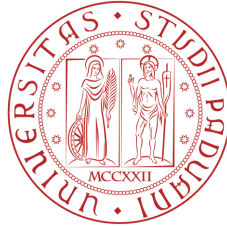


Università degli Studi di Padova

---

DIPARTIMENTO DI SCIENZE STATISTICHE  
Corso di Laurea in Magistrale in Scienze Statistiche



INDICI DI CURTOSI PER LA  
DISTRIBUZIONE NORMALE ASIMMETRICA  
MULTIVARIATA

Laureanda:  
**Lucia Zanotto**

Relatore:  
**Prof. Bruno Scarpa**  
Dipartimento di Scienze Statistiche

---

Anno Accademico 2012–2013



*“Vas a volar, Afortunada. Respira.  
... Siente la lluvia. Abre las alas.”  
Luis Sepúlveda*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>1 La distribuzione Normale Asimmetrica</b>	<b>9</b>
1.1 Normale Asimmetrica univariata . . . . .	10
1.1.1 I primi quattro momenti per la distribuzione Normale Asimmetrica univariata . . . . .	12
1.1.2 Le proprietà statistiche della distribuzione Normale Asim- metrica univariata . . . . .	14
1.2 Generalizzazione multivariata . . . . .	15
1.2.1 I primi quattro momenti della distribuzione Normale Asimmetrica multivariata . . . . .	17
1.2.2 Le proprietà statistiche della distribuzione Normale Asim- metrica multidimensionale . . . . .	19
<b>2 Alcuni riferimenti matematici</b>	<b>23</b>
2.1 L'operatore <i>vec</i> . . . . .	23
2.2 Il prodotto di Kronecker . . . . .	24
2.3 Il prodotto "star" . . . . .	25
2.4 Teorema per il calcolo dei momenti misti . . . . .	25
2.5 La matrice di permutazione . . . . .	25
<b>3 La curtosi</b>	<b>29</b>
3.1 Indici di curtosi per distribuzioni univariate . . . . .	30
3.2 Indici di curtosi per distribuzioni multivariate . . . . .	32
3.2.1 L'indice di Mardia . . . . .	33
3.2.2 L'indice di Malkovich-Affi . . . . .	34

3.2.3	Un nuovo indice dimensionle . . . . .	34
3.2.4	L'indice di Srivastava . . . . .	38
3.2.5	L'indice di Mori-Rohatgi-Székeley . . . . .	38
3.2.6	L'indice di Kollo . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Indici di curtosi</b>	<b>41</b>
4.1	L'indice di Mardia . . . . .	41
4.2	L'indice di Malkovich-Afifi . . . . .	42
4.3	Il nuovo indice direzionale . . . . .	43
4.4	L'indice di Srivastava . . . . .	44
4.5	L'indice di Mori-Rohatgi-Székeley . . . . .	45
4.6	L'indice di Kollo . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>49</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>53</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>55</b>

# Introduzione

Il principale obiettivo di questo studio è calcolare e confrontare diverse misure di curtosi per la distribuzione Normale Asimmetrica multivariata.

La distribuzione Normale Asimmetrica è una distribuzione di probabilità introdotta da Azzalini nel 1985. Essa prevede l'inserimento di un parametro  $\lambda$  che introduce una distorsione alla forma della curva Normale, modificando al contempo non solo l'asimmetria, ma anche la curtosi. In questi ultimi anni tale distribuzione è stata largamente studiata ed utilizzata sia per la sua buona capacità di adattamento ai dati che presentano leggere asimmetrie, sia perché le sue caratteristiche statistiche la rendono molto simile alla distribuzione Normale, e quindi facile da analizzare. La sua generalizzazione nel caso multivariato ha permesso un suo ancor maggior utilizzo, visto che molte distribuzioni multivariate sembrano essere ben rappresentate da questo modello.

Quando si analizza una distribuzione, solitamente, vengono descritti quattro aspetti che la caratterizzano: posizione, variabilità, simmetria e curtosi. Gli indici usualmente proposti per calcolare tali aspetti fanno riferimento ai momenti della distribuzione: media (momento di primo ordine non centrato), varianza (momento secondo centrato), indice di simmetria e posizione, rispettivamente calcolati con il momento di terzo e quarto ordine standardizzato. Quando si lavora con variabili  $p$ -dimensionali, oltre alle misure precedentemente descritte, si deve sintetizzare anche la struttura di dipendenza tra le componenti della variabile casuale. Diventa quindi più complesso calcolare questi indici per descrivere la distribuzione. Solitamente per l'indice di posizione si utilizza il vettore  $E(X)$  e come indice di scala si usa la matrice di varianza e covarianza calcolata come  $E[(X - \mu)(X - \mu)^T]$ . Per quanto riguarda la simmetria e la curtosi, non esiste un unico indicatore poiché queste

caratteristiche risultano molto complesse da indagare, proprio a causa del loro legame con la forma della distribuzione e tra di loro. In particolare la curtosi è un fenomeno complesso perché è legato a tutte le precedenti caratteristiche della distribuzione. In generale, lo scopo di tale indice è quello di aiutare a capire come si comportano le code della distribuzione, ma tale caratteristica non dipende solo dal come si comportano le osservazioni nelle code, ma anche da come, nel complesso, sono distribuiti i dati. A complicare l'analisi concorre la struttura multivariata dei dati. Non solo, infatti, la curtosi si può diversificare a seconda della direzione che si vuole indagare, ma anche a seconda delle relazioni che intercorrono tra le diverse componenti. Proprio per questo motivo, in letteratura, sono stati definiti più indici in grado di analizzare i diversi aspetti di tale fenomeno.

Il presente studio vuole ottenere diversi indici di curtosi per la distribuzione Normale Asimmetrica multivariata principalmente per due motivi: da una parte si vogliono avere a disposizione diverse misure per il calcolo di questo fenomeno in modo che, se si desidera indagare un determinato aspetto sia possibile scegliere l'indice che risulta più consono; dall'altro si vuole osservare come questi indici si comportano per la distribuzione Normale Asimmetrica multivariata e capire quali sono le forme di curtosi descritte da questa distribuzione.

Nel primo capitolo verrà presentata la distribuzione Normale Asimmetrica sia univariata che multivariata, con particolare riferimento alle sue proprietà statistiche e al calcolo dei momenti; nel secondo capitolo verranno richiamate alcune definizioni e teoremi utili per il proseguo dell'analisi; nel capitolo successivo si parlerà della curtosi, prima con riferimento al caso univariato, poi generalizzata al caso multivariato. In tale sezione verranno presentati diversi indici per il calcolo di tale fenomeno. Infine, nel quarto capitolo verranno proposti gli indici studiati per la distribuzione Normale Asimmetrica multivariata.



# Capitolo 1

## La distribuzione Normale Asimmetrica

Alcune famiglie di funzioni di densità si avvicinano a quella normale quando un certo parametro tende ad un determinato valore. Tuttavia esistono solo poche classi di distribuzioni che includono tra i loro membri la Normale, e lo fanno soprattutto considerandola come un caso limite. In molte di queste famiglie, però, spesso le funzioni risultano difficili da trattare matematicamente o “non naturali”: per esempio Tukey aveva proposto una distribuzione che, nonostante si adatti molto bene ai dati, richiede calcoli molto complessi per la funzione di densità; al contrario Edgeworth e Gram-Charlier hanno proposto delle famiglie di distribuzioni che presentano delle funzioni facili da calcolare, ma che, in generale, non mostrano una buona capacità di adattamento ai dati (per una presentazione delle varie distribuzioni si veda Hoaglin, 1982). Dagli anni '50 alcuni autori si sono interessati a distribuzioni che includono la distribuzione Normale: Box ha introdotto, nel 1953, la “power distribution”, la quale prevede un parametro che permette di regolare la curtosi, ma non la simmetria, che risulta sempre pari a 0; Prentice nel 1975 ha studiato una vasta classe parametrica di distribuzioni che, utilizzando una parametrizzazione adatta, permette di includere anche la Normale. Quest'ultima distribuzione, nonostante consideri la distribuzione Normale come un caso limite, si comporta in maniera abbastanza regolare quando ci si avvicina ad essa. Proprio per questo motivo questa distribuzione è stata considerata

come una generalizzazione del modello normale (presenta una breve descrizione di diversi modelli di distribuzioni che includono la Normale Azzalini, 1985). Tuttavia ci sono alcune caratteristiche che non sono state prese in considerazione da questo autore e che invece sarebbero auspicabili quando si vuole trattare distribuzioni che includono tra i loro membri la distribuzione Normale. In particolare sarebbe utile adoperare una classe parametrica che permetta una variazione continua tra normalità e non-normalità e che soddisfi le seguenti proprietà ideali:

- inclusione della distribuzione Normale;
- tracciabilità matematica;
- ampio numero di indici per calcolare simmetria e curtosi.

Azzalini, nel 1985, ha proposto una famiglia di distribuzioni chiamata Normale Asimmetrica che, oltre ad avere le proprietà indicate sopra, permette il passaggio tra normalità e non-normalità, grazie ad un parametro  $\lambda$ , che varia in  $\mathfrak{R}$ , che definisce l'allontanamento dalla simmetria di una Normale standard. Questo parametro, oltre a modificare il grado di asimmetria della distribuzione, permette anche la variazione della curtosi: se si considera, infatti, che viene introdotta l'asimmetria, anche le code della distribuzione subiranno una modifica rispetto a quelle della Normale standard. Ciò implica la necessità di avere a disposizione degli indici che permettano sia il calcolo della asimmetria (Scarpa e Balakrishnan, 2012), sia il calcolo della curtosi. Questi due indici, chiamati indici di forma sono utili per completare la descrizione della distribuzione. Inoltre assumono particolare rilevanza in questo caso perchè, essendo la Normale Asimmetrica riferita alla Normale standard, può essere utile capire quanto essa si discosta dal caso classico.

## **1.1 La distribuzione Normale Asimmetrica univariata**

Iniziamo considerando la distribuzione Normale Asimmetrica univariata:

**Definizione** (Azzalini, 1985): se la variabile casuale  $Z$  ha funzione di densità

$$2\phi(z)\Phi(\lambda z) \quad (z \in \mathfrak{R}),$$

con  $\phi$  la densità normale standard e  $\Phi$  la funzione di distribuzione, allora  $Z$  è una variabile casuale Normale Asimmetrica con parametro  $\lambda$  e si scrive  $Z \sim SN(\lambda)$ .

Il parametro  $\lambda$ , nel caso univariato, appartiene ai numeri reali. Le variazioni del parametro comportano differenti forme della funzione di densità. In particolare: se  $\lambda > 0$  si otterrà una asimmetria positiva, mentre se  $\lambda < 0$  si avrà l'effetto opposto. Il parametro interviene modificando la pendenza della curva destra o sinistra lasciando quasi invariata l'altra. Dalla definizione si ricavano le seguenti proprietà (Azzalini, 1985):

- se  $\lambda = 0$  si ottiene una distribuzione Normale standard;
- se  $\lambda \rightarrow \infty$  allora  $Z$  ha densità mezza normale, avente densità  $2\phi(z)$  per  $z > 0$ ;
- se  $Z$  è una variabile casuale  $SN(\lambda)$ , allora  $-Z$  è una variabile casuale  $SN(-\lambda)$ ;
- per ogni  $\lambda$  fissato, la funzione di densità è fortemente unimodale, ossia  $\log \phi(z; \lambda)$  è una funzione concava di  $z$ .

