

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



DIPARTIMENTO
DI INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA

**Beccheggio di un velivolo aereo:
analisi e progettazione del sistema di controllo
in retroazione**

Relatore

Prof. Zampieri Sandro

Laureando

Gastaldi Antonio

ANNO ACCADEMICO 2024 - 2025

Data di laurea: 23/07/2025

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare anzitutto il professor Sandro Zampieri per avermi aiutato con disponibilità ed umiltà nella scelta e nella stesura della tesi.

Anche ai miei genitori vorrei dedicare un ringraziamento per il loro tempo dedicatomi durante il percorso fin qui vissuto, soprattutto nei momenti difficili o di sconforto, dove anche un semplice sorriso ha permesso di prendere la vita con più spensieratezza. Una menzione speciale per mio zio Simone, che per me è stato, e spero continuerà ad essere ancora, come il fratello che non ho mai avuto e che ha portato in casa i suoi aneddoti e più gioventù.

Ai miei nonni che ora non ci sono più e a Maria e Armando, che da piccolo ho sempre chiamato nonni anche se di fatto non lo sono: grazie per avermi sempre spronato a vivere con felicità e serenità. Ringrazio infine tutte le persone incontrate in questi anni, che, anche se solo per un breve periodo, hanno contribuito a rendere questo viaggio più ricco e significativo.

Questo elaborato vuole essere anche un omaggio al mio album musicale preferito, che ha accompagnato la mia esistenza fin da piccolo, quale è “Sailing To Philadelphia” di Mark Knopfler, la cui copertina presenta l'immagine di un aereo in volo, un qualcosa che quando la guardo mi riporta in mente un'idea di libertà e il fatto di augurare a tutte le persone di inseguire i propri sogni nella loro unica vita.

Introduzione

L'elaborato presentato di seguito si pone di descrivere il sistema di controllo che gestisce il beccheggio di un velivolo aereo, partendo dalla delineazione del sistema fisico, passando poi ad una fase di analisi ed infine alla più importante fase di progettazione.

Partendo da alcune specifiche di progetto che il sistema dovrà soddisfare, presentate all'inizio della relazione, si intraprenderanno alcune strade tipiche della teoria dei controlli per progettare il compensatore in retroazione. In particolare, le tre metodologie di lavoro saranno:

- sintesi tramite il controllore PID;
- sintesi nel dominio della frequenza grazie ai diagrammi di Bode;
- sintesi tramite lo studio del luogo delle radici.

La tesi infine si concluderà con una breve ricapitolazione in cui si svolgerà una discussione ed un confronto sulle soluzioni ottenute.

Durante tutta la stesura dell'elaborato verrà fatto ampio uso di software di calcolo numerico quali MATLAB e Sisotool per scrivere codice ed eseguire simulazioni interattive che siano le più fedeli possibile ad una prova pratica che metta in luce le definizioni ed i concetti appresi durante il corso di Controlli Automatici.

Indice

1 Introduzione al sistema	1
1.1 Descrizione della dinamica del beccheggio	2
1.1.1 Linearizzazione del modello	3
1.2 Calcolo della funzione di trasferimento	5
1.3 Specifiche di progetto	6
2 Analisi del sistema	7
2.1 Stabilità del sistema	7
2.2 Risposta al gradino nell'analisi ad anello aperto	7
2.3 Analisi ad anello chiuso	9
3 Controllore PID	13
3.1 Effetti dei parametri del controllore PID	14
3.2 Controllo Proporzionale (P)	14
3.2.1 Controllo Proporzionale-Integrativo (PI)	17
3.3 Controllo Proporzionale-Derivativo (PD)	18
3.4 Controllo Proporzionale-Integrativo-Derivativo (PID)	20
4 Compensatore in frequenza	21
4.1 Progettazione del compensatore	21
4.1.1 Progettazione di $C_1(s)$	22
4.1.2 Progettazione di $C_2(s)$	22
4.1.3 Progettazione tramite Sisotool	24
5 Controllo mediante luogo delle radici	27
5.1 Tracciamento del luogo	27
5.2 Progettazione della rete anticipatrice	29
6 Confronto tra le soluzioni progettuali	33
6.1 Considerazioni sul segnale $u(t)$	35
Bibliografia	37
Figure e tabelle	38

Capitolo 1

Introduzione al sistema

Si consideri la *figura 1.1*, che rappresenta la schematizzazione di un velivolo aereo posto su un sistema di riferimento tridimensionale avente origine nel baricentro dello stesso. Sono inoltre mostrate le principali componenti aerodinamiche del velivolo, tra cui gli alettoni, lo stabilizzatore orizzontale e i timoni, su cui si impartiscono comandi dalla cabina di pilotaggio per far seguire al mezzo la traiettoria desiderata.

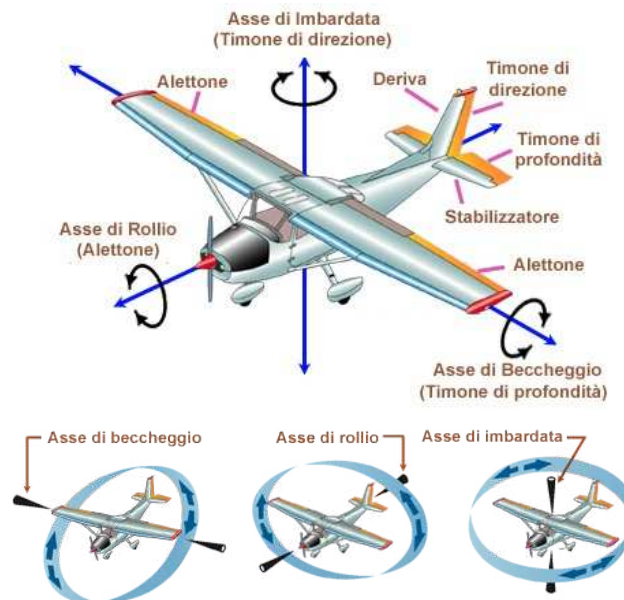


Figura 1.1 Schematizzazione di un velivolo aereo e movimenti del mezzo nello spazio tridimensionale

La rotazione attorno a ciascun asse del sistema di riferimento individua un particolare tipo di oscillazione dell'aereo:

- il beccheggio (pitch in inglese), ottenuto muovendo avanti o indietro la cloche, che comporterà rispettivamente la picchiata o la cabrata dell'aereo, come mostrato in *figura 1.2*.

Si noti come una modifica dell'equilibratore posto al di sotto dello stabilizzatore orizzontale

in coda comporti una diversa regolazione dell'angolo tra l'asse trasversale del mezzo e l'orizzonte, permettendo il movimento desiderato;

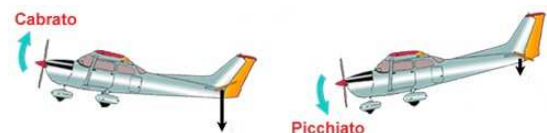


Figura 1.2 La cabrata e la picchiata di un velivolo

- il rollio (roll in inglese), il quale si riferisce all'inclinazione laterale del velivolo agendo lateralmente sulla cloche e provocando una modifica dell'assetto degli alettoni dell'ala;
- l'imbardata (yaw in inglese), riferito alla rotazione laterale dell'aereo, movimento impartito dalla pedaliera.

1.1 Descrizione della dinamica del beccheggio

L'obiettivo è quello di progettare un pilota automatico che regoli la dinamica del beccheggio di un aereo. La prima cosa da considerare è il fatto che la trattazione è molto complicata: infatti il moto è governato essenzialmente da sei equazioni differenziali non lineari accoppiate. Sarà quindi subito necessario fare delle assunzioni ed ignorare alcuni aspetti che renderanno l'analisi e la progettazione del sistema di controllo meno accurata ma comunque corretta ed esaustiva.

La *figura 1.3* mostra le principali forze che agiscono su un velivolo in fase di volo. Si può notare come il mezzo sia sottoposto alle forze di spinta (thrust) e peso (weight), bilanciate rispettivamente dalle forze di resistenza (drag) e portanza (lift). Assumeremo che il moto dell'aereo sia rettilineo uniforme in ogni istante t e che una variazione dell'angolo di beccheggio non modifichi in nessuna situazione la velocità del mezzo.

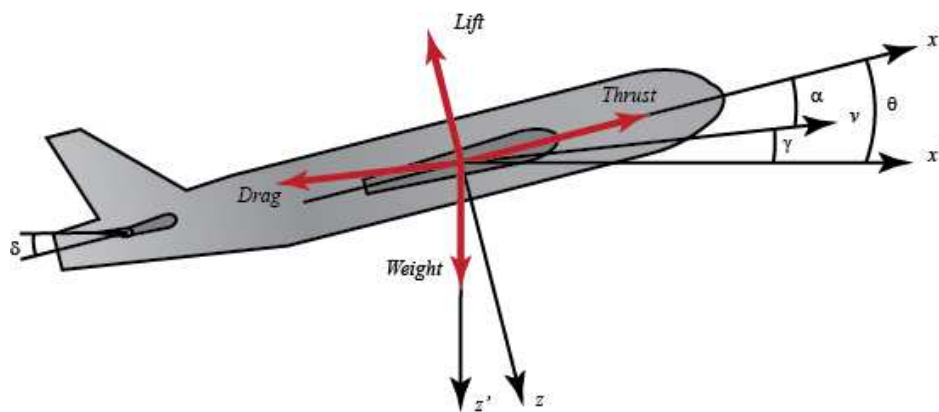


Figura 1.3 Dinamica di volo, con rappresentazione delle forze in gioco

Le equazioni del moto, note queste assunzioni, possono quindi essere disaccoppiate in equazioni laterali e longitudinali, che verranno poi linearizzate: il beccheggio è descritto dalle seguenti equazioni differenziali longitudinali, il cui approfondimento dettagliato viene lasciato al lettore consultando manuali di dinamica di volo per comprenderne la loro derivazione.

$$\dot{\alpha}(t) = -\frac{2\rho S U}{4m + \rho S \bar{c} C_L} \left\{ (C_L + C_D)\alpha(t) + \frac{4m}{4m C_L - \rho S \bar{c}} q(t) + C_W \sin[\theta(t) - \alpha(t)]\theta(t) - C_L \right\} \quad (1.1)$$

$$\dot{q}(t) = \frac{\rho S U C_M}{4m I (4m + \rho S \bar{c} C_L)} \left\{ (4m - \rho S \bar{c} C_D)\alpha(t) + 8m q(t) + \rho S \bar{c} C_W \sin[\theta(t) - \alpha(t)]\delta(t) \right\} \quad (1.2)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{2U}{\bar{c}} q(t) \quad (1.3)$$

Nella *tabella 1.1* viene comunque offerta una panoramica delle grandezze fisiche che delineano la dinamica del pitch.

