromagnetismo classico. Ricaviamo quindi le condizioni sulla lagrangiana $\mathcal{L}(F)$ per soddisfare l'invarianza per dualità alla GZ (l'invarianza di Lorentz è manifesta) e le condizioni alla PST per $\mathcal{L}(F^I, a)$ (in cui l'invarianza di Lorentz e per dualità sono entrambe manifeste) affinché il campo ausiliario $a(x)$ non si propaghi.

Organizzazione del materiale. Il lavoro è organizzato come segue. Nel capitolo 2 analizziamo la dualità elettromagnetica per la consueta elettrodinamica nello spazio-tempo in $D = 4$ e presentiamo alcune considerazioni sull'estensione della dualità al caso in cui vi siano delle sorgenti del campo elettromagnetico. Nel capitolo 3 applichiamo il metodo di Gaillard-Zumino ad una generica teoria non lineare in uno spazio-tempo di dimensione $D = 2n$, con n pari, per potenziali di rango $n - 1$. Nel capitolo 4 eseguiamo una trattazione analoga per l'approccio di Pasti-Sorokin-Tonin. Infine, il capitolo 5 è dedicato ad alcune considerazioni conclusive.

Convenzioni. Riportiamo di seguito le principali convenzioni adottate per la notazione:

- gli indici greci $(\mu, \nu, ...)$ assumono valori da 0 a $D-1$, dove D è la dimensione dello spazio-tempo;
- gli indici latini minuscoli $(i, j, ...)$ assumono valori da 1 a $D - 1$;
- gli indici latini maiuscoli $(I, J, ...)$ assumono valori $1, 2$;
- lavoriamo con unità di misura naturali, in cui $c, \hbar = 1$, pertanto il campo elettrico e il campo magnetico hanno entrambi le dimensioni dell'inverso di una lunghezza al quadrato.

Capitolo 2

Teoria di Maxwell e dualità elettromagnetica

2.1 La dualità elettromagnetica

Le equazioni di Maxwell nel vuoto (1.2), (1.3), (1.4) e (1.5), dove **E** e **B** indicano rispettivamente il campo elettrico e il campo magnetico, sono invarianti se si effettua la trasformazione

$$\mathbf{E} \to \mathbf{B}, \qquad \mathbf{B} \to -\mathbf{E}. \tag{2.1}$$

Questa proprietà di simmetria delle equazioni di Maxwell è detta dualità elettromagnetica.

Passiamo ora al formalismo covariante e introduciamo il quadripotenziale

$$A^\mu = (A^0, A^i), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{2.2}$$

dove A_0 è il potenziale elettrostatico e A_i sono le tre componenti del potenziale vettore **A**. Il tensore elettromagnetico è definito da

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.3}$$

ed è legato ai campi elettrico e magnetico dalle seguenti relazioni

$$F^{i0} = E^i, \tag{2.4}$$

$$F^{ij} = -\,\varepsilon^{ijk} B^k, \qquad i, j, k = 1, 2, 3, \tag{2.5}$$

dove ε^{ijk} è il tensore di Levi-Civita tridimensionale. Il tensore $F_{\mu\nu}$, che descrive i campi fisici **E** e **B**, è invariante per trasformazioni del tipo

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \tag{2.6}$$

dette trasformazioni di gauge, dove $\Lambda(x)$ è un generico campo scalare. La lagrangiana del campo elettromagnetico libero si scrive

$$\mathcal{L}_{EM}(F) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2). \tag{2.7}$$

e le equazioni del moto (gauge invarianti) sono

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{2.8}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0. \tag{2.9}$$

La seconda equazione è detta identità di Bianchi ed è automaticamente soddisfatta se si scrive $F_{\mu\nu}$ in termini di un quadripotenziale come nella (2.3)

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = 0. \tag{2.10}$$

Dato un qualunque tensore di rango due $T^{\mu\nu}$ antisimmetrico, definiamo il suo duale di Hodge

$$*T^{\mu\nu} = \widetilde{T}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}T_{\rho\sigma}, \tag{2.11}$$

che nello spazio-tempo di Minkowski soddisfa la proprietà

$$(*)^2 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \widetilde{\widetilde{T}}^{\mu\nu} = -T^{\mu\nu}, \tag{2.12}$$

che si può verificare tramite l'identità

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = -4\delta^{\gamma}_{[\mu}\delta^{\delta}_{\nu]}. \tag{2.13}$$

Nel caso del tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ le componenti del duale $\widetilde{F}^{\mu\nu}$, in termini dei campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, sono

$$\widetilde{F}^{i0} = \frac{1}{2}\varepsilon^{i0jk}F_{jk} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk} = B^i \tag{2.14}$$

$$\widetilde{F}^{ij} = \frac{1}{2}(\varepsilon^{ij0k}F_{0k} + \varepsilon^{ijk0}F_{k0}) = \varepsilon^{ijk}F^{k0} = \varepsilon^{ijk}E^k \tag{2.15}$$

A questo punto le equazioni del moto diventano

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{2.16}$$

$$\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0, \tag{2.17}$$

e la trasformazione di dualità (2.1) si può riscrivere in maniera Lorentz invariante come

$$F^{\mu\nu} \to \widetilde{F}^{\mu\nu}, \qquad \widetilde{F}^{\mu\nu} \to -F^{\mu\nu}, \tag{2.18}$$

in cui la seconda si ottiene applicando il duale di Hodge alla prima e utilizzando la proprietà (2.12). Si vede chiaramente che le equazioni (2.16) e (2.17) sono invarianti sotto la trasformazione (2.18), in particolare i ruoli delle due equazioni vengono scambiati.

Si osserva che in realtà le equazioni del moto del campo elettromagnetico libero sono invarianti sotto la più ampia classe di trasformazioni

$$\begin{pmatrix} F' \\ \widetilde{F}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ \widetilde{F} \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in [0, 2\pi]. \tag{2.19}$$

Si osservi che queste equazioni per F' e $\widetilde{F}'$ sono consistenti con la definizione del duale di Hodge (2.11), infatti applicando il duale alla prima equazione e sfruttando la proprietà (2.12) si ottiene la seconda. Questo significa dunque che $\widetilde{F}'$ nella seconda equazione è proprio il duale di F' definito dalla prima. Questo aspetto sarà fondamentale anche in seguito, per la generalizzazione della dualità a teorie non lineari. Le trasformazioni (2.19), al variare del parametro α, costituiscono un gruppo continuo a un parametro, corrispondente alle rotazioni $SO(2)$. Per questo motivo si parla di simmetria per dualità $SO(2)$. La trasformazione (2.18) diventa quindi un caso particolare di questa trasformazione più generale, infatti corrisponde a scegliere $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Indicando con $\mathcal{R}(\alpha)$ la matrice di rotazione che compare in (2.19), per la trasformazione di dualità originale (2.18) ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) vale $\mathcal{R}(\frac{\pi}{2})\mathcal{R}(\frac{\pi}{2}) = -\mathbf{1}$. Pertanto la matrice $\mathcal{R}(\frac{\pi}{2})$ genera il sottogruppo discreto di $SO(2)$ di elementi $\{\mathcal{R}(\frac{\pi}{2}), -\mathbf{1}, -\mathcal{R}(\frac{\pi}{2}), \mathbf{1}\}$, isomorfo al gruppo discreto Z_4. Pertanto la trasformazione di dualità originale (2.18) corrisponde al gruppo discreto Z_4, mentre la forma continua (2.19) è un'estensione al gruppo di dualità continuo $SO(2)$.

2.2 Sorgenti del campo elettromagnetico

Se si introducono le sorgenti del campo elettromagnetico, le equazioni di Maxwell (2.16) e (2.17) diventano

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu_e, \tag{2.20}$$

$$\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0, \tag{2.21}$$

dove j_e^ν è la quadricorrente e si utilizza il pedice "e" per indicare che si tratta di carica e corrente elettriche. In questa forma appare evidente che, per rendere le equazioni nuovamente invarianti per dualità elettromagnetica (2.18), è necessario introdurre una quadricorrente magnetica j_m^ν nella (2.21):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j_e^\nu, \tag{2.22}$$

$$\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = j_m^\nu. \tag{2.23}$$

L'introduzione di una quadricorrente magnetica equivale a introdurre cariche (o monopoli) e correnti magnetiche, oltre a quelle elettriche. Tuttavia, la modifica all'identità di Bianchi in (2.23) fa sì che non vi sia più un modo naturale di definire un quadripotenziale A_μ e di conseguenza di costruire un'azione $I[A_\mu]$, che sia invariante per il gruppo di Poincaré e da cui discendano le equazioni del moto (2.22) e (2.23). Pertanto, non è più garantita, a priori, la conservazione del quadrimomento e del momento angolare totali. In realtà si può dimostrare che, anche introducendo i monopoli magnetici, le equazioni di Maxwell "generalizzate" (2.22) e (2.23) preservano l'invarianza per Poincaré e le leggi di conservazione dell'Elettrodinamica classica con le sole cariche elettriche [12].