La funzione di distribuzione è data da:

**Definizione** (Azzalini, 1985): se  $Z$  è una variabile casuale Normale Asimmetrica, allora la sua funzione di distribuzione sarà pari a

$$2 \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\lambda t} \phi(t)\phi(u) du dt.$$

Le principali proprietà che discendono dalla funzione di probabilità sono (Azzalini, 1985):

- $1 - \Phi(-z; \lambda) = \Phi(z; -\lambda)$ ;

- se  $Z$  è una  $SN(\lambda)$ , allora  $Z^2$  è un  $\chi_1^2$ .

Queste proprietà (in particolare l'ultima elencata) corrispondono a quelle analoghe della distribuzione Normale e giustificano il nome dato alla nuova famiglia.

### 1.1.1 I primi quattro momenti per la distribuzione Normale Asimmetrica univariata

Nell'articolo del 1985 Azzalini, oltre a descrivere la distribuzione Normale Asimmetrica, calcola i primi quattro momenti, assumendo  $\mu = 0$ . Per calcolarli, prima di tutto ricava la funzione generatrice dei momenti:

**Teorema** (Azzalini, 1985): sia  $Z$  una variabile Normale Asimmetrica  $Z \sim SN(\lambda)$ , allora la funzione generatrice di momenti per  $Z$  è pari a

$$M(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}} \Phi(\delta t),$$

con  $\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ .

Da questa funzione è possibile ottenere i seguenti risultati:

**Teorema** (Azzalini, 1985): sia  $Z$  una variabile Normale Asimmetrica  $Z \sim SN(\lambda)$ , allora i primi quattro momenti di  $Z$  sono

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta, \\ \text{var}(Z) &= 1 - \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \right)^2, \\ \gamma_1(Z) &= \sqrt{4 - \pi} \left[ \frac{\{E(Z)\}^2}{\text{var}(Z)} \right]^{\frac{3}{2}}, \\ \gamma_2(Z) &= 2(\pi - 3) \left[ \frac{\{E(Z)\}^2}{\text{var}(Z)} \right]^2. \end{aligned}$$

Gli ultimi due indici riportati,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , identificano rispettivamente il ter-

zo e il quarto cumulante standardizzato, noti anche come, rispettivamente, coefficienti di asimmetria e di curtosi. L'indice  $\gamma_1$  varia nell'intervallo  $(-0,995; 0,995)$ , mentre  $\gamma_2$  può assumere valori compresi nell'intervallo  $(0; 0,869)$ . Poiché i valori che questi indici possono assumere sono limitati viene evidenziato un limite della distribuzione Normale Asimmetrica nel rappresentare distribuzioni aventi forti asimmetrie. Infatti anche se i parametri di asimmetria di due distribuzioni sono molto diversi tra loro, ma molto grandi, non vi è una sostanziale differenza nelle forme delle curve.

Poiché le funzioni presentate si riferiscono a variabili casuali distribuite come Normali Asimmetriche con parametro  $\mu = 0$ , è possibile operare una generalizzazione per includere anche le variabili aventi distribuzione Normale Asimmetrica con parametro di posizione  $\mu \neq 0$ .

**Definizione** (Azzalini, 2005): sia  $Z$  una variabile Normale Asimmetrica di media  $\mu = 0$ ,  $Z \sim SN(\lambda)$ , allora  $Y = \xi + \omega Z$ , con  $\xi \in \mathfrak{R}$  e  $\omega \in \mathfrak{R}^+$ , è una variabile Normale Asimmetrica e si scrive  $Y \sim SN(\xi, \omega^2, \lambda)$ .

Il motivo per cui viene scelto di indicare il parametro di posizione con  $\xi$  e non con il classico indice  $\mu$  è che usiamo  $\mu$  per il valore atteso e questa quantità, per la distribuzione, è diversa dal parametro di posizione. Infatti la funzione generatrice dei momenti è data da:

**Teorema** (Azzalini, 2005): sia  $Y$  una variabile casuale continua Normale Asimmetrica,  $Y \sim SN(\xi, \omega^2, \lambda)$ , allora la funzione generatrice dei momenti è data da

$$M(t) = E\{e^{tY}\} = 2exp\left(\xi t + \frac{\omega^2 t^2}{2}\right) \Phi(\delta \omega t),$$

con  $\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \in (-1, 1)$ .

Da questa funzione si ricavano i momenti per la variabile  $Y$ .

**Teorema** (Azzalini, 2005): sia  $Y$  una variabile casuale continua Normale

Asimmetrica,  $Y \sim SN(\xi, \omega^2, \lambda)$ , allora si ha che

$$\begin{aligned} E(Y) &= \xi + \omega\mu_Z, \\ var(Y) &= \omega(1 - \mu_Z^2), \\ \gamma_1(Y) &= \sqrt{4 - \pi} \left[ \frac{\mu_Z^2}{1 - \mu_Z^2} \right]^{\frac{3}{2}}, \\ \gamma_2(Y) &= 2(\pi - 3) \left[ \frac{\mu_Z^2}{1 - \mu_Z^2} \right]^2, \end{aligned}$$

con  $\mu_Z = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta$  e  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  rispettivamente il terzo e il quarto cumulante standardizzato.

Come in precedenza gli intervalli di variazione, per  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono, rispettivamente,  $(-0,995; 0,995)$  e  $(0; 0,869)$ .

Per questo tipo di generalizzazione valgono comunque le proprietà elencate nel prossimo paragrafo e riferite alla distribuzione Normale Asimmetrica standard, visto che è possibile passare dall'una all'altra semplicemente con una trasformazione lineare.

### 1.1.2 Le proprietà statistiche della distribuzione Normale Asimmetrica univariata

Le seguenti proprietà sono utili sia per creare campioni casuali con distribuzione Normale Asimmetrica, sia per applicare la distribuzione Normale Asimmetrica ai problemi reali che rientrano in questi casi.

**Proposizione I** (Azzalini e Dalla Valle, 1996): siano  $Y$  e  $W$  variabili indipendenti normali  $N(0, 1)$ ; se  $Z = P(Y = y | \lambda Y > W)$ , per qualunque numero reale  $\lambda$ , allora  $Z \sim SN(\lambda)$ .

Per generare numeri casuali ed ottenere un campione casuale con distribuzione Normale Asimmetrica, viene solitamente utilizzata una variante di tale proposizione:

$$Z = \begin{cases} Y & \text{se } \lambda Y > W, \\ -Y & \text{se } \lambda Y \leq W. \end{cases}$$

Per ottenere una distribuzione Normale Asimmetrica con  $\mu \neq 0$  è possibile utilizzare la trasformazione  $Y = \xi + \omega Z$ . Si avrà quindi che  $Y \sim SN(\xi, \omega^2, \lambda)$ .

**Proposizione II** (Azzalini, 2005): sia  $U$  una variabile casuale  $N(0, 1)$  indipendente dalla variabile casuale  $Z$  Normale Asimmetrica  $SN(\lambda)$ , allora  $\frac{aU+bZ}{\sqrt{2}}$  è una Normale Asimmetrica  $SN\left(\frac{b\lambda}{\sqrt{a^2+(1+\lambda^2)+b^2}}\right)$ , per qualsiasi  $a, b \in \mathfrak{R}$ .

**Proposizione III** (Azzalini e Dalla Valle, 1996): sia  $(X, Y)$  una variabile casuale bivariata con distribuzioni marginali standardizzate e correlazione  $\delta$ , allora la distribuzione condizionata  $f_Y(y|X > 0)$  è una  $SN\{\lambda(\delta)\}$ .

**Proposizione IV** (Azzalini, 1986): Siano  $Y_0$  e  $Y_1$  variabili indipendenti normali  $N(0, 1)$  e  $\delta \in (-1, 1)$ , allora  $Z = \delta|Y_0| + \sqrt{1 - \delta^2}Y_1$  è una  $SN\{\lambda(\delta)\}$ .

## 1.2 La distribuzione Normale Asimmetrica multivariata

L'estensione multivariata della distribuzione Normale Asimmetrica è molto rilevante nell'ambito delle applicazioni pratiche perché, nel caso multivariato, esistono poche distribuzioni disponibili per modellare dati che presentano leggere asimmetrie per le distribuzioni marginali (Azzalini e Dalla Valle, 1996). Altro vantaggio della distribuzione Normale Asimmetrica multivariata è la sua grande flessibilità dovuta al variare del parametro riguardante la simmetria.

Una prima generalizzazione della distribuzione Normale Asimmetrica univariata fu introdotta da Azzalini nel 1985, ma era stata ricavata esclusivamente come estensione matematica della funzione di densità della distribuzione univariata. Questo faceva sì che le distribuzioni marginali non godessero delle stesse proprietà di cui gode la distribuzione Normale Asimmetrica.

Azzalini e Dalla Valle, perciò, nel 1996, presentarono una nuova generalizzazione che permette di ottenere delle distribuzioni marginali che si distribuiscono a loro volta come Normali Asimmetriche.

**Definizione** (Azzalini e Dalla Valle, 1996): una variabile casuale continua  $p$ -dimensionale  $Z$  è detta avere una distribuzione Normale Asimmetrica multivariata ( $Z \sim SN_p(\bar{\Omega}, \alpha)$ ) se è continua e ha funzione di densità

$$2\phi_p(z; \bar{\Omega})\Phi(\alpha^T z) \quad (z \in \mathfrak{R}^p),$$

con  $\phi_p(z; \bar{\Omega})$  la densità di una normale  $p$ -dimensionale con vettore delle medie nullo e matrice di correlazione  $\bar{\Omega}$ ,  $\Phi(\cdot)$  funzione di distribuzione di una  $N(0, 1)$  e  $\alpha$  un vettore  $p$ -dimensionale  $\in \mathfrak{R}^p$ .

Il vettore  $p$ -dimensionale  $\alpha$  è detto “parametro di forma” e, anche in questo caso, regola la simmetria multivariata. Se  $\alpha = 0$  allora  $Z \sim SN_p(0, \bar{\Omega})$ , cioè una Normale multivariata con matrice di correlazione  $\bar{\Omega}$ .

In questa definizione si assume  $\mu = 0$ , ma Azzalini, nel 2005, ha generalizzato la funzione di densità anche nel caso in cui  $\mu \neq 0$ . Per questo motivo sono stati introdotti il parametro di posizione ( $\xi$ ), un vettore di dimensioni  $p \times 1$  e il parametro di scala ( $\omega$ ), una matrice diagonale di dimensioni  $p \times p$ . Il primo parametro consente di centrare la distribuzione in un valore diverso da 0, mentre il secondo modifica la forma della curva, intervenendo sulla matrice di  $\bar{\Omega}$ . Tale generalizzazione permette di utilizzare la distribuzione Normale Asimmetrica in modo più generale poiché il vettore delle medie non è più pari al vettore nullo.

**Teorema** (Azzalini e Capitanio, 1999): sia  $Z$  una variabile Normale Asimmetrica  $p$ -dimensionale e si scriva  $Y = \xi + \omega Z$ , con  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)^T$  e  $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_p)$  rispettivamente i parametri di posizione e di scala, con  $\omega$  positivo, allora  $Y$  ha funzione di densità

$$2\phi_p(y - \xi; \Omega)\Phi\{\alpha^T \omega^{-1}(y - \xi)\} \quad (y \in \mathfrak{R}^p),$$

con  $\phi_p(y - \xi; \Omega)$  la funzione di densità di una variabile Normale  $p$ -dimensionale con media  $\xi$  e matrice di covarianza  $\Omega = \omega \bar{\Omega} \omega$  ( $\bar{\Omega} = \omega^{-1} \Omega \omega^{-1}$  è la matrice di correlazione  $p \times p$  associata a  $\Omega$ ) e  $\Phi(\cdot)$  funzione di distribuzione di una Normale standard  $N(0, 1)$ . Per indicare che  $Y$  ha questa funzione di densità si scriverà:  $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$ .