		Costante	Descrizione
Variabile di stato	$\alpha(t)$	U	Velocità di volo all'equilibrio (costante)
	$q(t)$	S	Superficie alare
	$\delta(t)$	ρ	Densità dell'aria
	$\theta(t)$	I	Momento d'inerzia normalizzato
		m	Massa del velivolo
		$\bar{c}$	Lunghezza media della corda alare
		C_T	Coefficiente di spinta
		C_W	Coefficiente di peso
		C_D	Coefficiente di resistenza all'aria
		C_L	Coefficiente di portanza
		C_M	Coefficiente del momento del beccheggio

Tabella 1.1 Grandezze fisiche della dinamica del beccheggio

Per iniziare l'analisi del sistema di controllo, è necessario specificare l'ingresso e l'uscita del sistema. In questo caso, considereremo come ingresso l'angolo di deflessione dell'equilibratore δ , mentre come uscita l'angolo di beccheggio θ .

1.1.1 Linearizzazione del modello

Possiamo notare immediatamente come il sistema non sia lineare, in quanto è presente la funzione trigonometrica del seno. Prima di continuare è necessario quindi linearizzare il modello. Dobbiamo valutare le formule all'equilibrio, cercando soluzioni costanti alle equazioni differenziali. Ponendo $\alpha(t) = \bar{\alpha}$, $q(t) = \bar{q}$, $\delta(t) = \bar{\delta}$, $\theta(t) = \bar{\theta}$ ed avendo 3 equazioni in 4 incognite, ci sarà un grado di libertà che sceglieremo essere l'ingresso del sistema. Per cui scegliamo ad esempio $\bar{\delta} = 0$. Dalla terza equazione si ottiene che $\bar{q} = 0$ e assumendo che $\sin(\bar{\theta} - \bar{\alpha}) \simeq \bar{\theta} - \bar{\alpha}$ per valori piccoli delle due costanti, si ottiene che:

$$\begin{cases} 0 = (C_L + C_D)\bar{\alpha} + C_W \sin(\bar{\theta} - \bar{\alpha})\bar{\theta} - C_L \\ 0 = (4m - \rho S \bar{c} C_D)\bar{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\alpha} = 0 \\ \bar{\theta}^2 = \frac{C_L}{C_W} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\alpha} = 0 \\ \bar{\theta} = \sqrt{\frac{C_L}{C_W}} \end{cases}$$

Il valore trovato per $\bar{\theta}$ è coerente con l'intuizione fisica: all'equilibrio, l'angolo di beccheggio aumenta con la portanza e diminuisce con il peso aerodinamico.

Sostituiamo le grandezze fisiche presentate nella *tabella 1.1* con dei valori numerici, presi da schede tecniche di stabilità longitudinale di un velivolo Boeing 747 mostrate in *figura 1.4*. Le condizioni di volo dalla 5 alla 10 si riferiscono a condizioni stazionarie, mentre i pedici specificati nelle costanti specificano a quale derivata o componente si riferisce ciascun coefficiente aerodinamico. Per maggiori dettagli, si richiama la visione di manuali di volo.

Condition	2	5	7	9	10
h (ft)	SL	20,000	20,000	40,000	40,000
M_∞	0.25	0.500	0.800	0.800	0.900
α (degrees)	5.70	6.80	0.0	4.60	2.40
W (lbf)	564,032.	636,636.	636,636.	636,636.	636,636.
I_y (slug-ft ²)	32.3×10^6	33.1×10^6	33.1×10^6	33.1×10^6	33.1×10^6
C_L	1.11	0.680	0.266	0.660	0.521
C_D	0.102	0.0393	0.0174	0.0415	0.0415
$C_{L\alpha}$	5.70	4.67	4.24	4.92	5.57
$C_{D\alpha}$	0.66	0.366	0.084	0.425	0.527
$C_{m\alpha}$	-1.26	-1.146	-0.629	-1.033	-1.613
$C_{L\dot{\alpha}}$	6.7	6.53	5.99	5.91	5.53
$C_{m\dot{\alpha}}$	-3.2	-3.35	-5.40	-6.41	-8.82
C_{Lq}	5.40	5.13	5.01	6.00	6.94
C_{mq}	-20.8	-20.7	-20.5	-24.0	-25.1
C_{L_M}	0.0	-0.0875	0.105	0.205	-0.278
C_{D_M}	0.0	0.0	0.008	0.0275	0.242
C_{m_M}	0.0	0.121	-0.116	0.166	-0.114
$C_{L\delta_e}$	0.338	0.356	0.270	0.367	0.300
$C_{m\delta_e}$	-1.34	-1.43	-1.06	-1.45	-1.20

Figura 1.4 Scheda tecnica di un velivolo Boeing 747

Tali valori ci permetteranno di semplificare il modello e iniziare la nostra analisi calcolando come prima cosa la funzione di trasferimento tra l'ingresso δ e l'uscita θ .

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -0.313\alpha + 56.7q + 0.232\delta \\ \dot{q} = -0.0139\alpha - 0.426q + 0.0203\delta \\ \dot{\theta} = 56.7q \end{cases} \quad (1.4)$$

1.2 Calcolo della funzione di trasferimento

Per determinare la funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita del sistema è necessario innanzitutto applicare la trasformata di Laplace alle equazioni (1.4), assumendo condizioni iniziali nulle.

$$\begin{cases} sA(s) = -0.313A(s) + 56.7Q(s) + 0.232\Delta(s) & (1.5) \\ sQ(s) = -0.0139A(s) - 0.426Q(s) + 0.0203\Delta(s) & (1.6) \\ s\Theta(s) = 56.7Q(s) & (1.7) \end{cases}$$

Dall'equazione (1.5), isolando $A(s)$, si ottiene:

$$A(s) = \frac{56.7Q(s) + 0.232\Delta(s)}{s + 0.313} \quad (1.8)$$

Inoltre, dall'equazione (1.6), isolando $Q(s)$, si ha:

$$Q(s) = \frac{-0.0139A(s) + 0.0203\Delta(s)}{s + 0.426} \quad (1.9)$$

Sostituendo in (1.9) ad $A(s)$ l'espressione trovata in (1.8) si ottiene:

$$Q(s) = \frac{-0.0139 \frac{56.7Q(s) + 0.232\Delta(s)}{s + 0.313} + 0.0203\Delta(s)}{s + 0.426}$$

da cui:

$$(s + 0.426)(s + 0.313)Q(s) = -0.0139[56.7Q(s) + 0.232\Delta(s)] + 0.0203\Delta(s)(s + 0.313)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(s^2 + 0.739s + 0.921)Q(s) = (0.0203s - 0.00313)\Delta(s)$$

Si trova per cui:

$$Q(s) = \frac{0.0203s - 0.00313}{s^2 + 0.739s + 0.921} \Delta(s) \quad (1.10)$$

A questo punto, per determinare la relazione ingresso-uscita, si sostituisce nell'equazione (1.7) l'espressione (1.10) appena determinata:

$$\Theta(s) = \frac{1.151s + 0.1774}{s^3 + 0.739s^2 + 0.921s} \Delta(s)$$

Da cui deriva immediatamente la funzione di trasferimento (FDT) $G(s)$ tra l'ingresso δ e l'uscita θ :

$$G(s) := \frac{\Theta(s)}{\Delta(s)} = \frac{1.151s + 0.1774}{s^3 + 0.739s^2 + 0.921s} \quad (1.11)$$

1.3 Specifiche di progetto

Un'ultima importante ed indispensabile fase preliminare nella sintesi di un controllore è la scelta delle specifiche che deve soddisfare. Nella nostra trattazione, progetteremo il compensatore in retroazione che:

- risponderà ad un ingresso a gradino con una sovraelongazione percentuale (overshoot) inferiore al *10%*;
- avrà un tempo di salita (rise time) inferiore a *2 secondi*;
- avrà un tempo di assestamento (settling time) non superiore a *10 secondi*;
- avrà un errore a regime (steady-state error) minore del *2%*.

Ad esempio, se l'angolo dell'equilibratore (ingresso di riferimento) subisce una variazione di 0.2 radianti (circa 11.46°), allora l'angolo di beccheggio (uscita) dovrà raggiungere il 90% di tale valore angolare in meno di 2 secondi, senza superare il picco di 0.22 radianti. Tale angolo, inoltre, si stabilizzerà tra 0.196 e 0.204 radianti in un arco temporale inferiore a 10 secondi.

Capitolo 2

Analisi del sistema

Nello scorso capitolo abbiamo presentato il sistema e determinato la FDT che lega l'ingresso con l'uscita. Ora dobbiamo analizzarlo per comprendere come questo risponda al segnale canonico del gradino unitario. Fornendoci anche dell'utilizzo di MATLAB (per la computazione numerica e la visualizzazione dei dati), verificheremo la sua stabilità prima in catena aperta e, successivamente, in catena chiusa. Scriveremo codice MATLAB nei cosiddetti *m-file*, aggiungendo talvolta dei commenti, grazie al carattere %, per spiegare le varie istruzioni.

