Università di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Equilibri Correlati:
Esistenza e Approssimazioni

Relatore
Prof. Markus Fischer
Università di Padova

Laureando
Gabriele Sanguin

Matricola
1217647

Anno Accademico 2021-2022
16 Dicembre 2022

Contenuti

Abstract

Nel seguente elaborato si vuole dare un'introduzione al concetto di *equilibrio correlato* nella teoria dei giochi. L'equilibrio correlato, che può essere visto come una generalizzazione della più famosa nozione di *equilibrio di Nash*, è stato proposto per la prima volta da Robert J. Aumann nel 1974 e serve ad evidenziare le opportunità strategiche per dei giocatori che devono prendere in considerazione anche il coinvolgimento di un *mediatore* esterno. Si vedrà quindi un'ampia presentazione dell'equilibrio correlato, dandone la definizione e provando la sua esistenza in ogni gioco finito e non. Si daranno inoltre altri risultati utili allo studio e al calcolo di questi equilibri, in particolare alla proprietà di convessità del loro insieme e alla loro relazione con la programmazione lineare.

Introduzione

Come punto di partenza, in questa introduzione spiegheremo quali sono le ragioni che hanno portato alla formulazione dell concetto di Equilibrio Correlato, nonché il motivo d'interesse del suo studio rispetto all'equilibrio di Nash. Nel capitolo 1 *"Definizioni di Teoria dei Giochi"* saranno presentate formalmente alcune nozioni fondamentali della materia e le proprietà principali degli equilibri correlati, seguendo la notazione del libro "Game Theory" di M. Maschler, E. Solan e S. Zamir [MSZ13]. Si passa poi alla dimostrazione della loro esistenza nel capitolo 2, differenziando nei casi in cui l'insieme dei giocatori è un insieme finito, quando è infinito e nel caso generale nel quale anche l'insieme di strategie di ogni giocatore è di dimensione arbitraria. Infine nel capitolo 3 vedremo l'equilibrio correlato scritto come intersezione di semi-spazi, punto di partenza per studiarne altre proprietà e per metterlo in relazione con la programmazione lineare.

Quando consideriamo l'equilibrio di Nash, pensiamo ad esso come al concetto standard di razionalità nella Teoria dei Giochi: è il modo più comune per descrivere la soluzione di un gioco non-cooperativo con 2 o più giocatori. In breve, un equilibrio di Nash è un profilo di strategie (una per ciascun giocatore) rispetto al quale nessun giocatore ha intenzione ad essere l'unico a cambiare la propria decisione, un cambiamento unilaterale non porterà quindi alcun profitto.

Seppure la definizione ci appare semplice e naturale, tuttavia ci chiediamo, con qualche riflessione, perché e sotto quali condizioni ci aspettiamo dai giocatori di arrivare a un tale equilibrio, che in molti casi risulta essere poco attraente nonostante la possibile unicità. L'equilibrio di Nash prende davvero un senso se iniziamo a presupporre che per qualche specifica ragione, ogni giocatore conosce quale strategia gli altri giocatori useranno, ma questa assunzione può risultare restrittiva quando applicata in un contesto reale. Facciamo di seguito un esempio che mette in risalto questo aspetto di poca praticità nell'utilizzo degli equilibri di Nash.

(*Rivisitazione del Gioco dei Sessi*) Due amici devono decidere uno sport da giocare insieme, uno preferisce il calcio mentre il secondo vorrebbe giocare a basket. I guadagni dei giocatori vanno intesi in termini di "soddisfazione" dall'outcome finale delle scelte e sono riassunti nella tabella qui sotto. Notiamo che nel caso vengano decise 2 attività diverse nessuno rimane soddisfatto.

	Calcio	Basket
Calcio	(2,1)	(0,0)
Basket	(0,0)	(1,2)

Pensando all'unico equilibrio di Nash nelle strategie miste, ciascun giocatore randomizza tra le scelte indipendentemente dall'amico: può scegliere il calcio con una probabilità di $2/3$ se gli piace di più e con $1/3$ la pallacanestro. L'amico utilizzarà lo stesso ragionamento ma invertendo gli sport. In questo modo però, notiamo che esce con una probabilità positiva (pari a $5/9$) la possibilità che uno scelga il calcio e l'altro scelga il basket.
Proviamo ora a pensare ad una interazione nella vita reale tra due amici: è più facile che questi decidano insieme di giocare magari oggi a calcio e domani a basket. Questo tipo di relazione, assolutamente naturale, non viene preso in considerazione utilizzando gli equilibri di Nash, ma al contrario, è proprio quello che le strategie correlate vorrebbero catturare mediante l'introduzione di un dispositivo di mediazione. I due amici decidono ad esempio di lanciare una moneta, con l'accordo che se esce testa sceglieranno di giocare a calcio, se esce croce a basket. Questa è l'idea alla base degli equilibri correlati.

Osservazione 0.1. A differenza dell'equilibrio di Nash, nel quale ogni giocatore sceglie la sua azione indipendenemente l'uno dall'altro, nelle strategie correlate un *mediatore esterno* consiglia una strategia a ciascun giocatore, scegliendo da una distribuzione di probabilità sull'insieme di tutti i vettori di strategie. Tale distribuzione è nota a tutti i giocatori, ma ad ogni giocatore il consiglio è dato in privato: a ciascuno viene rivelato solamente il proprio suggerimento e non quello degli altri.

Osservazione 0.2. Notiamo che il campo di studio degli equilibri correlati rimane sempre quello di giochi non-cooperativi perché i giocatori non possono parlare tra di loro ed il "consiglio" del mediatore non è poi vincolante alla decisione finale del singolo giocatore.

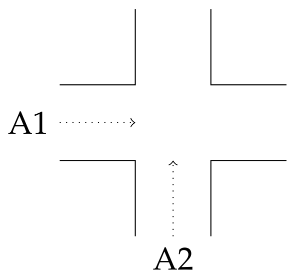
Tentando di riassumere quanto detto fin'ora, perché in un gioco vogliamo studiare quest'approccio differente, caratterizzato dall'entrata di un agente mediatore?

Innanzitutto l'abbiamo visto essere un modo per dare una spiegazione alternativa alla *razionalità* dei giocatori: essi capiscono che in una situazione nella quale giochino in modo totalmente indipendente gli uni dagli altri, esiste una probabilità positiva, seppur magari molto piccola, per un outcome in generale poco desiderato (nel caso precedente può essere che i due amici scelgono sport diversi ed entrambi ottengono un guadagno 0) e questo porta un giocatore razionale ad incorporare una sorta di dispositivo che può migliorare il risultato finale. Il secondo motivo per il quale si va verso questo approccio correlato è quindi il fatto che l'utilità attesa di tutti i giocatori può essere maggiore rispetto all'utilità che si ottiene utilizzando le strategie miste di un equilibrio di Nash. Infine, una terza ragione si può trovare in campo computazionale. Il calcolo degli equilibri correlati risulta essere meno complicato e "costoso" (è in tempo polinomiale) in confronto a quello per un equilibrio di Nash (che è invece computazionalmente difficile), e questa loro semplicità li rende adatti ad una maggiore flessibilità e ad un maggior utilizzo pratico.

Un classico esempio che chiarifica la differenza tra equilibrio correlato ed equilibrio di Nash e che ci da un'idea concreta e reale di un dispositivo di mediazione è l'*incrocio stradale*.

(*Incrocio Stradale*). Due autisti, $A1$ e $A2$ arrivano contemporaneamente al-

l'incrocio a X come nella figura sottostante e possono scegliere se passare subito senza fermarsi (GO) o se invece aspettare (STOP). Ad entrambi i "giocatori" non piace stare fermi, tuttavia nel caso entrambi decidono di passare, questo causerà un incidente, risultando in una grossa perdita di tempo.
I payoff sono riassunti nella sottostante tabella a destra.



	Stop	Go
Stop	(0,0)	(1,2)
Go	(2,1)	(-10,-10)

Si osserva immediatamente che ci sono due puri equilibri di Nash, (Go, Stop) e (Stop, Go), le cui rispettive utilità sono (2,1) e (1,2). Ciascuno dei due giocatori infatti, se devia dalla propria strategia, ci rimetterebbe. L'equilibrio in strategie miste risulta invece essere $([\frac{11}{13}(\text{Stop}), \frac{2}{13}(\text{Go})], [\frac{11}{13}(\text{Stop}), \frac{2}{13}(\text{Go})])$ con un guadagno di $(\frac{2}{13}, \frac{2}{13})$.

Ora, cosa succede se all'incrocio ci fosse un semaforo? Gli autisti hanno ancora la possibilità di scegliere se fermarsi o meno, ma la loro scelta è suggerita da un dispositivo che funge da mediatore. Chi ha la luce verde prosegue, chi ha la luce rossa si ferma. Supponendo che le la luce verde e quella rossa hanno la stessa durata, che possiamo pensare come alla scelta tra i vettori di strategia (Go, Stop) e (Stop, Go) con probabilità $1/2$, e supponendo che gli autisti seguano il "consiglio" del semaforo, allora il payoff atteso cambia in ($\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$). Decisamente maggiore rispetto a quello di Nash in strategie miste!

Questo è dovuto al fatto che i giocatori non giocano più indipendentemente l'uno dall'altro, ma sono uniti da un dispositivo di correlazione. Resta importante ribadire che la presenza di un *mediatore* non implica che ci troviamo in un gioco cooperativo, al contrario restiamo nel campo di lavoro di giochi non-cooperativi, in quanto ai giocatori non è permesso parlare fra loro quando è tempo di prendere la decisione, essi si limitano ad ascoltare (o osservare) il proprio suggerimento.

1 Definizioni di Teoria dei Giochi

In questo capitolo presentiamo alcune definizioni e risultati della Teoria dei Giochi che ci introducono al concetto di Equilibrio Correlato e ci saranno utili per i capitoli successivi.

1.1 Definizioni Generali

Un *gioco* è un modello matematico che descrive una situazione di processo decisionale interattivo, nella quale ogni giocatore si sforza di raggiungere il miglior risultato possibile, sapendo che ciascuno degli altri giocatori si sta sforzando di fare la stessa cosa. Si deve pensare ai giocatori come agenti razionali e il fatto che tutti siano razionali è conoscenza comune a tutti i giocatori.