La ragione per cui si ha l'apparente ridondanza del termine  $\omega^{-1}$  nell'argomento di  $\Phi$  è quello di permettere di mantenere il parametro di forma  $\alpha$  inalterato quando viene applicata la trasformazione di scala. Tuttavia, per comodità, seguendo Genton et al. (2001), nel proseguo dell'analisi verrà considerata la seguente funzione di densità per la variabile  $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$

$$2\phi_p(y; \xi, \Omega)\Phi\{\alpha^T(y - \xi)\} \quad (y \in \mathfrak{R}^p),$$

con  $\phi_p(y - \xi; \Omega)$  la funzione di densità di una variabile Normale  $p$ -dimensionale con media  $\xi$  e matrice di covarianza  $\Omega$  e  $\Phi(\cdot)$  funzione di distribuzione di una Normale standard  $N(0, 1)$ . Il parametro  $\alpha$  è ancora un vettore  $p$ -dimensionale ed, anche in questo caso, è detto "parametro di forma", ma, questa volta, è costituito da  $\alpha\omega^{-1}$ .

Questa definizione risulta più generale della precedente. Proprio per questo motivo tutti gli indici di curtosi che verranno calcolati nei prossimi capitoli fanno riferimento a tale riparametrizzazione. Nell'ipotesi in cui si lavori con una Normale Asimmetrica con vettore delle medie nullo, basterà sostituire il valore 0 al parametro  $\xi$ .

### 1.2.1 I primi quattro momenti della distribuzione Normale Asimmetrica multivariata

Azzalini e Dalla Valle (1996) hanno calcolato la funzione generatrice dei momenti nel caso in cui  $Y \sim SN_p(\Omega, \alpha)$ , cioè nel caso in cui il vettore delle medie sia pari al vettore nullo.

**Teorema** (Azzalini e Dalla Valle, 1996): sia  $Z$  una variabile Normale Asimmetrica  $p$ -dimensionale  $Y \sim SN_p(\Omega, \alpha)$ , allora la funzione generatrice dei momenti per  $Z$  è pari a:

$$\begin{aligned} M(t) &= 2 \int_{\mathfrak{R}^p} \exp\{t^T z\} \phi_p(z; \Omega) \Phi(\alpha^T z) dz \\ &= 2 \exp\left(\frac{1}{2}(t^T \Omega t)\right) \Phi(\delta^T t) \quad (t \in \mathfrak{R}^p), \end{aligned}$$

con

$$\delta = \frac{\Omega \alpha}{(1 + \alpha^T \Omega \alpha)^{\frac{1}{2}}}.$$

Attraverso questa funzione è possibile ottenere i primi quattro momenti non centrati per la variabile  $Z$ .

**Teorema** (Genton et al., 2001): sia  $Z$  una variabile Normale Asimmetrica  $p$ -dimensionale  $Y \sim SN_p(\Omega, \alpha)$ , allora

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta, \\ M_2 &= \Omega, \\ M_3 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}[\delta \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega)\delta^T + (I_p \otimes \delta)\Omega - (I_p \otimes \delta)(\delta \otimes \delta^T)], \\ M_4 &= (I_{p^2} + U_{p,p})(\Omega \otimes \Omega) + \text{vec}(\Omega)\text{vec}(\Omega^T), \end{aligned}$$

con  $I_n$  la matrice identica  $n \times n$ ,  $\otimes$  l'operatore algebrico indicante il prodotto di Kronecker e  $U_{n,n}$  la matrice di permutazione associata ad una matrice  $n \times n$  di dimensioni pari a  $n^2 \times n^2$  (vedi capitolo successivo).

Per il proseguo dell'analisi, però, è necessario utilizzare i momenti non centrati riferiti alla variabile  $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$ . Genton e coautori (2001) hanno calcolato i primi quattro momenti non centrati per una variabile casuale multidimensionale distribuita come una Normale Asimmetrica. Anche in questo caso, per calcolarli si è fatto riferimento alla funzione generatrice dei momenti.

**Teorema** (Azzalini, 2005): sia  $Y$  una variabile Normale Asimmetrica  $p$ -dimensionale  $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$ , allora la funzione generatrice dei momenti per  $Y$  è

$$M(t) = 2\exp\left(\xi^T t + \frac{1}{2}t^T \Omega t\right) \Phi(\delta^T t) \quad (t \in \mathbb{R}^p).$$

Ora è possibile ottenere i primi quattro momenti non centrati per la variabile  $Y$ .

**Teorema** (Genton et al., 2001): sia  $Z$  un vettore casuale con una distribuzione Normale Asimmetrica  $SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$ . Allora i primi quattro momenti

di  $Z$  sono:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \xi + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta \\
M_2 &= \Omega + \xi\xi^T + \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\xi\delta^T + \delta\xi^T) \\
M_3 &= \Omega \otimes \xi + \xi \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega) \otimes \xi^T + \xi \otimes \xi^T \otimes \xi + \sqrt{\frac{2}{\pi}}[\delta \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega)\delta^T \\
&\quad + (I_p \otimes \delta)\Omega - \delta \otimes \delta^T \otimes \delta + \delta \otimes \xi^T \otimes \xi + \xi \otimes \delta^T \otimes \xi + \xi \otimes \xi^T \otimes \delta] \\
M_4 &= \Omega \otimes \xi \otimes \xi^T + \xi \otimes \Omega \otimes \xi^T + \text{vec}(\Omega) \otimes \xi^T \otimes \xi^T + \xi \otimes \xi^T \otimes \xi \otimes \xi^T + \\
&\quad + \Omega \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega)\text{vec}(\Omega)^T + U_{p,p}(\Omega \otimes \Omega) + \xi^T \otimes \Omega \otimes \xi + \xi \otimes \xi \otimes \text{vec}(\Omega)^T \\
&\quad + \xi \otimes \xi^T \otimes \Omega + \sqrt{\frac{2}{\pi}}[\delta \otimes \Omega \otimes \xi^T + \text{vec}(\Omega) \otimes \delta^T \otimes \xi^T + ((I_p \otimes \delta)\Omega) \otimes \xi^T \\
&\quad + \delta \otimes \xi^T \otimes \xi \otimes \xi^T + \xi \otimes \delta^T \otimes \xi \otimes \xi^T + \xi \otimes \xi^T \otimes \delta \otimes \xi^T + \delta^T \otimes \Omega \otimes \xi \\
&\quad + \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^T \otimes \xi + (\Omega(I_p \otimes \delta^T)) \otimes \xi + \xi^T \otimes \delta \otimes \Omega + \xi^T \otimes (\text{vec}(\Omega)\delta^T) \\
&\quad + \xi^T \otimes ((I_p \otimes \delta)\Omega) + \xi \otimes \delta^T \otimes \Omega + \xi \otimes \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^T + \xi \otimes (\Omega(I_p \otimes \delta^T)) \\
&\quad + \xi \otimes \xi^T \otimes \delta \otimes \delta^T - \delta \otimes \delta^T \otimes \delta \otimes \xi^T - \delta^T \otimes \delta \otimes \delta^T \otimes \xi \\
&\quad - \xi^T \otimes \delta \otimes \delta^T \otimes \delta - \xi \otimes \delta^T \otimes \delta \otimes \delta^T].
\end{aligned}$$

### 1.2.2 Le proprietà statistiche della distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale

Tutte le seguenti proprietà si riferiscono alla variabile Normale Asimmetrica  $p$ -dimensionale  $Y \sim SN_p(\Omega, \alpha)$ . Possono essere divise in quattro tipi: quelle utili per creare campioni casuali (I), quelle relative alle distribuzioni marginali (II), quelle riguardanti le trasformazioni lineari (III e IV) e quelle concernenti la forma quadratica (V). Tutte le proprietà valgono anche nel caso in cui  $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$ , ma necessitano di una notazione più complicata che ho preferito omettere.

**Proposizione I** (Azzalini e Capitanio 1999): sia

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X \end{pmatrix} \sim N_{p+1}(0, \Omega^*) \text{ e } \Omega^* = \begin{pmatrix} 1 & \delta^T \\ \delta & \Omega \end{pmatrix} \text{ con } X_0 \text{ uno scalare e } \Omega^* \text{ la matrice}$$

di correlazione, allora

$$Z = f(n) = \begin{cases} X & \text{se } X_0 > 0 \\ -X & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una  $SN_p(\Omega, \alpha)$  con

$$\alpha = \frac{\Omega^{-1}\delta}{(1 - \delta^T\Omega^{-1}\delta)^{1/2}}.$$

Questa proprietà fornisce una rappresentazione stocastica di  $Z$  che viene utilizzata per generare, tramite il computer, numeri pseudocasuali da una distribuzione Normale Asimmetrica. In questo caso, per ottenere una distribuzione Normale Asimmetrica con vettore delle medie diverso dal vettore nullo, è possibile applicare il teorema utilizzato per definire la variabile  $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$ , presente nel paragrafo 1.2.

**Proposizione II** (Azzalini e Capitanio 1999): sia  $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$  e  $Z$  sia divisa in  $Z^T = (Z_1^T, Z_2^T)$  di dimensioni rispettivamente  $h$  e  $p - h$ , sia

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}$$

e

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

le corrispondenti partizioni di  $\Omega$  e  $\alpha$ , allora la distribuzione marginale di  $Z_1$  è ancora una  $SN_h(\Omega_{11}, \bar{\alpha}_1)$  con  $\bar{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1 + \Omega_{11}^{-1}\Omega_{12}\alpha_2}{(1 + \alpha_2^T\Omega_{22.1}\alpha_2)^{1/2}}$  e  $\Omega_{22.1} = \Omega_{22} - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\Omega_{12}$ .

Ciò significa che sottoinsiemi di componenti di  $Z$  hanno distribuzione marginale che è ancora una variabile Normale Asimmetrica. Da questa proprietà è possibile anche ricavare che ciascuna delle componenti marginali di  $Z$  si distribuisce come variabile Normale Asimmetrica univariata.

**Proposizione III** (Azzalini e Capitanio 1999): sia  $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$  e  $A$  una matrice non singolare  $p \times p$ , tale che  $A^T\Omega A$  sia una matrice di correlazione,

allora

$$A^T Z \sim SN_p(A^T \Omega A, A^{-1} \alpha).$$

**Proposizione IV** (Azzalini e Capitanio 1999): sia  $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$ , esiste una trasformazione lineare  $Z^* = A^* Z$  tale che  $Z^* \sim SN_p(I_p, \alpha^*)$ , dove, al più una sola componente di  $\alpha$  è diversa da 0.

Questo risultato definisce una sorta di “forma canonica” per la distribuzione Normale Asimmetrica multivariata, le cui componenti sono mutualmente indipendenti, con una sola componente che “assorbe” tutta l’asimmetria della distribuzione multivariata. Se esiste un’unica componente del vettore  $\alpha$  diversa da 0, allora significa anche che tutte le altre componenti hanno non solo asimmetria pari a 0, ma anche curtosi uguale a quella di una Normale multivariata. Perciò, al più, esisterà una sola componente che ha curtosi diversa da quella della Normale multivariata.

La densità di  $Z^*$  è data da (Azzalini e Capitanio, 1999)

$$2 \prod_{i=1}^p \phi(u_i) \Phi(\alpha_m^* u_m),$$

con  $\alpha_m^* = (\alpha^T \Omega \alpha)^{1/2}$  la sola componente (se esiste) diversa da 0 di  $\alpha^*$ .

**Proposizione V** (Azzalini e Capitanio 1999): sia  $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$ , e  $B$  una matrice  $p \times p$  simmetrica semi-definita positiva, di rango  $k$ , tale che  $B \Omega B = B$ , allora  $Z^T B Z \sim \chi_k^2$ .