2.1 Stabilità del sistema

Prima di iniziare la nostra trattazione dobbiamo specificare cosa intendiamo per stabilità di un sistema. Nella nostra trattazione ci concentreremo sulla BIBO stabilità (bounded input - bounded output), in cui tutti i poli della funzione di trasferimento dovranno avere parte reale negativa.

2.2 Risposta al gradino nell'analisi ad anello aperto

Si parla di analisi ad anello aperto quando lo schema a blocchi del sistema è del tipo mostrato in *figura 2.1*. Come si può notare, non è presente nessun tipo di “percorso” dall'uscita all'ingresso, detto retroazione: per cui il controllore, se presente, agisce sul sistema sulla base solamente della relazione ingresso-uscita e non preoccupandosi di correggere eventuali errori dell'uscita agendo nuovamente sull'ingresso. Effettuiamo comunque un'analisi per questo schema a blocchi studiando la sua risposta al segnale gradino, consapevoli però che non tiene conto dell'evoluzione nel tempo delle variabili da controllare e manifesta quindi dei limiti nel funzionamento. Introduciamo dunque successivamente lo schema a blocchi ad anello chiuso.

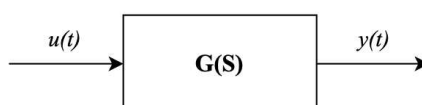


Figura 2.1 Schema a blocchi ad anello aperto

L'obiettivo dei problemi di regolazione è quello di portare l'uscita, dopo un certo transitorio iniziale, ad un valore costante, ottenuto agendo sul sistema tramite un ingresso opportuno, anch'esso costante. Utilizziamo il comando MATLAB **step** che ci permette di analizzare la risposta ad anello aperto in presenza di una variazione a gradino di 0.2 radiants (11°) dell'angolo dell'equilibratore δ . Presentiamo ora il codice in un **m-file** che ci permetterà di ottenere il grafico mostrato in *figura 2.2*.

```

1  T = 0.1; % Passo di campionamento
   t = 0:T:20; % Vettore temporale
   numerator = [1.151 0.1774]; % Coefficienti del numeratore della FDT G(s)
   denominator = [1 0.739 0.921 0]; % Coefficienti del denominatore della FDT G(s)
5  G = tf(numerator, denominator); % FDT G(s) creata tramite il comando tf
   step(0.2*G, t); % Risposta al gradino
   axis([0 10 0 0.8]); % Descrizione assi
   xlabel("Tempo"); % Etichetta asse delle ascisse (asse x)
   ylabel("Angolo di beccheggio (radiants)"); % Etichetta asse delle ordinate (asse y)
10 title("Risposta al gradino ad anello aperto");

```

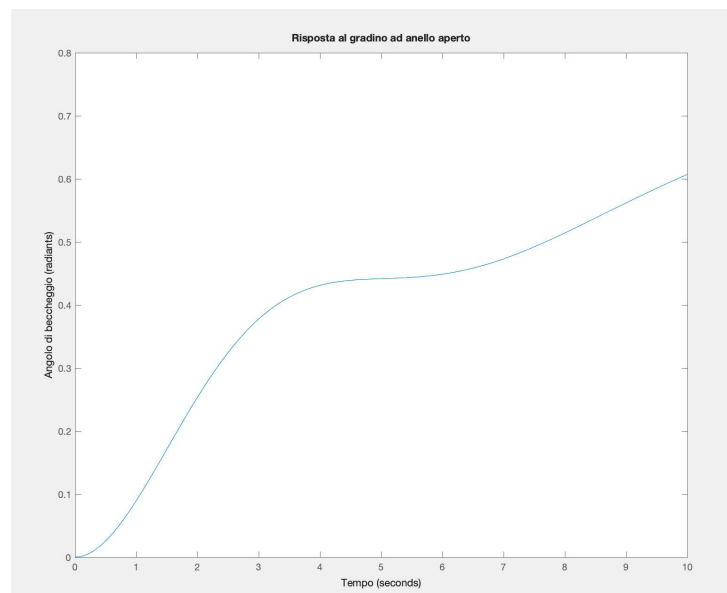


Figura 2.2 *Risposta al gradino ad anello aperto*

La *figura 2.2* mostra come la configurazione ad anello aperto non soddisfa ciò che viene richiesto: il segnale di uscita infatti diverge a $+\infty$ invece di convergere ad un valore costante. La stabilità BIBO presentata nel paragrafo precedente non è quindi soddisfatta. Ci si poteva aspettare un risultato simile analizzando, tramite il comando MATLAB **pole**, i poli della funzione di trasferimento $G(s)$, ovvero le soluzioni ottenute ponendo a 0 il denominatore della FDT, da cui si ottiene:

```

1 pole(G);

ans =
    0.0000 + 0.0000i
   -0.3695 + 0.8857i
   -0.3695 - 0.8857i

```

Si può osservare come la presenza del polo nell'origine precluda la stabilità BIBO del sistema. Tale instabilità poteva essere verificata applicando il criterio di Routh, che consiste nella costruzione di una tabella a partire dai coefficienti di un polinomio, verificando se esso è di Hurwitz (o stabile), ossia ha tutte le radici a parte reale minore di 0. Perché il polinomio sia stabile, si verifica se la tabella è completabile e gli elementi della prima colonna sono non nulli e aventi tutti lo stesso segno. Viene ora applicato tale criterio al denominatore della FDT $G(s)$, che ricordiamo essere $s^3 + 0.739s^2 + 0.921s$, e vengono specificati i vari passaggi per la costruzione e la risoluzione della tabella di Routh.

Riga 3	1	0.921	1) I coefficienti del polinomio vanno inseriti nelle prime due righe della tabella in maniera alternata
Riga 2	0.739	0	2) Elemento di Riga 1 = $-\frac{1}{0.739} \det \begin{bmatrix} 1 & 0.921 \\ 0.739 & 0 \end{bmatrix} = 0.921$
Riga 1	0.921		
Riga 0	0		3) Elemento di Riga 0 = $-\frac{1}{0.921} \det \begin{bmatrix} 0.739 & 0 \\ 0.921 & 0 \end{bmatrix} = 0$

Si può facilmente dedurre che quanto appena descritto in questo caso non si verifica (l'ultimo elemento della prima colonna è nullo), e perciò, come già detto, il sistema non è BIBO stabile.

2.3 Analisi ad anello chiuso

Per i motivi illustrati ed ampiamente dimostrati nel paragrafo precedente riguardo l'analisi ad anello aperto, introduciamo ora l'analisi ad anello chiuso, detta anche in retroazione. In questa circostanza, il sistema si basa non più solamente sull'ingresso iniziale, ma anche sulla variazione temporale dell'uscita: il relativo schema a blocchi è mostrato in *figura 2.3*.

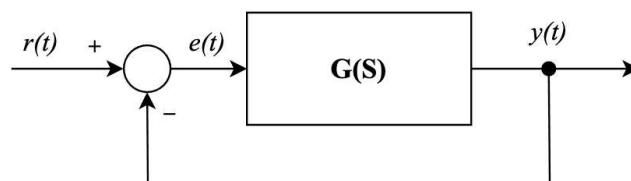


Figura 2.3 Schema a blocchi ad anello chiuso

Parliamo del concetto di retroazione unitaria negativa di un sistema dinamico a tempo continuo, lineare, invariante e SISO (single input-single output) quando l'uscita viene riportata all'ingresso in modo che il segnale su cui agisce la FDT sia la differenza tra l'ingresso iniziale di riferimento $r(t)$ ed il segnale di uscita $y(t)$, ovvero $e(t) = r(t) - y(t)$. Questa differenza rappresenta l'errore che il sistema compie nel tentativo di rendere il più possibile l'uscita conforme all'ingresso. E' quindi necessario ricalcolare la funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita tenendo conto di tale retroazione. Applicando le trasformate di Laplace si ottiene:

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

Inoltre, sapendo che $Y(s) = G(s)E(s)$, si ottiene:

$$Y(s) = G(s)[R(s) - Y(s)] \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}R(s)$$

Definiamo quindi la funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita ad anello chiuso:

$$W(s) := \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Possiamo osservare che ciò che diversifica questa funzione di trasferimento da quella ad anello aperto sono i poli della FDT, i quali sono gli zeri della funzione $1 + G(s)$ e non più solamente gli zeri di $G(s)$ che portavano, come già analizzato in precedenza, ad una forte instabilità del sistema. Analizzeremo quindi i poli di $W(s)$ per verificare la stabilità BIBO del sistema ad anello chiuso. Da qui in avanti supporremo che $G(s) \neq -1$ e $G(\infty) \neq -1$ per garantire che $W(s)$ esista e sia propria.

Analizziamo ora la risposta del sistema ad anello chiuso ponendo un ingresso a gradino. Il comando MATLAB adibito a descrivere la retroazione negativa è **feedback**, descritto come segue e che produce la nuova funzione di trasferimento $W(s)$ mostrata come risultato.