Definizione 1.1. Un *gioco* in forma strategica $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ è una tripletta ordinata nella quale:

- $N = (1, 2, \dots, n)$ è un insieme finito di giocatori.
- S_i è l'*insieme delle strategie pure* del giocatore i, per ogni giocatore $i \in N$. Si denota la famiglia di tutti i vettori n-dimensionali di strategie con

  $$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n.$$

  Un elemento di S è il *vettore di strategie* $s = (s_i)_{i \in N}$. Per ogni $i \in N$ e $s \in S$ sia
  $$s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s^{i+1}, \dots, s^n)$$
  il vettore di strategie giocate da tutti tranne che da i; pertanto

  $$s_{-i} \in S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$$

  e
  $$s = (s_{-i}, s_i).$$

- $u_i : S \to \mathbb{R}$ è la *funzione di payoff* che associa ogni vettore strategico $s = (s^i)_{i \in N}$ alla corrispondente utilità $u_i(s)$ del giocatore i, per ogni $i \in N$. Chiamiamo $u(s)$ il *vettore dei payoff* relativo al vettore strategico $s \in S$.

In questa definizione notiamo che gli insiemi di possibili strategie dei giocatori non sono per forza di cardinalità finita. Un gioco nel quale l'insieme di strategie di ogni giocatore è finito è detto *gioco finito*.
Noi considereremo solo *giochi simmetrici*, ovvero giochi nei quali l'insieme di strategie è lo stesso per ogni giocatore: $S_1 = S_2 = \cdots = S_n$. In questo caso $S = \prod_N S_1$.

Definizione 1.2 (Equilibrio di Nash)**.** Un vettore di strategie $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ è un *Equilibrio di Nash* se per ogni giocatore $i \in N$ e per ogni strategia $s_i \in S_i$ è soddisfatta la disequazione:

$$u_i(s^*) \geq u_i(s_{-i}^*, s_i).$$

La definizione ci sta dicendo che nessun giocatore i può deviare singolarmente e in modo profittevole da s^*.

Definizione 1.3 (Strategie Miste)**.** Sia $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ un gioco finito in forma strategica. Una *strategia mista* di un giocatore i è una distribuzione di probabilità sul suo insieme di strategie pure S_i. Si denota con

$$\Sigma_i := \{\sigma_i : S_i \to [0,1] : \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\}$$

l'*insieme delle strategie miste* del giocatore i.

La strategia mista di un giocatore i è quindi una distribuzione di probabilità su S_i: $\sigma_i = (\sigma_i(s_i))_{s_i \in S_i}$. Il numero $\sigma_i(s_i)$ è la probabilità di giocare la strategia pura s_i. In questa nuova nozione identifichiamo s_i come $\sigma_i = [1(s_i)]$, nella quale la strategia pura s_i è scelta con probabilità 1.

Possiamo ora definire l'*estensione di un gioco G in strategie miste* come la tripletta

$$\Gamma = (N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N}),$$

dove la funzione di payoff è la funzione $U_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ che associa ogni vettore di strategia mista $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$ con l'utilità

$$U_i(\sigma) = \mathbf{E}_\sigma[u_i(\sigma)] = \sum_{(s_1, \ldots, s_n) \in S} u_i(s_1, \ldots, s_n)\sigma_1(s_1)\sigma_2(s_2) \cdots \sigma_n(s_n).$$

Infine diciamo che il vettore di strategia mista σ^* è un *equilibrio di Nash in strategie miste di* Γ se e solo se per ogni giocatore $i \in N$ e per ogni strategia pura $s_i \in S_i$

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i(s_i, \sigma^*_{-i}).$$

Teorema di Nash ([Nas51],1951). *Ogni gioco $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ con il numero di giocatori N finito e S_i finito per ogni $i \in N$ contiene almeno un equilibrio di Nash in strategie miste.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione di questo teorema dovremo utilizzare un teorema dei punti fissi, il teorema di Kakutani, il quale afferma che, sotto opportune condizioni, una corrispondenza $f : A \rightrightarrows A$ ha un punto fisso, ovvero che esiste $x \in A$ tale che $x \in f(x)$. L'idea generale è quindi quella di costruire una funzione che ritorna la "migliore risposta" di ogni giocatore data una distribuzione di strategie fissata per gli altri giocatori. In seguito si verifica che essa soddisfi le ipotesi del teorema di Kakutani e si conclude l'esistenza di un equilibrio di Nash.
Iniziamo con la costruzione di questa corrispondenza di "migliore risposta". Sia $\Gamma = (N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N})$ l'estensione del gioco G in strategie miste. Definiamo ora la funzione $r_i : \Sigma \to \Sigma_i$ come

$$r_i(\sigma) = \arg\max_{\sigma_i \in \Sigma_i} U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Questa funzione r_i manda un profilo di strategie σ nell'insieme di strategie miste $\{\overline{\sigma_i}$ tale che $\overline{\sigma_i} \in \arg\max_{\sigma_i \in Sigma_i} U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})\}$. Ora prendiamo il prodotto cartesiano delle r_i come $r = (r_1, \ldots, r_n)$, ovvero la funzione $r : \Sigma \rightrightarrows \Sigma$ con

$$r(\sigma) = (r_1(\sigma), \ldots, r_n(\sigma))$$

Da come abbiamo definito la funzione r si vede immediatamente che un vettore di strategie σ^* che soddisfa la definizione di punto fisso per r, ovvero tale che $\sigma^* \in r(\sigma^*)$, è un equilibrio di Nash in strategie miste. Dimostrando l'esistenza di un punto fisso di r si da pertanto una prova del teorema. Verifichiamo le ipotesi del teorema di Kakutani:

Teorema del Punto Fisso di Kakutani ([Kak31], 1931). *Sia A un sottoinsieme non-vuoto di uno spazio Euclideo con dimensione finita. Sia $f : A \rightrightarrows A$ una corrispondenza con $x \in A \mapsto f(x) \subseteq A$, che soddisfa le seguenti condizioni:*

(i) *A è un insieme compatto e convesso.*

(ii) *$f(x)$ è non vuoto per ogni x.*

(iii) *$f(x)$ è un insieme convesso per ogni x.*

(iv) *f ha un grafo chiuso, ovvero se $(x^n, y^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \times A$ è una successione con $y^n \in f(x^n)$ per ogni n e tale che $(x^n, y^n)_{n\in\mathbb{N}} \to (x, y)$ per $n \to \infty$, allora $y \in f(x)$.*

Allora f ha un punto fisso, cioè esiste $x \in A$ tale che $x \in f(x)$.

Verifichiamo che le ipotesi siano soddisfatte per r.

(i) Σ è compatto, convesso e non vuoto: per definizione

$$\Sigma = \prod_{i\in N} \Sigma_i$$

dove ogni $\Sigma_i = \{\sigma | \sum_j \sigma_j = 1\}$ è un simplesso di dimensione $|S_i| - 1$ e pertanto Σ_i è chiuso e limitato nello spazio euclideo $\mathbb{R}^{|S_i|-1}$, quindi è compatto. Il prodotto finito di insiemi convessi e compatti è anch'esso convesso e compatto, da cui seguono le ipotesi su Σ. Infine, poichè S_i è un insieme non vuoto per ogni i, allora anche Σ_i e Σ sono non vuoti.

(ii) $r(\sigma)$ è non-vuoto: per definizione

$$r_i(\sigma_{-i}) = \arg\max_{\sigma_i\in\Sigma_i} U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

dove U_i è una funzione lineare in σ_i, cioè è lineare nello spazio euclideo finito-dimensionale $\mathbb{R}^{|S_i|-1}$, da cui segue che U_i è continua. Possiamo ora utilizzare il teorema di Weirstrass su U_i per concludere che $r(\sigma)$ è non-vuoto.

(iii) $r(\sigma)$ è convesso per tutte le $\sigma \in \Sigma$: siano $\sigma', \sigma'' \in r(\sigma)$, questo vuol dire che $U_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i) = U_i(\sigma_{-i}, \sigma''_i) \geq U_i(\sigma_{-i}, \tau_i)$ per tutti i $\tau_i \in \Sigma_i$. Prendiamo $\lambda \in [0, 1]$. Per linearità della funzione di payoff U_i, si hanno le relazioni:

$$\lambda U_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i) + (1 - \lambda)U_i(\sigma_{-i}, \sigma'') \geq U_i(\sigma_{-i}, \tau_i) \text{ per tutte le } \tau_i \in \Sigma_i.$$

$$U_i(\sigma_{-i}, \lambda\sigma'_i + (1 - \lambda)\sigma''_i) \geq U_i(\sigma_{-i}, \tau_i) \text{ per tutte le } \tau_i \in \Sigma_i.$$

Quindi $\lambda\sigma_i' + (1-\lambda)\sigma_i'' \in r_i(\sigma_{-i})$ e si mostra così che ogni combinazione convessa di due migliori risposte è una migliore risposta.

(iv) r ha un grafo chiuso: supponiamo per assurdo che r non abbia un grafo chiuso. Allora esiste una successione $(\sigma^n, \widehat{\sigma}^n)_{n\in\mathbb{N}} \to (\sigma, \widehat{\sigma})$ per $n \to \infty$ e con $\widehat{\sigma}^n \in r(\sigma^n)$, ma tale che $\widehat{\sigma} \notin r(\sigma)$, ovvero esiste una qualche $i \in N$ tale che $\widehat{\sigma}_i \notin r_i(\sigma_{-i})$. Questo implica che esiste una qualche $\sigma_i' \in \Sigma_i$ e una qualche $\epsilon > 0$ tale che

$$U_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \geq U_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) + 3\epsilon$$

Per continuità di U_i e dal fatto che $\sigma_{-i}^n \to \sigma_{-i}$, abbiamo che per n sufficentemente grande,

$$U_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^n) \geq U_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) - \epsilon.$$

Combinando le due disequazioni precedenti otteniamo:

$$U_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^n) \geq U_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) + 2\epsilon \geq U_i(\widehat{\sigma}_i^n, \sigma_{-i}^n) + \epsilon,$$

dove la seconda disequazione segue dalla continuità di U_i. Questo tuttavia contraddice l'ipotesi che $\widehat{\sigma}_i^n \in r_i(\sigma_{-i}^n)$, arrivando così all'assurdo.

L'esistenza del punto fisso per r segue pertanto dal Teorema di Kakutani. Infine, come detto all'inizio, se $\sigma^* \in r(\sigma^*)$, allora per definizione σ^* è un equilibrio di Nash in strategie miste per il gioco G. □

Definizione 1.4 (Valore Maxmin e Strategia Maxmin)**.** È importante chiedersi qual è il migliore risultato possibile che un giocatore i può garantire a se stesso, senza fare affidamento sulla razionalità degli altri giocatori. Se sceglie una strategia s_i la peggior utilità che può ricevere è:

$$\min_{t_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i, t_{-i}).$$

Il giocatore i può scegliere la strategia s_i che massimizza questo valore, ovvero, comunque giochino gli altri giocatori, lui può garantirsi un payoff di

$$\underline{v}_i := \max_{s_i\in S_i} \min_{t_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i, t_{-i})$$

La quantità $\underline{v}_i$ è chiamata *valore maxmin* del giocatore i e indica il livello di sicurezza del giocatore. Una strategia s_i^* che garantisce questo valore è detta *strategia maxmin* e soddisfa:

$$u_i(s_i^*, t_{-i}) \geq \underline{v}_i, \forall t_{-i} \in S_{-i}.$$

L'equilibrio di Nash e il maxmin sono due concetti che riflettono due diversi aspetti comportamentali: il primo è un espressione di stabilità, mentre il secondo cattura l'idea di sicurezza. Nonostante la radice concettuale differente, ci sono casi in cui entrambi portano allo stesso risultato. Un caso speciale dove questo avviene è la classe dei giochi a somma zero per due giocatori.

