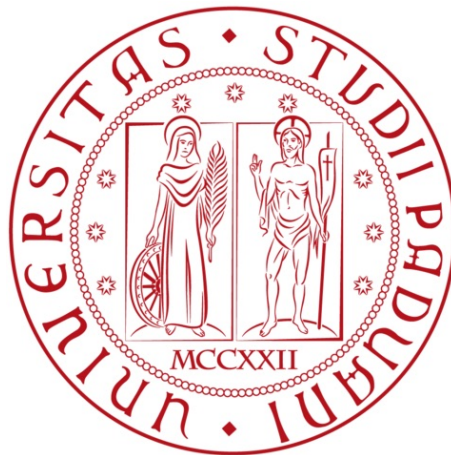


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA GALILEO GALILEI  
CORSO DI LAUREA IN ASTRONOMIA



EFFETTI MAREALI SU PIANETI EXTRASOLARI

*Laureando:*  
Giorgio Laverda

*Relatore:*  
Prof. Francesco Marzari

Dicembre 2016



## ABSTRACT

---

Negli ultimi due decenni, la continua scoperta di nuovi e sorprendenti esopianeti ha posto delle serie domande sulla formazione ed evoluzione dei sistemi planetari. In questo lavoro si indaga il ruolo dell'interazione mareale nella perturbazione delle orbite planetarie. In particolare si analizzerà, dal punto di vista della teoria del potenziale gravitazionale, il modello ad angolo di ritardo costante (*constant lag angle*) per ricavare le equazioni che regolano la variazione del semiasse maggiore, dell'eccentricità dell'orbita e dell'energia del sistema. Nonostante siano stati proposti modelli più sofisticati, la scarsità di informazioni riguardo la struttura interna dei pianeti extrasolari limita fortemente l'applicazione ai dati osservativi. Il modello "constant lag angle" permette di spiegare con una buona precisione alcune caratteristiche delle distribuzioni dei parametri orbitali: la grande presenza di hot Jupiters in orbite quasi circolari e la scarsità di pianeti con semiasse maggiore più piccolo di 0.03AU. Inoltre si indagherà il fenomeno del riscaldamento mareale (*tidal heating*) che sembra spiegare il raggio insolitamente grande di alcuni pianeti transitanti.



*Coloro che furono oceani di perfezione e di scienza  
e per virtù rilucenti divennero Lampade al mondo,  
Non fecero un passo nemmeno fuori di questa notte scura;  
Narrarono fiabe, e poi ricadder nel sonno.*

*— Omar Khayyam, Rub'ayyat*

## RINGRAZIAMENTI

---

Si ringrazia profondamente il professor Francesco Marzari per aver aggiustato la mia rotta nei momenti in cui ho rischiato di perdermi tra le maree.



# INDICE

---

<b>I</b>	<b>STUDIO FISICO DELLA FORMAZIONE DELLE MAREE PLANETARIE</b>	<b>1</b>
1	IL PROBLEMA DEI DUE CORPI	3
1.1	Moti in campi di forze centrali . . . . .	3
1.2	Il problema di Keplero . . . . .	4
1.3	Parametri orbitali delle orbite in tre dimensioni . . . . .	5
1.4	Sistema di riferimento del centro di massa . . . . .	7
2	POTENZIALE MAREALE	9
2.1	Introduzione . . . . .	9
2.2	Cenni di teoria del potenziale gravitazionale . . . . .	10
2.3	Forza mareale e potenziale mareale . . . . .	13
2.4	Deformazione di un corpo a simmetria sferica . . . . .	18
3	MOMENTO MAREALE	21
3.1	Oscillatore armonico forzato . . . . .	21
3.2	Evoluzione del semiasse maggiore dell'orbita . . . . .	23
3.3	Evoluzione dell'eccentricità dell'orbita . . . . .	26
<b>II</b>	<b>APPLICAZIONE DELLA TEORIA ALLE EVIDENZE SPERIMENTALI</b>	<b>29</b>
4	EVIDENZE OSSERVATIVE	31
4.1	Distribuzione delle eccentricità . . . . .	31
4.2	Distribuzione dei semiassi maggiori . . . . .	32
4.3	Raggi planetari . . . . .	33
5	INTERPRETAZIONE DEI DATI OSSERVATIVI	35
5.1	Evoluzione dei parametri orbitali . . . . .	35
5.2	Stima del parametro Q . . . . .	36
5.3	Circolarizzazione delle orbite . . . . .	37
5.4	Distruzione mareale . . . . .	39
5.5	Riscaldamento mareale . . . . .	40
6	CONSIDERAZIONI FINALI	45
6.1	Problemi osservativi e interpretativi . . . . .	45
6.2	Prospettive future . . . . .	46
A	APPENDICE	47
	BIBLIOGRAFIA	49

## ACRONIMI

---

HJ Hot Jupiters

SE Super Earths

RV Radial Velocities



## Parte I

### STUDIO FISICO DELLA FORMAZIONE DELLE MAREE PLANETARIE

La prima parte dello studio delle maree planetarie richiede la trattazione del problema della deformazione indotta da un campo gravitazionale su corpi estesi non perfettamente rigidi. Saranno ricapitolati brevemente alcuni risultati della teoria del problema dei due corpi e della teoria del potenziale gravitazionale. In seguito sarà possibile studiare la struttura del potenziale e calcolare il momento agente sul pianeta. E' proprio questo momento a causare l'evoluzione dei parametri orbitali.



## IL PROBLEMA DEI DUE CORPI

---

Nel presente capitolo verranno brevemente discussi i tratti generali del cosiddetto problema dei due corpi che rappresenta la versione più semplice del sistema stella-pianeta (tutti i corpi sono supposti essere masse puntiformi). Inoltre saranno introdotte la notazione e le convenzioni per i parametri orbitali.

### 1.1 MOTI IN CAMPI DI FORZE CENTRALI

Il sistema fisico standard che sta alla base del problema dei due corpi è composto da due masse puntiformi  $m_1$  e  $m_2$  in uno spazio tridimensionale dotato di un sistema di riferimento triassiale. Le posizioni dei due punti materiali sono individuate dai vettori  $r_1$  e  $r_2$ . Anziché studiare il problema generale, è possibile limitarsi al caso di un punto materiale soggetto ad un potenziale gravitazionale centrale: questa è una buona approssimazione nel caso in cui, ad esempio,  $m_1 \ll m_2$  ossia per il tipico sistema stella-pianeta. Come si vedrà nel Paragrafo (1.4), il caso generale di problema dei due corpi si compone di due moti dei due punti materiali attorno al centro di massa del sistema (quindi restano valide le considerazioni fatte nel caso di un corpo in un potenziale centrale).

Si definisce campo centrale con centro in  $O$  un campo vettoriale sul piano  $E^{2-1}$  con la proprietà di essere invariante per tutte le trasformazioni nel piano che lasciano invariato il punto  $O$ . Il campo vettoriale gravitazionale è anche conservativo e allora il potenziale dipende esclusivamente dalla distanza rispetto al centro  $O$  (si veda Arnol'd, 2004):

$$U = U(r). \quad (1)$$

L'invarianza del campo rispetto alle rotazioni è indice della presenza di una costante del moto: il momento angolare <sup>2</sup>. In generale, il moto di un punto materiale di massa unitaria in un campo centrale è descritto tramite l'equazione:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \Phi(r)\mathbf{e}_r \quad (2)$$

---

<sup>1</sup> Si dimostrerà più avanti che il moto orbitale avviene su di un piano.

<sup>2</sup> Si assume che anche l'energia meccanica del sistema sia conservata.

dove  $\mathbf{r}$  è il raggio vettore con estremo in  $O$ ,  $r$  è la sua norma e  $\mathbf{e}_r$  è il suo versore. Definiamo come momento della quantità di moto (o momento angolare) il prodotto vettoriale:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (3)$$

Si verifica subito che, come anticipato, tale quantità è conservata nel tempo:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (4)$$

e dalla Eq. (2) si vede che l'espressione è nulla. Introducendo delle coordinate polari sul piano caratterizzate dai versori  $\mathbf{e}_r$  e  $\mathbf{e}_\phi$  si possono riscrivere la velocità  $\dot{\mathbf{r}}$  e il momento angolare  $\mathbf{L}$  come:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \quad (5)$$

$$\mathbf{L} = r^2\dot{\phi}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi \quad (6)$$

quindi a conservarsi è la quantità:  $L = r^2\dot{\phi}$ . La costanza del momento angolare è collegata alla seconda legge di Keplero secondo cui il raggio vettore che collega i due primari spazza aree uguali in tempi uguali. Infatti, considerando l'area infinitesima spazzata dal raggio vettore si ottiene una espressione del tipo:

$$C = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \frac{1}{2}L \quad (7)$$

che verifica l'affermazione fatta (Arnol'd, 2004, p.37).

## 1.2 IL PROBLEMA DI KEPLERO

Dal moto centrale è utile ricondursi ad un più familiare moto unidimensionale tramite la definizione del potenziale efficace:

$$V(r) = U(r) + \frac{L^2}{2r^2} \quad (8)$$

e, sostituendo  $U(r) = -k/r$  (potenziale di tipo kepleriano), si ottiene:

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2r^2} \quad (9)$$

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} + V(r). \quad (10)$$

La determinazione delle equazioni del moto avviene tramite quadratura:

$$\dot{r} = \sqrt{2(E - V(r))} \quad (11)$$

$$\phi = \int \frac{L/r^2 dr}{\sqrt{2(E - V(r))}}. \quad (12)$$

Intergrando Eq.(12) e introducendo le seguenti notazioni è possibile pervenire alla cosiddetta equazione focale di una conica<sup>3</sup>:

$$p = \frac{L^2}{k}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2}}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi} \quad (13)$$

dove  $p$  è detto parametro dell'ellisse (o *semilatus rectum*) mentre  $e$  è l'eccentricità. Resta infine da ricavare la terza legge di Keplero:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad a = \frac{k}{2|E|}, \quad b = \frac{L}{\sqrt{2|E|}}$$

$$T = \frac{2\pi ab}{L} = 2\pi a^{3/2} k^{-1/2} \quad (14)$$

L'ultima equazione scritta ci permette di dire che l'energia totale del sistema a due corpi dipende esclusivamente dal semiasse maggiore dell'orbita.

### 1.3 PARAMETRI ORBITALI DELLE ORBITE IN TRE DIMENSIONI

Si riassumono brevemente le definizioni di alcune quantità utili per descrivere l'orbita di un corpo (si faccia riferimento alle Figure (1) e (2)). A partire dalla equazione delle coniche in coordinate polari:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi - \varpi)} \quad (15)$$

<sup>3</sup> Nell'integrazione dell'Eq. (12) compaiono dei termini costanti che sono stati posti essere uguali a zero: tale semplificazione implica che l'angolo  $\phi$  è misurato a partire dalla retta congiungente i fuochi dell'ellisse con il pericentro. Si veda la Fig. (1).

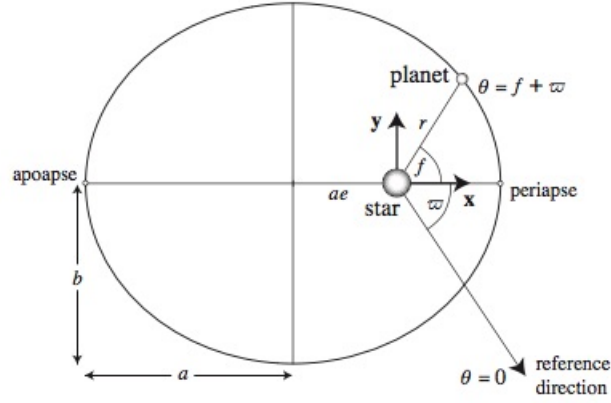


Figura 1: Rappresentazione dell'orbita ellittica e di alcuni parametri dell'orbita (Murray e Correia, 2010).

si definisce *anomalia vera*  $f = \phi - \omega$  dove  $\phi$  è la *longitudine vera* e  $\omega$  è la *longitudine del pericentro*. Definiamo il *moto medio*  $n$  di un pianeta come la quantità:

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (16)$$

che descrive un angolo che avanza uniformemente nel tempo. Utilizzando l'equazione focale e la scomposizione della velocità del corpo in due componenti (una radiale e una tangenziale, si veda Eq.(5)) si può scrivere l'equazione di Keplero:

$$M = E - e \sin E \quad (17)$$

dove con  $M$  si è indicata l'*anomalia media*  $M = n(t - t_0)$  ( $t_0$  è il *tempo del passaggio al pericentro*) mentre  $E$  è la cosiddetta *anomalia eccentrica* derivante dall'equazione (Murray e Dermott, 1999, p.34):

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (18)$$

Inoltre definiamo la *longitudine media* come:

$$\lambda = M + \omega. \quad (19)$$

Si consideri ora il caso generale di un pianeta la cui posizione è descritta tramite due sistemi di riferimento triassiali diversi (centrati però nella stessa origine). Nel primo sistema  $Oe_xe_ye_z$ , in cui i versori  $e_x$  e  $e_y$  descrivono il piano in cui è contenuta l'orbita, la posizione di pianeta è data da:

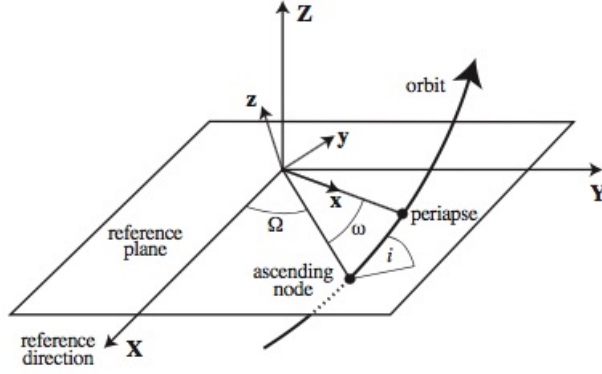


Figura 2: Rappresentazione dell'orbita ellittica e dei suoi elementi orbitali in uno spazio tridimensionale (Murray e Correia, 2010).