<pre>1 W = feedback(G, 1); % Retroazione unitaria negativa</pre> $W = \frac{1.151 s + 0.1774}{s^3 + 0.739 s^2 + 2.072 s + 0.1774}$
--

Utilizziamo, come fatto nell'analisi ad anello aperto, il comando MATLAB **step** per analizzare la risposta ad anello chiuso in presenza di una variazione a gradino di 0.2 radianti dell'angolo dell'equilibratore δ , che produrrà come output il grafico mostrato in *figura 2.4*. Cliccando con il tasto destro del mouse sul grafico e selezionando dal menu la voce

Characteristics è possibile far apparire le note riguardanti il tempo di salita, di assestamento ed il valore finale.

```
1  T = 0.1;
   t = 0:T:70;
   numerator = [1.151 0.1774];
   denominator = [1 0.739 0.921 0];
5  G = tf(numerator, denominator);
   W = feedback(G, 1); % Retroazione unitaria negativa
   step(0.2*W, t); % Risposta al gradino ad anello chiuso
   axis([0 70 0 0.210]);
   xlabel("Tempo");
10  ylabel("Angolo di beccheggio (radians)");
   title("Risposta al gradino ad anello chiuso");
```

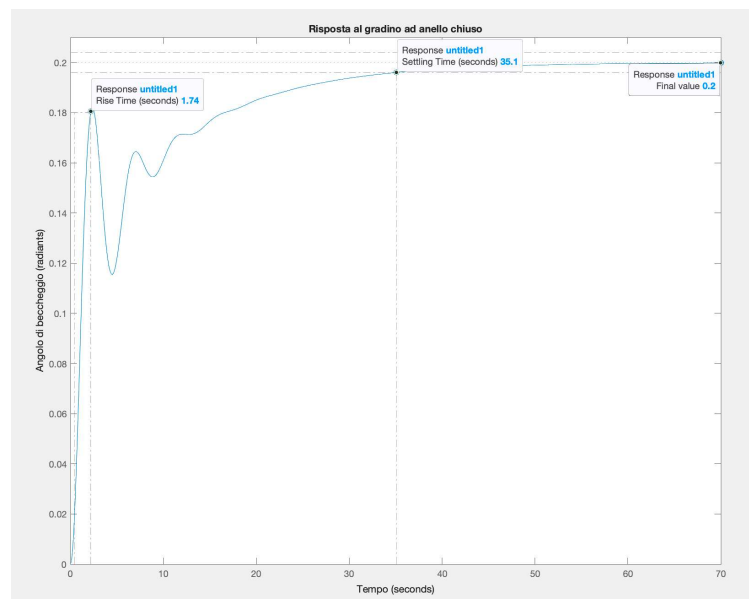


Figura 2.4 Risposta al gradino ad anello chiuso

La prima cosa che salta all'occhio è il fatto che l'uscita, dopo un transitorio iniziale, si stabilisce ad un valore costante non nullo: questo ci fa pensare come l'aggiunta della retroazione unitaria negativa abbia reso stabile il sistema. Effettuiamo ora un'analisi più dettagliata. In analogia con quanto fatto nell'analisi ad anello aperto, visualizziamo i poli e questa volta anche gli zeri della FDT $W(s)$ grazie, rispettivamente, ai comandi MATLAB `pole` e `zero`.

```

1 poles = pole(W);
  zeros = zero(W);

poles =
    -0.3255 + 1.3816i
    -0.3255 - 1.3816i
    -0.0881 + 0.0000i

zeros =
    -0.1541

```

Si nota come $W(s)$ sia una funzione razionale di terzo grado avente zero stabile e che i suoi poli hanno tutti parte reali strettamente negativa: possiamo quindi affermare che il sistema sia BIBO stabile.

Nonostante l'aggiunta della retroazione negativa però, le note riguardanti il tempo di salita, di assestamento ed il valore finale mostrate in *figura 2.4* fanno comprendere come le specifiche di progetto descritte nel *capitolo 1* non siano ancora state rispettate. La prossima fase dell'elaborato sarà quindi dedicata all'aggiunta nello schema a blocchi di un compensatore, che permetterà, tramite alcune tecniche di controllo descritte nei capitoli successivi, di fare in modo che il sistema obbedisca a tutti i requisiti richiesti. Lo schema a blocchi finale da cui si partirà per la progettazione del sistema di controllo in retroazione è mostrato in *figura 2.6*.

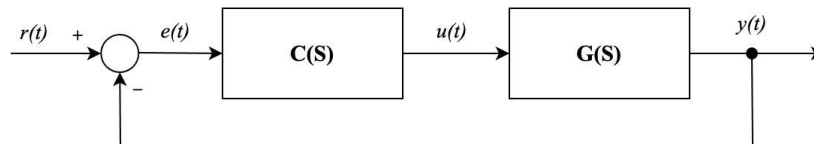


Figura 2.5 Schema a blocchi ad anello chiuso con compensatore

In questa circostanza, dallo schema a blocchi si deduce che, nel dominio delle trasformate di Laplace, l'errore vale $E(s) = R(s) - Y(s)$, mentre $U(s) = C(s)E(s)$ e $Y(s) = G(s)U(s)$, da cui si ottiene che:

$$Y(s) = C(s)G(s)E(s) = C(s)G(s)[R(s) - Y(s)] \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}R(s)$$

Da cui la nuova funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita ad anello chiuso con compensatore:

$$W(s) := \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Capitolo 3

Controllore PID

In questo capitolo introduciamo la struttura del compensatore in retroazione PID, dall'inglese Proportional-Integral-Derivative. Questo strumento è utilizzato in larga scala in quanto è di facile comprensione ed è abbastanza efficace per i problemi che ci si pone di voler risolvere. Esso infatti si basa sulla combinazione lineare di tre azioni:

- una proporzionale P, legata al valore del segnale in ingresso;
- una integrativa I, legata ai valori passati del segnale in ingresso;
- una derivativa D, la quale tiene traccia della velocità di variazione del segnale di ingresso.

Considerando lo schema a blocchi di *figura 2.7*, il risultato ottenuto da un controllore PID, che risulterà poi essere l'ingresso $u(t)$ per la FDT $G(s)$, è calcolato nel dominio del tempo dall'errore in retroazione $e(t)$ in questo modo:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{d[e(t)]}{dt} \quad (3.1)$$

In *figura 3.1* viene mostrato lo schema a blocchi contenente il compensatore $C(s)$ del tipo PID.

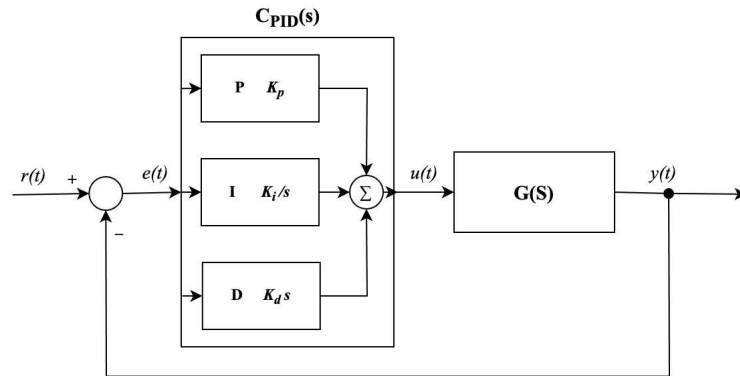


Figura 3.1 Schema a blocchi in retroazione con compensatore PID

Nel dominio delle trasformate di Laplace, l'equazione (3.1) si trasforma nella funzione di trasferimento $C_{PID}(s)$ dall'ingresso $e(t)$ all'uscita $u(t)$:

$$C_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad K_p, K_i, K_d \in \mathfrak{R}$$

3.1 Effetti dei parametri del controllore PID

Nella *tabella 3.1* viene presentata una veloce descrizione dei vari effetti che i parametri del controllore PID, ovvero i guadagni K_p , K_i , K_d , hanno sul sistema ad anello chiuso e sulle specifiche di progetto. Si noti come, in molti casi, è possibile soddisfare le specifiche di progetto senza ricorrere all'utilizzo di tutte e tre le componenti del compensatore: risolvere il problema con uno strumento più semplice, e di conseguenza più sostenibile in termini economici, risulta senza alcun dubbio più vantaggioso.

Guadagno	Rise time	Overshoot	Settling time	Steady-state error
K_p	Riduzione	Incremento	Piccola variazione	Riduzione
K_i	Riduzione	Incremento	Incremento	Eliminazione
K_d	Piccola variazione	Riduzione	Riduzione	Nessun effetto

Tabella 3.1 Effetti dei guadagni di un compensatore PID sulle specifiche di progetto

Verranno quindi ora presentate diverse combinazioni di controllore e per ciascuna di essere verranno valutati i valori dei parametri che massimizzano le prestazioni, sapendo che il riferimento iniziale $r(t)$ sarà il segnale gradino. Verrà fatto utilizzo anche in questo frangente di MATLAB e del suo strumento Sisotool per una sintesi interattiva di una rete di controllo.

3.2 Controllo Proporzionale (P)

Iniziamo dalla progettazione del controllore proporzionale avente funzione di trasferimento $C_p(s) = K_p$. Creiamo un vettore contenente diversi valori della costante K_p e simuliamo la risposta al gradino per ognuno di essi. Scriviamo il seguente codice MATLAB nell'm file e cerchiamo il valore che più riesce a soddisfare le specifiche di progetto. Partiamo da dei valori abbastanza piccoli per K_p per una prima ricerca, passando poi a valori un po' più grandi, con tutti i rispettivi grafici visualizzati in *figura 3.2*.

```

1  T = 0.1;
   t = 0:T:70;
   numerator = [1.151 0.1774];
   denominator = [1 0.739 0.921 0];
5  G = tf(numerator, denominator);
   Kp = [0.01, 0.1, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100];
   for j = 1 : length(Kp) % Per ogni elemento del vettore Kp
       subplot(length(Kp)/2,2,j); % Creazione del j-esimo sottografico
       W = feedback(Kp(j)*G, 1); % Retroazione unitaria negativa
10  step(0.2*W, t, "r"); % Risposta al gradino con controllo P di colore rosso
       lgd = legend("Kp = " + num2str(Kp(j))); % Legenda del grafico
       lgd.Location = "northeast"; % Posizione della legenda nel grafico
       axis([0 30 0 0.4]);
       xlabel("Tempo");
       ylabel("Angolo di beccheggio (radiants)");
15  title("Risposta al gradino con controllo proporzionale");
   end