Da questa proposizione deriva anche la seguente, che è più generale.

**Proposizione V.1** (Azzalini e Capitanio 1999): sia  $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$ , e  $C$  una matrice a rango pieno  $p \times k$  ( $p \leq k$ ), allora  $Z^T C (C^T \Omega C)^{-1} C^T Z \sim \chi_p^2$ .

Da queste proprietà deriva che:  $Z^T \Omega Z \sim \chi_p^2$ .

Come si può notare questa proprietà è la stessa che è stata presentata per la variabile casuale Normale Asimmetrica univariata. Si osservi che tale proprietà non coinvolge il parametro  $\alpha$ .



## Capitolo 2

### Alcuni riferimenti matematici

Di seguito vengono elencate e spiegate brevemente alcune funzioni matematiche ed algebriche che sono risultate essenziali per lo svolgimento dello studio.

#### 2.1 L'operatore *vec*

Questo tipo di operatore è stato definito da Neudecker nel 1969. È sempre associato ad una matrice  $A$  e si scrive  $vec(A)$ .

**Definizione** (Graham, 1981): se  $A$  è una matrice di ordine  $m \times n$ , allora

$$vec(A) = \begin{bmatrix} A_{.1} \\ A_{.2} \\ \vdots \\ A_{.n} \end{bmatrix}.$$

$vec(A)$  è, perciò, un vettore di dimensioni  $mn \times 1$ .

*Esempio:*

se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

allora

$$\text{vec}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}.$$

## 2.2 Il prodotto di Kronecker

Il prodotto di Kronecker, conosciuto anche come “prodotto diretto” o “prodotto tensoriale”, è un concetto nato nell’ambito della fisica applicata, ma ha avuto un grande successo in vari campi della teoria delle matrici ed oggi è largamente utilizzato.

**Definizione**(Graham, 1981): sia  $A = [a_{ij}]$  una matrice di ordine  $m \times n$  e  $B = [b_{ij}]$  una matrice di ordine  $r \times s$ . Si dice prodotto di Kronecker di  $A$  e  $B$ , e si scrive  $A \otimes B$ , la matrice

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

$A \otimes B$  è una matrice di ordine  $mr \times ns$ . Ha  $mn$  blocchi e il blocco  $(i, j)$  è costituito dalla matrice  $a_{ij}B$  di ordine  $r \times s$ .

*Esempio:*

se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

allora

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Il prodotto di Kronecker è definito indipendentemente dalla grandezza delle matrici coinvolte.



## 2.3 Il prodotto “star”

Il prodotto “star” è stato introdotto da MacRae, nel 1974, nell’ambito della teoria della differenziazione di matrici. Esso permette di facilitare tale procedimento.

**Definizione** (MacRae, 1974): sia  $A$  una matrice  $m \times n$  e  $B$  una matrice  $mr \times ns$  suddivisa in sottomatrici  $B_{i,j}$  con  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ , di dimensioni  $r \times s$ , allora il prodotto “star”  $A \star B$ , applicato alle matrici  $A$  e  $B$ , è pari alla matrice  $r \times s$ :

$$A \star B = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} B_{ij},$$

con  $a_{ij}$  l’elemento generico della matrice  $A$ .

## 2.4 Teorema per il calcolo dei momenti misti

Il seguente teorema è utile per calcolare i momenti misti per distribuzioni inserite in uno spazio sferico.

**Teorema** (Fang, Kolz e Ng, 1990): sia  $u^{(n)}$  distribuita uniformemente su una sfera con superficie in  $\mathfrak{R}^n$ , per qualsiasi intero  $m_1, \dots, m_n$  con

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

i momenti misti di  $u_{(n)}$  possono essere espressi come

$$E \left( \prod_{i=1}^n u_i^{m_i} \right) = \begin{cases} \frac{1}{(n/2)^{[l]}} \prod_{i=1}^n \frac{(2l_i)!}{4^{l-i} (l_i)!} & \text{se } m_i = 2l_i \text{ è pari} \\ 0 & \text{se anche uno degli } m_i \text{ è dispari} \end{cases}$$

con  $x^{[l]} = x(x+1) \dots (x+l-1)$ .

## 2.5 La matrice di permutazione

Per poter definire la matrice di permutazione è necessario prima introdurre il concetto di matrice elementare.

**Definizione:** si dice matrice elementare  $E_{ij}$  una matrice di ordine  $m \times n$  che ha valore 1 nella posizione  $(i, j)$ , e, in tutte le altre posizioni, il valore 0.

*Esempio:*

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ora è possibile definire la matrice di permutazione  $U_{n,n}$ .

**Definizione:** data una matrice elementare  $E_{ij}$  di ordine  $m \times n$  si dice matrice di permutazione  $U$  di ordine  $mn \times nm$  la matrice

$$U_{mn,nm} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E_{ij} \otimes E_{ij}^T.$$

*Esempio:* sia  $E_{ij}$  una matrice elementare di ordine  $2 \times 2$  allora  $U_{44}$  sarà

$$U_{mn,nm} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 E_{ij} \otimes E_{ji}$$

perciò

$$\begin{aligned} U &= E_{11} \otimes E_{11}^T + E_{12} \otimes E_{12}^T + E_{21} \otimes E_{21}^T + E_{22} \otimes E_{22}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Da notare che  $U$  risulta sempre essere una matrice quadrata composta da vettori elementari. Riordinando tali vettori è possibile ottenere una matrice identica ed è per questo che  $U$  viene chiamata matrice di permutazione: “cambia” l’ordine dei vettori di una matrice identica.



# Capitolo 3

## La curtosi

Per descrivere le caratteristiche della distribuzione di una variabile statistica è utile, oltre all'indice di posizione, di variabilità globale, di dispersione e di simmetria, un altro indice che misura la curtosi. Il termine etimologicamente deriva dal greco  $\kappaυρτς$  e significa “curvo, arcuato”. In generale, la curtosi viene definita come il rapporto tra la lontananza delle osservazioni dall'indice di posizione, rispetto alla distanza media.

Essa calcola l'allontanamento dalla normalità distributiva, rispetto alla quale, a parità di media e varianza, si verifica un maggior appiattimento (distribuzione platicurtica) o un maggior appuntimento (distribuzione leptocurtica) della distribuzione in esame. In particolare l'indice di curtosi costituisce una misura dello “spessore” delle code di una funzione di densità. È importante, però, tenere presente che la curtosi dipende sia dalle code della distribuzione, sia da come la distribuzione stessa si comporta nella parte centrale. Questo perché l'integrale della funzione di densità, cioè l'area sottostante alla curva, deve sempre dare come risultato 1: più le code sono pesanti, minori saranno il numero di osservazioni nella parte centrale della distribuzione; viceversa, minore è il peso delle code, più saranno concentrate le osservazioni nella parte centrale della distribuzione. Tuttavia, le code della distribuzione hanno un ruolo fondamentale nel determinare la curtosi per la distribuzione. Chissom (1970), infatti, dimostra che un troncamento delle code, lasciando invariata la parte centrale della distribuzione, porta ad un'alterata rappresentazione e quindi ad una falsa interpretazione della curtosi. In particolare questo tipo di

operazione modifica la differenza tra l'allontanamento delle osservazioni dal parametro di posizione, con una conseguente diminuzione del fenomeno. La complessità di tale fenomeno ha portato, negli anni, a definire diversi indici in grado di sondare i diversi aspetti che coinvolgono lo studio della curtosi.

### 3.1 Indici di curtosi per distribuzioni univariate

L'indice più conosciuto e che viene solitamente utilizzato, è l'indice di Pearson (Piccolo, 2000), costruito come rapporto tra il momento quarto centrato e la varianza al quadrato:

$$\beta_2 = \frac{E[(X - \mu)^4]}{(\sigma^2)^2},$$

con  $\mu$  la media della distribuzione e  $\sigma_2$  la varianza della distribuzione.

Se si applica questo indice alla distribuzione Normale Standard si ricava un valore pari a 3. Per questo:

- se  $\beta_2 > 3$  la distribuzione di interesse è detta leptocurtica, cioè è più “appuntita” di una Normale;
- se  $\beta_2 < 3$  la distribuzione di interesse è detta platicurtica, cioè è più “piatta” di una Normale;
- se  $\beta_2 = 3$  la distribuzione di interesse è detta normocurtica, cioè è “piatta” come una Normale.

Questo indice può essere considerato, a sua volta, come il rapporto tra due indici di variabilità: la potenza quarta degli scarti dalla media è scelta in modo da essere più sensibile alla presenza di osservazioni nelle code del denominatore, la varianza.

Il valore che si ricava da questo indice è un numero puro: numeratore e denominatore hanno la stessa unità di misura. Ciò significa che, sia per qualsiasi spostamento della curva, sia per qualunque moltiplicazione di uno scalare, l'indice non cambia. Detto in altre parole: una trasformazione lineare non

modifica il valore dell'indice.

A volte può risultare scomodo avere come riferimento un valore che è diverso da 0. Per questo motivo, spesso l'indice di Pearson viene riscritto utilizzando un fattore correttivo:

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3.$$

Come si può notare, il nuovo indice è costituito dall'indice di Pearson centrato. Si avrà perciò che:

- se  $\gamma_2 > 0$ , la distribuzione di interesse è detta leptocurtica;
- se  $\gamma_2 < 0$ , la distribuzione di interesse è detta platicurtica;
- se  $\gamma_2 = 0$ , la distribuzione di interesse è detta normocurtica.

Da notare che, quando si utilizza questo tipo di misura, un aumento delle osservazioni nelle code porta ad un conseguente aumento della varianza, il denominatore della formula che, crescendo più velocemente del numeratore, riduce i valori della curtosi facendoli tendere a 0, anche se la forma della curva non viene sostanzialmente cambiata.

Esiste anche un altro indice che utilizza i percentili per il calcolo della curtosi (Piccolo, 2000). Questo indice è più robusto del precedente poiché non è basato sulla media, indice che viene influenzato dai valori estremi.

$$K = \frac{Q_{75} - Q_{25}}{Q_{90} - Q_{10}},$$

con  $Q_{10}$  il decimo percentile,  $Q_{25}$  il venticinquesimo percentile,  $Q_{75}$  il settantacinquesimo percentile e  $Q_{90}$  il novantesimo percentile.

Da notare che questo indice mette in rapporto lo scarto interquartile con la differenza tra i valori delle osservazioni sulle code della distribuzione. Si avrà perciò che: più il denominatore è grande rispetto al numeratore, più appiattita sarà la distribuzione; viceversa, se lo scarto interquartile e denominatore sono molto vicini, la distribuzione sarà molto concentrata.

L'indice varia tra 0 e 1 e si definisce:

- leptocurtica la distribuzione avente  $K > 0.5$ ;
- platicurtica la distribuzione avente  $K < 0.5$ ;

- normocurtica la distribuzione avente  $K \simeq 0.5$ .

Questo tipo di indice, essendo basato sui percentili, oltre a dare un'indicazione sulle code della distribuzione, fornisce informazioni relative alla forma della distribuzione. Questo perché i percentili fanno riferimento all'intera distribuzione presa nel suo insieme.