A questo punto una trasformazione di dualità, oltre a scambiare tra loro i campi, scambia anche le cariche e le correnti. Consideriamo un sistema di N particelle e indichiamo rispettivamente con e_r e g_r le cariche elettriche e magnetiche ad esse associate, dove $r = 1, ..., N$ scorre su tutte le particelle. Allora le trasformazioni delle cariche e delle correnti sono le seguenti

$$e_r \to g_r, \qquad g_r \to -e_r, \tag{2.24}$$

$$j_e^\mu \to j_m^\mu, \qquad j_m^\mu \to -j_e^\mu. \tag{2.25}$$

Si può nuovamente generalizzare la trasformazione di dualità ad un gruppo continuo di trasformazioni isomorfo a $SO(2)$. Per farlo, alla (2.19) vanno aggiunte le equivalenti trasformazioni per le cariche e le correnti

$$\begin{pmatrix} j_e'^\mu \\ j_m'^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_e^\mu \\ j_m^\mu \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

L'Elettrodinamica classica di un sistema di dioni, ovvero particelle dotate sia di carica elettrica e_r, sia di carica magnetica g_r, è perfettamente consistente per valori qualsiasi delle cariche. Si può dimostrare, tuttavia, che per una formulazione quantistica della dinamica di tale sistema è necessario che le cariche siano vincolate dalla cosiddetta condizione di quantizzazione di Dirac. In effetti essa risulta essere una condizione necessaria e sufficiente per formulare una Meccanica Quantistica non relativistica autoconsistente per i dioni. La suddetta condizione fu derivata inizialmente da Dirac nel 1931 in [13] per un sistema composto da una carica elettrica (e) e un monopolo magnetico (g) nella forma

$$eg = 2\pi n\hbar c, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.27}$$

La condizione fu poi generalizzata da Schwinger nel 1968 in [14] per un sistema di due dioni in una teoria di campo relativistica quantistica

$$e_2 g_1 - e_1 g_2 = 4\pi n\hbar c, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.28}$$

Sebbene non siano ancora stati osservati sperimentalmente dioni o monopoli magnetici, l'esistenza di anche una sola particella con carica magnetica g_0, grazie alla condizione (2.28), spiegherebbe la quantizzazione della carica elettrica, ovvero il fatto che tutte le particelle osservate in natura si presentano con una carica elettrica multiplo di una carica elementare. Questo fenomeno è sperimentalmente verificato con precisione estrema. Dalla condizione di quantizzazione (2.27), ipotizzando che esista un monopolo di carica magnetica g_0, discende che ogni carica elettrica e_r debba soddisfare

$$e_r = \frac{2\pi\hbar c}{g_0} n_r = e_0 n_r, \qquad n_r \in \mathbb{Z}, \tag{2.29}$$

pertanto la carica e_0 assume il ruolo di carica elettrica elementare, di cui tutte le altre cariche sono multiplo.

Consideriamo adesso un sistema composto da una carica elettrica e e un monopolo magnetico g e definiamo le costanti di struttura fine elettrica e magnetica

$$\alpha_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\hbar c}, \qquad \alpha_m \equiv \frac{g^2}{4\pi\hbar c}. \tag{2.30}$$

Esse sono costanti adimensionali che, in teoria quantistica di campo, esprimono l'intensità dell'accoppiamento. Allora la condizione (2.27) impone un vincolo sulle costanti di struttura fine

$$\alpha_e \alpha_m = \frac{n^2}{4}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.31}$$

Assumendo n dell'ordine dell'unità si ha che, se $\alpha_e << 1$, allora $\alpha_m >> 1$ e viceversa. Ciò significa che, se l'accoppiamento per le cariche elettriche è forte, allora quello per le cariche magnetiche è debole, e viceversa. Si può quindi sfruttare la dualità elettromagnetica, la quale scambia cariche elettriche e magnetiche, per semplificare lo studio di una teoria fortemente accoppiata. Infatti, in regimi di accoppiamento forte, non si può utilizzare un approccio perturbativo, ma passando alla teoria duale, debolmente accoppiata, è possibile analizzarla con metodi perturbativi. Per questa ragione la dualità elettromagnetica rientra in una più ampia classe di dualità, dette dualità di accoppiamento debole/forte. Per maggiori dettagli sulla dualità in presenza di sorgenti del campo elettromagnetico si veda [12].

2.3 Possibili approcci allo studio della dualità

Come già introdotto nel capitolo 1, ci si può chiedere come sia possibile modificare la teoria di Maxwell, inserendo nella lagrangiana $\mathcal{L}$ delle autointerazioni e lavorando in uno spazio-tempo di dimensione $D \geq 4$, mantenendo però la simmetria per dualità elettromagnetica. Il formalismo presentato nella sezione 2.1 venne esteso a teorie con interazioni con campi esterni da Gaillard e Zumino (GZ) nel 1981 in [8] (nel caso $D = 4$) e per teorie non lineari autointeragenti da Gibbons e Rasheed nel 1995 in [15]. Il vantaggio di questo formalismo è che esso preserva l'invarianza di Lorentz manifesta, tuttavia la dualità elettromagnetica è una simmetria delle equazioni del moto, non dell'azione. Infatti per il campo libero nell'elettromagnetismo classico in $D = 4$, scegliendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ nella (2.19), si ha

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \to -\frac{1}{4}\widetilde{F}^{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\mathcal{L}_{EM}, \tag{2.32}$$

dove si è sfruttata la proprietà (2.12). L'invarianza per dualità delle equazioni del moto va quindi verificata "a mano". In particolare, poiché non esiste un'azione $I[A_\mu]$, in termini di un solo quadripotenziale, invariante per dualità, quest'ultima non può essere considerata a tutti gli effetti una simmetria della teoria, nonostante lo sia per le equazioni del moto. Nel capitolo 3 presenteremo l'approccio di GZ per una generica teoria non lineare in uno spazio-tempo di dimensione $D = 2n$, n pari, e ricaveremo le condizioni su $\mathcal{L}$ affinché sia mantenuta l'invarianza per dualità $SO(2)$ delle equazioni del moto.

Ci si può però porre il problema di rendere la simmetria per dualità $SO(2)$ manifesta a livello dell'azione. Una formulazione di questo tipo avrebbe un notevole vantaggio: se si riesce a scrivere un'azione $I[A_\mu]$ che sia invariante sotto trasformazioni di dualità elettromagnetica e che dia origine alle corrette equazioni del moto, allora la dualità è una simmetria della teoria e si può applicare, ad esempio, il teorema di Noether. Grazie a questo teorema è garantita l'esistenza di una corrente conservata, la corrente di Noether, associata alla dualità. Vi sono due modi per ottenere un'azione manifestamente invariante per dualità $SO(2)$:

- il primo metodo fu sviluppato nel 1994 da Schwarz e Sen in [7]. Con questo metodo si introduce una coppia di potenziali di gauge A^I_μ ($I = 1, 2$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, siamo nel caso $D = 4$), dove I è l'indice associato alle rotazioni $SO(2)$, e si hanno di conseguenza due campi elettrici ($\mathbf{E}^1$, $\mathbf{E}^2$) e due campi magnetici ($\mathbf{B}^1$, $\mathbf{B}^2$). Sebbene si ottenga l'invarianza per $SO(2)$ manifesta a livello dell'azione, si deve rinunciare all'invarianza di Lorentz manifesta, la quale va invece verificata esplicitamente. Inoltre, poiché raddoppia il numero dei campi, raddoppiano anche i gradi di libertà della teoria, e tramite le equazioni del moto, va verificato che uno dei due potenziali in realtà è di natura ausiliaria;

- il secondo metodo fu sviluppato da Pasti, Sorokin e Tonin (PST) in [9], [10] e [11]. Esso consiste nell'introdurre nuovamente due potenziali di gauge A^I_μ e in più un campo scalare $a(x)$. Con questo approccio il vantaggio è che si hanno sia l'invarianza di Lorentz, sia per dualità $SO(2)$ manifeste a livello dell'azione, ma ancora una volta si raddoppiano i gradi di libertà e va verificato, tramite le equazioni del moto, che uno dei due campi è un duale di Hodge "non lineare" dell'altro e che il campo $a(x)$ è completamente ausiliario e non si propaga. Nel capitolo 4 applicheremo questo approccio ad una generica teoria non lineare in uno spazio-tempo di dimensione $D = 2n$, n pari, ricavando le condizioni sulla lagrangiana affinché il campo ausiliario $a(x)$ non si propaghi. Ci limiteremo allo studio di accoppiamenti che contengono i campi, ma non le loro derivate.

Con la dualità manifesta a livello dell'azione, come già anticipato, si può applicare il teorema di Noether e si può ricavare la corrente conservata associata a questa simmetria. In $D = 4$ la carica conservata risulta essere la differenza tra l'intensità totale dei fotoni con elicità positiva (polarizzazione destrogira) e negativa (polarizzazione levogira), si veda [16].

Sottolineiamo che non è ovvia l'equivalenza tra il metodo di Gaillard-Zumino e quello di Pasti-Sorokin-Tonin. Più precisamente, data una lagrangiana $\mathcal{L}(F)$ nella formulazione di GZ, quindi manifestamente Lorentz invariante, esiste un modo canonico di mappare $\mathcal{L}(F)$ in una lagrangiana nella formulazione di PST $\mathcal{L}(F^I, a)$, la cui teoria non propaga nessun campo scalare, ed è quindi invariante per Lorentz. In generale non è ovvio, tuttavia, che se le equazioni del moto per $\mathcal{L}(F)$ sono invarianti per dualità, allora $\mathcal{L}(F^I, a)$ sia (manifestamente) invariante per dualità, e viceversa.