```

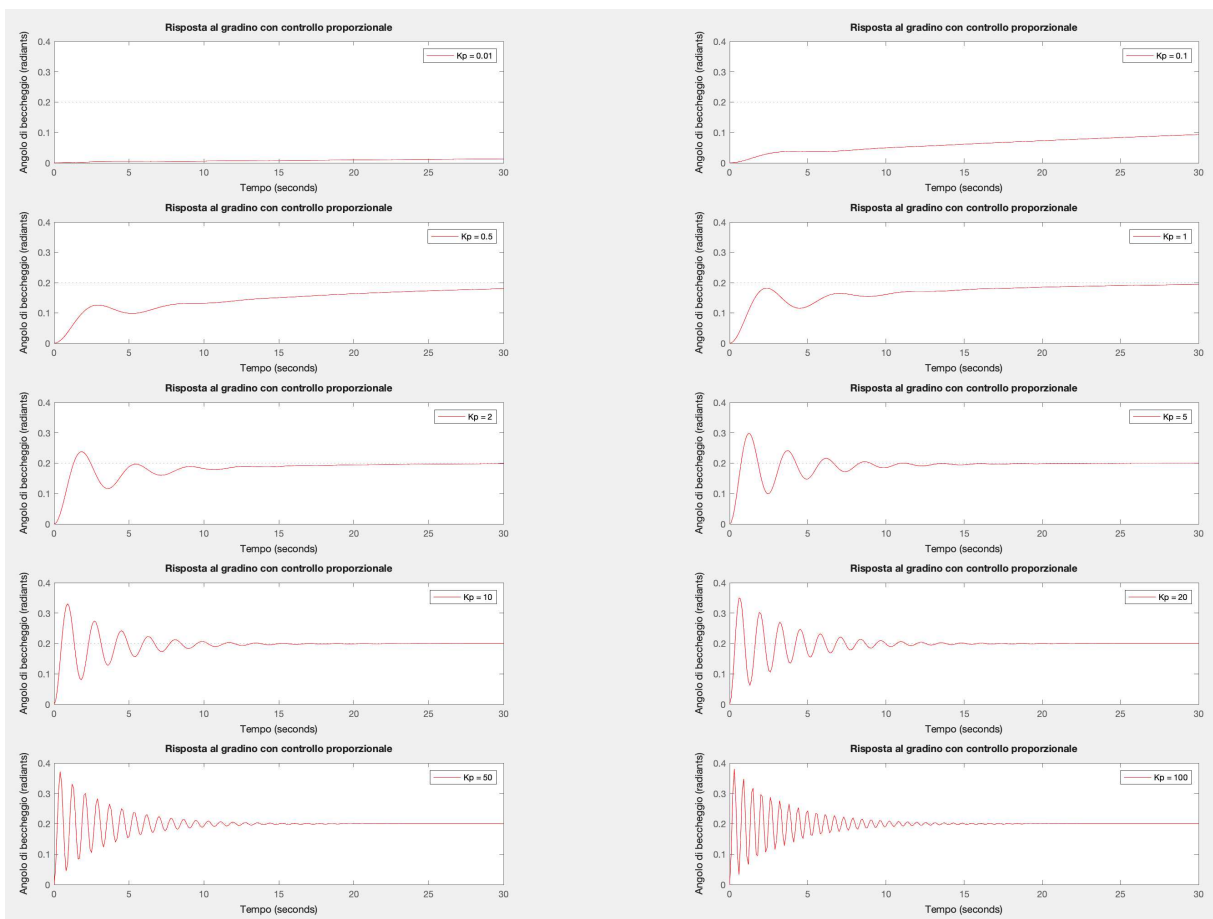


Figura 3.2 Risposte al gradino con controllo proporzionale al variare del parametro K_p

Dai grafici si evince come i valori di K_p compresi tra 1 e 5 siano un ottimo compromesso tra velocità di risposta del sistema e comportamento oscillatorio. Analizzando il comportamento più in dettaglio per quanto riguarda questo range di valori, con i rispettivi grafici mostrati in *figura 3.3*, si nota come la scelta più opportuna per le richieste sia $K_p = 2$.

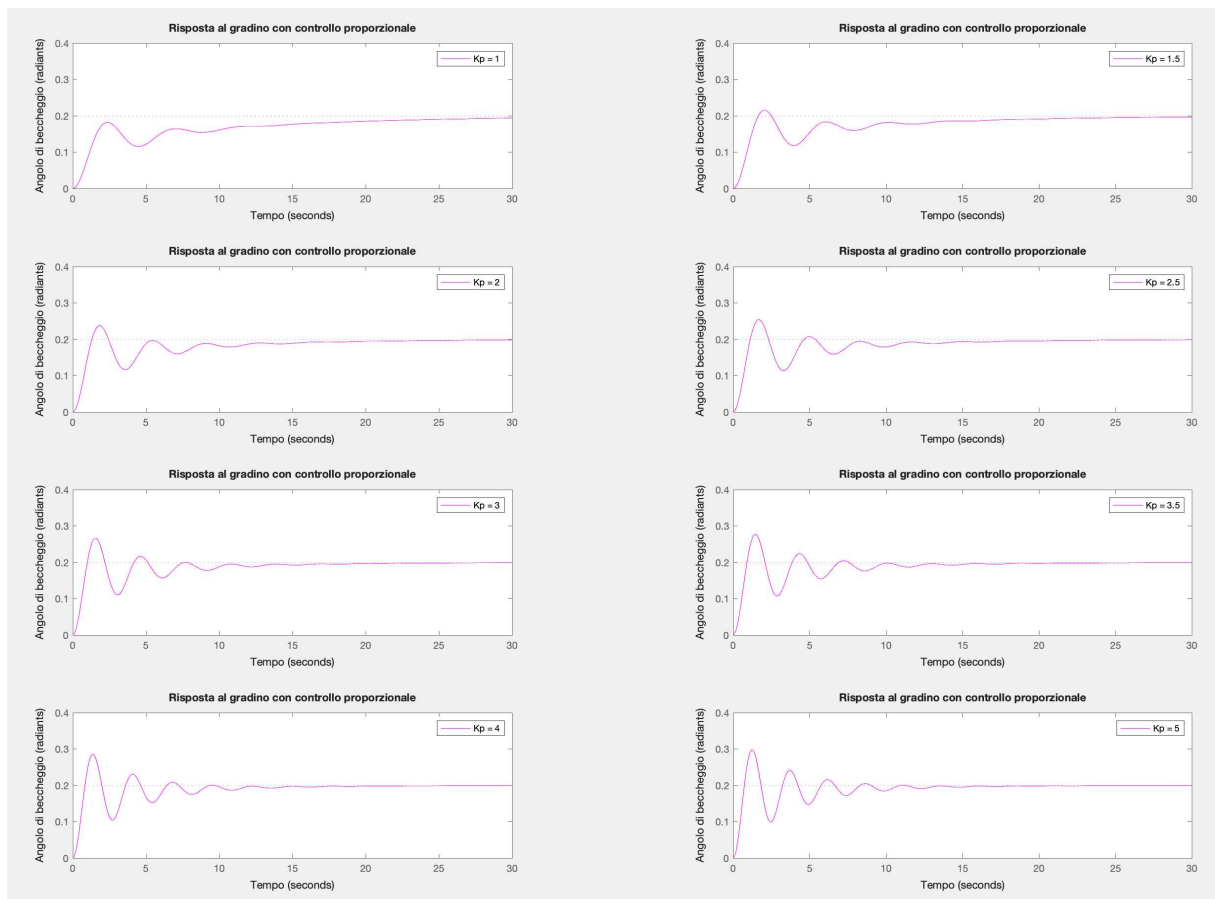


Figura 3.3 Risposte al gradino con controllo proporzionale al variare del parametro K_p

Graficando, in *figura 3.4*, infine solamente il grafico per $K_p = 2$ e facendo apparire ancora una volta le note riguardanti il tempo di salita, di assestamento ed il valore finale, possiamo notare come in realtà sia soddisfatto solamente il requisito riguardante il tempo di salita: sarà quindi necessario introdurre le altre componenti del controllore PID per soddisfare il resto delle richieste.

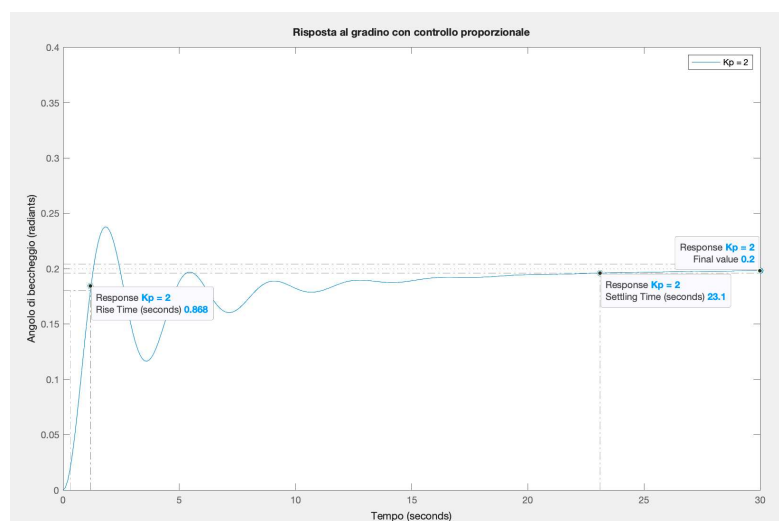


Figura 3.4 Risposta al gradino per $C_P(s) = 2$

3.2.1 Controllo Proporzionale-Integrativo (PI)

Vista la non sufficienza del controllore proporzionale per soddisfare le specifiche di progetto, viene ora aggiunta al compensatore $C_p(s)$ la componente integrativa per cercare di eliminare l'errore a regime (steady-state-error), come riportato in *tabella 3.1*. Si noti però che la funzione di trasferimento $G(s)$ tra l'ingresso δ e l'uscita θ studiata contenga già una componente integrativa, ossia il polo nell'origine. L'aggiunta quindi di un'ulteriore polo cosiffatto non garantirebbe più la stabilità del sistema, come visualizzato nella *figura 3.5*. Viene presentato il codice per $K_p = 2$ e alcuni valori di K_i che fanno comprendere come la risposta del sistema diverga. Il codice MATLAB seguente presenta solamente la parte modificata rispetto al controllore proporzionale.

```
5  ...
   Kp = 2;
   Ki = [0.1, 0.5, 1, 1.5, 2, 5];
   c = ["r", "b", "c", "m", "g", "k"]; % Vettore per i colori dei grafici
   figure; % Creazione del sistema di riferimento
10  hold on; % Abilitazione hold on (mantenimento dei grafici già aggiunti)
   lgd = {}; % Vettore per la legenda
   for j = 1 : length(Ki) % Per ogni elemento del vettore Ki
       W = feedback((Kp + tf(Ki(j), [1 0]))*G, 1); % Retroazione unitaria negativa
       stepplot(0.2*W, t, c(j)); % Risposta al gradino con controllo PI avente j-esimo colore
15   lgd{end + 1} = "Ki = " + num2str(Ki(j)); % Aggiornamento della legenda
   end
   legend(lgd, "Location", "northeast"); % Aggiunta e posizionamento della legenda
   axis([0 30 0 0.5]);
   xlabel("Tempo");
20  ylabel("Angolo di beccheggio (radiants)");
   title("Risposta al gradino con controllo proporzionale-integrativo");
```