Definizione 1.5 (Giochi a Somma-Zero per Due Giocatori)**.** Un gioco a due giocatori è detto *a somma zero* se per ogni coppia di strategie $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ si ha

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0$$

In altre parole, un gioco a due giocatori è un gioco a somma zero se è un sistema chiuso rispetto all'utilità: ogni giocatore guadagna quello che l'altro giocatore perde. È chiaro che in tale gioco i due giocatori hanno interessi diametricamente opposti.

1.2 Equilibrio Correlato

1.2.1 Esempio: Il Gioco del "Pollo"

Consideriamo il gioco non a somma-zero per due giocatori descritto dalla sottostante matrice d'utilità.

	S	C
S	(6,6)	(2,7)
C	(7,2)	(0,0)

La seguente storia di fondo di solito accompagna questo gioco. Due piloti, I e II, corrono uno verso l'altro lungo una strada a una sola corsia. Il primo a perdere il coraggio e deviare fuori strada prima che le auto si scontrano è il perdente del gioco, il "pollo." Fissiamo quindi un istante in cui ciascun giocatore può fare una delle seguenti scelte: *sbandare* (S) o continuare a *correre* (C). Nel nostro caso, l'utilità del perdente è 2 e l'utilità del vincitore è 7. Se nessuno dei due giocatori decide di sbandare, le auto si scontrano, entrambi i giocatori sono feriti, e ciascuno ha un'utilità di 0. Se entrambi sterzano fuori strada contemporaneamente, il guadagno di ciascuno di essi è 6.

Il gioco ha tre equilibri:

- I giocatori giocano (S, C). Il guadagno è (2, 7).
- I giocatori giocano (C,S). Il guadagno è (7, 2).
- I giocatori giocano $([\frac{2}{3}(S), \frac{1}{3}(C)], [\frac{2}{3}(S), \frac{1}{3}(C)])$. Il guadagno è $(\frac{14}{3}, \frac{14}{3})$.

Consideriamo ora il seguente meccanismo, in cui un osservatore esterno dà a ciascun giocatore un consiglio su quale azione intraprendere, ma non rivela a nessuno dei due giocatori quale raccomandazione ha ricevuto l'altro giocatore. L'osservatore sceglie tra tre vettori d'azione, (S,S), (S,C), e (C,S), con uguale probabilità. La distribuzione di probabilità è cosa nota ai giocatori.

	S	C
S	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{3}$	0

Dopo aver osservato un evento probabilistico per scegliere uno dei tre vettori d'azione, l'osservatore fornisce al giocatore I il suggerimento di giocare la prima coordinata del vettore che è stato scelto, e fornisce al giocatore II una raccomandazione per giocare la seconda coordinata di quel vettore. Per esempio, se il vettore di azione (S,S) è stato scelto, l'osservatore consiglia S al Giocatore I e S al Giocatore II. Se il giocatore I riceve la raccomandazione per giocare S, la probabilità condizionale che il giocatore II abbia ricevuto il consiglio di giocare S è $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$, che è anche la probabilità condizionale che abbia ricevuto il suggerimento di giocare C. Al contrario, se il giocatore I riceve il consiglio di giocare C, sa per certo che il giocatore II ha ricevuto S come azione suggerita dal mediatore.

Ora mostriamo che nessuno dei due giocatori può trarre profitto da una deviazione unilaterale dal consiglio ricevuto dall'osservatore. Come abbiamo detto sopra, se il suggerimento al Giocatore I è di giocare S, al Giocatore II viene consigliato di giocare S con probabilità $\frac{1}{2}$ e di giocare C con probabilità $\frac{1}{2}$. La vincita prevista del Giocatore I se segue la strategia suggerita di S è quindi

$$\frac{1}{2} \times 6 + \frac{1}{2} \times 2 = 4,$$

mentre la sua ricompensa prevista se devia e gioca C è

$$\frac{1}{2} \times 7 + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{7}{2} < 4.$$

In questo caso, il Giocatore I non può trarre profitto deviando unilateralmente dalla strategia raccomandata.
Se il suggerimento al Giocatore I è invece quello di giocare C, allora si ha la certezza che il Giocatore II abbia ricevuto la raccomandazione di giocare S. La vincita per il Giocatore I in questo caso è allora 7 se gioca la strategia raccomandata C, e solo 6 se devia a S . Ancora una volta, il giocatore non può trarre profitto deviando dalla strategia raccomandata. Per simmetria, il Giocatore II non può trarre profitto dal non seguire la sua strategia suggerita. Ne consegue che questo meccanismo induce un equilibrio nel gioco esteso ad un osservatore esterno. Il payoff di questo equilibrio atteso è

$$\frac{1}{3}(6,6) + \frac{1}{3}(7,2) + \frac{1}{3}(2,7) = (5,5),$$

che si trova al di fuori dell'inviluppo convesso dei tre payoff di equilibrio del gioco originale, (2, 7), (7, 2), e $(\frac{14}{3}, \frac{14}{3})$. Un modo rapido per convincersi di quanto appena detto è notare che la somma dei guadagni nel vettore (5, 5) è 10, mentre la somma dei guadagni nei tre equilibri è o 9 o $\frac{28}{3}$, entrambe strettamente minori di 10.

1.2.2 Definizione e Proprietà

Introduciamo ora un nuovo tipo di equilibrio, l'equilibrio correlato. La definizione che diamo è simile a quella data da Aumann nel 1974 [Aum74] e ha lo scopo di catturare la correlazione che abbiamo visto nell'esempio precedente.

Definizione 1.6 (Equilibrio Correlato)**.** Una distribuzione di probabilità $p = (p(s))_{s \in S}$ su S è detta *equilibrio correlato* se per ogni $i \in N$ e per ogni $s_i, s'_i \in S_i$ è soddisfatta la condizione:

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, s_{-i}) u_i(s'_i, s_{-i}) \tag{1.1}$$

L'interpretazione è la seguente: un osservatore esterno, chiamiamolo il mediatore, sceglie in modo probabilistico un vettore di strategie da S, seguendo la distribuzione di probabilità p. Ad ogni giocatore $i \in N$ l'osservatore rivela s_i, ma non s_{-i}. Ovvero rivela al giocatore i solo la sua coordinata nel vettore di strategie scelto, da interpretare come l'azione consigliata da giocare. Quindi ogni giocatore i sceglie una strategia $s'_i \in S_i$, che può differire dal consiglio del mediatore. Infine viene giocato il gioco originale e l'utilità di ogni giocatore i risulta essere $u_i(s'_1, \dots, s'_n)$. Si ha un equilibrio correlato quando la $n-$tupla di strategie nella quale ogni giocatore i sceglie l'azione consigliata è un equilibrio di Nash in questo gioco esteso. Nota che tutti i giocatori conoscono la disribuzione di probabilità p !

L'equazione 1.1 ci dice quindi che una volta che ad un giocatore i è consigliata l'azione s_i, non avrà nessun incentivo a giocare s'_i invece.

È importante notare che ogni vettore di strategia mista σ induce una distribuzione di probabilità sull'insieme di azioni S,

$$p_\sigma(s_1, \dots, s_n) := \sigma_1(s_1) \times \sigma_2(s_2) \times \cdots \times \sigma_n(s_n). \tag{1.2}$$

Considerato un equilibrio di Nash in strategie miste σ^* le azioni che ogni giocatore scelglie con probabilità positiva sono solo quelle che gli massimizzano i payoff, ipotizzando sempre che gli altri giocatori adempino il vettore di strategie σ^*_{-i},

$$u_i(s_i, \sigma^*_{-i}) \geq u_i(s'_i, \sigma^*_{-i}), \forall s_i \in supp(\sigma^*_{-i}), \forall s'_i \in S_i.$$

Questo porta al seguente teorema:

Teorema 1.1. *Per ogni equilibrio di Nash in strategie miste σ^*, la distribuzione di probabilità p_{σ^*} è un equilibrio correlato.*

Dimostrazione. Sia σ^* un equilibrio di Nash. Allora per ogni giocatore i vale $U_i(\sigma^*) \geq U_i(s'_i, \sigma^*_{-i})$ per definizione di equilibrio di Nash in strategie miste.

In particolare

$$\begin{aligned} U_i(\sigma) &= \mathbf{E}_\sigma[u_i(\sigma)] \\ &= \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in S} u_i(s_1,\ldots,s_n)\sigma_1(s_1)\sigma_2(s_2)\cdots\sigma_n(s_n) \\ &= \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in S} p_\sigma(s_1,\ldots,s_n)u_i(s_1,\ldots,s_n). \end{aligned}$$

Sustituendo U_i nella equazione iniziale otteniamo:

$$\sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in S} p_{\sigma^*}(s_1,\ldots,s_n)u_i(s_1,\ldots,s_n) \geq \sum_{(s_1,\ldots,s_n)} p_{(s_i',\sigma_{-i}^*)}(s_1,\ldots,s_n)u_i(s_1,\ldots,s_n)$$

per ogni strategia pura $s_i' \in S_i$. Poichè $p_{(s_i',\sigma_{-i}^*)}(s_1,\ldots,s_n) = 0 \quad \forall s_i \neq s_i'$ allora segue:

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p_{\sigma^*}(s_i,s_{-i})u_i(s_i,s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p_{\sigma^*}(s_i,s_{-i})u_i(s_i',s_{-i})$$

□

Come si intuisce dal Teorema 1.1 l'equilibrio correlato è in un certo senso un estensione del concetto di equilibrio di Nash.
Facciamo attenzione però alla diversa definizione dei due equilibri: mentre l'equilibrio di Nash è un vettore di distribuzioni di probabilità su S_i, l'equilibrio correlato è una distribuzione di probabilità su S. Sono collegati tra loro dalla relazione 1.2.