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y \quad (20)$$

mentre nel secondo sistema  $Oe_Xe_Ye_Z$  si ha:

$$\mathbf{r}(X, Y, Z) = X\mathbf{e}_X + Y\mathbf{e}_Y + Z\mathbf{e}_Z. \quad (21)$$

Definiamo  $I$  come l'angolo di inclinazione tra i due piani  $xy$  e  $XY$ . La retta che segna l'intersezione tra i due piani è detta linea dei nodi.  $\Omega$  è la *longitudine del nodo ascendente* mentre  $\omega$  è l'*argomento del pericentro* ossia la distanza angolare tra la linea dei nodi e il raggio che collega  $O$  con il pericentro. E' ancora possibile definire una *longitudine del pericentro*:

$$\varpi = \Omega + \omega \quad (22)$$

tenendo presente che i due angoli  $\Omega$  e  $\omega$  giacciono su piani differenti.

#### 1.4 SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

Il potenziale gravitazionale citato nel Paragrafo (1.1) è generato dalla presenza di una massa nell'origine del sistema di riferimento. E' chiaro che, per il terzo principio della dinamica, in un sistema a due corpi entrambi si muoveranno di orbite ellittiche l'uno intorno all'altro. Per questa ragione si è soliti introdurre un sistema di riferimento centrato nel baricentro (Curtis, 2005; Murray e Dermott, 1999). La posizione del centro di massa e la sua accelerazione sono:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (23)$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2}. \quad (24)$$

La seconda espressione è nulla per il principio di azione e reazione e quindi la velocità del centro di massa  $\dot{\mathbf{R}}$  è costante. Riscrivendo  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$  e  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$  si ottiene:

$$m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 = 0 \quad (25)$$

da cui si ricavano le distanze relative rispetto al centro di massa:

$$R_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2} = a_1 \quad (26)$$

$$R_2 = \frac{m_1 r}{m_1 + m_2} = a_2 \quad (27)$$

con  $r = R_1 + R_2$ . La dimensione delle orbite è dovuta esclusivamente alle due masse che formano il sistema. Inoltre il periodo  $T$  di rivoluzione è identico per entrambi i corpi puntiformi che quindi sono caratterizzati dallo stesso moto medio  $n$ .

Il momento angolare totale del sistema risulta essere:

$$L = m_1 R_1^2 \dot{\theta} + m_2 R_2^2 \dot{\theta} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} h \quad (28)$$

mentre l'energia totale del sistema è:

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - G \frac{m_1 m_2}{r} = -G \frac{m_1 m_2}{2a}. \quad (29)$$



Alla base di ogni risultato ottenuto nel capitolo precedente vi era l'ipotesi di masse puntiformi che può essere considerata una buona approssimazione del caso di distanze molto grandi rispetto alla struttura dei due corpi. Volendo studiare la formazione delle maree, tale approssimazione non è più valida e la struttura tridimensionale dei corpi deve essere tenuta in considerazione.

La conseguenza immediata è che diverse zone dello stesso corpo subiranno forze di interazione gravitazionale differenti con il risultato di deformare il corpo stesso (nel caso di corpi non perfettamente rigidi). Le maree planetarie si originano proprio da uno squilibrio tra le forze agenti sul pianeta. Il rigonfiamento mareale che viene a crearsi può essere sfruttato per ricavare informazioni sulla struttura interna del pianeta (o del satellite o della stella). Ma la conseguenza più drammatica dal punto di vista della dinamica dei sistemi planetari è la dissipazione di energia che può portare a cambiamenti significativi della forma dell'orbita e dei periodi di rotazione e rivoluzione.

## 2.1 INTRODUZIONE

Nell'Ottocento e Novecento il problema della teoria mareale è stato affrontato a più riprese da diversi fisici: i primi contributi si devono a G. Darwin (Mardling, 2011) che, nel 1879, delineò il modello a "constant time lag" nel caso di attrito debole e di equilibrio idrostatico. In seguito A. Love si dedicò allo studio della conformazione interna dei corpi da cui dipendono fortemente i modelli mareali.

La letteratura sull'argomento propone due approcci alternativi: quello fluidodinamico di Darwin (Hut, 1981; Mardling, 2011; Zahn, 2008) con espansione in serie di Fourier della perturbazione e quello di P. Goldreich (Goldreich e Soter, 1966; Jackson, Greenberg e Barnes, 2008b; Murray e Dermott, 1999) che prende le mosse da alcune considerazioni sulla teoria del potenziale gravitazionale. La seconda strada segue il modello a "constant lag angle" che costituisce una semplificazione del modello precedente<sup>1</sup>. Nei prossimi capitoli si seguirà l'approccio di Goldreich evidenziandone di volta in volta le assunzioni e i limiti di applicazione.

---

<sup>1</sup> Al termine del Capitolo 3 sarà spiegata la differenza tra i due modelli e le implicazioni per l'applicazione ai dati sperimentali.

## 2.2 CENNI DI TEORIA DEL POTENZIALE GRAVITAZIONALE

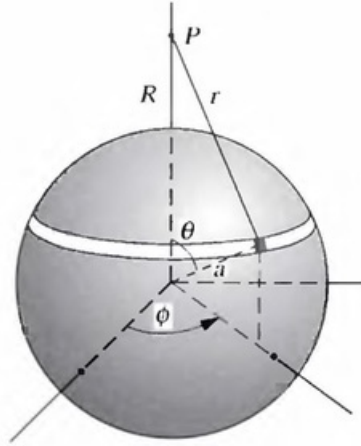


Figura 3: Guscio sferico di massa  $M$  e posizione del punto  $P$  (Blakely, 1995).

Si consideri un guscio sferico di massa  $M$ , raggio  $a$  e densità superficiale di massa  $\sigma(r)$ . Si vuole calcolare il potenziale gravitazionale generato da tale distribuzione di massa sia in un punto  $P$  esterno che all'interno.

**P ESTERNO:** Il potenziale gravitazionale generato dal guscio valutato in un punto  $P$  esterno alla sfera ad una distanza  $R$  dal centro  $O$  è:

$$U(P) = -G \int_S \frac{\sigma(r)}{r} d\Sigma \quad (30)$$

dove  $S$  è la superficie del guscio. Introducendo delle coordinate polari sferiche  $(r, \phi, \theta)$  ed eseguendo l'integrazione (Blakely, 1995) si trova:

$$U(P) = -G \frac{4\pi a^2 \sigma}{R} = -G \frac{M}{R}. \quad (31)$$

Quindi il potenziale gravitazionale di guscio sferico valutato in un punto esterno è equivalente al potenziale generato da una sorgente puntiforme posta nel centro del guscio.

**P INTERNO:** Per un punto  $P$  interno al guscio si ha:

$$U(P) = -G \frac{M}{a} \quad (32)$$

L'espressione in Eq. (32) è indipendente dalle coordinate del punto  $P$  e pertanto si conclude che il potenziale è costante ovunque all'interno del guscio sferico.

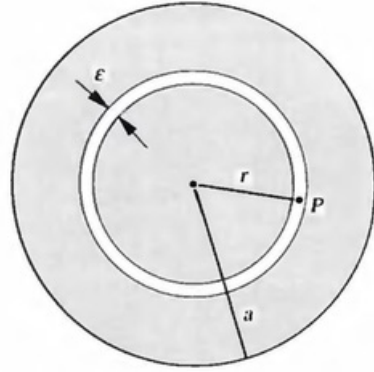


Figura 4: Posizione del punto P all'interni della sfera (Blakely, 1995).

Si consideri ora una sfera di raggio  $a$  e densità  $\rho$  di cui si vuole calcolare il potenziale in un punto P esterno o interno.

**P ESTERNO:** Per  $U_{\text{ext}}(P)$  l'espressione è immediata grazie al principio di sovrapposizione:

$$U_{\text{ext}}(P) = -\frac{4\pi\rho G a^3}{3R} \quad (33)$$

dove  $R$  è la coordinata radiale di P.

**P INTERNO:** Per calcolare  $U_{\text{int}}(P)$  supponiamo che il punto si trovi in un guscio cavo di spessore infinitesimo  $\varepsilon$ . Si possono fare due considerazioni:

- il potenziale generato dalla porzione di sfera con  $r' < r - \varepsilon/2$  si ottiene tramite il principio di sovrapposizione nell'Eq. (31):

$$U_1(P) = -\frac{4\pi\rho G (r - \varepsilon/2)^3}{3r} \quad (34)$$

- il potenziale dovuto alla porzione di sfera con  $r' > r + \varepsilon/2$  si ottiene integrando l'Eq. (32):

$$\begin{aligned} U_2(P) &= -4\pi\rho G \int_{r+\varepsilon/2}^a r' dr' = \\ &= -2\pi\rho G (a^2 - (r + \varepsilon/2)^2) \end{aligned} \quad (35)$$

Sommando i due contributi si ottiene il potenziale in un punto interno della sfera a distanza  $r$  dal centro:

$$U_{\text{int}}(P) = U_1(P) + U_2(P) = -\frac{2}{3}\pi\rho G (3a^2 - r^2) \quad (36)$$

Il potenziale gravitazionale in un punto P può sempre essere descritto tramite l'equazione di Poisson (Blakely, 1995, cap.3):

$$\nabla^2 U(P) = -4\pi G\rho(P) \quad (37)$$

che diventa l'equazione di Laplace nel caso di regioni prive di qualunque distribuzione di massa:

$$\nabla^2 U(P) = 0 \quad (38)$$

Se la funzione U soddisfa anche l'equazione di Eulero:

$$\bar{\nabla} U \cdot \mathbf{x} = nV \quad (39)$$

(ossia è omogenea di grado n) allora U è una funzione *armonica sferica solida* e gode della proprietà di poter essere scomposta in funzioni dipendenti ciascuna da una delle tre coordinate polari sferiche (r,  $\theta$ ,  $\phi$ ). Dunque, riscrivendo l'equazione di Laplace in coordinate sferiche (r,  $\theta$ ,  $\phi$ ) <sup>2</sup>:

$$\nabla^2 U(P) = 0 = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial U}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \quad (40)$$

dove  $\mu = \cos\theta$ , e inserendo la soluzione di prova  $U = r^n S_n(\mu, \phi)$  si ottiene l'equazione di Legendre (Murray e Dermott, 1999):

$$n(n+1)S_n + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial S_n}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 S_n}{\partial \phi^2} = 0 \quad (41)$$

dove la funzione  $S_n$  è definita come funzione *armonica sferica superficiale* di grado n. La soluzione più generale dell'equazione di Legendre è:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) S_n(\mu, \phi). \quad (42)$$

Ai fini della trattazione seguente è possibile operare una semplificazione poiché le deformazioni mareali possiedono una struttura a simmetria assiale. Pertanto, si perde la dipendenza dall'angolo  $\phi$ :

$$n(n+1)P_n(\mu) - 2\mu \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} + (1 - \mu^2) \frac{\partial^2 P_n(\mu)}{\partial \mu^2} = 0 \quad (43)$$

<sup>2</sup> Nella trattazione precedente  $\phi$  è la longitudine mentre ora  $\theta$  è la longitudine

dove  $P_n(\mu)$  sono i polinomi di Legendre descritti dalla formula di Rodrigues (si veda ad esempio Blakely, 1995 per una descrizione più dettagliata):

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(\mu^2 - 1)^n}{d\mu^n}. \quad (44)$$

In Appendice A sono riportati i polinomi di Legendre per  $n = 1, 2, 3$  che torneranno utili in seguito.

### 2.3 FORZA MAREALE E POTENZIALE MAREALE

Il fenomeno della deformazione mareale di un pianeta è da attribuirsi essenzialmente a due fattori: la non completa rigidità del sistema e la non uniformità della forza gravitazionale agente su di esso. Infatti, a causa della loro diversa posizione, diverse parti del pianeta subiranno interazioni gravitazionali più o meno intense.