Capitolo 3

Formulazione di Gaillard-Zumino

In questo capitolo applichiamo il metodo di Gaillard-Zumino ad una generica teoria non lineare, lavorando in uno spazio-tempo di dimensione $D = 2n$, con n pari. Le motivazioni di questa scelta sulle dimensioni sono già state esposte nel capitolo 1. Ci limitiamo inoltre allo studio di teorie di Maxwell, ovvero in cui il tensore elettromagnetico è di rango n, pari a metà della dimensione dello spazio-tempo, e lo stesso vale per il suo duale.

3.1 Dualità di Gaillard-Zumino

Introduciamo un potenziale $A_{\mu_1 \ldots \mu_{n-1}}$ di rango $n-1$, il tensore elettromagnetico è definito da

$$F_{\mu_1 \ldots \mu_n} = n\, \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \ldots \mu_n]}, \tag{3.1}$$

e il suo duale di Hodge è

$$\widetilde{F}_{\mu_1 \ldots \mu_n} = \frac{1}{n!} \varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n \nu_1 \ldots \nu_n} F^{\nu_1 \ldots \nu_n}. \tag{3.2}$$

Si verifica che anche in dimensione $D = 2n$ generica vale

$$\widetilde{\widetilde{F}}^{\mu_1 \ldots \mu_n} = (-1)^{n+1} F^{\mu_1 \ldots \mu_n}, \tag{3.3}$$

sfruttando l'identità

$$\varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_p \alpha_1 \ldots \alpha_{D-p}} \varepsilon^{\nu_1 \ldots \nu_p \alpha_1 \ldots \alpha_{D-p}} = (-1)^{D+1}\, p!\, (D-p)!\, \delta^{\nu_1}_{[\mu_1} \ldots \delta^{\nu_p}_{\mu_p]}, \tag{3.4}$$

quindi con n pari si ha

$$\widetilde{\widetilde{F}}^{\mu_1 \ldots \mu_n} = -F^{\mu_1 \ldots \mu_n}. \tag{3.5}$$

Le componenti dei campi elettrico e magnetico generalizzati in termini di $F^{\mu_1 \ldots \mu_n}$ sono

$$E^{i_1 \ldots i_{n-1}} = F^{i_1 \ldots i_{n-1} 0}, \tag{3.6}$$

$$B^{i_1 \ldots i_{n-1}} = -\frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 \ldots i_{n-1} j_1 \ldots j_n} F^{j_1 \ldots j_n}. \tag{3.7}$$

In dimensione $D = 2n$ la generalizzazione della lagrangiana del campo libero è

$$\mathcal{L}_{EM}(F) = (-1)^{n+1} \frac{1}{2n!} F^{\mu_1 \ldots \mu_n} F_{\mu_1 \ldots \mu_n} \tag{3.8}$$

Consideriamo una lagrangiana $\mathcal{L}(F)$, funzione del tensore elettromagnetico (non consideriamo lagrangiane dipendenti dalle derivate di F), che contenga termini di ordine superiore al secondo in F e che per campi deboli si riduca alla lagrangiana del campo libero (3.8)

$$\mathcal{L}(F) = \mathcal{L}_{EM}(F) + \mathcal{O}(F^4). \tag{3.9}$$

In generale in dimensione $D > 4$ è possibile introdurre termini di ordine 3 (o di ordine dispari generico) in F, mentre in $D = 4$ termini di questo tipo sono identicamente nulli.[1] Tuttavia consideriamo lagrangiane che contengano solo termini di ordine pari in F, perché, come mostreremo di seguito (si veda (3.21)), solo allora si può avere invarianza per dualità. Vorremmo adesso estendere la dualità elettromagnetica, analizzata nella sezione 2.1, per teorie più generali.

Introduciamo il campo $L_{\mu_1\cdots\mu_n}(F)$ definito da[2]

$$L_{\mu_1\cdots\mu_n}(F) = n!\frac{\partial\mathcal{L}(F)}{\partial F^{\mu_1\cdots\mu_n}}, \tag{3.10}$$

e il suo duale di Hodge $\widetilde{L}_{\mu_1\cdots\mu_n}(F)$. Le equazioni del moto per la lagrangiana $\mathcal{L}(F)$ sono quindi

$$\partial_{\mu_1}\widetilde{F}^{\mu_1\cdots\mu_n} = 0, \qquad \text{(identità di Bianchi)} \tag{3.11}$$

$$\partial_{\mu_1}L^{\mu_1\cdots\mu_n} = 0, \tag{3.12}$$

che generalizzano rispettivamente la (2.17) e la (2.16). Introduciamo inoltre una trasformazione di $SO(2)$ per i campi $F^{\mu_1\cdots\mu_n}$ e $L^{\mu_1\cdots\mu_n}$ della forma (omettiamo gli indici per comodità)

$$\begin{pmatrix} F_\alpha \\ \widetilde{L}_\alpha(F_\alpha)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ \widetilde{L}(F)\end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Per il momento pensiamo al campo $L_\alpha(F_\alpha)$ come a un campo indipendente e $\widetilde{L}_\alpha(F_\alpha)$ è il suo duale. È evidente che le equazioni (3.11) e (3.12) sono invarianti se a $F^{\mu_1\cdots\mu_n}$ e $L^{\mu_1\cdots\mu_n}$ si sostituiscono i campi trasformati $F_\alpha^{\mu_1\cdots\mu_n}$ e $L_\alpha^{\mu_1\cdots\mu_n}$ secondo la (3.13). A questo punto ci si può chiedere se esista una lagrangiana $\mathcal{L}_\alpha(F_\alpha)$ tale che

$$L_\alpha^{\mu_1\cdots\mu_n}(F_\alpha) = n!\frac{\partial\mathcal{L}_\alpha(F_\alpha)}{\partial F_{\alpha\,\mu_1\ldots\mu_n}}. \tag{3.14}$$

Se si riesce a trovare una tale $\mathcal{L}_\alpha(F_\alpha)$, allora la trasformazione (3.13) preserva la struttura del doppietto $\begin{pmatrix} F \\ \widetilde{L}(F)\end{pmatrix}$, definita dalla relazione (3.10) anche per i campi trasformati. In effetti una tale $\mathcal{L}_\alpha(F_\alpha)$ esiste e si può scrivere implicitamente a partire dalla semplice relazione

$$d\mathcal{L}_\alpha(F_\alpha) = \frac{\partial\mathcal{L}_\alpha(F_\alpha)}{\partial F_{\alpha\,\mu_1\ldots\mu_n}}dF_{\alpha\,\mu_1\ldots\mu_n} = \frac{1}{n!}L_\alpha^{\mu_1\cdots\mu_n}dF_{\alpha\,\mu_1\ldots\mu_n}. \tag{3.15}$$

Inserendo nel membro di destra i campi trasformati tramite (3.13), si ottiene

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}_\alpha(F_\alpha) &= \frac{1}{n!}(-\sin\alpha\,\widetilde{F}^{\mu_1\cdots\mu_n} + \cos\alpha\,L^{\mu_1\cdots\mu_n})(\cos\alpha\,dF_{\mu_1\ldots\mu_n} - \sin\alpha\,d\widetilde{L}_{\mu_1\ldots\mu_n}) \\ &= \frac{1}{n!}\Big(-\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\,d(F\widetilde{F} + L\widetilde{L}) + \cos^2\alpha LdF - \sin^2\alpha FdL\Big) \\ &= \frac{1}{n!}\Big(-\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\,d(F\widetilde{F} + L\widetilde{L}) + LdF - \sin^2\alpha\,d(FL)\Big), \end{aligned} \tag{3.16}$$

dove nella seconda e terza riga abbiamo omesso gli indici sommati, ad esempio $F\widetilde{F} \equiv F^{\mu_1\cdots\mu_n}\widetilde{F}_{\mu_1\ldots\mu_n}$. Utilizzando poi la relazione

$$d\mathcal{L}(F) = \frac{1}{n!}LdF, \tag{3.17}$$

la (3.16), a meno di costanti additive, porge la condizione integrale

$$\mathcal{L}_\alpha(F_\alpha) = \mathcal{L}(F) - \frac{1}{n!}\sin^2\alpha\,F_{\mu_1\ldots\mu_n}L^{\mu_1\cdots\mu_n} - \frac{1}{2n!}\sin\alpha\cos\alpha\,(F\widetilde{F} + L\widetilde{L}). \tag{3.18}$$

[1] In $D = 4$ l'unico invariante cubico in $F^{\mu\nu}$ è $\mathrm{tr}F^3 = F^{\mu\nu}F_{\nu\rho}F^\rho_\mu$, che si annulla per l'antisimmetria di F.

[2] Si noti che vi è un'ambiguità nella normalizzazione della derivata rispetto ad un tensore completamente antisimmetrico. La nostra convenzione è tale che, per una generica variazione della lagrangiana $\mathcal{L}(F)$, valga la relazione naturale $\delta\mathcal{L}(F) = \frac{\partial\mathcal{L}(F)}{\partial F^{\mu_1\cdots\mu_n}}\delta F^{\mu_1\cdots\mu_n}$.