Diamo ora una proprietà importante degli equilibri correlati:

Teorema 1.2. *L'insieme di equilibri correlati in un gioco finito è convesso e compatto.*

Dimostrazione. Ricordiamo che un semispazio in $\mathbb{R}^m$ è definito da un vettore $\alpha \in \mathbb{R}^m$ e da un numero reale $\beta \in \mathbb{R}$, con la seguente equazione:

$$H^+(\alpha,\beta) := \{x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \geq \beta\}.$$

Un semispazio è un insieme chiuso e convesso. Dalla definizione di equilibri correlati, la disequazione 1.1 implica che l'insieme di equilibri correlati di un gioco è data dall'intersezione di un numero finto di semispazi. Dal momento che l'intersezione di spazi convessi e chiusi è convessa e chiusa, allora anche l'insieme di equilibri correlati è convesso e chiuso.
Ora, l'insieme di equilibri correlati è un sottoinsieme della famiglia di distribuzioni di probabilità su S, quest'ultimo è limitato e quindi possiamo concludere che l'insieme di equilibri correlati è convesso e compatto.

□

Osservazione 1.1. Con il Teorema 1.1 e il Teorema 1.2 possiamo dire che ogni composizione convessa di equilibri di Nash è un equilibrio correlato. Il vice-versa tuttavia, in generale non è vero.
Riprendiamo l'esempio della sezione 1.2.1, il gioco del "Pollo". Nel gioco abbiamo visto 3 equilibri di Nash, le cui distribuzione come strategie correlate possono essere riassunte nel seguente modo:

	S	C
S	0	1
C	0	0

	S	C
S	0	0
C	1	0

	S	C
S	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
C	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Tuttavia, l'equilibrio correlato proposto in precedenza

	S	C
S	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{3}$	0

ha un payoff di (5,5) che è esterno all'inviluppo convesso degli equilibri di Nash!

Infatti, possiamo denotare una distribuzione di probabilità sull'insieme S dei vettori strategici come $p = [\alpha(S,S), \beta(S,C), \gamma(C,S), \delta(C,C)]$, tale che $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ e $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$.

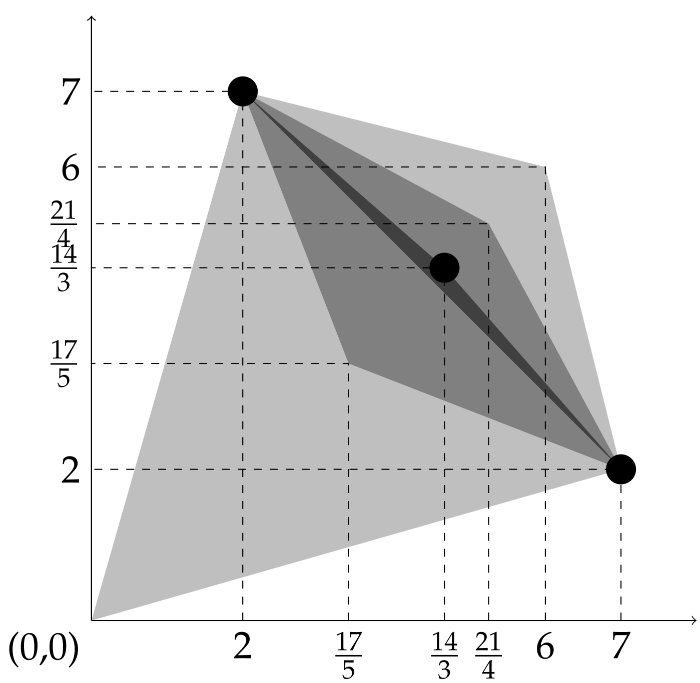
	S	C
S	α	β
C	γ	δ

La distribuzione di probabilità p per essere un equilibrio correlato deve soddisfare le seguenti disuguaglianze:

$$6\alpha + 2\beta \geq 7\alpha, \quad 7\gamma \geq 6\gamma + 2\delta, \quad 6\alpha + 2\gamma \geq 7\alpha, \quad 7\beta \geq 6\beta + 2\delta. \tag{1.3}$$

Le disuguaglianze 1.3 implicano che sia β che γ devono essere entrambe maggiori di 2δ e di $\frac{\alpha}{2}$.

Nella prossima figura evidenziamo meglio la relazione tra equilibri di Nash ed equilibri correlati: l'insieme delle possibili vincite è rappresentato dal rombo in grigio chiaro, che ha come punti estremi le entrate della matrice dei payoff, ovvero $(0,0), (2,7), (7,2)$ e $(6,6)$. In grigio scuro si vede l'inviluppo convesso generato dai guadagni dei 3 equilibri di Nash, cioè il triangolo dato da $(7,2), (2,7)$ e $(\frac{14}{3}, \frac{14}{3})$; infine in grigio si può osservare l'inviluppo convesso dell'utilità degli equilibri correlati e come esso contenga il triangolo scuro degli equilibri di Nash. È il rombo generato da $(\frac{17}{5}, \frac{17}{5}), (7,2), (2,7)$ e $(\frac{21}{4}, \frac{21}{4})$.



2 Esistenza degli Equilibri Correlati

In questa sezione si vuole dare una dimostrazione elementare sulla esistenza degli equilibri correlati nei giochi finiti e infiniti, basata sulla teoria di dualità lineare. Tale dimostrazione si scosta quindi dalla prova più standard data da Aumann nel 1974, che consiste invece nel mostrare come prima cosa, che gli equilibri di Nash sono correlati e successivamente utilizzare il teorema di Nash (1951) per dire che ogni gioco finito ha almeno un equilibrio di Nash. Il primo argomento è banale; tuttavia il secondo necessita dell'uso di un teorema del punto fisso, il teorema del punto fisso di Kakutani, il quale non rende la prova di esistenza propriamente "elementare" (è infatti improbabile che da tale dimostrazione si possa costruire un algoritmo polinomiale per il calcolo di equilibri di Nash e di conseguenza di equilibri correlati).

Sergiu Hart e David Schmeidler (1989) invece, hanno sfruttato il fatto che gli equilibri correlati formano un insieme convesso e pertanto possono essere definiti da un sistema di disequazioni lineari esplicite. Questo fatto porta a pensare che si possa trovare una prova di esistenza ben più semplice [HS89]. Di seguito dimostreremo che l'insieme possibile indotto da queste disequazioni è non-vuoto per tutti i giochi finiti, utilizzando alcuni risultati della teoria di dualitá lineare, in particolare il Teorema Minimax, riportato nella sezione 4.1 dell'appendice.
Successivamente considereremo i giochi infiniti, nei quali l'insieme dei giocatori e gli insiemi delle strategie sono di dimensione arbitraria. In questo caso daremo alcuni risultati generali sull'esistenza di equilibri correlati, riportando semplicemente il lavoro dovuto ad Hart e Schmeidler [HS89]. Inizialmente considereremo arbitrario il solo insieme dei giocatori e in seguito si guarderà anche all'arbitrarietà degli insiemi di strategie.

2.1 Giochi Finiti

Teorema 2.1. *Ogni gioco finito ha un equilibrio correlato.*

Per la dimostrazione del teorema avremo bisogno del seguente Lemma:

Lemma 2.1. *Siano $(a_{jk})_{j,k=1,\dots,m}$ numeri non-negativi. Allora esiste un vettore di probabilità $x = (x_j)_{j=1,\dots,m}$ tale che, per ogni vettore $u = (u_j)_{j=1,\dots,m}$*

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(u_j - u_k) = 0 \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Denotiamo l'equazione 2.1 con $\Phi(x,u)$. Poichè $\Phi(x,-u) = -\Phi(x,u)$ dovremo solamente mostrare che $\Phi(x,u) \geq 0$ per ogni u. Notiamo inoltre che ci basta considerare solamente vettori di probabilità u, questo perchè è possibile sommare una costante arbitraria a tutte le coordinate di u (per renderle non-negative) e poi moltiplicare u per uno scalare positivo (per normalizzare il vettore), il tutto senza modificare il segno di $\Phi(x,u)$. La funzione Φ è bilineare in x e in u; pertanto possiamo applicare il teorema minimax: $\max_x \min_u \Phi(x,u) = \min_u \max_x \Phi(x,u)$, dove x e u sono entrambi vettori di probabilità. Dato u, prendiamo j tale che $u_j = \max_k u_k$; per x scegliamo il $j-$esimo vettore unità, allora abbiamo $\Phi(x,u) \geq 0$. Questo mostra che il min max è non-negativo e così anche il max min, provando l'esistenza del vettore x come desiderato. $\square$

Osservazione 2.1. Possiamo trovare una formula esplicita per calcolare un vettore x come nel Lemma 2.1. Lo costruiamo nel seguente modo: dato un insieme $N = \{1,2,\ldots,n\}$, per ogni $j \in N$ definiamo l'insieme G_j come l'insieme che contiene *tutte* le funzioni $g : N \backslash \{j\} \to N$ tali che per ogni $k \in N \backslash \{j\}$ esiste un intero r tale che $g^{(r)}(k) = j$, dove $g^{(r)}$ indica la composizione di g con se stessa r volte. Allora si trova che

$$x_j = \sum_{g \in G_j} \prod_{k \neq j} a_{k,g(k)} \tag{2.2}$$

soddisfa l'uguaglianza 2.1.

Per capire meglio come funziona questa x, diamo un esempio esplicito nel caso di un gioco a 2 giocatori e a 3 giocatori.
Per una migliore compattezza introduciamo la seguente notazione per le funzioni: indichiamo con $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la funzione f tale che $f(a_i) = a_{i+1}$ per ogni $i \in \{1,\ldots,n-1\}$.
Sia $N = \{1,2\}$. Allora $G_1 = \{(2,1)\}$ con la funzione $g = (2,1)$ definita da $g(2) = 1$ e $G_2 = \{(1,2)\}$. Allora possiamo calcolare x utilizzando l'equazione 2.2:

$$x_1 = a_{2,1}$$
$$x_2 = a_{1,2}$$

Verifichiamo che la x appena trovata soddisfi l'equazione 2.1 del Lemma:

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(u_j - u_k) = \\ = x_1[a_{1,1}(u_1 - u_1) + a_{1,2}(u_1 - u_2)] + x_2[a_{2,1}(u_2 - u_1) + a_{2,2}(u_2 - u_2)] = \\ = a_{2,1}a_{1,2}(u_1 - u_2) + a_{1,2}a_{2,1}(u_2 - u_1) = \\ = a_{2,1}a_{1,2}(u_1 - u_2) = a_{2,1}a_{1,2}(u_1 - u_2) = 0.\end{gathered}$$

Allo stesso modo troviamo un tale vettore x per 3 giocatori. Sia $N = \{1, 2, 3\}$. Allora $G_1 = \{(2, 3, 1), (3, 2, 1), ((2, 1), (3, 1))\}$ con la funzione $g_1 = (2, 3, 1)$ definita da $g_1(2) = 3$ e $g_1(3) = 1$, la funzione $g_2(3) = 2$ e $g_2(2) = 1$, e infine la funzione $g_3 = ((2, 1), (3, 1))$ definita da $g_3(2) = 1$ e $g_3(3) = 1$. Notiamo che per ogni $k \neq 1$ esiste un r tale che $g^{(r)}(k) = 1$ per tutte le $g \in G_1$. Ad esempio $g_1^{(2)}(2) = g_1(g_1(2)) = g_1(3) = 1$.