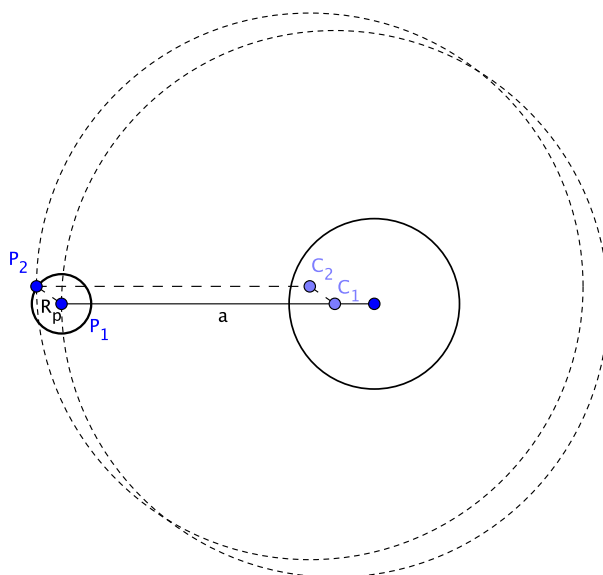


Figura 5: Problema dei due corpi in un sistema di riferimento baricentrico

Questo è ben visibile se si ricorre ad un sistema di riferimento baricentrico corotante per il problema dei due corpi (Par. (1.4)) trascurando il moto di rotazione dei due corpi e considerando solo il caso di orbite circolari. Dalla Fig. (5) si nota che l'orbita di un qualunque punto  $P_2$  interno al pianeta pur essendo traslata rispetto al centro del pianeta, mantiene la stessa forma dell'orbita del centro del pianeta. Di conseguenza la forza gravitazionale attrattiva agente punto  $P_2$  sarà in generale diversa da quella agente su  $P_1$  mentre le forze centrifughe saranno le stesse.

La relazione tra le diverse forze in un punto qualsiasi del pianeta è:

$$\mathbf{F}_{\text{mar}} = \mathbf{F}_{\text{gr}} - \mathbf{F}_{\text{cf}} \quad (45)$$

dove  $\mathbf{F}_{\text{mar}}$  è la forza che origina la deformazione mareale,  $\mathbf{F}_{\text{gr}}$  è la forza di attrazione gravitazionale della stella e  $\mathbf{F}_{\text{cf}}$  è la forza centrifuga che compare considerando un sistema di riferimento bari-centrico corotante.  $\mathbf{F}_{\text{cf}}$  può anche essere interpretata come la forza gravitazionale agente sul centro del pianeta poiché in quel punto  $\mathbf{F}_{\text{cf}} = \mathbf{F}_{\text{gr}}$ .

Il potenziale della forza gravitazionale (il cui centro di attrazione supponiamo essere il punto G in Fig. (6)) agente sul punto P è:

$$U = -G \frac{M}{a} \left[ 1 + \left( \frac{R_p}{a} \right) \cos \psi + \frac{1}{2} \left( \frac{R_p}{a} \right)^2 (3 \cos^2 \psi - 1) \right]^{-1/2} \quad (46)$$

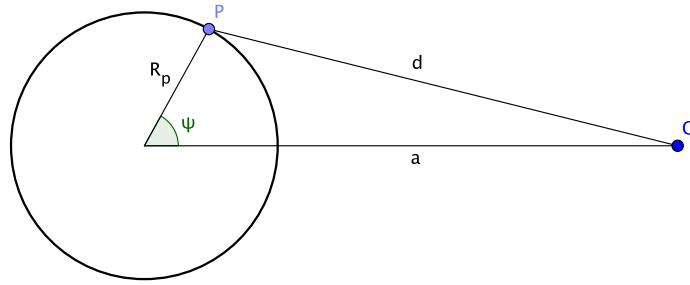


Figura 6: Posizioni reciproche di pianeta e centro della forza gravitazionale

dove si è utilizzata una espansione in serie binomiale troncata al secondo ordine e l'angolo  $\psi$  è misurato in senso antiorario a partire dalla retta congiungente i centri dei due corpi (si veda la definizione dell'anomalia vera al Paragrafo (1.3)). L'espressione risultante può quindi essere riassunta come la somma di tre potenziali  $U = U_1 + U_2 + U_3$  ognuno con un preciso significato:

1.  $U_1 = -GM/a$  è una quantità costante che pertanto può essere trascurata (formalmente si ridefinisce il livello zero del potenziale).
2.  $U_2 = -G(M/a^2)R_p \cos \psi$  ha lo stesso ruolo del potenziale kepleriano in Eq. (9). Infatti sostituendo  $\chi = R_p \cos \psi$  si ottiene:

$$U_2 = -G(M/a^2)\chi$$

e, calcolando la forza a cui da origine:

$$-\frac{\partial U_2}{\partial x} = G \frac{M}{a^2}.$$

che equivale a:

$$-\frac{\partial U_2}{\partial(R_p \cos \phi)} = G \frac{M}{a^2}. \quad (47)$$

che ha la stessa forma della forza gravitazionale.  $U_2$  è quindi il potenziale centrale che caratterizza il moto di  $P_2$  (e quindi di un qualunque punto interno a pianeta) attorno a  $C_2$  visto che  $a$  è proprio la distanza che separa i due punti. La forza generata dalla componente  $U_2$  è pari alla forza gravitazionale nel centro del pianeta e questa è pari alla forza centrifuga agente su ogni punto (in base alla Eq. (45)):  $F_{U_2} = F_{gr,P_1} = F_{cf}$ .

3.  $U_3 = -G(M/a^2)R_p^2 P_2(\cos \psi)$  è la componente di potenziale che da origine al rigonfiamento mareale. Calcolando la forza generata dal potenziale gravitazionale in Eq. (46) si ottiene:

$$\mathbf{F}_{gr} = -\nabla U = -\nabla U_1 - \nabla U_2 - \nabla U_3.$$

Il primo termine è nullo in quanto  $U_1$  è costante, il secondo termine è stato calcolato in Eq. (47) e quindi vale la relazione:

$$\frac{\mathbf{F}_{mar}}{m_p} = \frac{\mathbf{F}_{gr}}{m_p} - \frac{\mathbf{F}_{cf}}{m_p} = -\nabla U - \frac{\mathbf{F}_{cf}}{m_p} \approx -\nabla U_3. \quad (48)$$

dove l'approssimazione vale in quanto è stato effettuato uno sviluppo in serie. L'Equazione (48) giustifica quanto detto in precedenza riguardo al ruolo di  $U_3$  come potenziale mareale. Tramite i polinomi di Legendre  $U_3$  assume la forma:

$$U_3 = -G \left( \frac{M}{a^2} \right) R_p^2 P_2(\cos \psi) = -\zeta g P_2(\cos \psi) \quad (49)$$

con:

$$\zeta = \frac{MR_p^4}{m_p a} g = \frac{Gm_p}{R_p^2}$$

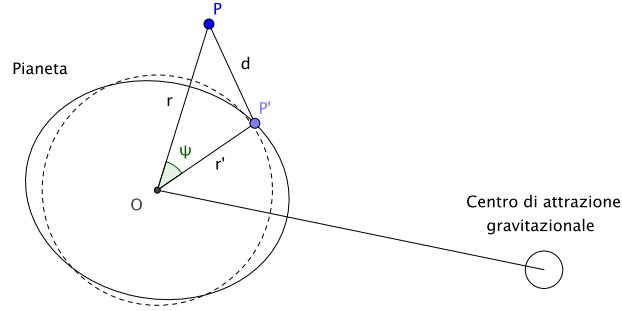


Figura 7: Rappresentazione schematica della deformazione mareale

Il modello utilizzato è estremamente semplificato: si suppone che il pianeta sia composto da un fluido con densità nulla che si redistribuisce nello spazio seguendo le superfici equipotenziali del potenziale gravitazionale generato da due masse puntiformi poste nei centri dei due corpi sferici. Se il pianeta subisce deformazione mareale allora il potenziale gravitazionale può essere riscritto considerando la struttura del pianeta in Fig. (7):

$$U_{\text{tot}}(r, \psi) = -G \frac{m_p}{C} + g_p h(\psi) - \zeta g P_2(\cos \psi)$$

con  $C$  raggio del pianeta non perturbato,  $g_p$  accelerazione di gravità sulla superficie e  $h(\psi)$  altezza della marea rispetto alla superficie sferica. In ogni superficie equipotenziale  $U_{\text{tot}} = \text{cost}$  e necessariamente  $h(\psi) = \zeta g P_2(\cos \psi) + c$  con  $c$  una costante. Di conseguenza le superfici equipotenziali saranno descritte da una funzione tipo:

$$R(\theta) = C[1 + \varepsilon P_2(\cos \theta)]. \quad (50)$$

con  $\varepsilon \ll 1$  e  $C$  raggio medio. La quantità grande come  $\varepsilon$  tra parentesi rappresenta la deviazione della superficie del pianeta rispetto alla forma sferica (si osservi la Figura (7)). Per calcolare il potenziale gravitazionale in un punto qualsiasi dello spazio è necessario tenere conto dei due contributi che lo compongono (Eq. (48)): una parte dovuta alla distribuzione sferica di massa e una dovuta alla distribuzione non sferica di massa (è questo potenziale che dà origine alla deformazione mareale). Lo spessore di tale strato è dato da  $C\varepsilon P_2(\cos \theta)$  e quindi l'elemento di volume al punto  $P'$  è  $dV = C^3 \varepsilon P_2(\cos \theta) d\mu d\phi$ .



Si riporta senza dimostrazione la relazione (Murray e Dermott, 1999):

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} S_n(\mu, \phi) P_n(\cos \psi) d\mu d\phi = \frac{4\pi}{2n+1} S_n(\mu, \phi) \quad (51)$$

che sarà utilizzata nel seguito.

Si divide la trattazione a seconda che  $r < C$  o  $r > C$ .

PER  $r < C$ : Si calcola il reciproco della distanza  $d$  che separa i punti  $P$  e  $P'$  in Fig. (7):

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{C} \left[ 1 + \left( \frac{r}{C} \right)^2 - 2\mu \left( \frac{r}{C} \right) \right]^{-1/2}. \quad (52)$$

Tramite una espansione binomiale e l'utilizzo della formula di Rodrigues (Eq (44)) si può riscrivere l'Eq.(52) come:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{C} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{C} \right)^n P_n(\cos \psi) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (53)$$

Quindi il potenziale dovuto alla distribuzione non sferica di massa è:

$$\begin{aligned} U_{ns, int} &= -G\rho \int \frac{dV}{d} = \\ &= -G\rho C^2 \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{C} \right)^n \iint P_n(\cos \psi) P_2(\mu) d\mu d\phi. \end{aligned} \quad (54)$$

Che può essere riscritta tramite Eq. (51) come:

$$U_{ns, int} = -\frac{4}{5} \pi G \rho r^2 \varepsilon P_2(\cos \theta) \quad (55)$$

e il potenziale totale assume la forma:

$$U_{int}(r, \theta) = -\frac{4}{3} \pi G \rho C^3 \left[ \frac{3C^2 - r^2}{2C^3} + \frac{3r^2}{5C^3} \varepsilon P_2(\cos \theta) \right]. \quad (56)$$

PER  $r > C$ : Seguendo lo stesso procedimento utilizzato per  $U_{int}$  si ottengono le espressioni:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{C}\right)^n P_n(\cos \psi) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (57)$$

$$U_{\text{ext}}(r, \theta) = -\frac{4}{3}\pi G \rho C^3 \left[ \frac{1}{r} + \frac{3C^2}{5r^3} \varepsilon P_2(\cos \theta) \right]. \quad (58)$$

Le Equazioni (56) e (58) descrivono il potenziale generato dalla distribuzione non sferica di massa per punti all'interno del corpo o all'esterno di esso. Queste informazioni sono essenziali per lo studio degli effetti delle maree sull'orbita planetaria.

#### 2.4 DEFORMAZIONE DI UN CORPO A SIMMETRIA SFERICA

Nel Paragrafo (2.3) è stata ricavata una espressione approssimata per il potenziale  $U$  tenendo conto di tre componenti distinte. In particolare, dall'Eq. (49) si è ricavato che le superfici equipotenziali devono essere caratterizzate da una struttura tipo:

$$h(\psi) = \zeta P_2(\cos \psi). \quad (59)$$

Di conseguenza anche la struttura superficiale del pianeta stesso può essere descritta tramite i polinomi di Legendre. La soluzione trovata nel paragrafo precedente è limitata al caso di un pianeta con densità nulla, con composizione e stratificazione uniforme e perturbato da una sorgente di potenziale gravitazionale posta a grande distanza. Inoltre non è stata fatta alcuna assunzione sul tempo necessario al pianeta per adattare la propria struttura alla deformazione. Per raffinare il modello occorre tenere conto questi fattori. Per semplicità si suddividerà il pianeta in due regioni di cui una centrale e più densa e una esterna e meno densa che per semplicità chiameremo rispettivamente "core" e "oceano"<sup>3</sup>. I polinomi di Legendre di secondo ordine sono ancora delle buone rappresentazioni della struttura superficiale di oceano e core:

$$R_{sc}(\psi) = A[1 + S_2 P_2(\cos \psi)] \quad (60)$$

$$R_{so}(\psi) = A[1 + T_2 P_2(\cos \psi)] \quad (61)$$

<sup>3</sup> La dicitura "oceano" deriva dal problema storico di determinare con precisione gli istanti di alta e bassa marea sulla Terra. I parametri che descrivono i due strati resteranno liberi e pertanto potranno essere modificati per adattarsi allo studio di pianeti extrasolari non necessariamente ricoperti da un oceano liquido.

dove i pedici "sc" e "so" stanno per "superficie core" e "superficie oceano", mentre  $S_2$  e  $T_2$  sono delle costanti da determinare.  $A$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  sono definiti come il raggio, la densità e la rigidità del core mentre  $B$  e  $\sigma$  sono il raggio e la densità dell'oceano. Osservando le relazioni in Eq. (60) e (61) si nota che l'ampiezza dell'onda di marea dipende sia dal raggio scelto per le due componenti (ossia i valori di  $A$  e  $B$ ) che dalle costanti  $S_2$  e  $T_2$ . E' naturale quindi procedere cercando di determinare le espressioni per queste costanti.