Per derivare la forma di $\mathcal{L}_\alpha(F_\alpha)$ si deve invertire la prima equazione in (3.13)

$$F_\alpha^{\mu_1\ldots\mu_n} = \cos\alpha\, F^{\mu_1\ldots\mu_n} - \sin\alpha\, \widetilde{L}^{\mu_1\ldots\mu_n}(F), \tag{3.19}$$

ricavare $F^{\mu_1\ldots\mu_n}$ in funzione di $F_\alpha^{\mu_1\ldots\mu_n}$ e poi sostituirlo nella (3.18).

Si può poi fare l'ulteriore richiesta che la forma funzionale esplicita di $\mathcal{L}_\alpha$ sia la stessa di $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}_\alpha(\cdot) = \mathcal{L}(\cdot). \tag{3.20}$$

Data una teoria descritta da una lagrangiana $\mathcal{L}(F)$, se esiste $\mathcal{L}_\alpha(F)$ che soddisfa questa richiesta, allora le equazioni del moto della teoria (3.11) e (3.12) sono dette invarianti per dualità $SO(2)$ alla Gaillard-Zumino. Ponendo $\alpha = \pi$ in (3.18) e (3.19), la condizione (3.20) diventa

$$\mathcal{L}(-F) = \mathcal{L}(F), \tag{3.21}$$

pertanto, in una teoria le cui equazioni sono invarianti per dualità, in $\mathcal{L}(F)$ sono ammesse dipendenze solo da potenze pari di $F^{\mu_1\ldots\mu_n}$.

In generale per una teoria non lineare verificare la condizione (3.20) per determinare se le equazioni del moto sono invarianti per dualità alla GZ può essere complicato da svolgere in modo esplicito. Si può allora cercare un metodo più semplice per effettuare la verifica. Consideriamo la versione infinitesima della trasformazione (3.13), ovvero consideriamo solo i termini del primo ordine in α

$$\delta F^{\mu_1\ldots\mu_n} = -\alpha \widetilde{L}^{\mu_1\ldots\mu_n}(F), \tag{3.22}$$

$$\delta L^{\mu_1\ldots\mu_n}(F) = -\alpha \widetilde{F}^{\mu_1\ldots\mu_n}. \tag{3.23}$$

Per ricavare la condizione di invarianza per trasformazioni di $SO(2)$ infinitesime, sviluppiamo in α la lagrangiana trasformata $\mathcal{L}_\alpha(F_\alpha)$ che, imponendo la (3.20), coincide con $\mathcal{L}(F_\alpha)$ (di nuovo, scriviamo solo i termini di ordine α)

$$\mathcal{L}_\alpha(F_\alpha) = \mathcal{L}(F_\alpha) = \mathcal{L}(F) + \frac{1}{n!} L^{\mu_1\ldots\mu_n} \delta F_{\mu_1\ldots\mu_n} = \mathcal{L}(F) - \alpha \frac{1}{n!} L^{\mu_1\ldots\mu_n} \widetilde{L}_{\mu_1\ldots\mu_n}.$$

Sviluppando poi la (3.18), sempre imponendo la (3.20), si ha

$$\mathcal{L}_\alpha(F_\alpha) = \mathcal{L}(F_\alpha) = \mathcal{L}(F) - \alpha \frac{1}{2n!} (F^{\mu_1\ldots\mu_n} \widetilde{F}_{\mu_1\ldots\mu_n} + L^{\mu_1\ldots\mu_n} \widetilde{L}_{\mu_1\ldots\mu_n}). \tag{3.24}$$

Eguagliando queste due espressioni si ricava la condizione di Gaillard-Zumino, affinché le equazioni del moto della teoria siano invarianti per dualità $SO(2)$

$$F^{\mu_1\ldots\mu_n} \widetilde{F}_{\mu_1\ldots\mu_n} - L^{\mu_1\ldots\mu_n} \widetilde{L}_{\mu_1\ldots\mu_n} = F\widetilde{F} - L\widetilde{L} = 0. \tag{3.25}$$

Il fatto che la condizione (3.25) implichi l'invarianza sotto trasformazioni di $SO(2)$ finite è dato dalla proprietà di gruppo soddisfatta dalle trasformazioni (3.13) e (3.18), rispettivamente per i campi F e L e per la lagrangiana $\mathcal{L}(F)$.

Nel caso della lagrangiana del campo elettromagnetico libero $\mathcal{L}_{EM}$ si ha

$$L_{\mu_1\ldots\mu_n}(F) = -F_{\mu_1\ldots\mu_n}, \tag{3.26}$$

e si verifica facilmente che è soddisfatta la condizione di GZ (3.25). Pertanto, nel caso libero le equazioni del moto sono invarianti per dualità $SO(2)$ alla Gaillard-Zumino. Nell'appendice A analizziamo brevemente il caso particolare della (3.18) con $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

3.2 Teorie canoniche

Passiamo ora allo studio di una classe di teorie che definiamo "canoniche", nelle quali la lagrangiana $\mathcal{L}(F)$ dipende solo dai due invarianti indipendenti

$$P_1 = -\frac{1}{2n!} F^{\mu_1\ldots\mu_n} F_{\mu_1\ldots\mu_n}, \qquad P_2 = \frac{1}{(2n!)^2} (F^{\mu_1\ldots\mu_n} \widetilde{F}_{\mu_1\ldots\mu_n})^2. \tag{3.27}$$

Pertanto consideriamo una lagrangiana della forma $\mathcal{L}(F) = \mathcal{L}(P_1, P_2)$ e adottiamo la notazione

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_1}, \qquad \mathcal{L}_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_2}. \tag{3.28}$$

La condizione di GZ (3.25) per una teoria di questo tipo diventa quindi

$$(\mathcal{L}_1)^2 - 4P_1\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 - 4P_2(\mathcal{L}_2)^2 = 1. \tag{3.29}$$

Si può effettuare un cambio di variabili, ponendo

$$\alpha = P_1, \qquad \beta = \sqrt{P_1^2 + P_2}, \tag{3.30}$$

e riscrivere la condizione (3.29) come

$$(\mathcal{L}_\alpha)^2 - (\mathcal{L}_\beta)^2 = 1, \tag{3.31}$$

o ancora, tramite gli invarianti

$$P_1 = p + q, \qquad P_2 = -4pq, \tag{3.32}$$

si ottiene

$$\mathcal{L}_p \mathcal{L}_q = 1. \tag{3.33}$$

La lagrangiana del campo elettromagnetico libero si scrive facilmente in termini degli invarianti (3.27)

$$\mathcal{L}_{EM} = P_1, \tag{3.34}$$

ed è evidente che soddisfa la condizione (3.29). Una soluzione non banale dell'equazione (3.29) è la generalizzazione in dimensione arbitraria della lagrangiana di Born-Infeld.

3.3 Teoria di Born-Infeld

La teoria di Born-Infeld, per la prima volta proposta nel 1933 in [2], in dimensione $D = 4$ si scrive

$$\mathcal{L}_{BI}(F) = \lambda^{-2}\Big(1 - \sqrt{-det(\eta_{\mu\nu} + \lambda F_{\mu\nu})}\Big). \tag{3.35}$$

Questa forma, tuttavia, non si può estendere in modo ovvio per teorie di Maxwell in $D > 4$, in cui il rango del tensore elettromagnetico è maggiore di 2, poiché non si ha la nozione di determinante per tensori dotati di più di due indici. Si può però scrivere $\mathcal{L}_{BI}(F)$ in modo alternativo, utilizzando gli invarianti (3.27) nel caso $n = 2$

$$\mathcal{L}_{BI}(F) = \lambda^{-2}\Big(1 - \sqrt{1 - 2\lambda^2 P_1 - \lambda^4 P_2}\Big). \tag{3.36}$$

A questo punto, la lagrangiana scritta in questa forma si può banalmente estendere a dimensione D arbitraria, utilizzando le definizioni generali (3.27) degli invarianti P_1 e P_2. Si può inoltre verificare esplicitamente che $\mathcal{L}_{BI}$ soddisfa la condizione di GZ per le teorie canoniche, infatti si ha

$$(\mathcal{L}_{BI})_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda^2 P_1 - \lambda^4 P_2}}, \tag{3.37}$$

$$(\mathcal{L}_{BI})_2 = \frac{\lambda^2}{2\sqrt{1 - 2\lambda^2 P_1 - \lambda^4 P_2}}, \tag{3.38}$$

che inserite nella (3.29) soddisfano l'equazione.

Capitolo 4

Formulazione di Pasti-Sorokin-Tonin

In questo capitolo applichiamo il metodo di Pasti-Sorokin-Tonin per riformulare la teoria che descrive un campo elettromagnetico $F^{\mu_1 \cdots \mu_n}$, analizzata nel capitolo precedente alla GZ, ma in modo manifestamente invariante per dualità $SO(2)$. Analogamente alla formulazione di GZ, lavoriamo in uno spazio-tempo di dimensione $D = 2n$, con n pari.