Allo stesso modo abbiamo $G_2 = \{(1, 3, 2), (3, 1, 2), ((1, 2), (3, 2))\}$ e $G_3 = \{(1, 2, 3), (2, 1, 3), ((1, 3), (2, 3))\}$.

Utilizzando l'equazione 2.2 si trova:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{2,3}a_{3,1} + a_{3,2}a_{2,1} + a_{2,1}a_{3,1} \\ x_2 &= a_{1,3}a_{3,2} + a_{3,1}a_{1,2} + a_{1,2}a_{3,2} \\ x_3 &= a_{1,2}a_{2,3} + a_{2,1}a_{1,3} + a_{1,3}a_{2,3} \end{aligned}$$

Sostituendo la x appena trovata nell'equazione 2.1 verifichiamo essa soddisfi l'equazione 2.1:

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(u_j - u_k) = 0. \tag{2.3}$$

Guardando solo gli addendi in funzione di u_1 (per u_2 e u_3 si trovano calcoli analoghi) si ha:

$$\begin{aligned} u_1 \quad &(a_{2,3}a_{3,1}a_{1,2} + a_{2,3}a_{3,1}a_{1,3} + a_{3,2}a_{2,1}a_{1,2} + a_{3,2}a_{2,1}a_{1,3} \\ &+ a_{2,1}a_{3,1}a_{1,2} + a_{2,1}a_{3,1}a_{1,3} - a_{1,3}a_{3,2}a_{2,1} - a_{3,1}a_{1,2}a_{2,1} \\ &- a_{1,2}a_{3,2}a_{2,1} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{2,1}a_{1,3}a_{3,1} - a_{1,3}a_{2,3}a_{3,1}) = 0. \end{aligned}$$

Dimostrazione. (Teorema 2.1)

Per la dimostrazione di questo Teorema sfutteremo la seguente idea: dal gioco originale estrapoleremo un gioco ausiliario per 2 giocatori a somma zero, in modo tale che una strategia del giocatore I che gli garantisce un guadagno maggiore o uguale a zero corrisponda ad un equilibrio correlato nel gioco originale. Utilizzeremo infine il Teorema Minimax e il Lemma per dimostrare l'esistenza di tale strategia.

Consideriamo quindi il seguente gioco ausiliario a somma zero per due giocatori: il giocatore I sceglie una $n-$tupla di strategie $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$; il giocatore II sceglie una tripletta (i, r_i, t_i), dove $i \in N$ e $r_i, t_i \in S_i$. L'utilità (da II a I) è: $u_i(s_{-i}, r_i) - u_i(s_{-i}, t_i)$ se $s_i = r_i$ e 0 altrimenti. Mostriamo che se una strategia $s^* \in S$ del giocatore I garantisce un payoff non-negativo in questo gioco a somma zero, allora e' un equilibrio correlato del gioco originale. Per ipotesi:

$$u_i(s^*_{-i}, s^*_i) - u_i(s^*_{-i}, t_i) \geq 0 \quad \forall i \in N, \forall t_i \in S_i$$

La distribuzione di probabilita' indotta $p^* = (p^*(s))_{s \in S} = [1(s^*)]$ e' pertanto un equilibrio correlato perche' soddisfa la disuguaglianza 1.1 :

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p^*(s_i, s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p^*(s_i, s_{-i}) u_i(t_i, s_{-i})$$

Ovvero:

$$[1(s^*)] u_i(s^*_{-i}, s^*_i) \geq [1(s^*)] u_i(s^*_{-i}, t_i).$$

Per il Teorema Minimax, tale strategia s^* esiste se, per ogni tripletta giocata dal giocatore II, esiste un'azione del giocatore I risultante in un'utilità non-negativa. Sia allora $y = (y_i(r_i, t_i))_{i \in N; r_i, t_i \in S_i}$ una strategia per il giocatore II. Per ogni i, applichiamo il Lemma 2.1 con $(a_{jk}) \equiv y_i(r_j, t_k)_{r_j, t_k \in S_i}$ così da ottenere un vettore di probabilità $(x_i(r_i))_{r_i \in S_i}$ tale che

$$\sum_{r_i} x_i(r_i) \sum_{t_i} y_i(r_i, t_i) [u_i(s_{-i}, r_i) - u_i(s_{-i}, t_i)] = 0 \tag{2.4}$$

per ogni $s_{-i} \in S_{-i}$. Definiamo ora $x(r) = \prod_{j \in N} x_j(r_j) = (x_1(r_1), \ldots, x_n(r_n))$ per ogni $r \in S$; osserviamo che x è una strategia del giocatore I nel gioco ausiliario. Possiamo quindi calcolare il payoff corrispondente alla coppia di strategie (x, y) (poichè y è una strategia data del giocatore II) ed otteniamo così l'utilità

$$\sum_r [\prod_j x_j(r_j)]\{\sum_i \sum_{t_i} y_i(r_i,t_i)[u_i(r_{-i},r_i) - u_i(r_{-i},t_i)]\}.$$

Quest'ultima la possiamo riscrivere come

$$\sum_i \sum_{r_{-i}} [\prod_j x_j(r_j)]\{\sum_{r_i} x_i(r_i) \sum_{t_i} y_i(r_i,t_i)[u_i(r_{-i},r_i) - u_i(r_{-i},t_i)]\}$$

che è uguale a zero per l'equazione 2.4. Abbiamo quindi trovato una strategia x del giocatore I che garantisce una utilità pari a zero. Questo completa la dimostrazione.

$\square$

2.2 Giochi con Infiniti Giocatori

Consideriamo ora il caso in cui l'insieme dei giocatori N può essere infinito. in questa sezione assumeremo che gli insiemi di strategie (pure) s_i di tutti i giocatori sono finiti. Questo perchè le definizioni, i risultati e in generale le dimostrazioni sono più semplici e più trasparenti che nel caso generale, che sarà invece studiato nel paragrafo 2.3.

Sia quindi G un gioco con $N \in \mathbb{N}$ giocatori, per ogni $i \in N$, sia S_i un insieme finito dotato della topologia discreta e quindi $S = \prod_i S_i$ dotata della risultante topologia prodotto. Notiamo che S è uno spazio di Hausdorff compatto (spazio separabile compatto). Denotiamo con Σ_0 la $\sigma-$algebra prodotto in S generata dai cilindri di forma $S_{-i} \times \{s_i\}$ per $i \in N$ e $s_i \in S$. Sia infine Σ una algebra su S tale che $\Sigma \supset \Sigma_0$ e tale che tutte le funzioni di utilità u_i siano $\Sigma-$misurabili.

In quest'ottica, un *equilibrio correlato* (rispetto a Σ è una misura di probabilità p sullo spazio misurabile (S, Σ), tale che per ogni $i \in N$ e per ogni $r_i, t_i \in S$:

$$\int_{S_{-i}\times r_i} [u_i(s_{-i},r_i) - u_i(s_{-i},t_i)]dp(s) \geq 0. \tag{2.5}$$

Teorema 2.2. *Assumiamo che per ogni $i \in N$, l'insieme S_i sia finito.*

(i) Sia $\Sigma \supset \Sigma_0$ un algebra in S e ipotizziamo che, per ogni $i \in N$, la funzione u_i sia limitata e $\Sigma-$misurabile. Allora esiste un equilibrio correlato rispetto a Σ.

(ii) Assumiamo che la funzione u_i sia continua per ogni $i \in N$. Allora esiste un equilibrio correlato additivo in modo numerabile rispetto a Σ_0.

Osservazione 2.2. Se u_i è una funzione continua, allora è anche limitata (perchè S è compatto) e Σ_0-misurabile.

Dimostrazione. (Teorema 2.2)

(i) Consideriamo gli insiemi T costruiti nel seguente modo: $T = \prod_{i \in N} T_i \subset S$ dove $T_i \subset S_i$ per ogni i. Ora prendiamo gli insiemi T_i in modo tale che siano singoletti per tutti tranne che per un numero finito di giocatori $i \in N$. Notiamo che T è un insieme con un numero finito di elementi e denotiamo tale T come $f-$insieme. Allora il gioco Γ_T ottenuto sostituendo S_i con T_i per ogni $i \in N$ è equivalente ad un gioco finito: i giocatori "reali" sono infatti solo quei giocatori i per i quali T_i non è un singoletto.

Dal Teorema 2.1, ogni gioco finito ha un equilibrio correlato, pertanto ne otteniamo uno in Γ_T, che denoteremo con q_T. Chiaramente possiamo pensare a q_T come ad una misura di probabilità su S, con un supporto (finito) T.

Consideriamo ora la famiglia $\{q_T : Tf - \text{insieme}\}$ e la ordiniamo per inclusione degli insiemi T. Questa famiglia appartiene allo spazio di misure finitamente additive su (S, Σ). Dal teorema di Banach-Alaoglu, questo spazio è compatto nella topologia-debole generata dallo spazio di di funzioni limitate e misurabili su (S, Σ) [...]. Sia quindi p un punto di accumulazione di $\{q_T\}$. Ci resta da mostrare che p è un equilibrio correlato.

Fissiamo $i \in N$ e $r_i, t_i \in S_i$. Definiamo una funzione reale f su S con: $f(s) = u_i(s) - u_i(s_{-i}, t_i)$ for $s \in S_{-i} \times \{r_i\}$, cioè tale che $f(s) = 0$ quando $s_i \neq r_i$. Le ipotesi su u_i implicano che anche f sia limitata e $\Sigma-$misurabile. Dato $\epsilon > 0$ e i, esiste pertanto un $f-$insieme T con $T_i \supset \{r_i, t_i\{$, tale che $|\int f\, dp - \int f\, dq_T| < \epsilon$. Si verifica facilmente che $\int f\, dq_T \geq 0$ poichè q_T verifica 1.1, e quindi 2.5, per tutti i giocatori "reali" in Γ_T, in particolare per i e $r_i, t_i \in T_i$. Infine la disuguaglianza sopra implica $\int f\, dp > -\epsilon$, da cui per arbitrarietà di ϵ si ottiene $\int f\, dp \geq 0$, ovvero la 2.5 per p.