Il potenziale gravitazionale valutato all'interno dell'oceano è dato dalla somma di tre termini: il potenziale mareale  $U_3$  generato dalla forza di gravità esterna al pianeta; il potenziale  $U_{\text{int}}$  dovuto alla distribuzione di massa dell'oceano e il potenziale  $U_{\text{ext}}$  dovuto al core. In totale si ottiene:

$$U_o(r, \psi) = U_3(r, \psi) + U_{o,\text{int}}(r, \psi) + U_{c,\text{ext}}(r, \psi) \quad (62)$$

con:

$$\begin{aligned} U_3(r, \psi) &= -\zeta g \left(\frac{r}{B}\right)^2 P_2(\cos \psi) \\ U_{o,\text{int}}(r, \psi) &= -\frac{4}{3} \pi G \sigma B^3 \left[ \frac{3B^2 - r^2}{2B^3} + \frac{3r^2}{5B^3} T_2 P_2(\cos \psi) \right] \\ U_{c,\text{ext}}(r, \psi) &= -\frac{4}{3} \pi G (\rho - \sigma) A^3 \left[ \frac{1}{r} + \frac{3A^2}{5r^3} S_2 P_2(\cos \psi) \right] \end{aligned}$$

E' possibile quindi sostituire l'espressione per il profilo della superficie (Eq. (61)) in Eq. (62). Tramite alcune manipolazioni algebriche, uno sviluppo al secondo ordine e ignorando i termini non dipendenti da  $\psi$ <sup>4</sup> si ottiene l'espressione seguente dove il potenziale della superficie equipotenziale che rappresenta la superficie dell'oceano è supposto essere nullo:

$$\frac{\zeta_c}{A} = \left[ \frac{2\sigma}{5\rho} + \left(\frac{A}{B}\right)^3 \left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right) \right] T_2 - \frac{3}{5} \left(\frac{A}{B}\right)^5 \left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right) S_2 \quad (63)$$

dove:

$$\zeta_c = \frac{MA^4}{m_c a^3} \quad (64)$$

$$g_c = \frac{Gm_c}{A^2} \quad (65)$$

4 I termini che non dipendono da  $\psi$  danno origine a forze di tipo compressivo che per materiali solidi e liquidi non comportano cambiamenti nella struttura, si veda Murray e Dermott, 1999

L'Equazione (63) fornisce una prima relazione tra i coefficienti  $S_2$  e  $T_2$ . Una seconda relazione per definire univocamente i due coefficienti si trova calcolando il potenziale gravitazionale all'interno del core:

$$U_c(r, \psi) = U_3(r, \psi) + U_{o,int}(r, \psi) + U_{c,int}(r, \psi) \quad (66)$$

con:

$$\begin{aligned} U_3(r, \psi) &= -\zeta_c g_c \left(\frac{r}{A}\right)^2 P_2(\cos \psi) \\ U_{o,int}(r, \psi) &= -\frac{4}{3} \pi G \sigma B^3 \left[ \frac{3B^2 - r^2}{2B^3} + \frac{3r^2}{5B^3} T_2 P_2(\cos \psi) \right] \\ U_{c,int}(r, \psi) &= -\frac{4}{3} \pi G (\rho - \sigma) A^3 \left[ \frac{3A^2 - r^2}{2A^3} + \frac{3r^2}{5A^3} S_2 P_2(\cos \psi) \right] \end{aligned}$$

Procedendo ora come per Eq. (63) si ottiene:

$$S_2 = \frac{1}{\tilde{\mu}} \left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right) \left(\frac{5\zeta_c}{2A} + \frac{3\sigma}{2\rho} (T_2 - S_2) - S_2\right) \quad (67)$$

con  $\tilde{\mu}$  definita come *rigidità effettiva*:

$$\tilde{\mu} = \frac{19\mu}{2\rho g_c A}.$$

Nel caso semplificato di un pianeta composto da un unico materiale,  $\sigma = \rho$  e la deformazione del core è nulla ( $S_2 = 0$ ). Invece, nel caso di un pianeta privo di oceano superficiale  $\sigma = 0$  e:

$$AS_2 = \frac{(5/2)\zeta_c}{1 + \tilde{\mu}}. \quad (68)$$

dove si è assunto che  $A = B$ ,  $\zeta_c = \zeta$  e  $\rho = \bar{\rho}$ . Nel caso generale si possono scrivere  $S_2$  e  $T_2$  come:

$$AS_2 = F \frac{(5/2)\zeta_c}{1 + \tilde{\mu}} \quad (69)$$

$$BT_2 = H(5/2)\zeta_c \quad (70)$$

dove  $F$  è una quantità adimensionale che misura l'effetto dell'oceano sull'ampiezza totale della marea mentre  $H$  misura la dipendenza della forma esterna del pianeta dalla struttura interna. Risolvendo le Eq. (63) e (68) tramite Eq. (69) e (70) si ottengono le espressioni complete per  $F$  e  $H$  (Murray e Dermott, 1999). Nella trattazione successiva saranno sufficienti le considerazioni riguardo il caso  $\sigma = 0$  data la scarsa conoscenza della struttura interna (per un approfondimento del problema si veda Kramm et al., 2012).

## MOMENTO MAREALE

Fino ad ora la trattazione si è limitata a descrivere il potenziale generato da una distribuzione non sferica di materia originata dall'interazione mareale. La funzione che rappresenta la superficie del pianeta può essere dedotta a partire dallo studio delle superfici equipotenziali e, in generale, assume la forma dell'Eq. (59). Ora è possibile studiare l'effetto di questa deformazione sull'orbita del pianeta, confrontando tra di loro la velocità di rotazione  $\Omega$  e il moto medio  $n$ <sup>1</sup> tenendo in considerazione il tempo necessario affinché il pianeta cambi la propria forma. Infatti, la risposta del pianeta alla perturbazione non è immediata e il ritardo (*tidal lag*) mostrato in Figura (8) genera un momento agente sul pianeta stesso. La situazione è del tutto analoga a quella dell'oscillatore armonico forzato.

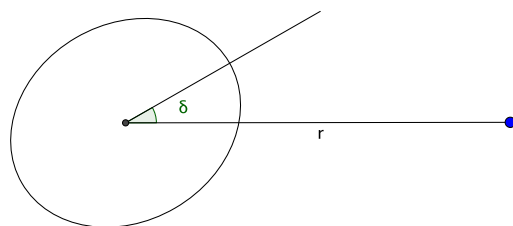


Figura 8: Ritardo della marea rispetto alla retta congiungente i centri di attrazione gravitazionale.

## 3.1 OSCILLATORE ARMONICO FORZATO

L'equazione fondamentale del moto dell'oscillatore armonico forzato è (Richard P. Feynman, 1963):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m} \cos(\omega t). \quad (71)$$

<sup>1</sup> Per il presente paragrafo si supporrà che le orbite siano circolari e quindi il moto medio coincide con la velocità angolare di rivoluzione del pianeta.

Sostituendo la soluzione di prova  $x = A \cos(\omega t + \delta)$  si trova l'espressione per l'angolo  $\delta$ :

$$\sin \delta = -(\omega/\tau)[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{-1/2} \quad (72)$$

$$A = (F_0/m)[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{-1/2}. \quad (73)$$

L'Equazione (72) fornisce delle chiare indicazioni sul funzionamento dell'oscillatore armonico forzato:  $\sin \delta$  è sempre una quantità negativa dunque  $-\pi < \delta < 0$  e quindi, osservando la struttura della soluzione di prova, la risposta del sistema è sempre in ritardo di una quantità  $\delta$  rispetto all'azione della forza  $F_0$ . È possibile riscrivere l'Eq. (72) come:

$$\sin \delta = -\frac{1}{Q} \quad (74)$$

dove la funzione di dissipazione specifica  $Q$  è data dall'espressione (Goldreich e Soter, 1966):

$$Q = \frac{2\pi E_0}{\Delta E} = \left( \frac{1}{2\pi E_0} \int -\dot{E} dt \right)^{-1} \quad (75)$$

con  $\Delta E$  energia dissipata in un ciclo e  $E_0$  energia massima posseduta dall'oscillatore in un ciclo. Infatti, l'energia massima che può essere immagazzinata in un ciclo è:

$$E_0 = \int_0^A kx dx = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2.$$

L'energia dissipata in un ciclo si ottiene considerando il lavoro infinitesimo della forza di smorzamento viscoso: questo è  $\dot{x}(m/\tau)dx$  per cui  $\dot{E} = -(m/\tau)\dot{x}^2$ . Derivando la soluzione di prova si calcola la dissipazione media di energia:  $\dot{E} = (1/2)(m/\tau)(A\omega)^2$ . Quindi l'energia dissipata in un ciclo è:

$$\Delta E = \dot{E} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi m}{\omega \tau} (A\omega)^2$$

Inserendo le espressioni per  $E_0$  e  $\Delta E$  nell'Equazione (72) si ottiene l'Eq. (74) tenendo conto della definizione di  $Q$  in Eq. (75).

Similmente a quanto accade per il modello dell'oscillatore armonico forzato, l'asse di simmetria della distorsione mareale su di un pianeta è sfasato di una quantità  $\delta$  rispetto alla linea congiungente i due centri di attrazione gravitazionale, a seconda che la velocità angolare di rivoluzione sia superiore o inferiore a quella di rotazione.

L'Espressione (75) è la caratteristica fondamentale del modello a ritardo angolare costante (*constant lag angle*):  $Q$  dipende dalla struttura del pianeta ma non dipende direttamente dal tempo. E' chiaro come questa assunzione sia una forte approssimazione: come sarà chiarito in seguito, le interazioni mareali cambiano fortemente l'orbita del pianeta e pertanto c'è da attendersi che  $Q$  dipenda almeno dal moto medio  $n$ . Goldreich e Soter, 1966, a fronte di alcuni esperimenti di laboratorio su diversi materiali, affermano che tale dipendenza è trascurabile per basse frequenze di perturbazione, condizione che si verifica nei sistemi planetari.

Al contrario, il modello "constant time lag" suppone che  $Q$  sia della forma (Mardling, 2011):

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{2}n\tau$$

dove la dipendenza dalla struttura interna è riassunta nel parametro  $\tau$  che rappresenta la distanza temporale tra l'asse di simmetria della marea e la retta congiungente i centri dei due corpi.

### 3.2 EVOLUZIONE DEL SEMIASSE MAGGIORE DELL'ORBITA

Si consideri il sistema rappresentato in Figura (8) dove si suppone che il momento angolare orbitale e quello di spin del pianeta siano paralleli (o antiparalleli). Allora, momento  $\Gamma$ , che supponiamo essere esercitato dal pianeta deformato sulla stella, è:

$$\Gamma \mathbf{e}_\Gamma = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (76)$$

con  $\mathbf{F} = M\nabla U_{\text{ext}}$ . L'unica componente rilevante del potenziale  $U_{\text{ext}}$  è quella non centrale <sup>2</sup> e l'unica componente della forza gravitazionale che genera un momento è quella perpendicolare alla linea che collega i centri dei due corpi. Si ottiene:

$$\Gamma = -M \frac{\partial U_{\text{nc,ext}}}{\partial \psi}. \quad (77)$$

Trattandosi di un sistema isolato, sul pianeta agisce un momento uguale e contrario a  $\Gamma \mathbf{e}_\Gamma$ . L'energia meccanica totale del sistema è

<sup>2</sup> Infatti due distribuzioni sferiche di massa non possono esercitare momenti gravitazionali l'una sull'altra

data dalla somma di due termini: l'energia rotazionale del pianeta e l'energia potenziale gravitazionale dei due corpi (si utilizza come sistema di riferimento il sistema del centro di massa):

$$E = \frac{1}{2} I \Omega^2 - G \frac{m_p M}{2a}. \quad (78)$$

Il momento angolare totale è invece:

$$L = I \Omega + \frac{m_p M}{m_p + M} a^2 n \quad (79)$$

dove  $I$  è il momento di inerzia del pianeta.