## 3.2 Indici di curtosi per distribuzioni multivariate

Nel caso multivariato, il concetto di curtosi è intrinsecamente connesso con le altre caratteristiche della distribuzione, come la simmetria, la forma della distribuzione, la pesantezza delle code e la varianza. Questo complica la sua caratterizzazione poiché il fenomeno risulta più complesso. La difficoltà che si riscontra nell'interpretazione sta nel fatto che vi sono più dimensioni, le quali sono connesse tra loro. Il concetto di curtosi non cambia rispetto al caso univariato, ma nel caso multivariato diviene più difficile poterlo definire. Il fenomeno, quindi, si presenta complesso e multiforme. L'importanza del calcolo della curtosi si inserisce nel contesto della necessità di descrizione della distribuzione in esame. Nel caso multivariato, infatti, la descrizione della distribuzione può risultare un buon modo per capirne le caratteristiche, visto che, se le dimensioni sono maggiori di 3, è difficile visualizzare la forma della distribuzione in esame. Essendo il fenomeno articolato, in letteratura sono stati proposti diversi tipi di indici. Ognuno di essi, infatti, analizza un particolare aspetto che il ricercatore vuole sondare, visto che risulta difficile cogliere il fenomeno nella sua interezza.

Quando si trattano distribuzioni multivariate si possono utilizzare essenzialmente due categorie di indici per calcolare la curtosi:

- gli indici che presentano come risultato un unico valore riassuntivo per intera distribuzione;
- gli indici direzionali che permettono di identificare la curtosi per le varie direzioni della distribuzione.



I primi mirano ad identificare se è presente una distorsione rispetto al modello Normale multivariato, mentre i secondi cercano di capire in quale direzione sia presente tale allontanamento.

### 3.2.1 L'indice di Mardia

L'indice di Mardia è uno degli indici più conosciuti ed utilizzati per misurare la curtosi. Può essere considerato come una generalizzazione dell'indice di Pearson nel contesto multivariato.

**Definizione** (Mardia, 1970): sia  $X = (X_1, \dots, X_p)^T$  un vettore casuale  $p$ -dimensionale con media  $\mu = E(X)$  e matrice di varianze e covarianze non-singolare  $\Sigma = E(X - \mu)(X - \mu)^T$ , allora l'indice di curtosi è definito come

$$\beta_{2,p} = E[(X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu)]^2.$$

Come capitava per l'indice di Pearson, anche per questo indice esiste un valore di riferimento pari a  $p(p+1)$ , con  $p$  numero di dimensioni. Tale valore si ottiene se si calcola l'indice per la distribuzione Normale multivariata. Per cui, una distribuzione viene detta leptocurtica o platicurtica rispettivamente se  $\beta_{2,p} > p(p+1)$  o  $\beta_{2,p} < p(p+1)$ . Anche in questo caso, quindi, è possibile riscrivere l'indice in modo da ottenere una misura centrata attorno al valore 0.

$$\gamma_{2,p} = \beta_{2,p} - p(p+1).$$

Questa riscrittura permette una più immediata comprensione ed interpretazione dell'indice stesso.

Dalla definizione è possibile notare che il valore che l'indice restituisce è uno scalare: l'indice, infatti, fornisce una misura globale della curtosi per la distribuzione di interesse.

### 3.2.2 L'indice di Malkovich-Affi

Malkovich e Afifi (1973) hanno introdotto un diverso indice per misurare la curtosi per le distribuzioni multivariate.

**Definizione** (Malkovich e Afifi, 1973): sia  $\mathcal{O}_p$  una sfera unitaria  $p$ -dimensionale, definita come  $\mathcal{O}_p = \{x \in \mathfrak{R}^p : |x| = 1\}$ ,

la variabile casuale multivariata  $Y$  ha curtosi nella direzione  $u$  con  $u \in \mathcal{O}_p$  se:

$$[\beta_2(u)]^2 = \left[ \frac{E[(u^T Y - u^T E(Y))^4]}{[Var(u^T Y)]^2} \right]^2 > 9,$$

allora l'indice di curtosi è definito come

$$(\beta_2^*)^2 = \sup_{u \in \mathcal{O}_p} [\beta_2(u) - 3]^2.$$

Dalla definizione si nota che questo indice fa riferimento all'indice di Mardia: esso, infatti, calcola per ogni direzione  $p$  il valore dell'indice di Mardia ( $p = 1$ ) e ne fa il quadrato. Questo è il motivo per cui è presente il valore 9, che è, appunto,  $3^2$ , come valore di riferimento per l'indice: anche in questo caso si vuole centrare l'indice attorno al valore 0. Poiché l'indice restituisce come valore il maggiore tra tutti quelli calcolati, anche in questo caso si otterrà un unico scalare indicante la curtosi globale.

### 3.2.3 Un nuovo indice dimensionale

Gli indici fino ad ora presentati forniscono una visione generale della curtosi, senza dare alcuna indicazione sulla direzione. Se da una parte questo può costituire un vantaggio (gli indici sono di facile interpretazione e lettura proprio perché costituiti da un unico valore), dall'altro ciò può essere un limite: nulla, infatti, possiamo dire circa la curtosi, differenziando per le diverse direzioni. Può succedere che in alcune direzioni la distribuzione sia normocurtica, in altre platocurtica e, in altre ancora, leptocurtica, ma gli indici descritti prima non sono in grado di dircelo. Proprio per questo motivo, quando si è interessati alla descrizione minuziosa della distribuzione, o a una sua direzione particolare, si utilizzano indici direzionali di curtosi che permettono di indagare tale fenomeno tenendo conto della direzione. Altro

possibile svantaggio degli indici globali di curtosi è quello di presentare lo stesso valore per distribuzioni molto diverse tra loro: essi, infatti, definiscono una misura globale della curtosi, ma se due distribuzioni presentano lo stesso valore dell'indice non significa che si comportino nello stesso modo. Ciò succede perché non vengono considerate le direzioni, ma si condensa il fenomeno in un'unica misura.

Il primo indice matriciale presentato è stato costruito tenendo conto dello stesso procedimento adottato da Balakrishnan e coautori (2007) per ricavare l'indice di asimmetria.

Per calcolare questo nuovo indice si inizia facendo riferimento all'indice di Malkovich e Afifi (1973), presentato nella sezione precedente.

Si definisca con  $S = S_X$  la matrice di varianze e covarianze per il campione  $X = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $S^{-1/2}$  la radice dell'inversa della matrice di varianze e covarianze, tale che  $S(S^{-1/2})^2 = (S^{-1/2})^2 S = S^{-1/2} S S^{-1/2} = I_p$ , con  $I_p$  la matrice identica di ordine  $p \times p$  ( $S^{1/2}$  e  $S^{-1/2}$  sono matrici reali, definite positive e simmetriche).

**Definizione** (Malkovich e Afifi, 1973): sia  $Z_i = S^{-1/2}(X_i - \bar{X})$  per  $i = 1, \dots, n$ , allora l'indice di Malkovich e Afifi  $b_2^*$  è equivalente a

$$(b_2^*)^2 = \sup_{u \in \mathcal{O}_p} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u^T Z_i)^4 - K \right)^2,$$

con  $K$  opportuna costante.

Ogni valore  $c_{2,n}(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u^T Z_i)^4 - K$  può essere considerato come una misura di curtosi per il campione standardizzato, nella direzione  $u$ . Per indicare la direzione nella quale si sta calcolando la curtosi basterebbe moltiplicare  $u$  per  $c_{2,n}(u)$ , ma, poiché facciamo riferimento al momento quarto per il calcolo della curtosi, è si moltiplica per  $uu^T$ , in modo da ottenere una matrice  $p \times p$ . Considerando  $uu^T c_{2,n}(u)$  possiamo, quindi ottenere indicazioni sulla curtosi nella direzione  $u$ . Sommando queste espressioni per  $u$  possiamo ricavare una misura complessiva della curtosi per il campione  $X$ . Per questo motivo si considera la statistica

$$T_n = \int_{\mathcal{O}_p} uu^T c_{2,n}(u) d\lambda(u),$$

con  $\lambda$  la misura della probabilità, invariante per rotazioni, sulla sfera unitaria uniforme  $\mathcal{O}_p$ . Per ricavare l'indice di curtosi è necessario risolvere l'integrale:

$$\begin{aligned} T_n &= \int_{\mathcal{O}_p} uu^T \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u^T Z_i)^4 - K \right] d\lambda(u) \\ &= \int_{\mathcal{O}_p} uu^T \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u^T Z_i)^4 d\lambda(u) - \int_{\mathcal{O}_p} uu^T K d\lambda(u). \end{aligned}$$

Si sviluppa l'integrale per la  $r$ -esima coordinata di  $T_n$ :

$$\begin{aligned} T_{n,r} &= \int_{\mathcal{O}_p} uu^T \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j} (u_r Z_{i,r} + u_j Z_{i,j})^4 - K \right] d\lambda(u) \\ &= \int_{\mathcal{O}_p} u_r^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j} (u_r Z_{i,r} + u_j Z_{i,j})^4 d\lambda(u) - \int_{\mathcal{O}_p} u_r^2 K d\lambda(u), \end{aligned}$$

con  $Z_{i,j}$  la  $j$ -esima coordinata di  $Z_i$ .

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned} T_{n,r} &= \int_{\mathcal{O}_p} u_r^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j} (u_r Z_{i,r} + u_j Z_{i,j})^4 d\lambda(u) - \int_{\mathcal{O}_p} u_r^2 K d\lambda(u) \\ &= \int_{\mathcal{O}_p} u_r^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ u_r^4 Z_{i,r}^4 + 4 \sum_{i \neq j} u_r^3 Z_{i,r} u_j Z_{i,j} + 6 \sum_{i \neq j} u_r^2 Z_{i,r}^2 u_j^2 Z_{i,j}^2 \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{i \neq j} u_r Z_{i,r} u_j^3 Z_{i,j}^3 + \sum_{i \neq j} u_j^4 Z_{i,j}^4 \right] d\lambda(u) - \int_{\mathcal{O}_p} u_r^2 K d\lambda(u) \\ &= \int_{\mathcal{O}_p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ u_r^6 Z_{i,r}^4 + 4 \sum_{i \neq j} u_r^5 Z_{i,r} u_j Z_{i,j} + 6 \sum_{i \neq j} u_r^4 Z_{i,r}^2 u_j^2 Z_{i,j}^2 \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{i \neq j} u_r^3 Z_{i,r} u_j^3 Z_{i,j}^3 + \sum_{i \neq j} u_r^2 u_j^4 Z_{i,j}^4 \right] d\lambda(u) - K \int_{\mathcal{O}_p} u_r^2 d\lambda(u) \\ &= \int_{\mathcal{O}_p} u_r^6 d\lambda(u) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,r}^4 + 4 \sum_{i \neq j} \int_{\mathcal{O}_p} u_r^5 u_j d\lambda(u) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,r}^3 Z_{i,j} \\ &\quad + 6 \sum_{i \neq j} \int_{\mathcal{O}_p} u_r^4 u_j^2 d\lambda(u) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,r}^2 Z_{i,j}^2 + 4 \sum_{i \neq j} \int_{\mathcal{O}_p} u_r^3 u_j^3 d\lambda(u) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,r} Z_{i,j}^3 \\ &\quad + \sum_{i \neq j} \int_{\mathcal{O}_p} u_r^2 u_j^4 d\lambda(u) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,j}^4 - K \int_{\mathcal{O}_p} u_r^2 d\lambda(u). \end{aligned}$$

Per comodità possiamo riscrivere  $T_{n,r}$  utilizzando i momenti misti  $J_{i,j}$ , per  $u_i u_j$ .

$$\begin{aligned} T_{n,r} &= J_6 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,r}^4 + 4 \sum_{i \neq j} J_{5,1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,r}^3 Z_{i,j} + 6 \sum_{i \neq j} J_{4,2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,r}^2 Z_{i,j}^2 \\ &\quad + 4 \sum_{i \neq j} J_{3,3} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,r} Z_{i,j}^3 + \sum_{i \neq j} J_{2,4} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,j}^4 - K J_2. \end{aligned}$$