(ii) La dimostrazione segue i passaggi di *(i)*, ma si sostituisce lo spazio di misure finitamente additive su (S, Σ) con lo spazio di misure regolari $\sigma-$additive su (S, Σ_0), il quale è il duale dello spazio di funzioni reali continue su S (dal teorema di rappresentazione di Riesz).

$\square$

2.3 Giochi con Infiniti Giocatori e Infinite Strategie

In questa sezione affronteremo il caso generale, dove l'insieme dei giocatori come gli insiemi di strategia possono essere infiniti. Consideriamo quindi un gioco in cui non assumiamo più che gli insiemi di strategie (pure) dei giocatori siano finiti.
Quando andiamo a definire gli equilibri correlati troviamo che la condizione 2.5 non è più appropriata, poichè $p(r_i)$ può essere zero anche per tutti gli $r_i \in S_i$ (ad esempio se S_i è nel continuo). Un primo tentativo è quindi quello di richiedere che 2.5 valga anche per i sottoinsiemi $R_i \subset S_i$ e non solo per i singoletti $\{r_i\}$. Questa aggiunta tuttavia non è ancora soddisfacente, visto che t_i può non essere fissato, ma dipendere da r_i. Per ottenere le condizioni corrette, abbiamo bisogno di considerare il gioco esteso descritto nel paragrafo 1.2.2: viene scelto un elemento $r \in S$ e ogni giocatore viene informato solamente della $i-$esima coordinata r_i di r, poi il gioco originale viene giocato. Possiamo allora pensare alla strategia scelta dal giocatore i come una funzione $\varsigma_i : S_i \to S_i$ che associa ad ogni "suggerimento" $r_i \in S_i$ un'azione $\varsigma_i(r_i) \in S_i$.
Diamo quindi una nuova definizione formale di equilibrio correlato: sia Σ_i un'algebra su S_i, sia Σ_0 la $\sigma-$algebra su S generata dal prodotto delle Σ_i e sia $\Sigma \supset \Sigma_0$ una qualsiasi algebra su S. Assumiamo che, per ogni $i \in N$, la funzione di utilità u_i sia limitata e $\Sigma-$misurabile. Un *equilibrio correlato* è una misura di probabilità p su (S, Σ), tale che, per ogni $i \in N$ e per tutte le funzioni Σ_i-misurabili ς_i, vale la seguente disuguaglianza:

$$\int_S [u_i(s_{-i}, s_i) - u_i(s_{-i}, \varsigma_i(s_i))] \, dp(s) \geq 0. \tag{2.6}$$

A sinistra della disequazione 2.6 troviamo la differenza tra l'utilitàdel giocatore i quando segue sempre il consiglio del mediatore e la sua utilità quando gioca invece la strategia ς_i. è facile vedere che, se S_i fosse un insieme finito, allora la 2.5 e la 2.6 sono equivalenti: La 2.5 si ottiene prendendo nella 2.6

$\varsigma_i(s_i) = s_i$ per tutte le $s_i \neq r_i$ e $\varsigma_i(r_i) = t_i$; vice versa, data una funzione ς_i, basta sommare le disuguaglianze 2.5 su tutti gli r_i con $t_i = \varsigma_i(r_i)$, per arrivare alla 2.6.

Dimostriamo ora l'esistenza di equilibri correlati $\sigma-$additivi. è possibile ottenere anche un risultato parallelo al Teorema 2.2*(i)* che però non riportiamo.

Teorema 2.3. *Ipotizziamo che, per ogni $i \in N$, lo spazio S_i sia uno spazio di Hausdorff compatto e che la funzione u_i sia continua (S è dotata della tipologia prodotto). Sia Σ_i la $\sigma-$algebra di Borel su S_i, e sia Σ la $\sigma-$algebra di Borel su S (da notare che $\Sigma \supset \Sigma_0 =$ prodotto delle Σ_i). Allora esiste un equilibrio correlato $\sigma-$additivo rispetto a $\{\Sigma_i\}_{i\in N}$ e a Σ.*

Dimostrazione. Costruiamo la dimostrazione di questo teorema in modo simile a quella del teorema 2.2. Prendiamo l'insieme $T = \prod_{i\in N} T_i$ che chiameremo un "f-insieme" se T_i è un sottoinsieme finito di S_i per ogni $i \in N$ e se inoltre T_i è un singoletto per tutti tranne che per un numreo finito di giocatori i. Sappiamo che ad ogni f-insieme T corrisponde un gioco finito Γ_T, ottenuto sostituendo S_i con T_i per tutte le i); chiamiamo q_T il corrispondente equilibrio correlato di Γ_T, la cui esistenza è garantita dal teorema 2.1, che va considerato come una misura di probabilità su S con supporto finito T. Sia $\{q_T : T \text{ è un } f\text{-insieme}\}$ la famiglia ordinata per inclusione degli insiemi T che appartiene alla palla unitaria dello spazio di misure regolari σ-additive. Ricordiamo inoltre che ogni spazio S_i è di Hausdorff, pertanto S è di Hausdorff e quindi le misure con supporto finito sono regolari. Utilizziamo ancora il teorema di Banach-Alaoglu per provare l'esistenza di un punto di accomulazione p rispetto alla topologia indotta dallo spazio di funzioni continue su S. Mostreremo che p è un equilibrio correlato.

Sia $i \in N$ e sia $\varsigma_i : S_i \to S_i$ una funzione misurabile. Se ς_i fosse una funzione continua allora la disuguaglianza 2.6 sarebbe facilmente provata con delle argomentazioni simili a quelle usate nella prova del teorema 2.2, qui infatti p è un punto di accumulazione relativo a funzioni continue. Tuttavia ς_i non ha bisogno di essere necessariamente continua, dobbiamo quindi utilizzare delle argomentazioni più elaborate. Per continuare la dimostrazione, studieremo e proveremo prima un caso speciale, dal quale seguirà poi il caso generale in modo naturale.

Caso Speciale. Supponiamo esista $t_i \in S_i$ e $R_i \in \Sigma_i$ tali che $\varsigma_i(s_i) = t_i$ per ogni $t_i \in R_i$ e $\varsigma_i(s_i) = s_i$ altrimenti. Fissiamo $\epsilon > 0$. Ls misura p è regolare, pertanto esistono degli insiemi $F, G \subset S$ tali che: F è chiuso, G è aperto, $F \subset R_i \times S_{-i} \subset G$ e $p(G\,F) < \epsilon$. Definiamo $F_i = \text{proj}_i F$, dove proj_i è la proiezione naturale da S a S_i, e sia $G_i = S_i\ \text{proj}_i(S \backslash G)$. Allora F_i è chiuso e G_i è aperto (poichè S è compatto), $F_i \subset R_i \subset G_i$ e $p((g_i \backslash F_i) \times S_{-i}) \leq p(G \backslash F) < \epsilon$.
Successivamente possiamo applicare il Lemma di Urisohn per ottenere una funzione continua $\phi : S_i \to [0,1]$ tale che $\phi(s_i) = 1$ per tutte le $s_i \in F_i$ e $\phi(s_i) = 0$ per tutte le $s_i \notin G_i$.

Definiamo $f(s) = \phi * s_i)[u_i(s) - u_i(s_{-i}, t_i)]$; visto che $f : S \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, esiste un f-insieme T con $T_i \supset \{t_i\}$ tale che

$$| \int_S f\, dp - \int_S f\, dq_T | < \epsilon.$$

Sia poi M un maggiorante per u_i. Allora

$$| \int_S f\, dp - \int_S [u_i(s) - u_i(s_{-i}, \varsigma_i(s_i))]\, dp | < 4M\epsilon$$

poichè le funzioni integrande possono differire solo su $(G_i \backslash F_i) \times S_{-i}$. Infine

$$\int_S f\, dq_T = \sum_{s_i \in T_i} \phi(s_i) \sum_{s_{-i} \in T_{-i}} [u_i(s) - u_i(s_{-i}, t_i)] q_G(s) \geq 0$$

poichè 1.1 vale per q_T e $\phi \geq 0$.
Le ultime tre disuguaglianze insieme implicano che la parte sinistra della disequazione 2.6 diventi $> -(4M+1)\epsilon$ e quindi, dall'arbitrarietà di ϵ, la 2.6 è soddisfatta.

Caso Generale. Sia $\epsilon > 0$ dato. Dal fatto che sia S_i che S_{-i} sono compatti e che la funzione u_i sia continua, si ottiene facilmente una partizione finita di S_i in insiemi disgiunti e misurabili $\{A_k\}_{k=1,\dots,K}$ tali che $|u_i(s_{-i}, s_i) - u_i(s_i, t_i)| < \epsilon$ per ogni s_i, t_i appartenente allo stesso A_k e ogni $s_{-i} \in S_{-i}$. Per ogni k, fissiamo un $t_{i,k} \in A_k$. Sia $R_{i,k} = \{s_i \in S_i : \varsigma_i(s_i) \in A_k\}$ e definiamo una funzione Σ_i-misurabile $\varsigma_{i,k}$ come segue:
$\varsigma_{i,k}(s_i) = t_{i,k}$ per $s_i \in R_{i,k}$ e $\varsigma_{i,k}$ = identità al di fuori di $R_{i,k}$.
La disuguaglianza 2.6 vale per $\varsigma_{i,k}$, poichè possiamo applicare su essa il caso speciale. Sommando tra di loro queste disuguaglianze per

tutti i k, otteniamo 2.6 per la funzione (ammissibile) η_i definita come $\eta_i(s_i) = t_{i,k}$ se $s_i \in R_{i,k}$ per qualche k. La costruzione sopra implica che $|u_i(s_{-i}, \varsigma_i(s_i)) - u_i(s_{-i}, \eta_i(s_i))| < \epsilon$ per tutte le s e pertanto la parte sinistra della disequazione 2.6 per ς_i diventa $> -\epsilon$ e quindi, per arbitrarietà di ϵ, ≥ 0.

$\square$

3 Equilibri Correlati come Intersezione di Semi-Spazi

3.1 Politopo degli Equilibri Correlati

In questa sezione proveremo ad analizzare in maniera più dettagliata quanto osservato nella dimostrazione del Teorema 1.2. Abbiamo visto che gli equilibri correlati possono essere descritti come intersezione di semi-spazi e pertanto l'insieme che gli racchiude è un politopo convesso e compatto. Diamo allora una formula esplicita del politopo indotto dagli equilibri correlati.

Ricordiamo innanzitutto che un *politopo* in $\mathbb{R}^d$ è l'inviluppo convesso di un numero finito di punti in $\mathbb{R}^d$. Il più piccolo insieme di punti che soddisfano la condizione che il politopo sia il suo inviluppo convesso è chiamato insieme dei *punti estremi* del politopo.