Mentre nel problema a due corpi con masse puntiformi l'energia meccanica è una costante del moto, nel caso in cui siano presenti deformazioni mareali questo non è più vero: l'unica costante del moto è il momento angolare totale mentre l'energia tende a decrescere (Zahn, 2008). La marea planetaria agisce come un termine di frizione e pertanto disperde energia sotto forma di calore<sup>3</sup>. La derivata temporale di  $L$  fornisce la relazione:

$$I \dot{\Omega} = -\frac{1}{2} \frac{m_p M}{m_p + M} n a \dot{a} \quad (80)$$

La variazione di energia nel tempo è, utilizzando la terza legge di Keplero in Eq. (14) e l'Eq. (80):

$$\dot{E} = I \Omega \dot{\Omega} + \frac{1}{2} \frac{m_p M}{m_p + M} n^2 a \dot{a} = -\frac{1}{2} \frac{m_p M}{m_p + M} n a \dot{a} (\Omega - n). \quad (81)$$

Si ha quindi (ricordando che  $\dot{E} < 0$ ):

$$\text{sign}(\dot{a}) = -\text{sign}(\dot{\Omega}) = \text{sign}(\Omega - n). \quad (82)$$

A seconda della differenza tra la velocità angolare di rotazione del pianeta e il suo moto medio si possono avere tre casi possibili:

- Per  $\Omega > n$  il bulge mareale è in anticipo rispetto alla linea congiungente i centri dei corpi. Il semiasse maggiore dell'orbita  $a$  cresce mentre, dall'Eq. (82), la velocità di rotazione  $\Omega$  decresce (*tidal despinning*). L'effetto è quello di un trasferimento di energia dalla componente rotazionale a quella orbitale. Infatti si può scrivere la variazione temporale di energia come:

<sup>3</sup> Si veda ad esempio il caso del satellite gioviano Io la cui attività vulcanica è spiegata tramite il fenomeno del "tidal heating" (Murray e Dermott, 1999).



$$\dot{E} = -\Gamma(\Omega - n). \quad (83)$$

Il sistema Terra-Luna presenta una configurazione di questo tipo: considerando la Luna come il centro della forza gravitazionale (in precedenza questa era centrata sulla stella) è possibile spiegare l'allungamento del giorno terrestre e il progressivo allontanamento del satellite (Correia e Laskar, 2010; Goldreich e Soter, 1966)

- Per  $\Omega < n$  il bulge mareale ritarda rispetto alla congiungente dei due centri. Di conseguenza, osservando le Equazioni (80) e (81), si deduce che la velocità di rotazione tende ad aumentare mentre il sistema perde parte dell'energia orbitale con il conseguente restringimento dell'orbita ( $\dot{a} < 0$ ). Vale infatti la relazione:

$$\dot{E} = \Gamma(\Omega - n). \quad (84)$$

Questo è ad esempio il caso del satellite Phobos che si sta avvicinando sempre più al pianeta Marte con un moto spiraleggiante (Murray e Dermott, 1999).

- Per  $\Omega = n$  si ha una configurazione di rotazione sincrona con la conseguente conservazione dell'energia meccanica e i parametri orbitali non evolvono nel tempo. Questo caso è piuttosto comune nel sistema solare soprattutto per i satelliti di Giove e Saturno.

Se il potenziale di deformazione mareale è dato da:

$$U_3(\psi) = -\zeta g P_2(\cos \psi) \quad (85)$$

allora, utilizzando la parte non sferica del potenziale in Eq. (58) si ottiene:

$$U_{ns,ext} = -\frac{3}{5} C_\varepsilon g \left(\frac{C}{r}\right)^3 P_2(\cos \psi) \quad (86)$$

dove l'ampiezza dell'onda può essere ottenuta tramite l'Eq. (69):

$$C_\varepsilon = \frac{(5/2)\zeta}{1 + \tilde{\mu}} = h_2 \zeta \quad (87)$$

e il potenziale assume la forma:

$$U_{ns,ext} = -k_2 \zeta g \left( \frac{C}{r} \right)^3 P_2(\cos \psi) \quad (88)$$

dove i coefficienti  $k_2$  e  $h_2$  (detti numeri di Love) furono introdotti da A. Love per raggruppare in due termini la dipendenza del potenziale dalla struttura interna del pianeta che, nella maggior parte delle applicazioni pratiche, rimane incognita. Per un corpo solido omogeneo i numeri di Love sono dati da:

$$h_2 = \frac{5/2}{1 + \tilde{\mu}} \quad (89)$$

$$k_2 = \frac{3/2}{1 + \tilde{\mu}} \quad (90)$$

Nel caso di un corpo caratterizzato da una superficie esterna che sia equipotenziale si utilizzano le espressioni in Eq. (58) e in Eq. (88) per determinare la forma di  $k_2$ :

$$k_2 = \frac{c\varepsilon}{\zeta} - 1. \quad (91)$$

L'espressione completa per il momento agente sul pianeta è:

$$\Gamma = \frac{3}{2} k_2 \frac{GM^2}{a^6} C^2 \sin(2\varepsilon) \quad (92)$$

dove  $\varepsilon$  è l'angolo tra l'asse di simmetria del bulge mareale e la linea congiungente i centri dei due corpi. Riscriviamo ora la variazione del semiasse maggiore dell'orbita e della velocità di rotazione tramite le Eq. (81-83-84):

$$\dot{a} = \text{sign}(\Omega - n) \frac{3k_2 M}{Q m_p} \left( \frac{C}{a} \right)^5 n a \quad (93)$$

$$\dot{\Omega} = \text{sign}(\Omega - n) \frac{3k_2 M}{2\alpha Q m_p (m_p + M)} \left( \frac{C}{a} \right)^3 n^2. \quad (94)$$

Per il momento di inerzia si è utilizzata l'espressione generica  $I = \alpha m_p C^2$  in modo da riunire nel parametro  $\alpha$  la dipendenza dalla distribuzione di massa.

### 3.3 EVOLUZIONE DELL'ECCENTRICITÀ DELL'ORBITA

Supponiamo che il sistema stella-pianeta sia in una condizione di orbita sincrona: le equazioni trovate fino ad ora mostrano che in tale

configurazione non si ha alcun tipo di evoluzione dei parametri orbitali. In realtà si è assunto in principio che le orbite dei due corpi fossero di tipo circolare attorno al centro di massa, condizione questa che si verifica solo in casi particolari. Pertanto un pianeta in rotazione sincrona su di una orbita ellittica sarà interessato da un secondo fenomeno di evoluzione dinamica: la diminuzione dell'eccentricità  $e$ .

Il momento orbitale totale e l'energia meccanica del sistema composto da stella e pianeta possono essere scritti come:

$$L = \alpha M C^2 n + \frac{m_p M}{m_p + M} a^2 n (1 - e^2)^{1/2} \quad (95)$$

$$E = -G \frac{m_p M}{2a} \quad (96)$$

dove si è assunto che l'energia del sistema sia essenzialmente l'energia del problema dei due corpi con masse puntiformi. Se  $a^2 \gg C^2$  allora anche la componente del momento angolare dovuta alla rotazione del pianeta è trascurabile e:

$$e^2 = 1 + \frac{2EL_{\text{orb}}^2}{G^2} \frac{M + m_p}{(m_p M)^3} \quad (97)$$

da cui si calcola la derivata temporale dell'eccentricità è:

$$\dot{e} = -\frac{\dot{E}}{2eE} (1 - e^2) \approx -\frac{\dot{E}}{2eE}. \quad (98)$$

L'ultima espressione afferma chiaramente che, essendo  $\dot{E} < 0$ , l'evoluzione dell'eccentricità è sempre unidirezionale e tende al raggiungimento della configurazione più stabile con  $e = 0$ . Anche il fenomeno della variazione di eccentricità dipende dall'efficienza con cui l'energia del sistema viene dissipata e questa dipende a sua volta dai numeri di Love e dalla funzione di dissipazione  $Q$ . La conoscenza (o stima) di queste quantità influisce in maniera sensibilissima sull'evoluzione temporale dei modelli (Damiani, 2015; Goldreich e Soter, 1966).



## Parte II

### APPLICAZIONE DELLA TEORIA ALLE EVIDENZE SPERIMENTALI

Una volta compreso il funzionamento del meccanismo delle maree, è possibile applicare le equazioni ricavate nell'ultimo capitolo per valutare l'evoluzione temporale dei sistemi planetari. L'obiettivo è quello di spiegare tramite l'interazione mareale tre problematiche legate alle caratteristiche dei pianeti extrasolari: l'assenza di pianeti estremamente vicini alla stella, l'asimmetria della distribuzione delle eccentricità a diversi valori del semiasse maggiore dell'orbita e l'abbondanza di *inflated hot Jupiters* ossia di pianeti di tipo gioviano con un raggio insolitamente grande. Saranno discussi con particolare attenzione alcuni casi emblematici.



## EVIDENZE OSSERVATIVE

A seguito della scoperta confermata del primo esopianeta nel 1995, lo studio degli effetti mareali sui corpi solidi acquistò vigore. La teoria elaborata da G. Darwin per lungo tempo era stata applicata limitatamente al caso del sistema Terra-Luna e di alcuni satelliti di Giove e Saturno. La continua scoperta di nuovi sistemi planetari extrasolari ha posto molti problemi sulla loro origine ed evoluzione. Le apparenti contraddizioni nei dati osservativi possono essere spiegate con efficacia tramite uno schema di evoluzione planetaria che tenga in particolare considerazione la formazione di maree sui pianeti e sulla stella. Dopo aver presentato alcuni dati osservativi, si procederà con la loro interpretazione sottolineando le differenze tra pianeti gassosi e pianeti rocciosi di grandi dimensioni (tipo *superearths*).

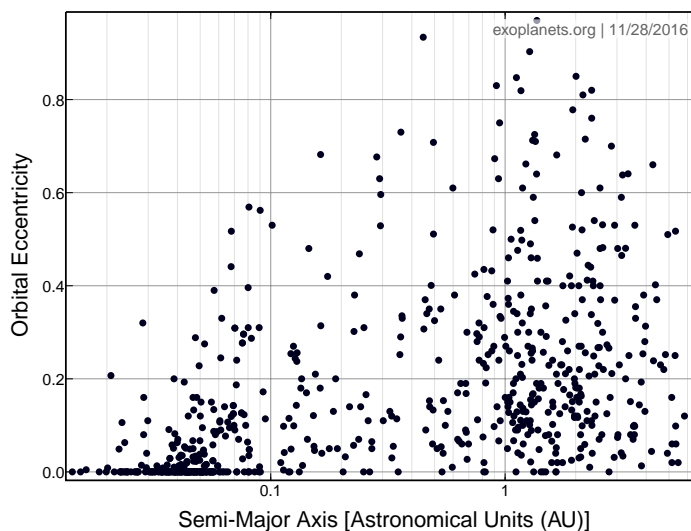


Figura 9: Grafico semiasse maggiore vs. eccentricità per i pianeti individuati con il metodo delle velocità radiali (grafico ottenuto tramite <http://exoplanets.org>).

#### 4.1 DISTRIBUZIONE DELLE ECCENTRICITÀ

Il campione di esopianeti a cui si farà riferimento in questo paragrafo è composto da tutti i pianeti extrasolari riconosciuti dall' Extrasolar Planets Encyclopaedia <sup>1</sup> scoperti tramite il metodo delle velocità radiali (RV). Questa scelta è dovuta a due fattori principali: il metodo RV presenta un basso effetto di selezione e permette, in presenza

<sup>1</sup> <http://exoplanets.eu>

di un campione sufficientemente ampio di pianeti, di risolvere statisticamente il problema della non conoscenza della massa esatta del pianeta (per una discussione più approfondita si veda (Barnes, 2010, cap.12)).

La Figura (9) riporta i dati dei pianeti nel campione scelto selezionando in particolare i pianeti tipo HJ. Si nota che la distribuzione delle eccentricità segue due profili diversi:

- Per  $a < 0.2\text{AU}$  la distribuzione è caratterizzata da molti pianeti con eccentricità molto piccole (in generale  $e < 0.2$ );
- Per  $a > 0.2\text{AU}$  la distribuzione delle eccentricità è più uniforme con una media intorno a  $e \approx 0.3$  (Jackson, Greenberg e Barnes, 2008a,b).

#### 4.2 DISTRIBUZIONE DEI SEMIASSI MAGGIORI

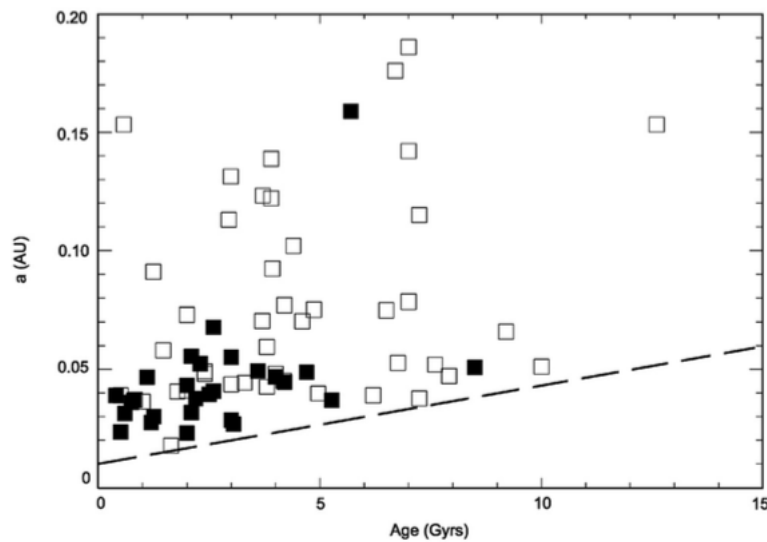


Figura 10: Grafico semiasse maggiore vs. età per il campione di 70 pianeti studiato da Jackson, Barnes e Greenberg, 2009. I quadrati neri rappresentano i pianeti transitanti. La linea tratteggiata rappresenta il limite di cut-off plausibile.