4.1 Il metodo di Pasti-Sorokin-Tonin

Introduciamo una coppia di potenziali $A^I_{\mu_1 \ldots \mu_{n-1}}(x)$ di rango $n-1$, che realizzeranno in maniera manifesta l'invarianza per dualità $SO(2)$. Indichiamo con $I = 1, 2$ l'indice di $SO(2)$ e con $\mu = 0, ..., D-1$ gli indici spazio-temporali. La trasformazione di $SO(2)$ che consideriamo è una rotazione dei due potenziali $A^I_{\mu_1 \ldots \mu_{n-1}}$ della forma

$$A'^I_{\mu_1 \ldots \mu_{n-1}} = R^{IJ}(\alpha) A^J_{\mu_1 \ldots \mu_{n-1}}, \tag{4.1}$$

dove $R^{IJ}(\alpha)$ è una matrice di rotazione di angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$, appartenente appunto al gruppo $SO(2)$. Introduciamo inoltre i tensori elettromagnetici associati al doppietto di potenziali

$$F^I_{\mu_1 \ldots \mu_n} = n\, \partial_{[\mu_1} A^I_{\mu_2 \ldots \mu_n]}, \tag{4.2}$$

e indichiamo con $\widetilde{F}^I_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ i relativi duali di Hodge. Introduciamo poi un campo scalare ausiliario $a(x)$, a cui si richiede la proprietà $(\partial a)^2 > 0$, e il campo vettoriale

$$v_\mu = \frac{\partial_\mu a}{\sqrt{(\partial a)^2}}, \tag{4.3}$$

che per definizione soddisfa $v_\mu v^\mu = 1$. Definiamo inoltre le componenti "elettriche" e "magnetiche" dei tensori $F^I_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ [1]

$$\mathcal{E}^I_{\mu_1 \ldots \mu_{n-1}} = F^I_{\mu_1 \ldots \mu_n} v^{\mu_n}, \qquad \mathcal{B}^I_{\mu_1 \ldots \mu_{n-1}} = \widetilde{F}^I_{\mu_1 \ldots \mu_n} v^{\mu_n}. \tag{4.4}$$

Si noti che da queste definizioni segue

$$\mathcal{E}^I_{\mu_1 \ldots \mu_{n-1}} v^{\mu_{n-1}} = 0, \qquad \mathcal{B}^I_{\mu_1 \ldots \mu_{n-1}} v^{\mu_{n-1}} = 0. \tag{4.5}$$

A questo punto possiamo scrivere un'azione che sia funzionale dei potenziali $A^I(x)$ e del campo $a(x)$ nella forma

$$S[A, a] = \frac{1}{(n-1)!} \int \Big(\frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \mathcal{E}^{I \mu_1 \ldots \mu_{n-1}} \mathcal{B}^J_{\mu_1 \ldots \mu_{n-1}} + \mathcal{N}(\mathcal{B}) \Big) d^4x, \tag{4.6}$$

dove $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ è, per il momento, una generica funzione dei campi $\mathcal{B}^I$, ma tra poco richiederemo che essa sia invariante per le trasformazioni di $SO(2)$ (4.1). L'azione che riproduce la teoria lineare usuale si ottiene con $\mathcal{N}(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} \mathcal{B}^{I \mu_1 \ldots \mu_{n-1}} \mathcal{B}^I_{\mu_1 \ldots \mu_{n-1}}$ (si veda in seguito, dopo le equazioni (4.32)).

[1] La notazione e i termini "elettriche" e "magnetiche" non sono casuali, infatti se $v^\mu = \delta^{\mu 0}$ i tensori $\mathcal{E}^I_{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}}$ e $\mathcal{B}^I_{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}}$ hanno solo componenti spaziali e si riducono ai campi elettrico e magnetico generalizzati, definiti per $F^I_{\mu_1 \cdots \mu_n}$ in modo del tutto analogo a (3.6) e (3.7).

Per semplificare la notazione, indichiamo nel modo seguente le derivate di $\mathcal{N}$ rispetto a $\mathcal{B}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$

$$\mathcal{N}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}} = \frac{\partial \mathcal{N}(\mathcal{B})}{\partial \mathcal{B}^{I\mu_1\ldots\mu_{n-1}}}, \tag{4.7}$$

e introduciamo un'identità che sarà utile in seguito: la scomposizione di un generico tensore antisimmetrico nelle componenti parallela e ortogonale a v^μ (la riportiamo applicata ai tensori $F^I_{\mu_1\ldots\mu_n}$, che sono quelli per cui la utilizzeremo)

$$F^{I\mu_1\ldots\mu_n} = n\mathcal{E}^{I[\mu_1\ldots\mu_{n-1}}v^{\mu_n]} - \frac{1}{(n-1)!}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_n\nu_1\ldots\nu_n}\mathcal{B}^I_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}}v_{\nu_n}, \tag{4.8}$$

dove $\mathcal{E}^{I\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$ e $\mathcal{B}^{I\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$ sono proprio quelli definiti in (4.4). Per verificare la (4.8) basta sostituire nel secondo addendo del membro di destra la definizione di $\mathcal{B}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$ (4.4), utilizzare la definizione del duale di Hodge e la formula per la contrazione di due tensori di Levi-Civita (3.4). Risulta poi conveniente, per scrivere in modo semplice le equazioni del moto, definire il doppietto di campi tensoriali

$$h^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}} = \mathcal{E}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}} + \varepsilon^{IJ}\mathcal{N}^J_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}. \tag{4.9}$$

A questo punto possiamo calcolare la variazione dell'azione (4.6) per generiche variazioni dei campi $A^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}(x)$ e $a(x)$. Per una variazione generica $\delta A^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$ dei potenziali di gauge risulta

$$\delta S\Big|_{\delta A} = \frac{1}{((n-1)!)^2}\int \varepsilon^{IJ}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_{n-1}\nu_1\ldots\nu_{n-1}\rho\sigma}\partial_\rho(h^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}v_\sigma)\delta A^J_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}}d^Dx, \tag{4.10}$$

mentre per una variazione δa del campo ausiliario, utilizzando la scomposizione (4.8) e la (3.4), si ha

$$\begin{aligned}\delta S\Big|_{\delta a} = \frac{1}{((n-1)!)^2}\int \varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_{n-1}\nu_1\ldots\nu_{n-1}\rho\sigma}\Big[&\frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}(\mathcal{B}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{B}^J_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}} + \mathcal{E}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{E}^J_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}})\\ &+ \mathcal{N}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{E}^I_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}}\Big]v_\rho\delta v_\sigma d^Dx.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Scrivendo esplicitamente δv_σ

$$\delta v_\sigma = \frac{\delta(\partial_\sigma a)}{\sqrt{(\partial a)^2}} - v_\sigma\frac{\partial_\gamma a\,\delta(\partial^\gamma a)}{(\partial a)^2}, \tag{4.12}$$

e inserendolo nella (4.11), il secondo addendo della (4.12) dà un contributo nullo a causa dell'antisimmetrizzazione sugli indici ρ e σ e si ottiene

$$\begin{aligned}\delta S\Big|_{\delta a} = \frac{1}{((n-1)!)^2}\int \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_{n-1}\nu_1\ldots\nu_{n-1}\rho\sigma}\partial_\rho\Big[\frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}}\Big(&\varepsilon^{IJ}(\mathcal{B}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{B}^J_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}} + \mathcal{E}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{E}^J_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}})\\ &+ 2\mathcal{N}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{E}^I_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}}\Big)v_\sigma\Big]\delta a\, d^Dx.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Il formalismo di PST richiede la presenza, oltre all'usuale invarianza per trasformazioni di gauge sui potenziali vettori $A^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$, ovvero $\delta A^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}} = \partial_{[\mu_1}\Lambda^I_{\mu_2\ldots\mu_{n-1}]}$, dove $\Lambda^I_{\mu_2\ldots\mu_{n-1}}(x)$ sono un doppietto di campi tensoriali generici di rango $n-2$ completamente antisimmetrici, di altre due simmetrie per l'azione (4.6). Indicheremo queste simmetrie rispettivamente con PST1 e PST2 ed esse hanno la forma

$$\text{PST1}\begin{cases}\delta A^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}} = \partial_{[\mu_1}a\lambda^I_{\mu_2\ldots\mu_{n-1}]}\\ \delta a = 0\end{cases}, \tag{4.14}$$

$$\text{PST2}\begin{cases}\delta A^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}} = -\frac{\phi}{\sqrt{(\partial a)^2}}h^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\\ \delta a = \phi\end{cases}, \tag{4.15}$$

dove $\lambda^I_{\mu_2\ldots\mu_{n-1}}(x)$ sono una coppia di campi tensoriali generici di rango $n-2$ completamente antisimmetrici e $\phi(x)$ è un generico campo scalare. Si verifica in modo immediato che la variazione dell'azione sotto PST1 è nulla: inserendo la (4.14) nella (4.10) e integrando per parti si ottiene

$$\delta S\Big|_{\delta A} = -\frac{1}{((n-1)!)^2}\int \varepsilon^{IJ}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_{n-1}\nu_1\ldots\nu_{n-1}\rho\sigma}h^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}v_\sigma\,\partial_\rho(\partial_{\nu_1}a\lambda^J_{\nu_2\ldots\nu_{n-1}})d^Dx, \tag{4.16}$$

che è identicamente nullo. Ciò si può vedere dal fatto che, quando la derivata ∂_ρ agisce sul prodotto tra parentesi, si ottengono due addendi con due indici simmetrici ciascuno (rispettivamente $\rho\nu_1$ e $\sigma\nu_1$), pertanto, a causa dell'antisimmetrizzazione data da $\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_{n-1}\nu_1\ldots\nu_{n-1}\rho\sigma}$, si annullano entrambi questi termini. Quindi si verifica che

$$\delta S\Big|_{PST1} = 0. \tag{4.17}$$

La simmetria PST2 è invece più delicata, infatti la richiesta che la variazione dell'azione si annulli sotto una trasformazione (4.15) impone una condizione su $\mathcal{N}(\mathcal{B})$, che si può scrivere come un'equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine non lineare. La variazione (4.10), sotto una trasformazione PST2, diventa

$$\delta S\Big|_{\delta A} = \frac{1}{2((n-1)!)^2}\int \varepsilon^{IJ}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_{n-1}\nu_1\ldots\nu_{n-1}\rho\sigma} h^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}} h^J_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}} v_\sigma \delta v_\rho \, d^D x. \tag{4.18}$$