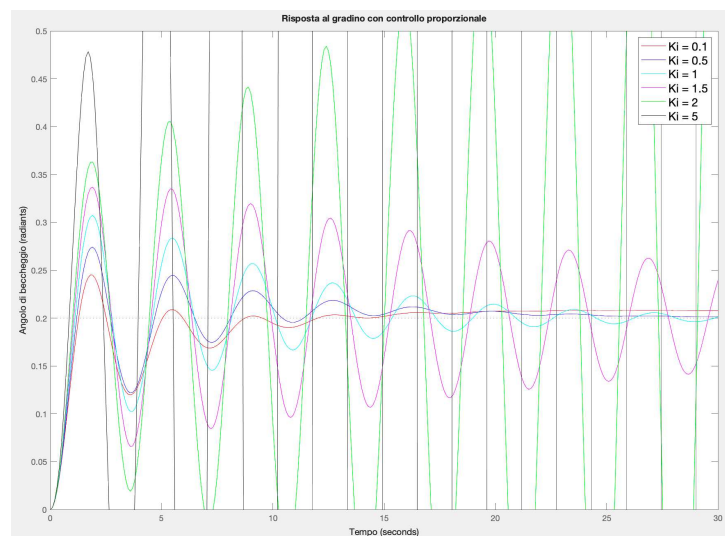
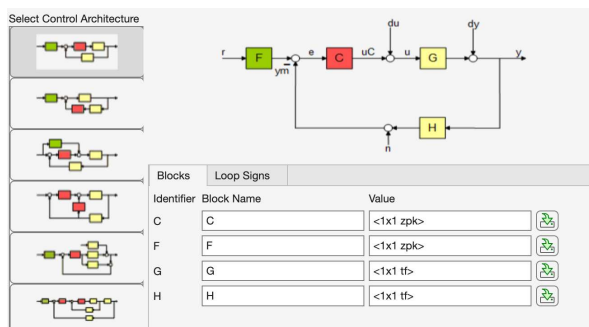


Figura 3.5 Risposta al gradino per $C_{PI}(s) = 2 + \frac{K_i}{s}$ per valori crescenti di K_i

3.3 Controllo Proporzionale-Derivativo (PD)

Invece della componente integrativa, proviamo ora ad aggiungere al compensatore proporzionale quella derivativa, con la relativa funzione di trasferimento che è quindi del tipo $C_{PD}(s) = K_p + K_d s$. In questa fase della progettazione, ci serviamo dello strumento di design automatico Sisotool, la quale apertura è possibile da MATLAB digitando il comando `sisotool(G)`. Questa istruzione apre la finestra *Control System Designer*. Di seguito i passaggi per arrivare a trovare un'espressione per la funzione di trasferimento del compensatore PD che rispetti le specifiche di progetto, con un supporto grafico per ogni punto in figura 3.6.

- (a) Cliccando su *Edit Architecture* in alto a sinistra è possibile vedere graficamente l'architettura dello schema a blocchi del sistema: si può notare che rispecchia quella effettivamente scelta nella nostra progettazione.
- (b) L'ingresso di riferimento è un gradino di 0.2 radianti: il blocco precompensatore $F(s)$ può essere impostato a 0.2 dal menu *Controllers and Fixed Blocks* a sinistra cliccando su F .
- (c) Sempre dallo stesso menu a sinistra, cliccando su C , può essere impostato anche il blocco $C(s)$, andando ad aggiungere, con il clic destro del mouse, lo zero reale necessario per la componente derivativa della FDT tramite la voce *Add Pole/Zero - Real Zero*.
- (d) Al termine di queste fasi preliminari, deve apparire il grafico della risposta del sistema. Si nota come i requisiti di progetto non sono soddisfatti.
- (e) Perché i requisiti vengano rispettati, è necessario determinare valori dei guadagni K_p e K_d consoni. Cliccando sul menu *Tuning Methods* e selezionando la voce *PID Tuning* nella sezione *Automated Tuning*, si seleziona il tipo di controllore, in questo caso PD. Selezionando il metodo *Robust response time*, si modifica la risposta bilanciando la robustezza del sistema e la velocità di risposta. Infine, siccome il tempo di salita desiderato è meno di 2 secondi, proviamo a specificare *Response Time* a 1.5 secondi. Infine, selezionare *Update Compensator*.
- (f) Continuando a bilanciare le due opzioni e tenendo sempre d'occhio come si modifica il grafico della risposta e i requisiti di progetto visualizzati nelle note, si ottiene che valori dei guadagni K_p e K_d adatti per la progettazione del controllore PD siano $K_p = 8.7872$ e $K_d = 3.5699$. Si nota come riducendo Response Time, il tempo di salita e la risposta del sistema diminuiscono, mentre aumentando la robustezza del sistema, diminuisce l'oscillazione.



Grazie all'utilizzo dello strumento Sisotool, si ottiene quindi che il compensatore cercato ha funzione di trasferimento $C_{PD}(s) = 8.7872 + 3.5699s$.

3.4 Controllo Proporzionale-Integrativo-Derivativo (PID)

Per concludere lo studio del compensatore PID, si progetta ora un controllore che presenti tutte e tre le componenti, partendo quindi da una funzione di trasferimento del tipo

$$C_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

Come accaduto per il controllore PI, possiamo affermare come l'aggiunta della componente integrativa renda il sistema instabile, in quanto la funzione di trasferimento $G(s)$ tra l'ingresso δ e l'uscita θ studiata contiene il polo nell'origine come componente integrativa. Per cui, la progettazione del controllo PID non è corretta per gli scopi prefissati.

Si tenga comunque presente che il controllore PD non è realizzabile nella pratica in quanto la funzione di trasferimento è formata da più zeri che poli, risultando perciò impropria. Per scongiurare tale impossibilità, verrà aggiunto un polo ad alta frequenza al di fuori della banda d'interesse.

Capitolo 4

Compensatore in frequenza

La seconda tecnica di controllo presentata per la progettazione del compensatore è lo studio della risposta in frequenza $W(j\omega)$ del sistema, definita come la trasformata di Fourier della risposta impulsiva $W(j\omega) = F[\omega(t)]$. Nell'ipotesi di BIBO stabilità, si può affermare che la risposta in frequenza non è altro che la valutazione della funzione di trasferimento in $s = j\omega$. Il fatto è che tale FDT assume valori complessi e per poterla visualizzare graficamente è necessario uno spazio tridimensionale. Per ovviare a tale problema, si può fare riferimento alle proprietà dei numeri complessi di poter essere rappresentati in modulo e fase: da qui allora vengono utili i diagrammi di Bode del modulo e della fase rispetto alla pulsazione ω . Il sistema di riferimento è cosiffatto:

- sull'asse delle ascisse si utilizza una scala semi-logaritmica con base 10;
- sull'asse delle ordinate si utilizzano: per la fase i gradi e per il modulo i decibel $\left(\text{dB} = 20\log_{10} |W(j\omega)| \right)$.

Un'altra possibile rappresentazione è possibile tramite il diagramma di Nyquist, graficando sul piano complesso la risposta in frequenza mediante una curva parametrica in funzione della pulsazione ω .

4.1 Progettazione del compensatore

Il comportamento in frequenza è di più facile studio rispetto a quello nel dominio del tempo, in quanto, invece di avere a che fare con una legge di convoluzione che lega la FDT $G(s)$ al compensatore $C(s)$, esse si legano tramite un semplice prodotto tra le due componenti, creando il prodotto a cascata $\tilde{G}(s) = C(s)G(s)$. Le specifiche di progetto dovranno essere soddisfatte per l'intera struttura, con $C(s)$ che diventerà ancora una volta grado di libertà per il progettista. E' ora necessario introdurre nuove variabili per riportare i requisiti del sistema al nuovo dominio introdotto.

- La frequenza di attraversamento ω_A è la frequenza per cui il modulo attraversa la retta 0 dB.
- Il margine di fase m_φ è la distanza angolare tra il diagramma alla frequenza ω_A e l'angolo piatto.

Suddividiamo la progettazione del compensatore $C(s)$ in due fasi, che andranno poi moltiplicate tra di loro, per semplificare il tutto e dividere i ruoli:

- il controllore $C_1(s)$ è una funzione di trasferimento del tipo $\frac{K_C}{s^{h_C}}$ dove K_C agisce sull'errore e l'esponente h_C stabilisce il numero di integratori del compensatore;
- il controllore $C_2(s)$ è una funzione di trasferimento stabile che ha l'obiettivo di rispettare la frequenza di attraversamento e il margine di fase introducendo opportuni zeri e poli al sistema.