Nel campione di 70 pianeti analizzato da Jackson, Barnes e Greenberg, 2009 (Figura (10)) non vi sono esopianeti con semiasse maggiore inferiore a  $0.017\text{AU}$ . Inoltre è ben visibile il cosiddetto "three-day pile up" corrispondente all'accumulo di pianeti con periodo orbitale di circa 3 giorni e  $a = 0.05\text{AU}$ . Considerando che uno dei maggiori meccanismi per la migrazione planetaria è l'iterazione dei pianeti con il disco di polveri, sembrerebbe che tale migrazione conduca ad un deposito di pianeti nella zona intorno a  $0.05\text{AU}$ .



## 4.3 RAGGI PLANETARI

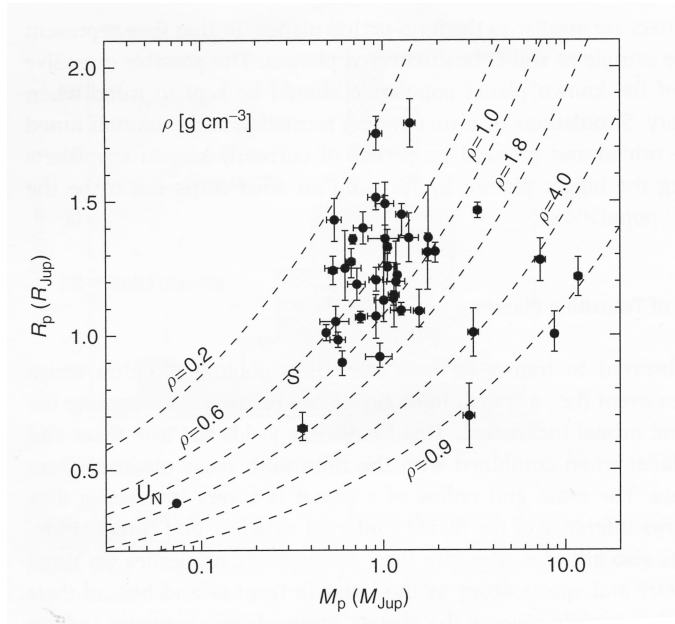


Figura 11: Grafico massa vs. raggio per il campione di pianeti studiato in Barnes, 2010 con relative barre di errore. Con i punti J, S, N, U si indicano le posizioni nel grafico di Giove, Saturno, Nettuno e Urano.

La Figura (11) presenta il campione di pianeti preso in considerazione da Barnes, 2010 nel piano  $R_p$ - $M_p$ . Nonostante i modelli di struttura planetaria siano sufficienti a descrivere la struttura interna di un buon numero di pianeti, gli esopianeti di tipo HJ con densità medie particolarmente basse sono difficilmente spiegabili teoricamente. Si tratta dei cosiddetti "inflated hot Jupiters" il cui prototipo è HD 209458 b.



## INTERPRETAZIONE DEI DATI OSSERVATIVI

## 5.1 EVOLUZIONE DEI PARAMETRI ORBITALI

Si riportano di seguito le Equazioni (82) e (83) nella versione di Barnes, 2010 che tiene conto sia della deformazione mareale sul pianeta che della deformazione sulla stella. Il modello è caratterizzato da valori di  $Q_p$  e  $Q_s$  costanti e si suppone che il sistema sia nella configurazione di *tidal locking* ossia che non vi sia trasferimento di momento angolare tra la rotazione planetaria e l'orbita<sup>1</sup>. Inoltre si assume che il periodo di rotazione della stella sia superiore al periodo di rivoluzione del pianeta (Jackson, Greenberg e Barnes, 2008b).

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dt} = - \left( \frac{63}{4} (GM_s)^{1/2} \frac{R_s^5}{Q'_p M_p} + \frac{225}{16} (G/M_s)^{1/2} \frac{R_s^5 M_p}{Q'_s} \right) a^{-13/2} \quad (99)$$

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = - \left( \frac{63}{2} (GM_s)^{1/2} \frac{R_s^5}{Q'_p M_p} + \frac{9}{2} (G/M_s)^{1/2} \frac{R_s^5 M_p}{Q'_s} \left( 1 + \frac{57}{4} e^2 \right) \right) a^{-13/2} \quad (100)$$

dove si è definito il nuovo parametro  $Q'$  come:

$$Q' = \frac{3Q}{2k_2} \quad (101)$$

in modo da riunire in una unica quantità la dipendenza delle espressioni (99) e (100) dalla struttura interna del pianeta. Definiamo inoltre la quantità  $H$  nota come *tidal heating rate*:

$$H = \frac{63}{4} \frac{(GM_s)^{3/2} M_s R_p^5}{Q'_p} a^{-15/2} e^2 \quad (102)$$

che, dipendendo sia da  $e$  che da  $a$  non resta costante nel tempo. Le equazioni riportate mostrano la stessa forma di quelle calcolate nel capitolo precedente nonostante la maggiore complessità del modello di Barnes. In particolare, rimane evidente la dipendenza dalle funzioni di dissipazione  $Q'$  e  $Q'_s$ , e la dipendenza da una potenza negativa di  $a$ . Questo significa che gli effetti mareali saranno tanto più importanti quanto più vicino è il pianeta alla propria stella.

<sup>1</sup> In letteratura tale condizione è spesso definita come "rotazione sincrona" sebbene vi sia una differenza sostanziale poiché la condizione di tidal locking è possibile anche per orbite non circolari secondo la condizione:  $\Omega = n(1 + (19/2)e^2)$ .

5.2 STIMA DEL PARAMETRO  $Q$ 

La ridefinizione dei parametri  $Q'$  e  $Q'_s$  tramite Eq. (101) permette di fare alcune considerazioni: è chiaro che per valori piccoli di  $Q'$  si avranno conseguentemente evoluzioni più rapide dell'eccentricità e del semiasse maggiore. Come visto nel Paragrafo (3.1) a proposito dell'oscillatore armonico forzato, valori piccoli di  $Q'$  sono tipici degli oscillatori che disperdono efficacemente l'energia del sistema. Osservando la forma di  $H$  infatti, l'energia dissipata è inversamente proporzionale al fattore  $Q'_p$ . Dunque occorre una stima precisa dei valori possibili delle funzioni di dissipazione specifica dei due corpi. Purtroppo tali stime sono difficili da ottenere e i migliori dati sperimentali sono stati ottenuti per alcuni corpi del sistema solare e alcune stelle binarie (Damiani, 2015; Goldreich e Soter, 1966). La Tabella (1) riporta alcuni valori misurati per  $Q$  e  $k_2$  per diverse tipologie di corpi celesti.

	Tipologia	Primario	$k_2$	$Q$
Mercurio	roccioso	Sole	$\sim 0.1$	$\sim 100$
Venere	roccioso	Sole	0.25	$\sim 100$
Terra	roccioso	Sole	0.299	12
Marte	roccioso	Sole	0.14	86
Luna	roccioso	Terra	0.030	27
Giove	gassoso	Sole	0.49	$\sim 3 \times 10^4$
Saturno	gassoso	Sole	0.32	$\sim 2 \times 10^4$

Tabella 1: Valori misurati e stimati per alcuni corpi del sistema solare (dati ottenuti da Murray e Dermott, 1999 e da Correia e Laskar, 2010)

La differenza tra i pianeti gassosi e quelli rocciosi è notevolissima. La maggiore rigidità dei pianeti rocciosi si manifesta con una scarsa deformazione mareale e una scarsa dispersione di energia tanto che nel sistema solare solo Mercurio e Venere hanno subito in passato una evoluzione mareale significativa (si veda ad esempio Correia e Laskar, 2010). Al contrario i pianeti di tipo gioviano subiscono deformazioni notevoli della loro struttura per azione delle maree tuttavia, nel caso del sistema solare, la loro distanza dalla stella ha limitato l'evoluzione dei parametri orbitali. In generale, specialmente nei lavori di Jackson, Greenberg e Barnes, 2008a,b,c, si assume che il parametro  $Q'$  resti costante nel tempo sebbene questo dipenda fortemente dalle caratteristiche del sistema e pertanto si modifica in accordo all'evoluzione di questo.

Come puntualizzato da Damiani, 2015, l'indeterminazione legata a  $Q'$  si riflette in maniera sensibile sugli studi che prevedono una integrazione numerica all'indietro nel tempo dei dati sperimentali.

Solo i pianeti più interni subiscono interazione mareale in ragione della forte dipendenza delle Eq. (99) e (100) dal semiasse maggiore dell'orbita. Pertanto si può supporre che i pianeti esterni abbiano subito una variazione modesta dei propri parametri orbitali. Quindi, una integrazione all'indietro nel tempo delle due equazioni differenziali permette di ottenere la distribuzione dei parametri orbitali al momento della formazione del sistema planetario. Si può avere una stima della attendibilità dei risultati confrontando tale distribuzione con quella dei pianeti esterni.

Nonostante questo metodo sia utilizzato di frequente (si veda Jackson, Greenberg e Barnes, 2008b,c; Levrard et al., 2008), vi sono alcuni limiti imposti dalla non conoscenza di  $Q'$  e dall'attuale stato di sviluppo della teoria mareale:

- I valori selezionati per  $Q'$  sono spesso contenuti in un intervallo di diversi ordini di grandezza. Le storie evolutive per i singoli valori di  $Q'$  saranno dunque molto differenti le une dalle altre.
- I valori di  $Q'$  in diversi istanti temporali dipendono dal modello scelto: "constant lag angle", "constant time lag" o altri. In generale i modelli più complessi del modello "constant lag angle" prevedono una evoluzione più rapida dei parametri orbitali (Jackson, Greenberg e Barnes, 2008b). Quindi il modello adottato in questa trattazione rappresenta un limite inferiore all'evoluzione dinamica.
- La determinazione dell'età attuale di un sistema planetario è spesso imprecisa e quindi l'integrazione indietro nel tempo non ha una fine certa.
- La marea sulla superficie stellare causa anche una modifica del momento angolare del sistema ma si tratta di un fenomeno ancora scarsamente compreso.

### 5.3 CIRCOLARIZZAZIONE DELLE ORBITE

Alcune teorie sulla formazione planetaria spiegano la forte presenza di pianeti su orbite quasi circolari come il risultato dell'interazione dei pianeti con il disco protoplanetario nelle prime fasi di evoluzione (Jackson, Greenberg e Barnes, 2008b). Tuttavia la circolarizzazione avrebbe dovuto verificarsi per pianeti a diverse distanze dalla stella e non solamente per quelli più interni. Questo suggerisce che vi sia un fenomeno (o un insieme di più fenomeni) che porta alla diminuzione delle eccentricità per i pianeti vicini alla stella mentre i pianeti più distanti si mantengono su orbite ellittiche. F. Rasio nel 1996 propose per primo l'ipotesi che il meccanismo di interazione mareale sia all'origine della circolarizzazione.

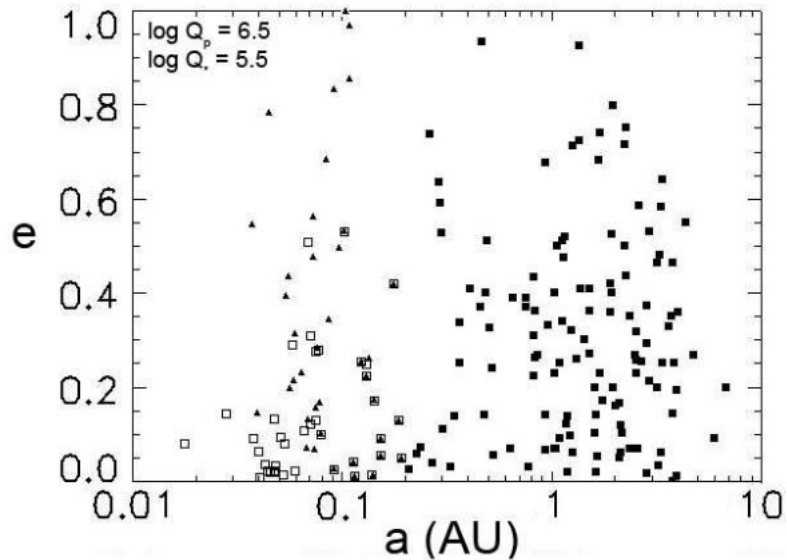


Figura 12: Grafico semiasse maggiore vs. eccentricità per il campione di Jackson, Greenberg e Barnes, 2008b. I quadrati rappresentano i dati iniziali, i triangoli rappresentano i dati evoluti temporalmente a ritroso, i simboli pieni rappresentano i pianeti con  $a > 0.2\text{AU}$  mentre quelli vuoti rappresentano i pianeti con  $a < 0.2\text{AU}$ .

L'integrazione diretta delle due Equazioni (99) e (100) permette di ricavare la distribuzione originaria delle eccentricità dei pianeti interni. Nel lavoro di Jackson, Greenberg e Barnes, 2008b si prende in considerazione un campione di 36 esopianeti (tutti con eccentricità misurata o stimata) e, sfruttando un ampio range di valori per  $Q'$ , si cerca la combinazione migliore di valori per  $Q'$  e  $Q'_s$ .