Sommando il contributo dato da (4.11) e utilizzando la definizione di $h^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$ (4.9) si ottiene la variazione totale

$$\delta S = \frac{1}{2((n-1)!)^2}\int \varepsilon^{IJ}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_{n-1}\nu_1\ldots\nu_{n-1}\rho\sigma}(\mathcal{B}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{B}^J_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}} - \mathcal{N}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{N}^J_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}}) v_\rho \delta v_\sigma \, d^D x, \tag{4.19}$$

dove la variazione δv_σ si ottiene sostituendo la (4.15) in (4.12)

$$\delta v_\sigma = \frac{\partial_\sigma \phi}{\sqrt{(\partial a)^2}} - v_\sigma \frac{\partial_\gamma a\, \partial^\gamma \phi}{(\partial a)^2}. \tag{4.20}$$

A questo punto, se si richiede che la (4.19) si annulli per un generico ϕ e per $a(x)$ arbitrario, la condizione che si ottiene è

$$\mathcal{B}^I_{[\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{B}^J_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}]} - \mathcal{N}^I_{[\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{N}^J_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}]} = 0, \tag{4.21}$$

che chiameremo condizione di PST. Si osservi che, poiché nella (4.15) il campo scalare $a(x)$ viene traslato di un parametro $\phi(x)$ generico, allora, se l'azione (4.6) è invariante per PST2, cioè $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ soddisfa (4.21), il campo $a(x)$ è completamente ausiliario e non rappresenta un grado di libertà fisico. Sottolineiamo inoltre che, poiché la condizione di PST (4.21), se soddisfatta, permette di eliminare il campo ausiliario $a(x)$, essa rappresenta il vincolo su $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ affinché la teoria sia Lorentz invariante. Per quanto riguarda l'invarianza per dualità $SO(2)$, ovvero sotto trasformazioni del tipo (4.1), fino ad ora non si è fatta alcuna ipotesi sulla forma di $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ che compare nell'azione (4.6), pertanto non è garantita l'invarianza della teoria. Se però si richiede che la funzione $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ sia una funzione dei campi $\mathcal{B}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$ invariante sotto rotazioni dei potenziali $A^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$ (4.1), allora l'azione alla PST è invariante per dualità $SO(2)$, che è quindi una simmetria alla Noether della teoria. In questo caso si parla di invarianza per dualità $SO(2)$ manifesta.

4.2 Equazioni del moto

Dalle espressioni (4.10) e (4.13) delle variazioni dell'azione sotto generiche trasformazioni dei campi $A^I(x)$ e $a(x)$ si ricavano in modo immediato le equazioni del moto

$$\delta A^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}: \quad \varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_{n-1}\nu_1\ldots\nu_{n-1}\rho\sigma}\varepsilon^{IJ}\partial_\rho(v_\sigma h^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}) = 0, \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\delta a: \quad \varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_{n-1}\nu_1\ldots\nu_{n-1}\rho\sigma}\partial_\rho\Big[\frac{1}{\sqrt{(\partial a)^2}}\Big(&\varepsilon^{IJ}(\mathcal{B}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{B}^J_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}} + \mathcal{E}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{E}^J_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}}) \\ &+ 2\mathcal{N}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{E}^I_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}}\Big)v_\sigma\Big] = 0.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Se vale l'invarianza dell'azione sotto PST2, ovvero se è rispettata la condizione di PST (4.21), allora la (4.23) si può riscrivere nella forma equivalente

$$\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_{n-1}\nu_1\ldots\nu_{n-1}\rho\sigma}\varepsilon^{IJ}\partial_\rho\Big[\frac{v_\sigma}{\sqrt{(\partial a)^2}} h^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}} h^J_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}}\Big] = 0. \tag{4.24}$$

Inoltre adesso è facile verificare che la (4.22) implica la (4.24). Per vederlo, basta riscrivere la (4.24) nel seguente modo

$$\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_{n-1}\nu_1\ldots\nu_{n-1}\rho\sigma}\varepsilon^{IJ}\partial_\sigma a\,\partial_\rho\Big(\frac{h^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}}{\sqrt{(\partial a)^2}}\Big)\frac{h^J_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}}}{\sqrt{(\partial a)^2}}=0, \tag{4.25}$$

che è conseguenza della (4.22).

A questo punto, è sufficiente quindi "risolvere" le equazioni del moto per i campi $A^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$. La (4.22) è equivalente ad affermare che vh^I è una forma chiusa. In uno spazio topologicamente banale questo implica che sia anche esatta, quindi, per il lemma di Poincaré, si può scrivere

$$v_{[\sigma}h^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}]}=\partial_{[\sigma}\chi^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}]}, \tag{4.26}$$

ma vale anche

$$v_{[\sigma}h^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}]}=\partial_{[\sigma}a\,\Lambda^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}]}, \tag{4.27}$$

da cui si deduce che vh^I è della forma

$$v_{[\sigma}h^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}]}=\partial_{[\sigma}a\,\partial_{\mu_1}\widetilde{\lambda}^I_{\mu_2\ldots\mu_{n-1}]}, \tag{4.28}$$

per un opportuno campo $\widetilde{\lambda}^I_{\mu_2\ldots\mu_{n-1}}$. Effettuiamo adesso una trasformazione PST1 (4.14)

$$\begin{cases}\delta A^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}=\partial_{[\mu_1}a\,\lambda^I_{\mu_2\ldots\mu_{n-1}]},\\ \delta a=0.\end{cases} \tag{4.29}$$

Sotto la (4.29) si ha

$$\delta(v_{[\sigma}h^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}]})=\partial_{[\sigma}a\,\partial_{\mu_1}\lambda^I_{\mu_2\ldots\mu_{n-1}]}, \tag{4.30}$$

quindi scegliendo $\lambda^I_{\mu_2\ldots\mu_{n-1}}=-\widetilde{\lambda}^I_{\mu_2\ldots\mu_{n-1}}$, le equazioni del moto (4.22) diventano

$$v_{[\sigma}h^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}]}=0, \tag{4.31}$$

e contraendo con v^σ

$$h^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}=\mathcal{E}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}+\varepsilon^{IJ}\mathcal{N}^J_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}=0. \tag{4.32}$$

Nel caso lineare si ha $\mathcal{N}(\mathcal{B})=\frac{1}{2}\mathcal{B}^{I\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{B}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$, quindi

$$\mathcal{N}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}=\mathcal{B}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}, \tag{4.33}$$

e le equazioni del moto (4.32) diventano

$$\mathcal{E}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}=\varepsilon^{JI}\mathcal{B}^J_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}\mathcal{E}^1_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}=-\mathcal{B}^2_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}},\\ \mathcal{E}^2_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}=\mathcal{B}^1_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}},\end{cases} \tag{4.34}$$

che si possono a loro volta riscrivere come

$$F^2_{\mu_1\ldots\mu_n}=\widetilde{F}^1_{\mu_1\ldots\mu_n}. \tag{4.35}$$

Queste equazioni sono proprio equivalenti alle equazioni di Maxwell libere, scritte nel formalismo con due potenziali. Infatti, per $F^1_{\mu_1\ldots\mu_n}$ e $F^2_{\mu_1\ldots\mu_n}$, poiché sono definiti in termini di due potenziali vettori $A^1_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$ e $A^2_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$ da (4.2), valgono le identità di Bianchi generalizzate

$$\partial_{\mu_1}\widetilde{F}^{1\mu_1\ldots\mu_n}=0, \tag{4.36}$$

$$\partial_{\mu_1}\widetilde{F}^{2\mu_1\ldots\mu_n}=0. \tag{4.37}$$

Sostituendo la (4.35) in (4.36) si ottengono le equazioni

$$\partial_{\mu_1}F^{2\mu_1\ldots\mu_n}=0, \tag{4.38}$$

$$\partial_{\mu_1}\widetilde{F}^{2\mu_1\ldots\mu_n}=0, \tag{4.39}$$

che sono proprio le equazioni di Maxwell per $F^2_{\mu_1\ldots\mu_n}$. Equivalentemente si può applicare il duale di Hodge ad entrambi i membri della (4.35) e sostituirla in (4.37) per ricavare le stesse equazioni per $F^1_{\mu_1\ldots\mu_n}$.