Prima di partire con la progettazione di queste due componenti, scriviamo la FDT $G(s)$ in forma di Bode, imponendo il termine noto del numeratore e del denominatore a 1 ed isolando gli integratori, cioè i poli nell'origine. Si ottiene che

$$G(s) = \frac{0.1774 \left(1 + \frac{1.151}{0.1774}s\right)}{s(s^2 + 0.739s + 0.921)} = \frac{0.1774 \left(1 + \frac{1.151}{0.1774}s\right)}{0.921s \left(1 + \frac{0.739}{0.921}s + \frac{1}{0.921}s^2\right)} = \frac{K_G}{s^{h_G}} \bar{G}(s) \quad (4.1)$$

$$\text{dove: } K_G = \frac{0.1774}{0.921} \simeq 0.1926, h_G = 1, \bar{G}(s) = \frac{1 + \frac{1.151}{0.1774}s}{1 + \frac{0.739}{0.921}s + \frac{1}{0.921}s^2}.$$

4.1.1 Progettazione di $C_1(s)$

Dalla formula (4.1) si comprende come $G(s)$ contenga un integratore ($h_G = 1$), che permette di eliminare del tutto l'errore a regime. Sarebbe superfluo aggiungere al compensatore altri poli nell'origine per migliorare un requisito che è già soddisfatto ottimamente. Si potrebbe quindi pensare di impostare il valore del guadagno K_C a 1: nella pratica viene considerato un valore maggiore, per aiutare il sistema ad assestarsi più rapidamente, ma non troppo grande, in quanto potrebbe avvenire una saturazione che creerebbe problemi al sistema di controllo. Scegliamo un valore ragionevole, come 10. Si ha quindi che $h_C = 0$ e $K_C = 10$, da cui

$$C_1(s) = 10$$

4.1.2 Progettazione di $C_2(s)$

Nell'analisi in frequenza, i parametri non dipendono più da quelli definiti nel dominio del tempo, come la sovraelongazione, il tempo di salita e di assestamento, ma dalla frequenza di

attraversamento ω_A e dal margine di fase m_φ . Esistono però delle relazioni che legano questi variabili da cui si parte per disegnare i diagrammi di Bode della fase e del modulo di $W(j\omega)$. Innanzitutto, si può dimostrare che il prodotto tra il tempo di salita t_s e la banda passante del sistema B_p è costante e circa pari a 2, cioè $B_p t_s \simeq 2$. Inoltre, osservando che nella progettazione del controllore PD effettuata nel capitolo precedente il tempo di salita valeva circa $0.3s$, possiamo scegliere $t_s = 0.3s$, da cui si ottiene che

$$B_p \simeq \frac{2}{t_s} = 6.67 \text{ rad/s}$$

Sapendo che la banda passante in un sistema retroazionato, come in questo caso, coincide con la frequenza di attraversamento, si ha che $\omega_A = B_p = 6.67 \text{ rad/s}$.

Per determinare un legame tra sovralongazione S e margine di fase m_φ si pensi al fatto che una sovralongazione elevata implica un sistema vicino all'instabilità, avente quindi un margine di fase piccolo. Si ottiene infine la relazione seguente tra queste due grandezze

$$m_\varphi \simeq 1 - 0.8S$$

e le specifiche di progetto indicando che la sovralongazione non deve superare il 10%, da cui

$$m_\varphi \simeq 1 - 0.8 \cdot 0.1 = 0.92 \text{ rad} \simeq 52^\circ$$

Proviamo ora tramite MATLAB a tracciare i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $C_1(s)G(s)$ ad anello aperto, con i rispettivi grafici mostrati in *figura 4.1*.

```

1  numerator = [1.151 0.1774];
   denominator = [1 0.739 0.921 0];
   G = tf(numerator, denominator);
   KC1 = 10; % Guadagno di Bode
5  margin(KC1 * G); % Tracciamento dei diagrammi di Bode
   grid; % Visualizza la griglia nei diagrammi

```

Si può notare che nelle vicinanze della frequenza di attraversamento desiderata la funzione di trasferimento assume modulo -10.7 dB e fase -175° . Sarà quindi necessario:

- innalzare il modulo di $C_1(s)G(s)$ di circa 11 dB in modo che valga la condizione

$$\left| G(j\omega_A) \right|_{\text{dB}} = 0;$$

- innalzare la fase di $C_1(s)G(s)$ di circa 47° in modo che il margine di fase finale sia $m_\varphi = 52^\circ$.

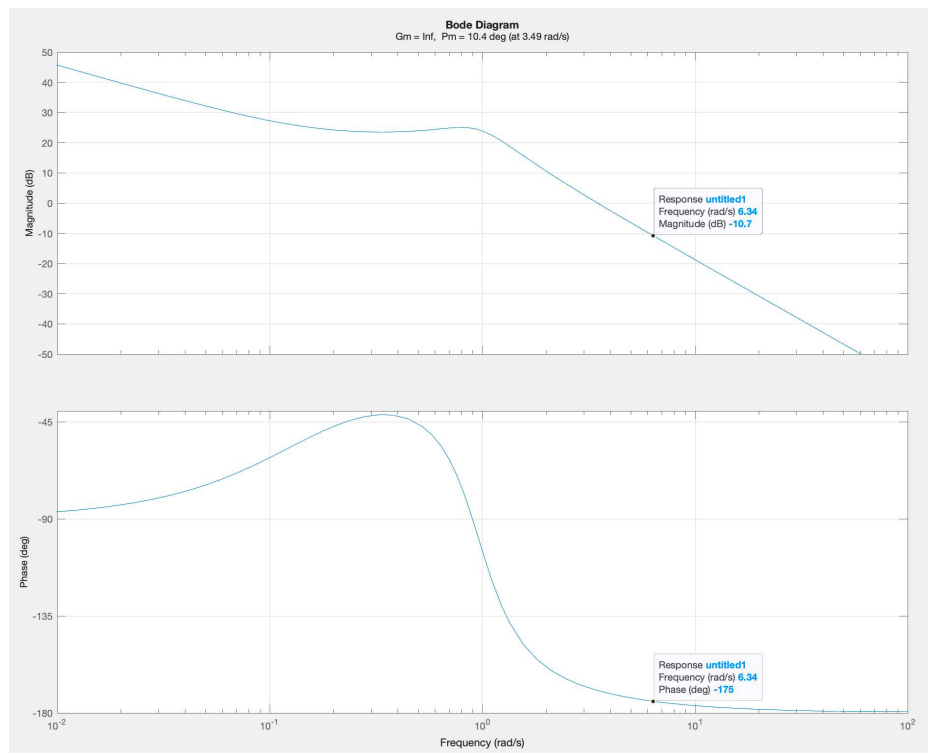


Figura 4.1 Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $C_1(s)G(s)$

Per fare ciò, si ricorre all'utilizzo della rete anticipatrice, descritta da una funzione di trasferimento razionale propria formata da uno zero ed un polo, entrambi reali e negativi e con il primo posizionato frequenzialmente prima del secondo. Per cui

$$C_2(s) = \frac{1 + \frac{s}{z}}{1 + \frac{s}{p}} \quad |z| < |p|$$

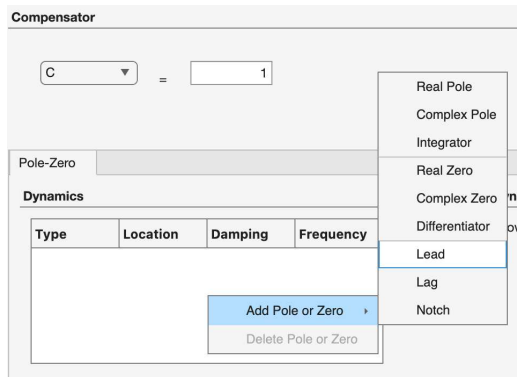
4.1.3 Progettazione tramite Sisotool

Proviamo a determinare dei valori appropriati per il polo e lo zero facendo uso dello strumento Sisotool di MATLAB, partendo dal compensatore $C_1(s)G(s)$ e cercando di soddisfare i requisiti riguardanti il margine di fase ($m_\varphi = 52^\circ$) e la frequenza di attraversamento ($\omega_A = 6.67$ rad/s). Sapendo che $C_1(s) = 10$, eseguendo il comando `sisotool(C1 * G)` verrà visualizzato il diagramma di Bode di *figura 4.1*. Quindi, per aumentare il modulo di circa 11 dB e la fase di circa 47° , nel menu *Controllers and Fixed Blocks* a sinistra si seleziona C e si sceglie di aggiungere la rete anticipatrice (lead). Bilanciando i valori assunti dallo zero e dal polo, i grafici di Bode si modificano di conseguenza.

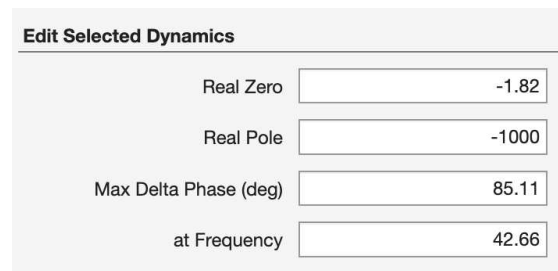
- Avvicinando lo zero all'origine, si aumenta la fase e il picco di fase si sposta verso frequenze più basse.

- Avvicinando il polo all'origine, si riduce la fase e il picco si sposta anch'esso verso frequenze più basse.