La Figura (12) riporta il caso  $Q' = 10^{6.5}$  e  $Q'_s = 10^{5.5}$  dove l'istante temporale a cui terminare l'integrazione è stato definito a partire dalle età stimate dei sistemi planetari. L'evoluzione temporale è significativa solo per i pianeti con  $a < 0.2\text{UA}$  e si nota chiaramente come in passato la distribuzione delle eccentricità fosse più uniforme. Per verificare quanto questa distribuzione si avvicini a quella tipica di sistemi planetari non influenzati dagli effetti mareali (ossia i pianeti più esterni), si può utilizzare il test di Kolmogorof-Smirnov che, nel caso considerato, fornisce una ottima compatibilità (superiore al 90%). Questo risultato convalida l'ipotesi che gli effetti mareali giochino un ruolo fondamentale nella distribuzione dei parametri orbitali degli esopianeti. In particolare, collegando questo studio all'efficienza con cui i pianeti di tipo gioviano disperdono l'energia mareale, si può concludere che la forte presenza di hot Jupiters in orbite quasi circolari non è frutto di un semplice effetto di selezione ma di una prolungata interazione dinamica tra stella e pianeta.

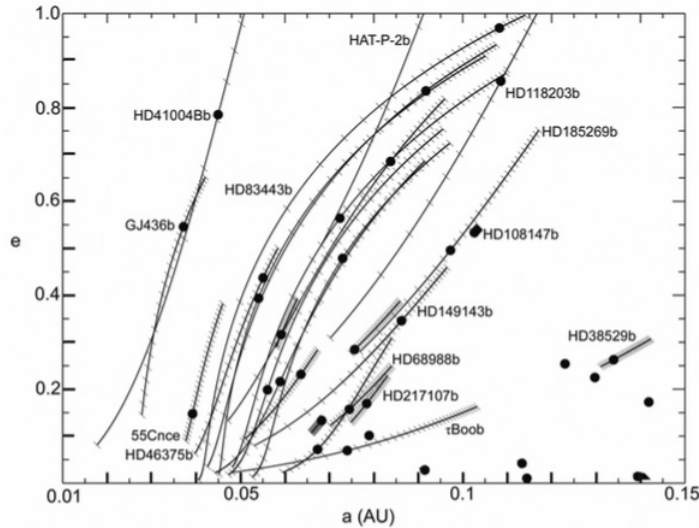


Figura 13: Grafico semiasse maggiore vs. eccentricità per il campione di Jackson, Greenberg e Barnes, 2008b dove sono state tracciate le traiettorie di evoluzione temporale seguite dal campione di pianeti. I trattini sulle traiettorie rappresentano intervalli temporali di 500Myr e il punto nero rappresenta il termine dell'evoluzione corrispondente all'età stimata del pianeta.

E' possibile ricavare le traiettorie di evoluzione temporale nel piano  $(e, a)$  considerando i valori assunti da  $Q'$  e  $Q'_s$  nel caso di best fit selezionato in precedenza. La Figura (13) presenta tali traiettorie: la concavità verso l'alto è indice di un maggior contributo dalla marea stellare mentre la concavità verso il basso è dovuta al maggior contributo della marea planetaria.

#### 5.4 DISTRUZIONE MAREALE

La Figura (14) riporta la variazione di  $a$  per i diversi valori di  $Q'$  considerati nel lavoro di Jackson, Greenberg e Barnes, 2008b: questa è sostanziale solo per i pianeti vicini alla propria stella mentre per pianeti più distanti di 1AU l'evoluzione di  $a$  è limitata, a conferma della forte dipendenza delle Eq. (99) e (100) dalla posizione.

L'interazione mareale porta quindi ad una migrazione dei pianeti verso la stella <sup>2</sup>. Presumibilmente, quando la distanza al pericentro diventa sufficientemente piccola (più piccola del limite di Roche) il pianeta viene completamente distrutto dalla stella. Il risultato è ben visibile nella Figura (10): non vi sono pianeti più vicini di 0.017AU dalla stella.

<sup>2</sup> La situazione è in realtà molto complessa. Oltre al meccanismo delle maree, anche l'interazione con il disco planetario può portare ad una riduzione di energia del sistema e quindi ad una migrazione verso orbite più interne. Anche i fenomeni di scattering tra pianeti e l'effetto Kozai possono portare ad una modifica sostanziale dei parametri orbitali (Correia e Laskar, 2010).

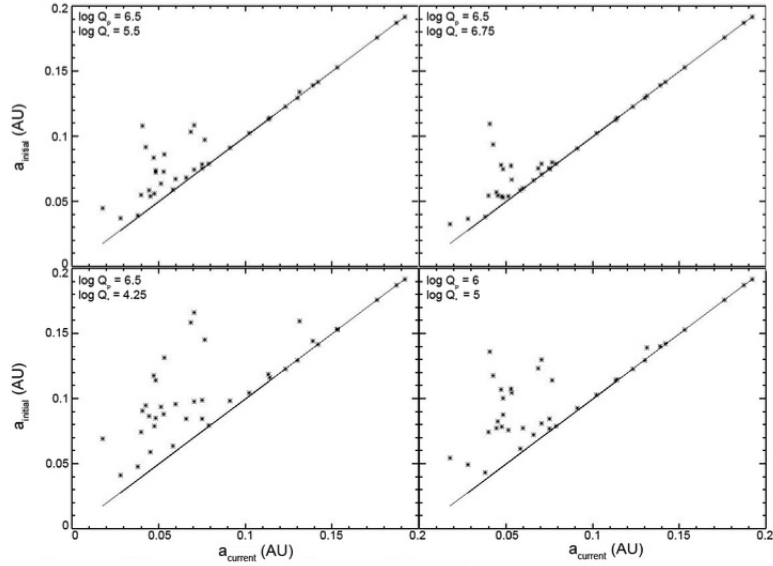


Figura 14: Grafico eccentricità attuale vs. eccentricità originaria per il campione di Jackson, Greenberg e Barnes, 2008b considerando i diversi valori di  $Q'$  presi in considerazione nello studio (come detto in precedenza il modello più attendibile si ottiene per  $Q' = 10^{6.5}$  e  $Q'_s = 10^{5.5}$ ). La distanza rispetto alla retta diagonale quantifica la migrazione subita dai pianeti.

Come affermato da Jackson, Barnes e Greenberg, 2009, il valore di  $a$  al quale avviene la distruzione del pianeta è di difficile computazione dipendendo fortemente dalla struttura del pianeta (si veda Jackson et al., 2010 per più dettagli nel caso di CoRoT-7 b). In ogni caso, le simulazioni numeriche mostrano un buon accordo con i dati sperimentali.

## 5.5 RISCALDAMENTO MAREALE

Un risultato notevole dei lavori di Jackson, Greenberg e Barnes, 2008b riguarda l'andamento temporale dei valori di  $a$  e  $e$  ottenuti integrando le Equazioni (99) e (100) per diversi valori di  $Q_s$  considerando le caratteristiche del pianeta  $\tau$  Boo b ( $e_{attuale} = 0.023$ ,  $a_{attuale} = 0.0595\text{AU}$ ). L'effetto complessivo è presentato in Figura (16):

- Il semiasse maggiore dell'orbita tende a rimanere costante nelle prime fasi evolutive indipendentemente dal valore assunto per  $Q'_s$ . In tempi recenti,  $a$  è cambiato rapidamente per valori piccoli di  $Q'_s$  mentre per valori grandi di  $Q'_s$  si nota una evoluzione molto debole.
- L'eccentricità dell'orbita presenta tipologie di evoluzione molto diverse a seconda dei valori assunti da  $Q'_s$ . All'aumentare di  $Q'_s$  diminuisce  $e$ , effetto ben visibile per  $Q'_s = 10^4, 10^5, 10^6$ . Tuttavia



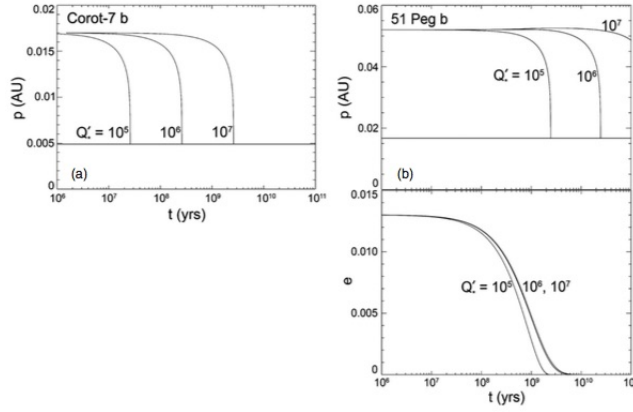


Figura 15: Evoluzione temporale della distanza al pericentro per i pianeti CoRoT-7 b e 51 Peg b tratta da Jackson, Barnes e Greenberg, 2009.

per valori di  $Q'_s$  superiori a  $10^7$  l'evoluzione di  $a$  è molto debole e di conseguenza  $a$  non subisce variazioni per un lungo periodo.

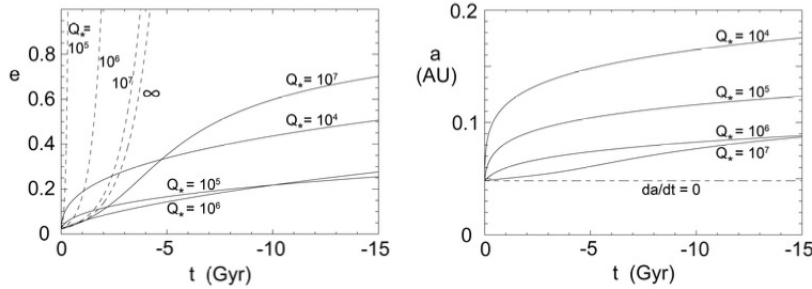


Figura 16: Grafici dell'andamento temporale di  $a$  e  $e$  per  $\tau$  Boo b: la linee continue rappresentano la soluzione diretta delle Eq. (99) e (100) mentre le linee tratteggiate rappresentano la soluzione approssimata con  $a$  costante (la discrepanza con le altre linee di evoluzione è molto forte).

Complessivamente si può affermare che l'evoluzione di  $a$  domina a tempi antichi mentre l'evoluzione di  $e$  è concentrata nei tempi più recenti. Dall'Espressione (103):

$$H = \frac{63}{4} \frac{(GM_s)^{3/2} M_s R_p^5}{Q'_p} a^{-15/2} e^2$$

si nota che una diminuzione del semiasse maggiore provoca una maggiore dissipazione di energia mentre una diminuzione dell'eccentricità porta ad un calo della dissipazione. Pertanto il fenomeno del "tidal heating", ossia del riscaldamento del pianeta ad opera dell'attrito mareale, presenta un andamento temporale che riflette l'evoluzione dei parametri orbitali. La Figura (17) mostra la dipendenza di  $H$  dall'obliquità in funzione dell'eccentricità dell'orbita, distinguendo tra casi di

rotazione sincrona e non. In generale la rotazione sincrona è caratterizzata da una bassa dissipazione dell'energia mentre  $H$  aumenta per valori elevati dell'obliquità.

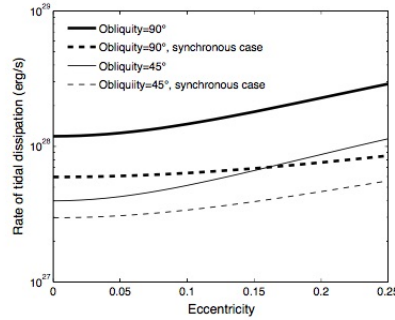


Figura 17: Tasso di dissipazione dell'energia mareale in funzione dell'eccentricità e dell'obliquità. Il valore di  $Q'$  è stato fissato a  $10^6$ .

La perdita di energia per attrito interno si manifesta come riscaldamento del pianeta stesso. Il calore generato potrebbe essere la spiegazione della struttura dei pianeti "gonfiati" in Figura (11). L'ipotesi sostenuta da Jackson, Greenberg e Barnes, 2008c; Levrard et al., 2008 è che tale calore sia sufficiente a mantenere la dilatazione dell'atmosfera gassosa del pianeta.

Levrard et al., 2008 tra i primi computarono il tasso di dispersione di energia ad opera delle maree planetarie (sfruttando i parametri orbitali tabulati in Tab. (2)) per studiarne la compatibilità con i modelli di inflazione planetaria per pianeti gassosi privi di core. In generale, considerando diversi valori di obliquità, questo si aggira tra  $10^{19}W$  e  $10^{23}W$  mentre i modelli planetari prevedono un eccesso di  $10^{20}W$  per il mantenimento della struttura espansa. Quindi il risultato è compatibile con i dati osservati nel caso di hot Jupiters.

	$M_s$	$R_s$	$M_p$	$R_p$	$a$	$e$
HD 209458b	1.14	1.13	0.64	1.32	0.0473	0.014
HAT-P-1b	1.12	1.15	0.53	1.36	0.0551	0.09
GJ 463b	0.44	0.44	0.0706	0.3525	0.0255	0.16
GJ 876d	0.32	0.36	0.018	0.143	0.0208	0.03

Tabella 2: Caratteristiche di alcuni dei sistemi planetari come riportate da Jackson, Greenberg e Barnes, 2008c; Levrard et al., 2008. Le masse e i raggi delle stelle sono in unità di masse e raggi solari, le masse e i raggi dei pianeti sono in unità di masse e raggi di Giove. Per l'eccentricità e il semiasse maggiore è stato riportato solo il valore nominale.

Seguono alcuni casi significativi di pianeti le cui caratteristiche at-

tuali possono essere interpretate come il frutto dell'evoluzione mareale (i dati principali sono contenuti in Tab. (2)).