In generale le equazioni (4.32), che chiameremo anche condizioni di self-dualità generalizzate, si possono leggere come una relazione di dualità non lineare tra le coppie di campi $(\mathcal{E}^1, \mathcal{B}^1)$ ed $(\mathcal{E}^2, \mathcal{B}^2)$. Infatti, esse sono della forma (omettendo gli indici per semplicità) $\mathcal{E}^1 = \mathcal{E}^1(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2)$ e $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}^2(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2)$ e possono essere invertite per ricavare una coppia di campi in funzione dell'altra, ad esempio

$$\mathcal{E}^1 = \mathcal{E}^1(\mathcal{E}^2, \mathcal{B}^2), \qquad \mathcal{B}^1 = \mathcal{B}^1(\mathcal{E}^2, \mathcal{B}^2). \tag{4.40}$$

Sostituendo le (4.40) nella scomposizione (4.8) per $I = 1$ e ricordando le definizioni (4.4) per $I = 2$, è possibile scrivere il tensore $F^1_{\mu_1\ldots\mu_n}$ in funzione di $F^2_{\mu_1\ldots\mu_n}$ [2]

$$F^1_{\mu_1\ldots\mu_n} = F^1_{\mu_1\ldots\mu_n}(F^2). \tag{4.41}$$

A questo punto si può dimostrare, si veda [17], che esiste sempre una lagrangiana $\mathcal{L}(F^2)$, funzione solo del campo $F^2_{\mu_1\ldots\mu_n}$, tale che si può scrivere

$$\widetilde{F}^1_{\mu_1\ldots\mu_n} = -n!\frac{\partial\mathcal{L}(F^2)}{\partial F^{2\mu_1\ldots\mu_n}}. \tag{4.42}$$

Tale $\mathcal{L}(F^2)$ si ricava, a partire da $\mathcal{N}(\mathcal{B})$, tramite la trasformata di Legendre

$$\mathcal{L}(F^2) = -\frac{1}{(n-1)!}\Big(\mathcal{E}^{2\,\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{B}^1_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}} - \mathcal{N}(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2)\Big)\Big|_{\mathcal{B}^1=\mathcal{B}^1(\mathcal{E}^2,\mathcal{B}^2)}, \tag{4.43}$$

dove si utilizzano le (4.40) per scrivere $\mathcal{B}^1$ in termini di $(\mathcal{E}^2, \mathcal{B}^2)$. Imponendo ora le identificazioni

$$F_{\mu_1\ldots\mu_n} = F^2_{\mu_1\ldots\mu_n}, \qquad L_{\mu_1\ldots\mu_n} = -\widetilde{F}^1_{\mu_1\ldots\mu_n}, \tag{4.44}$$

la (4.43) rappresenta un metodo generale per mappare una lagrangiana $\mathcal{L}(F)$ nella formulazione di GZ in una $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ alla PST, e viceversa. Inoltre, sostituendo le (4.44) nelle identità di Bianchi (4.36) e (4.37) per $F^I_{\mu_1\ldots\mu_n}$, che seguono dalla definizione (4.2), quest'ultime diventano rispettivamente le equazioni del moto (3.12) e (3.11) della lagrangiana $\mathcal{L}(F)$ nella formulazione alla GZ. Con questo metodo, quindi, oltre ad associare ad una lagrangiana $\mathcal{L}(F)$ alla GZ un'unica $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ alla PST, e viceversa, anche le equazioni del moto nei due formalismi sono mappate le une nelle altre.

In generale, non esiste un argomento che dimostri l'equivalenza tra i metodi di GZ e di PST in dimensione arbitraria. Più precisamente, abbiamo mostrato come, data una $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ nella formulazione di PST (non necessariamente invariante per dualità $SO(2)$), che soddisfa la condizione di PST (4.21), ad essa è univocamente associata, tramite (4.43), una lagrangiana $\mathcal{L}(F)$ alla GZ che descrive una teoria Lorentz invariante (ma a priori non invariante per $SO(2)$), e viceversa. Quello che non è ovvio è che, se $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ è invariante per dualità $SO(2)$, allora $\mathcal{L}(F)$ soddisfa la condizione di GZ (3.25), e viceversa. In [17] si dimostra che, nel caso delle *teorie canoniche* (discusse nella sezione 3.2 per GZ e che discuteremo nella sezione 4.3 per PST), questa equivalenza vale in dimensione $D = 2n$, con n pari generico. Se ci restringiamo ad uno spazio-tempo di dimensione $D = 4$, tutte le teorie sono canoniche. Infatti, in questo caso, gli invarianti canonici (sia alla GZ, sia alla PST) formano una base completa per i polinomi Lorentz invarianti che si possono scrivere in termini dei tensori $F_{\mu_1\ldots\mu_n}$ e $\mathcal{B}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$, rispettivamente. Pertanto, in $D = 4$, i due approcci (GZ e PST) sono del tutto equivalenti (l'equivalenza in questo caso particolare era già stata dimostrata in [18]).

4.3 Teorie canoniche

Come nella sezione 3.2 per il metodo di GZ, analizziamo una classe di teorie, che chiamiamo canoniche, in cui $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ dipende da $\mathcal{B}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$ solo tramite gli invarianti

$$Q_1 = \frac{1}{2}\mathcal{B}^{I\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{B}^I_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}, \qquad Q_2 = \frac{1}{4}\mathcal{B}^{I\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{B}^J_{\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\mathcal{B}^{I\nu_1\ldots\nu_{n-1}}\mathcal{B}^J_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}}, \tag{4.45}$$

[2] In generale, F^1 dovrebbe essere funzione di F^2 e di a, ma abbiamo mostrato che, se vale la condizione di PST, il campo $a(x)$ è completamente ausiliario e la dipendenza da esso scompare.

ovvero consideriamo $\mathcal{N} = \mathcal{N}(Q_1, Q_2)$ e adottiamo la notazione

$$\mathcal{N}_1 = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial Q_1}, \qquad \mathcal{N}_2 = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial Q_2}. \tag{4.46}$$

Definiamo la matrice 2×2

$$K^{IJ} = \delta^{IJ}\mathcal{N}_1 + \mathcal{B}^{I\mu_1\dots\mu_{n-1}}\mathcal{B}^{J}_{\mu_1\dots\mu_{n-1}}\mathcal{N}_2, \tag{4.47}$$

allora la (4.7) si può scrivere

$$\mathcal{N}^{I}_{\mu_1\dots\mu_{n-1}} = K^{IJ}\mathcal{B}^{J}_{\mu_1\dots\mu_{n-1}}, \tag{4.48}$$

e la condizione di PST (4.21) si può scrivere come

$$\varepsilon^{IJ}\Big(\mathcal{B}^{I}_{[\mu_1\dots\mu_{n-1}}\mathcal{B}^{J}_{\nu_1\dots\nu_{n-1}]} - \mathcal{N}^{I}_{[\mu_1\dots\mu_{n-1}}\mathcal{N}^{J}_{\nu_1\dots\nu_{n-1}]}\Big) = (1 - det(K))\varepsilon^{IJ}\mathcal{B}^{I}_{[\mu_1\dots\mu_{n-1}}\mathcal{B}^{J}_{\nu_1\dots\nu_{n-1}]} = 0. \tag{4.49}$$

A questo punto è immediato dedurre che, nel caso di teorie canoniche, la condizione (4.21) è rispettata se e solo se

$$det(K) = 1. \tag{4.50}$$

Utilizzando l'identità

$$det(K) = \frac{1}{2}\Big((tr(K))^2 - tr(K^2)\Big), \tag{4.51}$$

si riscrive la (4.50) nella forma

$$(\mathcal{N}_1)^2 + 2Q_1\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2 + 2(Q_1^2 - Q_2)(\mathcal{N}_2)^2 = 1. \tag{4.52}$$

Questa equazione, tramite un opportuno cambio di variabili (si veda (4.53) nella sezione 4.4), si può scrivere in modo formalmente identico alla (3.29) ed entrambe corrispondono all'equazione di Courant-Hilbert. Per uno studio delle possibili soluzioni di questa equazione si veda, ad esempio, [19]. La (4.52) è evidentemente soddisfatta dalla teoria lineare usuale che corrisponde a $\mathcal{N}(\mathcal{B}) = Q_1$ e, analogamente al caso di GZ, una soluzione non banale è la generalizzazione della teoria di Born-Infeld.

4.4 Teoria di Born-Infeld

Vogliamo determinare la funzione $\mathcal{N}_{BI}(Q_1, Q_2)$ dei due invarianti canonici che generalizza la teoria di Born-Infeld in dimensione $D = 2n$, n pari. Notiamo che se si effettua il cambio di variabili

$$Q_3 = Q_1, \qquad Q_4 = 2(Q_2 - Q_1^2), \tag{4.53}$$

la condizione (4.52) si riscrive

$$(\mathcal{N}_3)^2 - 4Q_3\mathcal{N}_3\mathcal{N}_4 - 4Q_4(\mathcal{N}_4)^2 = 1, \tag{4.54}$$

che è formalmente identica alla (3.29), con le sostituzioni

$$\mathcal{L} \to \mathcal{N}, \qquad P_1 \to Q_3, \qquad P_2 \to Q_4. \tag{4.55}$$