Poiché  $\lambda$  è la misura della probabilità, invariante per rotazioni, uniformemente distribuita nella sfera unitaria, si può applicare il Teorema per il calcolo dei momenti misti presente nel paragrafo 2.4, per risolvere gli integrali. Poiché

$$m = \sum_{i=1}^n m_i = 6,$$

si avrà che:

$$\begin{aligned} J_{2,4} &= \frac{1}{\frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} + 1\right) \left(\frac{p}{2} + 2\right)} \cdot \left[ \frac{(2 \cdot 2)!}{4^2 \cdot (2)!} \cdot \frac{(2 \cdot 1)!}{4^1 \cdot (1)!} \cdot \frac{(2 \cdot 0)!}{4^0 \cdot (0)!} \cdots \right] \\ &= \frac{8}{p(p+2)(p+4)} \cdot \frac{24}{32} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{p(p+2)(p+4)}, \end{aligned}$$

$$J_{3,3} = 0,$$

$$J_{4,2} = J_{2,4},$$

$$J_{5,1} = 0,$$

$$\begin{aligned} J_6 &= \frac{8}{p(p+2)(p+4)} \cdot \left[ \frac{(2 \cdot 3)!}{4^3 \cdot (3)!} \cdot \frac{(2 \cdot 0)!}{4^0 \cdot (0)!} \cdots \right] \\ &= \frac{8}{p(p+2)(p+4)} \cdot \frac{720}{192} = \frac{15}{p(p+2)(p+4)}. \end{aligned}$$

Invece per

$$m = \sum_{i=1}^n m_i = 2$$

si ottiene:

$$J_2 = \int_p u_r^2 d\lambda(u) = \frac{1}{p/2} \cdot \left[ \frac{(2 \cdot 1)!}{4^1 \cdot (1)!} \cdot \frac{(2 \cdot 0)!}{4^0 \cdot (0)!} \cdots \right] = \frac{2}{p} \cdot \frac{2!}{4} = \frac{1}{p}.$$

$T_{n,r}$  risulta quindi essere:

$$T_{n,r} = J_6 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,r}^4 + 6 \sum_{i \neq r} J_{4,2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,r}^2 Z_{i,j}^2 + \sum_{i \neq r} J_{2,4} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{i,j}^4 - J_2 K.$$

L'indice può essere riscritto come:

$$T_{n,r} = J_6 E(Y_r)^4 + 6 \sum_{i \neq r} J_{4,2} E(Y_r^2 Y_i^2) + \sum_{i \neq r} J_{2,4} E(Y_i^4) - J_2 K,$$

che dipende solo dai momenti quarti della distribuzione per la quale si vuole calcolare la misura.

### 3.2.4 L'indice di Srivastava

L'indice di Srivastava per distribuzioni multivariate si basa sul metodo delle componenti principali. Anche questo indice è di tipo matriciale.

**Definizione** (Srivastava, 1984): sia  $Y$  una variabile multivariata con media  $\mu$  e matrice di varianza e covarianza  $\Sigma$ ; sia  $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$  una matrice ortogonale tale che  $\Gamma^T \Sigma \Gamma = I_p(\lambda)$ , con  $I_p(\lambda) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  gli autovalori della matrice  $\Sigma$ . Definiamo  $F = \Gamma Y$  e  $\theta = \Gamma \mu$ , allora l'indice di curtosi è pari a

$$\beta_{2,p \times p} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left\{ \frac{E(F_i - \theta_i)^4}{\lambda_i^2} \right\} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left\{ \frac{E[\gamma_i^T (Y - \mu)]^4}{\lambda_i^2} \right\}.$$

La misura, perciò, è basata sul momento centrato di quarto ordine  $E[\gamma_i^T (Y - \mu)]^4$ .

### 3.2.5 L'indice di Mori-Rohatgi-Székeley

Anche Mori e coautori (1993) hanno introdotto un indice multivariato di curtosi in forma matriciale. L'indice utilizza una variabile  $Z$  standardizzata.

**Definizione** (Mori, Rohatgi e Székeley, 1993): sia  $X$  una variabile casuale  $p$ -dimensionale con matrice di varianze e covarianze  $\Sigma$  non singolare. Definiamo  $Y = \Sigma^{-1/2}(X - E(X))$ , allora l'indice di curtosi è pari a:

$$K(X) = E(YY^T Y Y^T) - (p+2)I_p,$$

con  $I_p$  una matrice identica di ordine  $p \times p$ .

L'indice  $K(X)$ , perciò, sarà anch'esso una matrice di dimensioni  $p \times p$ . Lo stesso indice può essere riscritto (Kollo, 2008) utilizzando il prodotto "star", definito nel paragrafo 2.3

$$K(X) = I_p \star M_4(Y) - (p + 2)I_p,$$

con  $I_p$  matrice identica di ordine  $p \times p$  e  $M_4$  il momento quarto non centrato.

### 3.2.6 L'indice di Kollo

Kollo parte dalla considerazione che Mardia non tiene conto dei momenti misti di ordine quarto quando calcola il suo indice. Secondo questo autore, infatti, per avere un indice completo per descrivere la curtosi per una distribuzione  $p$ -dimensionale è necessario includere tutte le componenti del momento quarto, comprese quelle miste. Per raggiungere questo scopo Kollo definisce il seguente indice, anch'esso matriciale:

**Definizione** (Kollo, 2008): sia  $X$  una variabile casuale  $p$ -dimensionale e  $Y = \Sigma^{-1/2}(X - \mu)$  con  $\mu = E(X)$  e  $\Sigma$  la matrice di varianze e covarianze per  $X$ , allora

$$B(X) = \sum_{i,j=1}^p E(Y_i Y_j)(Y Y^T).$$

Kollo ha dimostrato che tale indice può essere riscritto utilizzando il prodotto "star" nella forma che segue:

$$B(X) = 1_{p \times p} \star M_4(Y),$$

con  $1_{p \times p}$  una matrice  $p \times p$  i cui elementi sono tutti pari a 1 e  $M_4$  il momento quarto non centrato di  $Y$ .





## Capitolo 4

# Indici di curtosi per la distribuzione Normale Asimmetrica multivariata

La possibilità di avere diversi indici di curtosi può costituire un vantaggio quando si desidera descrivere una certa distribuzione: è infatti possibile scegliere quello che rispecchia maggiormente lo scopo che si vuole perseguire. Inoltre può essere utile confrontare i valori dei diversi indici per capire se vi siano sostanziali differenze e, eventualmente, indagarne il motivo.

Gli indici proposti di seguito vengono calcolati espressamente per la distribuzione Normale Asimmetrica.

Tutti gli indici si riferiscono alla variabile  $Y \sim SN(\xi, \Omega, \alpha)$  con media

$$E(Y) = \xi + \mu$$

e varianza

$$Var(Y) = \Omega - \mu\mu^T,$$

con  $\mu = \omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta$ .

### 4.1 L'indice di Mardia

L'indice di Mardia centrato, definito nel paragrafo 3.2.1, per la variabile Normale Asimmetrica multivariata è stato calcolato da Azzalini e Capitanio

nel 1999. Essi utilizzano la funzione generatrice dei cumulanti, derivata dalla funzione generatrice dei momenti per riscrivere l'indice. L'indice di Mardia calcolato per la distribuzione Normale Asimmetrica risulta pari a (Azzalini e Capitanio, 2005):

$$\gamma_{2,p} = \beta_{2,p} - p(p+2) = 2(\pi - 3) \left( \frac{\mu_Z^T \bar{\Omega}^{-1} \mu_Z}{1 - \mu_Z^T \bar{\Omega}^{-1} \mu_Z} \right),$$

con  $\mu_Z = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta$ , il valore atteso della variabile casuale  $Z = \omega^{-1}(Y - \xi) \sim SN(0, \bar{\Omega}, \alpha)$ .

Come si può notare l'indice viene calcolato per una variabile Normale Asimmetrica standardizzata con parametro di posizione pari al vettore nullo. Questo perchè l'indice è invariante per trasformazioni non singolari. Di conseguenza il vettore  $\xi$  e la matrice diagonale  $\omega$  non influenzano il risultato.

## 4.2 L'indice di Malkovich-Affi

Per ottenere questo indice quando la variabile si distribuisce come una Normale Asimmetrica, è utile considerare la trasformazione lineare presente nel paragrafo 1.2.2 che definisce una sorta di forma canonica per la distribuzione Normale Asimmetrica multivariata (Proposizione IV). Attraverso questa trasformazione, infatti, solo un'unica componente assorbe la non normalità per l'intera distribuzione. In questo caso, allora, si avrà che, al più, nell'unica direzione che assorbe la non normalità, si potrà riscontrare una curtosi diversa da quella della Normale standard: ognuna delle altre direzioni si distribuirà come una Normale standard.

Poiché  $\beta_2(u)$  può essere riscritto, per la singola direzione  $u$ , come

$$[\beta_2(u)] = \frac{E[(u^T Y - u^T E(Y))^4]}{[Var(u^T Y)]^2} - 3,$$

esso risulta pari all'indice di Mardia univariato  $\gamma_2$  con  $p = 1$  (si sta infatti trattando un'unica direzione).

L'indice  $\beta_2(u)$  sarà pari a 0 per tutte le direzioni, tranne per quella che presenta la non normalità. Poiché l'indice di Malkovich e Affi sceglie il valore più elevato tra tutti quelli calcolati per ogni singola direzione elevato

al quadrato, esso risultà pari a quello di Mardia elevato al quadrato:

$$\gamma_2 = [\beta_{2,p} - p(p+2)]^2 = \left[ 2(\pi - 3) \left( \frac{\mu_Z^T \bar{\Omega}^{-1} \mu_Z}{1 - \mu_Z^T \bar{\Omega}^{-1} \mu_Z} \right) \right]^2.$$

### 4.3 Il nuovo indice direzionale

Per calcolare questo indice per la distribuzione Normale Asimmetrica multivariata è necessario ricavare i valori di  $E(Y_r^4)$ ,  $E(Y_r^2 Y_i^2)$  e  $E(Y_i^4)$ . Per risolvere questi calcoli si utilizza la matrice relativa al momento quarto non centrato per la distribuzione Normale Asimmetrica, calcolato da Genton e coautori (2001), riportato nel paragrafo 1.2.1. Attraverso questa matrice, infatti, è possibile calcolare i momenti di interesse specifici per la generica  $Y_i$  e  $Y_{i,j}$ .