Sia ora $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ un gioco finito, dove gli insiemi di strategia S_i hanno cardinalità d_i. In questo caso possiamo quindi chiamare il gioco come un $(d_1 \times \cdots \times d_n)$-*gioco* e utilizziamo la seguente notazione per indicare le strategie di ogni giocatore negli insiemi di strategia:

$$S_i = \{s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, \dots, s_{d_i}^{(i)}\} \text{ per ogni } i \in N$$

Riscriviamo un elemento $s \in S$ come $s = (s_{j_1}^{(1)}, \dots, s_{j_n}^{(n)}) = s_{j_1} \cdots s_{j_n}$, dove la $^{(i)}$ è sottointesa. Ridefiniamo inoltre $u_i(s) = u_s^{(i)}$ il guadagno del giocatore $i \in N$ quando viene giocato il vettore di strategie $s \in S$. Possiamo ora osservare che $S = (S_1, \dots, S_n)$ contiene $(d_1 \times \cdots \times d_n)$ elementi ai quali corrispondono altrettanti n-vettori di payoff (un'entrata per giocatore) $u = u(s) = (u_s^{(1)}, \dots, u_s^{(n)})$. Indichiamo con $U = (U_1, \dots, U_n)$ la famiglia che contiene questi n-vettori. Per fare un esempio, nel caso in cui $n = 2$, possiamo pensare a U_i come alla matrice (2×2) del guadagno del giocatore i.

Consideriamo ora la distribuzione di probabilità p su S come $p = (p(s))_{s \in S} = (p(u(s)))_{s \in S}$. Dato quindi un vettore di strategie $s = s_{j_1} \cdots s_{j_n}$, dove $s_{j_i} \in S_i$ e $j_i \in \{1, \ldots, d_i\}$, scriviamo:

$$p(s) = p_{s_{j_1} \cdots s_{j_n}}$$

Affinchè sia una distribuzione di probabilità su S, p deve soddisfare le condizioni:

$$p_{s_{j_1} \cdots s_{j_n}} \geq 0 \quad \forall j_i \in [d_i], i \in N; \tag{3.1}$$

$$\sum_{j_i=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} p_{s_{j_1} \cdots s_{j_n}} = 1 \tag{3.2}$$

L'insieme che contiene tutte le distribuzioni di probabilità p è il *simplesso* $\Delta_{d_1 \cdots d_n - 1}$. La dimensione del simplesso $(d_1 \cdots d_n - 1)$ è dovuta al fatto che possiamo esprimere l'ultima coordinata del vettore di probabilità p in funzione delle altre coordinate grazie alle equazioni 3.1 e 3.2.

Abbiamo definito un punto $p \in \Delta_{d_1 \cdots d_n - 1}$ come *equilibrio correlato* se e solo p se soddisfa le disequazioni 1.1:

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, s_{-i}) u_i(s_i', s_{-i}) \quad \text{per ogni } s_i, s_i' \in S_i.$$

Possiamo riscrivere queste disequazioni come:

$$\sum_{j_i=1}^{d_1} \cdots \widehat{\sum_{j_i=1}^{d_i}} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} p_{s_{j_1} \cdots s_{j_{i-1}} k s_{j_{i+1}} \cdots s_{j_n}} (u^{(i)}_{s_{j_1} \cdots s_{j_{i-1}} k s_{j_{i+1}} \cdots s_{j_n}} - u^{(i)}_{s_{j_1} \cdots s_{j_{i-1}} l s_{j_{i+1}} \cdots s_{j_n}}) \geq 0 \tag{3.3}$$

per tutte le strategie $k, l \in S_i$ e per tutte le $i \in N$.

Osserviamo che ognuna delle disequazioni 3.3 rappresenta un semi-spazio in $\mathbf{R}^{d_1 \cdots d_n - 1}$. Fissando $k, l \in S_i$ e $i \in N$, la formula esplicita del semi-spazio è:

$$H^+(k, l, i) := \{p \in \mathbf{R}^{d_1 \cdots d_n - 1} : p \text{ soddisfa le disequazioni 3.1, 3.2 e 3.3}\}.$$

Possiamo definire la famiglia di tutti gli equilibri correlati del gioco G come l'intersezione finita dei semi-spazi $H^+(k, l, i) \quad \forall k, l \in S_i$ e $i \in N$. Poichè ogni insieme limitato descritto come intersezione di un numero finito di semi-spazi è un politopo, chiamiamo l'insieme degli equilibri correlati come il *politopo di equilibri correlati* P_G del gioco G. Dalle osservazioni fatte in precedenza, il politopo P_G appartiene al simplesso $\Delta_{d_1 \cdots d_n - 1}$ e quindi ha dimensione massima $d_1 \cdots d_n - 1$.

3.2 Equilibri Correlati e Programmazione Lineare

Alla base della *teoria di programmazione lineare* troviamo sistemi di disequazioni lineari, esattamente come quelli usati per descrivere l'insieme di equilibri correlati. Possiamo quindi utilizzare tutti i risultati conosciuti da questa teoria e dalla *teoria del duale* per studiare gli equilibri correlati.
Esistono, ad esempio, algoritmi efficienti per trovare i punti estremi di un politopo, come il *metodo simplex*, e pertanto è relativamente facile calcolare gli equilibri correlati di un gioco, al contrario della valutazione di equilibri di Nash, che è invece computazionalmente difficile [GZ89].
Di seguito implementiamo un codice Python per la risoluzione di un problema di programmazione lineare che cerca gli equilibri correlati in un gioco simmetrico di n giocatori, ovvero un gioco G nel quale sia l'insieme di strategie S_i che la matrice di payoff U sono gli stessi per ogni giocatre in N.
Possiamo ad esempio cercare la migliore distribuzione di probabilità p di S che ci ritorna il massimo guadagno per un giocatore $i \in N$ e che è anche un equilibrio correlato. Oppure possiamo cercare quell'equilibrio correlato che massimizza la somma dei guadagni finali di ogni giocatore:

$$\sum_{s \in S} p_s \sum_{i \in N} u_i(s) \tag{3.4}$$

Esempio. Mostriamo quanto abbiamo visto finora con un esempio. Prendiamo nuovamente in considerazione il gioco del pollo G della sezione 1.2.1, con matrice di payoff U del giocatore I:

	S	C
S	6	2
C	7	0

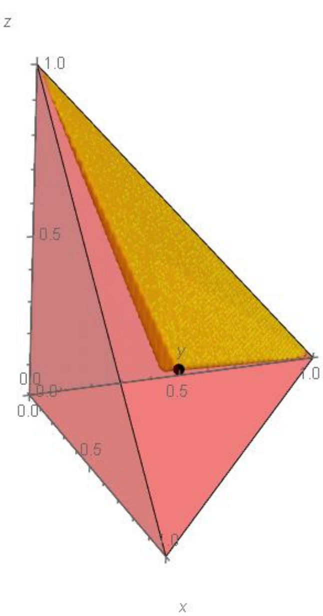
La matrice di payoff U è una matrice (2×2) quindi le disribuzioni di probabilità p su S appartengono a Δ_3. Il politopo degli equilibri correlati del gioco è l'intersezione dei semi-spazi indotti dalle disequazioni 3.1, 3.2 e 3.3:

$$\begin{gathered}
(6-7)p_{S,S} + (2-0)p_{S,C} \geq 0 \qquad \text{ovvero} \qquad -p_{S,S} + 2p_{S,C} \geq 0 \\
(7-6)p_{C,S} + (0-2)p_{C,C} \geq 0 \quad \text{ovvero} \quad p_{C,S} - 2p_{C,C} \geq 0 \\
(6-7)p_{S,S} + (2-0)p_{C,S} \geq 0 \quad \text{ovvero} \quad -p_{S,S} + 2p_{C,S} \geq 0 \\
(7-6)p_{S,C} + (0-2)p_{C,C} \geq 0 \quad \text{ovvero} \quad p_{S,C} - 2p_{C,C} \geq 0 \\
p_{S,S}, p_{S,C}, p_{C,S}, p_{C,C} \geq 0 \\
p_{S,S} + p_{S,C} + p_{C,S} + p_{C,C} = 1
\end{gathered}$$

Dall'ultima equazione possiamo riscrivere $p_{C,C} = 1 - p_{S,S} - p_{S,C} + -p_{C,S}$ Quindi data una distribuzione di probabilità $p = (p_{S,S}, p_{S,C}, p_{C,S}) \in \mathbb{R}^3$, l'intersezione dei semi-spazi:

$$\begin{aligned}
&H^+(S,C,I) = \{p \in \mathbb{R}^3 : -p_{S,S} + 2p_{S,C} \geq 0\} \\
&H^+(C,S,I) = \{p \in \mathbb{R}^3 : 2p_{S,S} + 2p_{S,C} + 3p_{C,S} \geq 2\} \\
&H^+(S,C,II) = \{p \in \mathbb{R}^3 : -p_{S,S} + 2p_{C,S} \geq 0\} \\
&H^+(C,S,II) = \{p \in \mathbb{R}^3 : 2p_{S,S} + 3p_{S,C} + 2p_{C,S} \geq 2\}
\end{aligned}$$

genera il politopo degli equilibri correlati P_G che possiamo vedere colorato in giallo nella figura sottostante, racchiuso all'interno del simplesso tridimensionale, in rosso.



Il punto evidenziato in corrispondenza di uno dei punti estremali del politopo corrisponde all'equilibrio correlato p^* che massimizza la somma dei payoff di ogni giocatore, ovvero che massimizza la somma 3.4.
Per trovare un tale punto p^* utilizziamo la programmazione lineare come descritto in precedenza. Nel caso del gioco del pollo noi vogliamo massimizzare la somma:

$$\begin{aligned}(6+6)p_{S,S} + (2+7)p_{S,C} + (7+2)p_{C,S} + (0+0)p_{C,C} \\ = 12p_{S,S} + 9p_{S,C} + 9p_{C,S}\end{aligned}$$

sotto le restrizioni già esplicitate 3.1, 3.2 e 3.3.
Utilizzando il codice Python riportato nel paragrafo 4.2 dell'appendice, si trova

$$p^* = (1/2, 1/4, 1/4, 0)$$

a cui corrisponde un vettore di payoff pari a $(5.25, 5.25)$ e la cui somma è 10.5. Possiamo osservare subito che il guadagno dei giocatori (e la loro somma) è maggiore del guadagno corrispondente a $p' = (1/3, 1/3, 1/3, 0)$, l'equilibrio correlato che abbiamo considerato nel paragrafo 1.2.1. Nel caso di p' il vettore dei payoff è $(5, 5)$ con somma pari a 10.
Verifichiamo ora che p^* sia effettivamente un equilibrio correlato di G. sostituendo nelle disequazioni che abbiamo individuato otteniamo:

$$\begin{gathered}-(1/2) + 2(1/4) = 0 \geq 0 \\ (1/4) - 2(0) = 1/4 \geq 0 \\ -(1/2) + 2(1/4) = 0 \geq 0 \\ (1/4) - 2(0) = 1/4 \geq 0 \\ 1/2 + 1/4 + 1/4 + 0 = 1\end{gathered}$$

da cui concludiamo che $p^* \in P_G$.
Infine, il fatto che p^* massimizzi l'equazione 3.4 è dovuto al procedimento del metodo *simplex* nella risoluzione di un problema lineare.