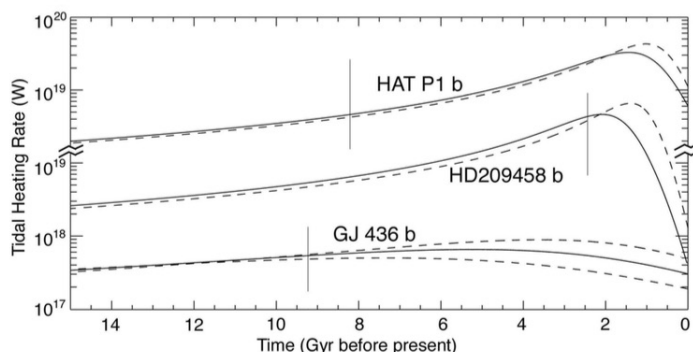


Figura 18: Tasso di dissipazione dell'energia mareale in funzione del tempo per HD 209458b, HAT-P-1b, GJ 436b. Le linee continue sono basate sul valore nominale dell'eccentricità mentre quelle tratteggiate sul valore massimo dell'eccentricità. I tratti verticali indicano l'età stimata del pianeta.

**HD 209458B** L'andamento di  $H$  nel tempo mostra un andamento tipico per la classe di pianeti hot Jupiters: un periodo di crescita della dissipazione seguito da una drastica diminuzione. Ciò è dovuto all'influenza di  $a$  e  $e$ : la diminuzione di  $a$  porta ad un aumento di  $H$  fino a quando l'orbita diventa sufficientemente circolare da ridurre la dissipazione di energia. Il caso di HD 209458b pone un serio problema interpretativo: secondo i modelli teorici servirebbe una energia di  $10^{19}W$  per mantenerne la dimensione mentre la Fig. (16) mostra chiaramente che tale valore è un ordine di grandezza più basso. Jackson, Greenberg e Barnes, 2008c suggeriscono che ciò sia dovuto ad un ritardo nella risposta del pianeta all'evoluzione dei parametri orbitali. La stima di questo ritardo è difficile da ottenere ma sembra essere dell'ordine di 1Gyr.

**HAT-P-1B** Anche in questo caso è visibile l'influenza dell'evoluzione dei parametri orbitali sul valore di  $H$ . Stime sull'età della stella portano a pensare che il pianeta sia più antico di HD 209458b. Anche per HAT-P-1b si presenta il problema del ritardo nella risposta del pianeta al mutare di parametri orbitali.

**GJ 436B** In questo caso il raggio planetario è compatibile con i modelli teorici. Applicando la teoria dell'interazione mareale si trova una conferma della scarsa importanza del tidal heating: la curva in Fig. (16) è più piatta e traslata di circa due ordini di grandezza. Il riscaldamento mareale è stato sensibile in tempi antichi mentre negli ultimi 2Gyr è in diminuzione.

GJ 876D Si tratta di un pianeta roccioso di tipo terrestre. La sua storia evolutiva (supponendo  $Q \approx 100$ ) è in Figura (17). Sono stati utilizzati diversi valori possibili per l'eccentricità per mancanza di dati certi. Il valore di  $H$  è rimasto, per qualunque valore di  $e$ , al di sopra dei  $10^{19}W$  per un lungo periodo di tempo successivo alla formazione. Si stima che un pianeta roccioso possieda un mantello fluido se l'energia interna rilasciata è dell'ordine di  $10^{17}W$ . Di conseguenza GJ 876d potrebbe essere parzialmente fuso anche negli strati più esterni<sup>3</sup>. In generale la storia mareale dei pianeti rocciosi è più complessa e diversificata come mostra il caso emblematico di CoRoT-7 b (Jackson et al., 2010).

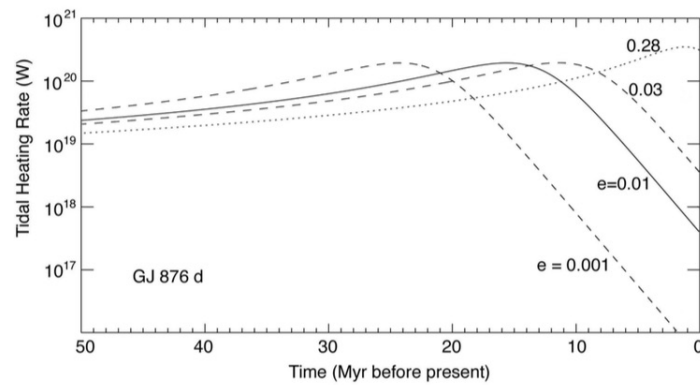


Figura 19: Tasso di dissipazione dell'energia mareale di GJ 876d in funzione del tempo per diversi valori di eccentricità attuale.

<sup>3</sup> Si prenda il caso del satellite mediceo Io: la sua attività vulcanica è possibile grazie ad un flusso di circa  $3Wm^{-2}$ . Nel caso di GJ 876d il flusso alla superficie è stimato essere  $10^4 - 10^5Wm^{-2}$

## CONSIDERAZIONI FINALI

---

Il percorso seguito in questa analisi dell'interazione mareale è iniziato con lo studio del sistema più semplice possibile: un corpo sferico orbitante attorno ad un punto materiale. In questo modo si è riusciti a definire le superfici equipotenziali del corpo (supposto essere perfettamente elastico) tramite i polinomi di Legendre. Un modello più complesso, composto da una regione interna e una esterna con proprietà differenti, ha permesso di ricavare la forma del potenziale gravitazionale generato dalla distribuzione non sferica di massa, ossia dalla deformazione mareale. Considerando un corpo con una certa densità  $\rho$  e un ritardo nella formazione dell'onda di marea (quantificato dal parametro  $Q$ ), si sono calcolate le variazioni temporali dei parametri orbitali. Queste equazioni hanno permesso di fornire una spiegazione plausibile per alcuni fenomeni riguardanti i pianeti extrasolari: la circolarizzazione delle orbite dei pianeti interni, la riduzione del semiasse maggiore dell'orbita e il raggio aumentato di alcuni hot Jupiters.

### 6.1 PROBLEMI OSSERVATIVI E INTERPRETATIVI

Lo studio delle caratteristiche dei pianeti extrasolari presenta numerose sfide dal punto di vista osservativo. La maggioranza delle pubblicazioni riportate in bibliografia si riferisce ad un campione molto limitato di pianeti per diverse ragioni, alcune delle quali sono già state evidenziate. In primo luogo, i metodi di individuazione degli esopianeti sono intrinsecamente limitati e permettono, salvo casi straordinari, di ricavare solo alcune proprietà del sistema planetario (Barnes, 2010). Inoltre tali metodi sono spesso altamente selettivi e conseguentemente l'analisi dei dati deve tenere conto della scarsa rappresentatività del campione. Anche la riduzione delle eccentricità e del semiasse maggiore dell'orbita influiscono sulla probabilità di osservare i transiti planetari, rendendo più facile l'individuazione di pianeti vicini alla stella con orbite ellittiche (Jackson, Greenberg e Barnes, 2008a).

Un'altra limitazione è costituita dalla non conoscenza del momento angolare del pianeta. In questo studio (in particolare nei Cap. 4 e 5) si è supposto che i pianeti vicini alla propria stella abbiano già subito un lungo periodo di interazione mareale che ha portato alla rotazione sincrona (fenomeno del "tidal despinning" (Goldreich e Soter, 1966)). Tuttavia, per utilizzare i modelli più complessi di Hut, 1981, è necessaria la conoscenza dell'obliquità del pianeta che, come osservato

nella Fig. (17), influenza fortemente gli effetti mareali.

Riguardo la funzione di dissipazione  $Q'$ , si è già detto come essa dipenda dalla struttura interna dei corpi celesti che, salvo qualche caso speciale, è scarsamente conosciuta. Le stime fatte per la Terra e alcuni satelliti possono essere sfruttate (almeno come ordine di grandezza) per l'analisi degli effetti mareali sui pianeti rocciosi. Per i pianeti gassosi invece la situazione è più complessa: è probabile che per gli HJ il valore di  $Q$  sia più simile a quello caratteristico delle stelle che non a quello calcolato per Giove (Correia e Laskar, 2010).

Ma il problema fondamentale dello studio della dinamica dei sistemi planetari è l'impossibilità di analizzare separatamente i diversi fenomeni che la caratterizzano. Lo studio dell'evoluzione mareale fornisce risultati interessanti solo per pianeti di tipo gioviano vicini alla propria stella. Contemporaneamente sono in atto altri fenomeni di interazione gravitazionale. Ad esempio la migrazione verso la stella sembra sia dovuta anche allo scattering tra pianeti e all'interazione del pianeta con il disco di polveri (Jackson, Greenberg e Barnes, 2008b). Senza contare che gli effetti secolari in un sistema di  $n$  corpi (in cui può essere presente una stella binaria) possono portare a conseguenze estreme quali il collasso di un pianeta sulla stella o l'eiezione di questo dal sistema planetario (Bolmont et al., 2014; Correia, Boué e Laskar, 2012). Un modello completo per l'evoluzione di un sistema planetario deve tenere conto di tutti questi fattori.

## 6.2 PROSPETTIVE FUTURE

Attualmente sono allo studio diversi metodi per colmare le lacune attualmente esistenti nei dati osservativi dei pianeti extrasolari. Correia e Laskar, 2010 riportano alcune tecniche che permetterebbero, tramite lo studio della radiazione infrarossa, di ottenere dati sulla rotazione dei pianeti e sulla loro struttura. Di certo, la futura classe di telescopi permetterà di ridurre sia le indeterminazioni esistenti che gli effetti di selezione del campione.

# A

## APPENDICE

---

Vengono riportate le espressioni per i polinomi di Legendre con  $n = 0, 1, 2, 3$ :

$$P_0(\mu) = 1$$

$$P_1(\mu) = \mu = \cos \theta$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$$

$$P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$$





## BIBLIOGRAFIA

---

- Arnol'd, Vladimir I. (2004). *Metodi Matematici della Meccanica Classica*. Editori Riuniti.
- Barnes, Rory, cur. (2010). *Formation and Evolution of Exoplanets*. Wiley-VCH.
- Blakely, Richard J. (1995). *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge University Press.
- Bolmont, Emeline, Sean N. Raymond, J r my Leconte, Alexandre C.M. Correia e Elisa Quintana (2014). «Tidal evolution in multiple planet systems: application to Kepler-62 and Kepler-186». In: *IAU Symposium* 310.
- Correia, Alexandre C.M., Gwena l Bou  e Jacques Laskar (2012). «Pumping the eccentricity of exoplanets by tidal effects». In: *The Astrophysical Journal Letters* 744.L23.
- Correia, Alexandre C.M. e Jacques Laskar (2010). «Tidal Evolution of Exoplanets». In: *Exoplanets*.
- Curtis, Howard D. (2005). *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Butterworth-Heinemann.
- Damiani, Cilia (2015). «Star-planet Interactions and Dynamical Evolution of Exoplanetary Systems». In: *EPJ Web of Conferences* 101.04004.
- Goldreich, Peter e Steven Soter (1966). «Q in the Solar System». In: *Icarus* 5, pp. 375–389.
- Hut, P. (1981). «Tidal Evolution in Close Binary Systems». In: *Astronomy and Astrophysics* 99, pp. 126–140.
- Jackson, Brian, Rory Barnes e Richard Greenberg (2009). «Observational evidence for tidal destruction of exoplanets». In: *The Astrophysical Journal* 698, pp. 1357–1366.
- Jackson, Brian, Richard Greenberg e Rory Barnes (2008a). «Planetary Transit and Tidal Evolution». In: *IAU Symposium* 253.
- (2008b). «Tidal Evolution of Close-in Extrasolar Planets». In: *The Astrophysical Journal*.
- (2008c). «Tidal Heating of Extrasolar Planets». In: *The Astrophysical Journal*.
- Jackson, Brian, Neil Miller, Rory Barnes, Sean N. Raymond, Jonathan J. Fortney e Richard Greenberg (2010). «The roles of tidal evolution and evaporative mass loss in the origin of CoRoT-7 b». In: *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* 407, pp. 910–922.
- Kramm, U., N. Nettelmann, J.J. Fortney, R. Neuhauser e R. Redmer (2012). «Constraining the interior of extrasolar giant planets with the tidal Love number k using the example of HAT-P-13b». In: *Astronomy and Astrophysics* 538.A146.

- Lévrard, B., A. Correia, G. Chabrier, I. Baraffe, F. Selsis e J. Laskar (2008). «Tidal dissipation within hot Jupiters: a new appraisal». In: *Astronomy and Astrophysics* 6487.
- Mardling, Rosemary A. (2011). «Bodily Tides». In: *EPJ Web of Conferences* 11.03002.
- Murray, Carl D. e Alexandre C.M. Correia (2010). «Keplerian Orbits and Dynamics of Exoplanets». In: *Exoplanets*, pp. 15–23.
- Murray, Carl D. e Stanley F. Dermott (1999). *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press.
- Richard P. Feynman Robert B. Leighton, Matthew Sands (1963). *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley.
- Zahn, Jean-Paul (2008). «Tidal Dissipation in Binary Systems». In: *EAS Publications Series* 29.97.