$$\begin{aligned} E(Y_i^4) &= M_4 [(i-1)p + i, (i-1)p + i] \\ &= \omega_{ii} \xi_i^2 + \omega_{ii} \xi_i^2 + \omega_{ii} \xi_i^2 + \xi_i^4 + \omega_{ii}^2 + \omega_{ii}^2 + \omega_{ii}^2 + \omega_{ii} \xi_i^2 + \omega_{ii} \xi_i^2 + \omega_{ii} \xi_i^2 \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \delta_i \omega_{ii} \xi_i + \delta_i \omega_{ii} \xi_i + \delta_i \omega_{ii} \xi_i + \delta_i \xi_i^3 + \delta_i \xi_i^3 + \delta_i \xi_i^3 + \delta_i \omega_{ii} \xi_i \right. \\ &\quad + \delta_i \omega_{ii} \xi_i + \delta_i \omega_{ii} \xi_i + \delta_i \omega_{ii} \xi_i + \delta_i \omega_{ii} \xi_i + \delta_i \omega_{ii} \xi_i + \delta_i \omega_{ii} \xi_i + \delta_i \omega_{ii} \xi_i + \delta_i \omega_{ii} \xi_i \\ &\quad \left. + \delta_i^2 \xi_i^2 - \delta_i^3 \xi_i - \delta_i^3 \xi_i - \delta_i^3 \xi_i - \delta_i^3 \xi_i \right] \\ &= 6\omega_{ii} \xi_i^2 + \xi_i^4 + 3\omega_{ii}^2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ 12\delta_i \omega_{ii} \xi_i + 3\delta_i \xi_i^3 + \delta_i^2 \xi_i^2 - 4\delta_i^3 \xi_i \right] \\ &= 6\omega_{ii} \xi_i^2 + \xi_i^4 + 3\omega_{ii}^2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta_i \xi_i \left[ 12\omega_{ii} + 3\xi_i^2 + \delta_i \xi_i - 4\delta_i \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y_i^2 Y_j^2) &= M_4 [(i-1)p + i, j] \\ &= \omega_{ij} \xi_i \xi_j + \omega_{ij} \xi_i \xi_j + \omega_{ii} \xi_j^2 + \xi_i^2 \xi_j^2 + \omega_{ij}^2 + \omega_{ii} \omega_{jj} + \omega_{ij}^2 + \omega_{ij} \xi_i \xi_j + \omega_{ii} \xi_i^2 + \omega_{ij} \xi_i \xi_j \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \delta_i \omega_{ij} \xi_j + \delta_j \omega_{ii} \xi_j + \delta_i \omega_{ij} \xi_j + \delta_i \xi_i \xi_j^2 + \delta_i \xi_i^2 \xi_j + \delta_i \xi_i \xi_j^2 + \delta_j \omega_{ij} \xi_i \right. \\ &\quad + \delta_i \omega_{ii} \xi_i + \delta_j \omega_{ij} \xi_i + \delta_i \omega_{ji} \xi_j + \delta_j \omega_{ii} \xi_j + \delta_i \omega_{ij} \xi_j + \delta_j \omega_{ij} \xi_i + \delta_i \omega_{ii} \xi_i + \delta_j \omega_{ij} \xi_i \\ &\quad \left. + \delta_i \delta_j \xi_i \xi_j - \delta_i^2 \delta_j \xi_j - \delta_i \delta_j^2 \xi_i - \delta_i^2 \delta_j \xi_j - \delta_i \delta_j^2 \xi_i \right] \\ &= 4\omega_{ij} \xi_i \xi_j + \omega_{ii} \xi_j^2 + \xi_i^2 \xi_j^2 + 2\omega_{ij}^2 + \omega_{ii} \omega_{jj} + \omega_{ii} \xi_i^2 \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ 4\delta_i \omega_{ij} \xi_j + 2\delta_j \omega_{ii} \xi_j + 2\delta_i \xi_i \xi_j^2 + \delta_j \xi_i^2 \xi_j + 4\delta_j \omega_{ij} \xi_i + 2\delta_i \omega_{ij} \xi_i \right. \\ &\quad \left. + \delta_i \delta_j \xi_i \xi_j - 2\delta_i^2 \delta_j \xi_j - 2\delta_i \delta_j^2 \xi_i \right], \end{aligned}$$

con  $M_4[\cdot, \cdot]$  gli elementi della matrice  $M_4$ , riportata nel paragrafo 1.2.1. Inserendo questi risultati nella formula, si ricava l'indice desiderato:

$$\begin{aligned}
T_{n,r} = & J_6 \{ 6\omega_{ii}\xi_i^2 + \xi_i^4 + 3\omega_{ii}^2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta_i\xi_i [12\omega_{ii} + 3\xi_i^2 + \delta_i\xi_i - 4\delta_i] \} \\
& + 6 \sum_{i \neq r} \{ 4\omega_{ij}\xi_i\xi_j + \omega_{ii}\xi_j^2 + \xi_i^2\xi_j^2 + 2\omega_{ij}^2 + \omega_{ii}\omega_{jj} + \omega_{ii}\xi_i^2 \\
& + \sqrt{\frac{2}{\pi}} [4\delta_i\omega_{ij}\xi_j + 2\delta_j\omega_{ii}\xi_j + 2\delta_i\xi_i\xi_j^2 + \delta_j\xi_i^2\xi_j + 4\delta_j\omega_{ij}\xi_i + 2\delta_i\omega_{ij}\xi_i \\
& + \delta_i\delta_j\xi_i\xi_j - 2\delta_i^2\delta_j\xi_j - 2\delta_i\delta_j^2\xi_i] \} \\
& \sum_{i \neq r} \{ 6\omega_{jj}\xi_j^2 + \xi_j^4 + 3\omega_{jj}^2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta_j\xi_j [12\omega_{jj} + 3\xi_j^2 + \delta_j\xi_j - 4\delta_j] \} - J_2K.
\end{aligned}$$

## 4.4 L'indice di Srivastava

Per calcolare l'indice di Srivastava è necessario utilizzare il momento centrato di quarto ordine per la variabile multidimensionale  $Y$ . Tuttavia è possibile operare la seguente ricodificazione  $X = (Y - \mu)$  e calcolare il momento quarto non centrato  $M_4$  per  $X$ , in modo da poter ottenere quello centrato per  $Y$ . È possibile, quindi, riscrivere l'indice con la nuova notazione introdotta:

$$\beta_{2,p \times p} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left\{ \frac{E [\gamma_i^T(X)]^4}{\lambda_i^2} \right\}.$$

Ora è necessario calcolare  $E [\gamma_i^T(X)]^4$ . Utilizzando le trasformazioni affini dei momenti si ottiene che:

$$E [\gamma_i^T(X)]^4 = (\gamma_i^T \otimes \gamma_i^T) M_4(\gamma_i \otimes \gamma_i).$$

Per adattare l'indice e calcolarlo per la distribuzione Normale Asimmetrica multivariata è sufficiente sostituire il momento quarto non centrato (paragrafo 1.2.1) calcolato per la distribuzione Normale Asimmetrica, dopo aver

centrato la variabile.

$$\begin{aligned}
E [\gamma_i^T(X)]^4 &= (\gamma^T \otimes \gamma^T) M_4(\gamma \otimes \gamma) \\
&= (\gamma_i^T \otimes \gamma_i^T) \left( \Omega \otimes \xi \otimes \xi^T + \xi \otimes \Omega \otimes \xi^T \right. \\
&\quad + \text{vec}(\Omega) \otimes \xi^T \otimes \xi^T + \xi \otimes \xi^T \otimes \xi \otimes \xi^T + \Omega \otimes \Omega \\
&\quad + \text{vec}(\Omega) \text{vec}(\Omega)^T + U_{p,p}(\Omega \otimes \Omega) + \xi^T \otimes \Omega \otimes \xi \\
&\quad + \xi \otimes \xi \otimes \text{vec}(\Omega)^T + \xi \otimes \xi^T \otimes \Omega + \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\delta \otimes \Omega \otimes \xi^T \\
&\quad + \text{vec}(\Omega) \otimes \delta^T \otimes \xi^T + ((I_p \otimes \delta)\Omega) \otimes \xi^T + \delta \otimes \xi^T \otimes \xi \otimes \xi^T \\
&\quad + \xi \otimes \delta^T \otimes \xi \otimes \xi^T + \xi \otimes \xi^T \otimes \delta \otimes \xi^T + \delta^T \otimes \Omega \otimes \xi \\
&\quad + \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^T \otimes \xi + (\Omega(I_p \otimes \delta^T)) \otimes \xi + \xi^T \otimes \delta \otimes \Omega \\
&\quad + \xi^T \otimes (\text{vec}(\Omega)\delta^T) + \xi^T \otimes ((I_p \otimes \delta)\Omega) + \xi \otimes \delta^T \otimes \Omega \\
&\quad + \xi \otimes \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^T + \xi \otimes (\Omega(I_p \otimes \delta^T)) + \xi \otimes \xi^T \otimes \delta \otimes \delta^T \\
&\quad - \delta \otimes \delta^T \otimes \delta \otimes \xi^T - \delta^T \otimes \delta \otimes \delta^T \otimes \xi - \xi^T \otimes \delta \otimes \delta^T \otimes \delta \\
&\quad \left. - \xi \otimes \delta^T \otimes \delta \otimes \delta^T \right) (\gamma_i \otimes \gamma_i).
\end{aligned}$$

## 4.5 L'indice di Mori-Rohatgi-Székeley

Utilizzando il momento quarto della distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale calcolato da Genton e coautori (2001), riportato nel paragrafo 1.2.1, è possibile ottenere l'indice di curtosi di Mori-Rohatgi-Székeley.

$$\begin{aligned}
K(X) &= I_p \star \left( \Omega \otimes \xi \otimes \xi^T + \xi \otimes \Omega \otimes \xi^T + \text{vec}(\Omega) \otimes \xi^T \otimes \xi^T + \xi \otimes \xi^T \otimes \xi \otimes \xi^T + \right. \\
&\quad + \Omega \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega) \text{vec}(\Omega)^T + U_{p,p}(\Omega \otimes \Omega) + \xi^T \otimes \Omega \otimes \xi + \xi \otimes \xi \otimes \text{vec}(\Omega)^T \\
&\quad + \xi \otimes \xi^T \otimes \Omega + \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\delta \otimes \Omega \otimes \xi^T + \text{vec}(\Omega) \otimes \delta^T \otimes \xi^T + ((I_p \otimes \delta)\Omega) \otimes \xi^T \\
&\quad + \delta \otimes \xi^T \otimes \xi \otimes \xi^T + \xi \otimes \delta^T \otimes \xi \otimes \xi^T + \xi \otimes \xi^T \otimes \delta \otimes \xi^T + \delta^T \otimes \Omega \otimes \xi \\
&\quad + \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^T \otimes \xi + (\Omega(I_p \otimes \delta^T)) \otimes \xi + \xi^T \otimes \delta \otimes \Omega + \xi^T \otimes (\text{vec}(\Omega)\delta^T) \\
&\quad + \xi^T \otimes ((I_p \otimes \delta)\Omega) + \xi \otimes \delta^T \otimes \Omega + \xi \otimes \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^T + \xi \otimes (\Omega(I_p \otimes \delta^T)) \\
&\quad + \xi \otimes \xi^T \otimes \delta \otimes \delta^T - \delta \otimes \delta^T \otimes \delta \otimes \xi^T - \delta^T \otimes \delta \otimes \delta^T \otimes \xi \\
&\quad \left. - \xi^T \otimes \delta \otimes \delta^T \otimes \delta - \xi \otimes \delta^T \otimes \delta \otimes \delta^T \right) - (p+2)I_p.
\end{aligned}$$

Si noti che il nuovo indice calcolato utilizza solo gli elementi diagonali della matrice dei momenti quarti non centrati. Infatti la matrice  $K(X)$  è una matrice di dimensioni  $p \times p$ , risultato di un “collassamento” di alcune parti della matrice relativa ai momenti quarti non centrati. In particolare, gli elementi che vengono eliminati sono quelli al di fuori della diagonale della matrice  $M_4$ . La ragione per cui avviene questa eliminazione è che la matrice identica, che ha la diagonale costituita da tutti valori pari a 1 e i rimanenti elementi, al di fuori della diagonale, pari a 0, viene messa in relazione, tramite il prodotto “star”, con quella dei momenti quarti centrati. La matrice identica, quindi, opera sulla matrice dei momenti quarti non centrati eliminando gli elementi al di fuori della diagonale.