4 Appendice

4.1 Teorema Minimax

Teorema Minimax di Von Neumann ([Neu28],1928). *Sia A una matrice $n \times m$. Allora*

$$\max_{y \in S^m} \min_{x \in S^n} x^T A y = \min_{x \in S^n} \max_{y \in S^m} x^T A y \tag{4.1}$$

dove:

- *S^n e S^m sono sottoinsiemi compatti, convessi e non-vuoti di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ rispettivamente.*
- *la funzione $f(x, y) = x^T A y$ è continua da $S^n \times S^m$ a $\mathbb{R}$.*
- *$f(\cdot, y) : S^n \to \mathbb{R}$ è convessa per ogni $y \in S^m$.*
- *$f(x, \cdot) : S^m \to \mathbb{R}$ è concava per ogni $x \in S^n$.*

4.2 Codice Python per Equilibri Correlati

[1]:
```python
from pulp import *
import numpy as np
import itertools

# Funzione che data una matrice di payoff 'U' ritorna l'insieme S dei vettori di strategia

def strategyVectorsSet(U):

#setup
    n = len(U.shape) # Numero di giocatori
    N = [i for i in range(n)] # Insieme dei giocatori
    d = U.shape[0] # Numero di strategie in S_i

#code
    S = [] # Insieme S dei vettori di strategia
    for s_vect in itertools.product(range(d), repeat= n):
        S.append(s_vect)

    return S
```

```
# Funzione che data una matrice 'U', giocatore 'i' e un vettore di strategia 's'= (s_i, s_{-i}) \in S mi restituisce l'insieme dei vettori di strategie s'= (s_j, s_{-i}) con j \neq i.

def changeStrategySet(U, i, s):

#setup
    n = len(U.shape) # Numero di giocatori
    N = [i for i in range(n)] # Insieme dei giocatori
    d = U.shape[0] # Numero di strategie in S_i
    S = strategyVectorsSet(U)

#code
    change_s_i = [] # Insieme degli (s_j, s_{-i}) con j \neq i
    N_without_i = [j for j in N if j!=i] # Insieme dei giocatori senza il giocatore i
    for t in S:
        Q = True # Verifica condizioni
        for j in N_without_i:
            Q = Q * (t[j]==s[j])
        if Q:
            change_s_i.append(t) # Aggiungiamo il vettore di strategia t se t_{-i} == s_{-i}
    change_s_i.remove(s) # Togliamo s_vect dall'insieme

    return change_s_i

# Funzione che data una matrice 'U' del payoff relativo al giocatore 0, un vettore di strategie 's' e un giocatore 'i', ritorna il guadagno u_i(s)

def payoff(U, i, s):

#setup
    n = len(U.shape) # Numero di giocatori
    N = [i for i in range(n)] # Insieme dei giocatori
```

```
    d = U.shape[0] # Numero di strategie in S_i
    S = strategyVectorsSet(U)

# Code
    if i == 0:
        return U[s]

    N_without_i = [j for j in range(1,n) if j!=i ] # Insieme␣
↪dei giocatori senza il giocatore i
    for t in S:
        Q= True # Verifica condizioni
        for j in N_without_i:
            Q = Q * (t[j]==s[j])
        Q = Q * (t[0]==s[i]) * (t[i]==s[0]) # Vogliomo␣
↪l'entrata della matrice U corrispondente al vettore (s_i,␣
↪s_2,..., s_0,..., s_n), dove s_0 si trova alla i-esima␣
↪posizione. Ovvero il vettore con s_0 e s_i scambiati.
        if Q:
            return U[t]
```

[2]:

```
# Funzione che data una matrice di payoff 'U', restituisce␣
↪l'equilibrio correlato che massimizza la somma dei guadagni␣
↪di tutti i giocatori

def bestCE(U):

#setup
    n = len(U.shape) # Numero di giocatori
    N = [i for i in range(n)] # Insieme dei giocatori
    d = U.shape[0] # Numero di strategie in S_i
    S = strategyVectorsSet(U)

# Distribuzioni di probabilita' su S
    p = [ f"p{s}" for s in S ]

# Descriviamo il nostro problema lineare con il pacchetto␣
↪'pulp'
    prob = LpProblem( 'LPproblem', LpMaximize) # E' un␣
↪problema di massimizzazione
```

```
    variables = LpVariable.dicts('', p, 0 ) # Definiamo le␣
↪variabili del problema come le distribuzioni di probabilita'

# Funzione da massimizzare
    prob += lpSum( [ payoff(U, i, s) * variables[f"p{s}"] for␣
↪i in N for s in S ] )

# Restrizioni per gli equilibri correlati
    for i in N:
        for s_i in range(d):
            for k in range(d-1):
                prob += lpSum( [ ( payoff(U, i, s) - payoff(U,␣
↪i, changeStrategySet(U, i, s)[k])) * variables[f"p{s}"] for␣
↪s in S if s[i]==s_i ] ) >= 0

# Restrizione in quanto p(S)=1
    prob += lpSum(variables[f"p{s}"] for s in S ) == 1

# Risolviamo il problema
    prob.solve()
    #print( "Status: ", LpStatus[prob.status] )

#Visualization
    print(f"Giocatori: {n} \nStrategie per giocatore: {d}␣
↪\nDimensione Matrice U: {U.shape} \nMatrice di Payoff U:␣
↪\n{U} \n\nInsieme dei vettori di strategia S: {S}␣
↪\nDistribuzione di probabilita' p: {p} \n\n")
    print("Cerchiamo l'equilibrio correlato p che massimizza␣
↪la somma dei guadagni di tutti i giocatori\n")
    print(prob)
    print("\nMiglior equilibrio correlato p: ")
    for var in prob.variables():
            print(var.name, "=", var.varValue)
    print("\nMiglior somma dei guadagni di tutti i giocatori:␣
↪= ", value(prob.objective))

    return np.array([var.varValue for var in prob.variables()])
```

4.3 Esempio Output: Gioco del Pollo

[3]:
```
# Scriviamo la matrice di payoff relativa al gioco
U = np.array([[6,2], [7,0]])

# Troviamo l' equilibrio correlato che massimizza la somma dei␣
↪guadagni
bestCE(U)
```

```
Giocatori: 2
Strategie per giocatore: 2
Dimensione Matrice U: (2, 2)
Matrice di Payoff U:
[[6 2]
 [7 0]]

Insieme dei vettori di strategia S: [(0, 0), (0, 1), (1, 0),␣
↪(1, 1)]
Distribuzione di probabilita' p: ['p(0, 0)', 'p(0, 1)', 'p(1,␣
↪0)', 'p(1, 1)']


Cerchiamo l'equilibrio correlato p che massimizza la somma dei␣
↪guadagni di tutti
i giocatori

LPproblem:
MAXIMIZE
12*_p(0,_0) + 9*_p(0,_1) + 9*_p(1,_0) + 0
SUBJECT TO
_C1: - _p(0,_0) + 2 _p(0,_1) >= 0

_C2: _p(1,_0) - 2 _p(1,_1) >= 0

_C3: - _p(0,_0) + 2 _p(1,_0) >= 0

_C4: _p(0,_1) - 2 _p(1,_1) >= 0

_C5: _p(0,_0) + _p(0,_1) + _p(1,_0) + _p(1,_1) = 1
```

```
VARIABLES
_p(0,_0) Continuous
_p(0,_1) Continuous
_p(1,_0) Continuous
_p(1,_1) Continuous


Miglior equilibrio correlato p:
_p(0,_0) = 0.5
_p(0,_1) = 0.25
_p(1,_0) = 0.25
_p(1,_1) = 0.0

Miglior somma dei guadagni di tutti i giocatori: =  10.5
```

[3]:
```
array([0.5 , 0.25, 0.25, 0.  ])
```

Osservazione 4.1. Nel codice utilizzato, riportato nell'appendice (4.2), il problema lineare e' risolto utilizzando il risolvitore di default del pacchetto "Pulp" di Python, *PULP-CBC-CMD*. Il COIN Branch and Cut (CBC) e' un programma MIP (mixed-integer program) open-source scritto in C++. Il risolvitore creato con CBC quindi e' basato sul metodo simplex, ma e' poi combinato con altri algoritmi come il branch-and-bound e il cut-generation.

Bibliografia

[Neu28] John Von Neumann. "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele". In: *Mathematische Annalen* 100 (1928), pp. 295–320. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01448847.

[Kak31] Shizuo Kakutani. "A generalization of Brouwer's fixed point theorem". In: *Duke Mathematical Journal* 8 (1931), pp. 457–459. DOI: 10.1215/S0012-7094-41-00838-4.

[Nas51] John Nash. "Non-Cooperative Games". In: *Annals of Mathematics* 54.2 (1951), pp. 286–295. ISSN: 0003486X. URL: http://www.jstor.org/stable/1969529 (visitato il 23/11/2022).

[Aum74] Robert J. Aumann. "Subjectivity and correlation in randomized strategies". In: *Journal of Mathematical Economics* 1.1 (1974), pp. 67–96. ISSN: 0304-4068. DOI: https://doi.org/10.1016/0304-4068(74)90037-8. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304406874900378.

[Aum87] Robert J. Aumann. "Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality". In: *Econometrica* 55.1 (1987), pp. 1–18. URL: http://www.jstor.org/stable/1911154.

[GZ89] Itzhak Gilboa e Eitan Zemel. "Nash and correlated equilibria: Some complexity considerations". In: *Games and Economic Behavior* 1.1 (1989), pp. 80–93. ISSN: 0899-8256. DOI: https://doi.org/10.1016/0899-8256(89)90006-7. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0899825689900067.

[HS89] Sergiu Hart e David Schmeidler. "Existence of Correlated Equilibria". In: *Mathematics of operations resarch* (1989). URL: https://doi.org/10.1287/moor.14.1.18.

[MSZ13] Michael Maschler, Eilon Solan e Shmuel Zamir. *Game Theory*. Cambridge University Press, 2013. DOI: 10.1017/CBO9780511794216.

[Deg18] Laura Degl'Innocenti. "Correlated Equilibria in Static Mean-Field Games". Master's thesis. Università di Padova, 20 lug. 2018. URL: http://hdl.handle.net/20.500.12608/27628.