Nella sezione 3.3 abbiamo determinato la lagrangiana (3.36), soluzione della (3.29), che generalizza la teoria di BI nella formulazione di GZ e da essa, tramite le (4.55), siamo in grado di scrivere una soluzione non banale della (4.54)

$$\mathcal{N}_k(\mathcal{B}) = \frac{1}{k\lambda^2}\Big(1 - \sqrt{1 - 2k\lambda^2 Q_3 - k^2\lambda^4 Q_4}\Big), \tag{4.56}$$

dove k è una costante adimensionale, a questo punto arbitraria. Ricordando che, in generale, per le teorie canoniche vale l'equivalenza dei due approcci (GZ e PST), è naturale aspettarsi che, per un certo valore della costante k, $\mathcal{N}_k(\mathcal{B})$ descriva la teoria equivalente a $\mathcal{L}_{BI}(F)$, data in (3.36). A questo punto, si tratta di determinare per quale valore di k ciò accade. Questo si può fare seguendo il procedimento svolto in [17], in cui si ricostruisce, a partire da $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ nel formalismo di PST, tramite (4.43), la teoria equivalente nella formulazione di GZ. Così facendo, si trova che l'equivalenza tra $\mathcal{N}_k(\mathcal{B})$ e $\mathcal{L}_{BI}(F)$ vale effettivamente per $k = \frac{1}{(n-1)!}$ e $\mathcal{N}_{BI}(\mathcal{B})$, in termini di Q_1 e Q_2, si scrive

$$\mathcal{N}_{BI}(\mathcal{B}) = \frac{(n-1)!}{\lambda^2}\Bigg(1 - \sqrt{1 - 2\frac{\lambda^2}{(n-1)!}Q_1 + 2\frac{\lambda^4}{((n-1)!)^2}(Q_1^2 - Q_2)}\Bigg). \tag{4.57}$$

Capitolo 5

Conclusioni

Dopo aver presentato la dualità elettromagnetica per le equazioni di Maxwell ordinarie nello spazio-tempo di dimensione $D = 4$ e in assenza di sorgenti, abbiamo analizzato brevemente una possibile estensione della dualità in presenza di sorgenti del campo elettromagnetico. Dopo di che, tornando al caso privo di sorgenti, abbiamo esposto due possibili approcci allo studio della dualità elettromagnetica per teorie non lineari in uno spazio-tempo di dimensione $D = 2n$, con n pari: il metodo di Gaillard-Zumino, manifestamente Lorentz invariante, in cui la dualità non è una simmetria dell'azione, ma solo delle equazioni del moto, e quello di Pasti-Sorokin-Tonin, manifestamente invariante sia per Lorentz sia per dualità $SO(2)$. Nel primo caso abbiamo ricavato la condizione sulla lagrangiana $\mathcal{L}(F)$ affinché le equazioni del moto siano invarianti per dualità, ovvero la condizione di GZ (3.25). Nel secondo abbiamo determinato la condizione su $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ affinché il campo ausiliario $a(x)$ che viene introdotto non rappresenti un grado di libertà fisico, ovvero la condizione di PST (4.21). Abbiamo poi mostrato un metodo per mappare la lagrangiana e le equazioni del moto di uno dei due formalismi nell'altro, tramite le (4.43) e (4.44). Infine, sia nel caso di GZ, sia per PST, abbiamo analizzato una classe di teorie, che abbiamo definito "canoniche", in cui la lagrangiana dipende solo da alcuni invarianti, a loro volta detti "canonici", nel qual caso i due approcci risultano equivalenti.

Come già affermato, non esiste una dimostrazione generale dell'equivalenza dei due metodi (GZ e PST) in uno spazio-tempo di dimensione multipla di quattro per teorie non canoniche. Tuttavia, in [17] è stato fatto un passo in avanti in questa direzione: nel caso $D = 8$ si sono determinati, in entrambi i formalismi, i più generali termini di ordine 4 nei campi $F_{\mu_1 \dots \mu_n}$ e $F^I_{\mu_1 \dots \mu_n}$ che possono comparire nelle lagrangiane e che soddisfano rispettivamente le condizioni di GZ e PST. Questi invarianti di ordine 4 sono stai poi scritti in termini dei campi elettrico e magnetico generalizzati, e si è verificato che i risultati nelle due formulazioni coincidono, pertanto l'equivalenza tra GZ e PST vale anche in dimensione $D = 8$, almeno fino alle interazioni di ordine 4 nei campi.

Appendice A

Dualità e "pseudo-trasformata" di Legendre

Analizziamo un caso particolare della trasformazione (3.18). Scegliendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si ottiene

$$\mathcal{L}_{\frac{\pi}{2}}(F_{\frac{\pi}{2}}) = \mathcal{L}(F) - \frac{1}{n!} F_{\mu_1 \ldots \mu_n} L^{\mu_1 \cdots \mu_n} = \mathcal{L}(F) - F_{\mu_1 \ldots \mu_n} \frac{\partial \mathcal{L}(F)}{\partial F_{\mu_1 \ldots \mu_n}}. \tag{A.1}$$

La proprietà che le equazioni del moto siano invarianti per dualità $SO(2)$ nel caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ovvero la condizione (3.20), i. e. $\mathcal{L}_{\frac{\pi}{2}}(\cdot) = \mathcal{L}(\cdot)$, assicura che

$$\mathcal{L}(F_{\frac{\pi}{2}}) = \mathcal{L}(F) - F_{\mu_1 \ldots \mu_n} \frac{\partial \mathcal{L}(F)}{\partial F_{\mu_1 \ldots \mu_n}}, \tag{A.2}$$

$$F_{\frac{\pi}{2}}^{\mu_1 \ldots \mu_n} = -\widetilde{L}^{\mu_1 \ldots \mu_n}(F) = -n! \Big(\widetilde{\frac{\partial \mathcal{L}(F)}{\partial F_{\mu_1 \ldots \mu_n}}} \Big). \tag{A.3}$$

Questa identità sembra corrispondere all'invarianza di $\mathcal{L}(F)$ sotto trasformata di Legendre (a parte il coefficiente $-n!$ nella (A.3) dovuto alla normalizzazione di $\mathcal{L}$). In realtà non è così, infatti l'argomento della lagrangiana nel primo membro della (A.2) non è il momento coniugato a F, bensì il suo duale di Hodge, come si vede dalla (A.3). Chiameremo quindi questa trasformazione "pseudo-trasformata" di Legendre. Poiché la condizione di GZ (3.25) implica l'invarianza sotto trasformazioni di $SO(2)$ finite, è ovvio che essa implichi, in particolare, la (A.2). Tuttavia, non è detto che valga l'implicazione inversa, in effetti la questione è ancora oggetto di studio (si veda [20]).

Bibliografia

[1] S. Deser, M. T. Grisaru, P. van Nieuwenhuizen, C. C. Wu, *Scale dependence and the renormalization problem of quantum gravity*, Phys. Lett. **B58** 355, 1975.

[2] M. Born, L. Infeld, *Foundations of the New Field Theory*, Proc. Roy. Soc. London **A144** 425, 1934.

[3] E. Schrödinger, *Contributions to Born's New Theory of the Electromagnetic Field*, Proc. Roy. Soc. London **A150** 465, 1935.

[4] P. West, *Introduction to Strings and Branes*, Cambridge University Press, 2012.

[5] G. Bossard, H. Nicolai, *Counterterms vs. Dualities*, JHEP **1108** 074, 2011.

[6] S. Deser, A. Gomberoff, M. Henneaux, C. Teitelboim, *Duality, self-duality, sources and charge quantization in abelian N-form theories*, Phys. Lett. **B400** 80, 1997.

[7] J. H. Schwarz, A. Sen, *Duality Symmetric Actions*, Nucl. Phys. **B411** 35, 1994.

[8] M. K. Gaillard, B. Zumino, *Duality Rotations for Interacting Fields*, Nucl. Phys. **B193** 221, 1981.

[9] P. Pasti, D. P. Sorokin, M. Tonin, *Duality symmetric actions with manifest space-time symmetries*, Phys. Rev. **D52** 4277, 1995.

[10] P. Pasti, D. P. Sorokin, M. Tonin, *Space-time symmetries in duality symmetric models*, In Gauge theories, applied supersymmetry, quantum gravity. Proceedings, Workshop, Leuven, Belgium, July 10-14, 1995, 1995.

[11] P. Pasti, D. Sorokin, M. Tonin, *Covariant actions for models with non-linear twisted self-duality*, Phys. Rev. **D86** 045013, 2012.

[12] K. Lechner, *Classical Electrodynamics: A Modern Perspective*, Springer International Publishing, 2018.

[13] P. A. M. Dirac, *Quantized singularities in the electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. London **A133** 60, 1931.

[14] J. Schwinger, *Sources and magnetic charge*, Phys. Rev. **173** 1536, 1968.

[15] G. W. Gibbons, D. A. Rasheed, *Electric-Magnetic Duality Rotations in Non-Linear Electrodynamics*, Nucl. Phys. **B454** 185,1995.

[16] D. Chruscinski, *Strong field limit of the Born-Infeld p-form electrodynamics*, Phys. Rev. **D62** 105007, 2000.

[17] G. Buratti, K. Lechner, L. Melotti, *Duality invariant self-interactions for Maxwell fields in arbitrary dimensions*, hep-th/1906.07094, 2019.

[18] S. Deser, Ö. Sarioglu, *Hamiltonian Electric/Magnetic Duality and Lorentz Invariance*, Phys. Lett. **B423** 369,1998.

[19] M. Hatsuda, K. Kamimura, S. Sekiya, *Electric-Magnetic Duality Invariant Lagrangians*, Nucl. Phys. **B561** 341, 1999.

[20] M. K. Gaillard, B. Zumino, *Nonlinear Electromagnetic Self-Duality and Legendre Transformations*, hep-th/9712103, 1997.