## 4.6 L’indice di Kollo

Anche in questo caso è possibile calcolare l’indice di curtosi di Kollo, specifico per la distribuzione Normale Asimmetrica, sostituendo la matrice di momenti quarti non centrati (paragrafo 1.2.1) nella formula presentata nel paragrafo 3.2.6. Si otterrà quindi

$$\begin{aligned}
K(X) = & 1_p \star \left( \Omega \otimes \xi \otimes \xi^T + \xi \otimes \Omega \otimes \xi^T + \text{vec}(\Omega) \otimes \xi^T \otimes \xi^T + \xi \otimes \xi^T \otimes \xi \otimes \xi^T + \right. \\
& + \Omega \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega)\text{vec}(\Omega)^T + U_{p,p}(\Omega \otimes \Omega) + \xi^T \otimes \Omega \otimes \xi + \xi \otimes \xi \otimes \text{vec}(\Omega)^T \\
& + \xi \otimes \xi^T \otimes \Omega + \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\delta \otimes \Omega \otimes \xi^T + \text{vec}(\Omega) \otimes \delta^T \otimes \xi^T + ((I_p \otimes \delta)\Omega) \otimes \xi^T \\
& + \delta \otimes \xi^T \otimes \xi \otimes \xi^T + \xi \otimes \delta^T \otimes \xi \otimes \xi^T + \xi \otimes \xi^T \otimes \delta \otimes \xi^T + \delta^T \otimes \Omega \otimes \xi \\
& + \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^T \otimes \xi + (\Omega(I_p \otimes \delta^T)) \otimes \xi + \xi^T \otimes \delta \otimes \Omega + \xi^T \otimes (\text{vec}(\Omega)\delta^T) \\
& + \xi^T \otimes ((I_p \otimes \delta)\Omega) + \xi \otimes \delta^T \otimes \Omega + \xi \otimes \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^T + \xi \otimes (\Omega(I_p \otimes \delta^T)) \\
& + \xi \otimes \xi^T \otimes \delta \otimes \delta^T - \delta \otimes \delta^T \otimes \delta \otimes \xi^T - \delta^T \otimes \delta \otimes \delta^T \otimes \xi \\
& \left. - \xi^T \otimes \delta \otimes \delta^T \otimes \delta - \xi \otimes \delta^T \otimes \delta \otimes \delta^T \right].
\end{aligned}$$

In questo caso anche se delle parti della matrice  $M_4$  “collassano”, ciò succede perché alcuni elementi vengono sommati tra loro, e non eliminati, come succedeva precedentemente. Ciò accade perché, a differenza dell’indice di Mori-Rohatgi-Székeley, la matrice messa in relazione con quella dei momenti quarti non centrati non è più una matrice identica, ma una matrice  $i$  cui

elementi sono tutti pari a 1. In questo caso, allora, come appunto desiderava Kollo, anche momenti misti vengono considerati nell'indice, anche se l'indice è comunque una matrice  $p \times p$ .





# Capitolo 5

## Conclusioni

I primi due indici presentati, Mardia e Malkovich-Afifi, riassumono l'intero fenomeno in un unico scalare.

L'indice di Mardia, applicato alla distribuzione Normale Asimmetrica, varia tra 0 e 0,869 (Azzalini, 2005). Il suo campo di variazione è quindi limitato. Questo indice, perciò, sarà pari a 0 solo nel caso in cui tutte le componenti della distribuzione multivariata si distribuiscono come una Normale standard. In tutti gli altri casi presenterà un valore necessariamente diverso da 0, ma positivo. Esso identifica la distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale come una distribuzione leptocurtica. Il parametro di forma, non intervenendo solo sulla simmetria, innalza la curva, rendendo le code più leggere. Il fatto, comunque, che il campo di variazione di questo indice risulti piuttosto ristretto, permette di capire che la distribuzione Normale Asimmetrica riesce a modellare bene dati che presentano leggere asimmetrie. Infatti, la forma della distribuzione sostanzialmente non cambia anche se i parametri relativi a due diverse distribuzioni differiscono di molto, ma sono grandi.

L'indice di Malkovich e Afifi è calcolato come il quadrato dell'indice di Mardia, quindi il suo campo di variazione sarà ancora più ristretto  $(0; 0,869^2)$ . L'indice sarà pari a 0 solo nel caso in cui la distribuzione sia una Normale multivariata. Sicuramente, però, questo indice enfatizza le differenze che intercorrono tra una distribuzione e l'altra: se si presuppone, ad esempio, che l'indice di Mardia per la distribuzione  $A$  è pari a 0.2, mentre per la distri-

buzione  $B$  è pari a 0.3, quindi con solo un punto di scarto, gli stessi valori diventano per l'indice di Malkovich e Afifi pari, rispettivamente, a 0.04 e a 0.09, quindi con cinque punti di scarto. L'indice, perciò, risulta più sensibile. Gli altri indici presentati sono costituiti da matrici tutte di dimensioni  $p \times p$ . Essi, quindi, permettono di calcolare la simmetria per ognuna delle direzioni e per ciascuna coppia di direzioni. Questo permette un'analisi più dettagliata della curtosi. Tutti, inoltre, fanno riferimento al quarto momento della distribuzione.

Il nuovo indice proposto vuole cercare di modificare l'indice di Mardia per riuscire a calcolare un nuovo indice direzionale. Ci si aspetta che, per ogni singola componente della nuova matrice calcolata, il campo di variazione sia quello già descritto per l'indice di Mardia.

L'indice di Srivastava introduce nella formula l'utilizzo degli autovalori della matrice di varianze e covarianze. Egli, per calcolare la curtosi, adotta il metodo delle componenti principali. Sarebbe interessante capire, una volta applicato questo indice alla distribuzione Normale Asimmetrica, se i valori calcolati differiscano rispetto agli altri indici direzionali proposti, e come si comporta questo indice per diverse distribuzioni Normali Asimmetriche.

Gli ultimi due indici si differenziano essenzialmente per il tipo di elementi che vengono presi in considerazione quando viene calcolata la matrice: Mori e coautori scelgono di utilizzare solo gli elementi diagonali della matrice dei momenti quarti non centrati, mentre Kollo anche i momenti misti, cioè quelli al di fuori della diagonale. Concettualmente l'indice di Kollo risulta il più completo quando si vuole indagare "minuziosamente" come si comporta la curtosi per ciascuna delle direzioni. Anche in questo caso, sarebbe importante capire come e quando questi due indici differiscano, confrontando le due matrici per diversi casi.

Lo studio presentato può essere ulteriormente sviluppato e approfondito calcolando gli indici per diverse distribuzioni Normali Asimmetriche ed analizzando come si comportano e quali sono le differenze che intercorrono. Purtroppo, gli indici considerati non sono direttamente confrontabili poiché non hanno la stessa scala di misura. Per ottenere delle misure comparabili è necessario considerare la versione campionaria di ogni indice e, per ciascuna di queste, eventualmente effettuare un test statistico avente come ipotesi nulla

l'ipotesi di normalità. Per ognuno di questi test, che presentano la medesima ipotesi nulla, è possibile ricavare il  $p$ -value e la potenza. Quest'ultima quantifica l'abilità di ogni indice nell'identificare la curtosi presente nella distribuzione in esame. Il  $p$ -value e la potenza del test, essendo entrambi delle probabilità, possono essere utilizzati per confrontare i diversi indici, senza problemi di scala.



# Ringraziamenti

Un grazie enorme alla mia famiglia: alla Mamma perchè mi hai insegnato che ci vuole passione e grinta nella vita; al Papà, anche se ancora oggi mi chiede se sono capace di fare una derivata o un limite, so che crede in me; a Lorenza, la mia meravigliosa Sorella che mi ha spronato con la sua irrefrenabile testardaggine e che non mi lascia mai sola.

Grazie alla mia grande e scoppiettante Famiglia, zie, zii, cugine e cugini: con voi ogni festa è un successo!

Un grosso bacio a Nonna Iole, orgogliosa dei miei successi, ma anche a Nonno Aldo, Nonno Giovanni e Nonna Gilda: so che c'è anche il vostro zampino.

Grazie alle mie fantastiche amiche Martina, Elisa, Pan e Francesca: rendete le mie gioie più dolci e i miei dolori un po' meno amari.

Grazie al "mio" Professore che mi ha insegnato a puntare in alto, ma a prendere quello che viene.

Grazie a Silvia, Taddeo, Illy, Pilo, Seba e Leonardo: non si possono condividere certe esperienze senza finire col diventare amici.

Un grazie anche a tutta la "facoltà" di Scienze Statistiche: ai professori per avermi fatto amare questa materia, ai miei compagni per aver condiviso questo percorso, al personale tecnico e amministrativo per la disponibilità e la competenza, in particolare grazie al Prof. Mazzuco, alla Dottoressa Sartorelli e alla Signora Delfina.

Grazie a Maestre e Professori, incontrati nel mio percorso scolastico, che "hanno tirato fuori", invece di "mettere dentro".

Un grazie anche a Giuseppina, Giuliana e Rosanna per i loro preziosi consigli.

Grazie a Miky per la sua felina complicità.

Infine, un immenso grazie a Giordano: perchè mi metti sempre al primo posto. Sei il mio sole. Tu sai quanto ti devo.



# Bibliografia

- Azzalini A. (1985): A Class of Distribution which Includes the Normal Ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, 12, 171-178 .
- Azzalini A. (2006): Some recent developments in the theory of distribution and their applications. *Atti della XLIII Riunione Scientifica*.
- Azzalini, A., Capitanio, A. (1999): Statistical applications of the multivariate skew normal distribution. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 61, 579-602.
- Azzalini, A.(2005): The Skew-normal Distribution and Related Multivariate Families. *Scandinavian Journal of Statistics*, 32, 159-188.
- Azzalini A.,Dalla Valle A. (1996): The multivariate skew-normal distribution. *Biometrika*, 83, 715–726.
- Balakrishnan N., Brito M.R., Quiroz A.J.(2007): A vectorial notion of skewness and its use in testing for multivariate symmetry. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 36, 1757–1767.
- Balakrishnan N., Scarpa B. (2012): Multivariate measures of skewness for the skew-normal distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, 104, 73-87.
- Chissom B.S. (1970): Interpretation of the Kurtosis Statistic. *The American Statistician*, October, 19-22
- Darlington R.B. (1970): Is Kurtosis Really “Peakedness?”. *The American Statistician*, April, 19-22.

- Fang K.T., Kotz S., Ng K.W. (1990): Symmetric Multivariate And Related Distributions. *Monographs on Statistics and Applied Probability*, 36, Chapman and Hall, London.
- Finucan H. M. (1964): A Note on Kurtosis. *Journal of Royal Statistics*, B, 111-112.
- Franco S. (2011): La matrice di informazione attesa per la distribuzione normale asimmetrica estesa bidimensionale. *Tesi di laurea magistrale, Dipartimento di Scienze Statistiche, Università degli Studi di Padova*.
- Genton M.G., He L., Liu X. (2001): Moments of skew-normal random vectors and their quadratic forms. *Statistics & Probability Letters*, 51, 319–325.
- Giorgi E. (2012): Indici non parametrici per famiglie parametriche. *Tesi di laurea magistrale, Dipartimento di Scienze Statistiche, Università degli Studi di Padova*.
- Graham A. (1981): Kronecker Products and Matrix Calculus With Applications. *Ellis Horwood Limited, Chichester*.
- Kollo T. (2008): Multivariate shewness and kurtosis measures with an application in ICA. *Journal of Multivariate Analysis*, 99, 2328-2338.
- Malkovich J.F., Afifi A.A. (1973): On tests for multivariate normality. *Journal of the American Statistical Association*, 68, 176–179.
- Mardia K.V. (1970): Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika*, 36, 519–530.
- MecRae E. C., (1974): Matrix derivatives with an application to an adaptive linear decision problem. *Ann. Statist.*, 2, 337-346.
- Mori T.F., Rohatgi V.K., Székely G.J. (1993): On multivariate skewness and kurtosis. *Theory of Probability and its Application*, 38, 547-551.
- Piccolo D. (2000): *Statistica. Il Mulino, Bologna*



Srivastava M.S. (1984): A measure of skewness and kurtosis and a graphical method for assessing multivariate normality. *Statistics & Probability Letters* , 2, 263-267.