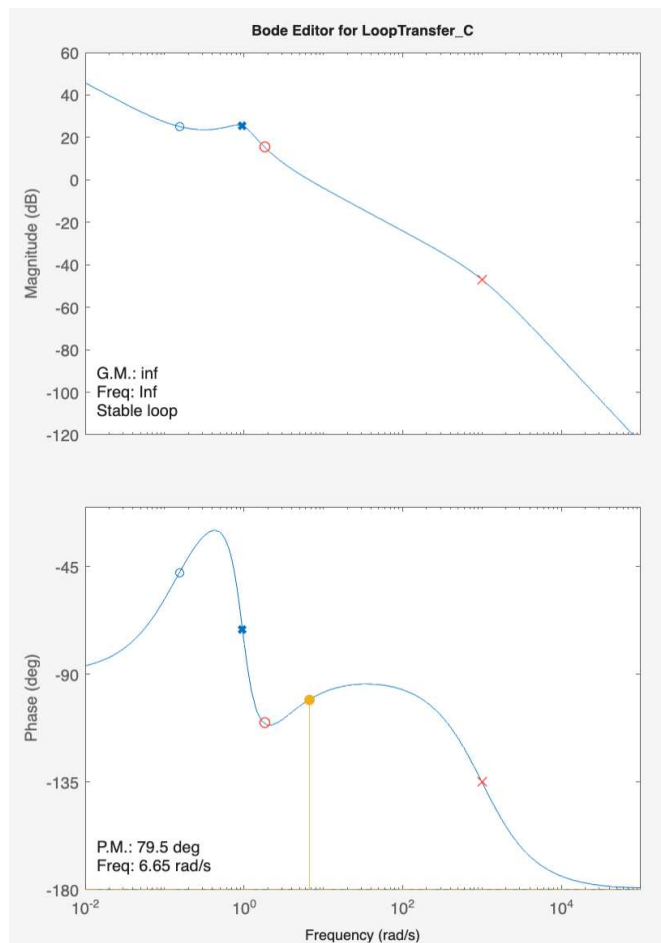
A questo punto è necessario posizionare tale coppia zero-polo in modo che la pulsazione di attraversamento ω_A ricada al loro interno. Provando diverse posizioni del polo e dello zero, i valori più appropriati risultano $z \simeq -1.82$ rad/s e $p = -10^3$ rad/s. In figura 4.2 vengono mostrati i grafici di Bode ottenuti tramite il comando sisotool per la rete anticipatrice specificata.



(a) Aggiunta della rete anticipatrice



(b) Specifica dei valori per lo zero e il polo



(c) Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $C_2(s)G(s)$

Figura 4.2 Progettazione del compensatore $C_2(s)$ tramite Sisotool

Per cui, si ottiene che $C_2(s) = \frac{0.5495s + 1}{0.001s + 1}$.

Da cui si ottiene il compensatore in frequenza

$$C(s) = C_1(s)C_2(s) = 10 \frac{0.5495s + 1}{0.001s + 1}$$

In *figura 4.3* tramite il comando `step` della risposta al gradino in frequenza possiamo comprendere se i requisiti di progetto siano effettivamente rispettati.

```

1  T = 0.1;
   t = 0:T:20;
   W = feedback(KC1 * C2 * G, 1); % Retroazione unitaria negativa
   step(0.2*W, t); % Risposta al gradino in frequenza
5  axis([0 20 0 0.250]);
   xlabel("Tempo");
   ylabel("Angolo di beccheggio (radiants)");
   title("Risposta al gradino in frequenza");

```

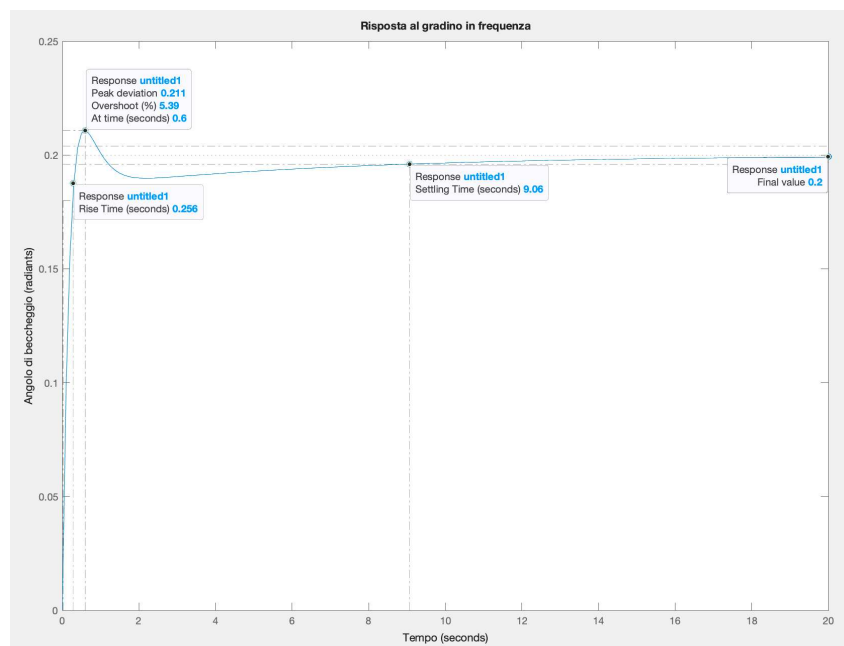


Figura 4.3 Risposta al gradino in frequenza con compensatore $C(s)$

È possibile osservare come tutte le richieste siano soddisfatte. Da notare inoltre come un calcolo della frequenza di attraversamento meno approssimativo avrebbe portato ad una risposta del sistema migliore di quella ottenuta.

Capitolo 5

Controllo mediante luogo delle radici

La terza ed ultima metodologia di controllo che presentiamo è il luogo delle radici, conosciuta in inglese come *root locus*. Ricordando che

$$W(s) := \frac{\tilde{G}(s)}{1 + \tilde{G}(s)} = \frac{K \frac{p(s)}{q(s)}}{1 + K \frac{p(s)}{q(s)}} = \frac{Kp(s)}{q(s) + Kp(s)}$$

Chiamando $d(s) = q(s) + Kp(s)$, si definisce allora il luogo delle radici come

$$L := \{s \in \mathbb{C} : d(s) = 0 \quad \forall K \in \mathfrak{R}^+\}$$

Ciò significa che i punti di tali equazione per valori strettamente positivi di K costituiscono il luogo positivo della radici. Le regole per il tracciamento del luogo sono le seguenti.

- Affinché un punto s appartenga al luogo deve valere $K = -\frac{q(s)}{p(s)} \in \mathfrak{R}$ con $K > 0$.
- Il luogo è composto da n rami che partono dagli n poli di $W(s)$.
- Gli intervalli di asse reale appartenenti al luogo sono quelli che hanno alla loro destra un numero dispari di poli o zeri, ciascuno contato con la propria molteplicità.
- Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.
- Eventuali punti doppi vanno ricercati nelle soluzioni dell'equazione differenziale $\dot{p}(s)q(s) - p(s)\dot{q}(s) = 0$. I punti che soddisfano tale condizione per K reali positivi sono effettivamente punti doppi.
- Tra gli n rami del luogo, m sono gli zeri di $G(s)$, mentre i restanti $n - m$ divergono all'infinito, seguendo degli asintoti aventi direzioni $s = \sqrt[n-m]{-1}$ e centro $c = \frac{\sum \text{poli} - \sum \text{zeri}}{n - m}$.

5.1 Tracciamento del luogo

Iniziamo la nostra progettazione partendo dal controllore proporzionale $C(s) = K$. Scrivendo su MATLAB l'istruzione `sisotool("rlocus", G)` si aprirà la finestra Control System Designer e verrà visualizzato il luogo delle radici e la risposta al gradino ad anello chiuso con controllore $C(s) = K$, come mostrato in *figura 5.1*.

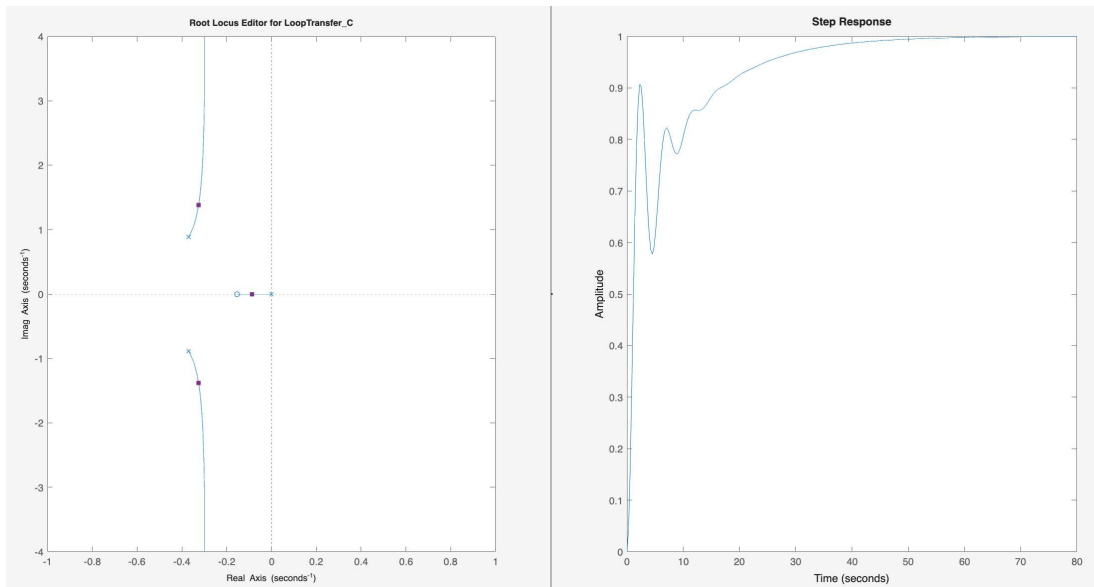


Figura 5.1 Risultato del comando `sisotool("rlocus", G)`

Come avvenuto nella progettazione del compensatore PD, impostiamo il precompensatore $F(s)$ a 0.2 dal menu *Controllers and Fixed Blocks* a sinistra cliccando su F .

Per aggiungere le specifiche di progetto, cliccando con il tasto destro del mouse al di sopra del luogo delle radici e scegliendo la voce *Design Requirements - New*, è possibile aggiungere i requisiti come quelli riguardanti il tempo di assestamento e la percentuale di overshoot. Il tempo di salita non è incluso esplicitamente, ma può essere approssimato grazie alla relazione seguente che lo lega alla pulsazione naturale: $\omega_n \simeq \frac{1.8}{t_s}$.

Per cui, la richiesta di un rise time inferiore a 2 secondi si traduce in una natural frequency superiore a 0.9 rad/sec.

In *figura 5.2* viene mostrato il luogo delle radici aggiornato dopo aver specificato le richieste di progetto. La regione desiderata è quella in bianco, con le parti in giallo che rappresentano quelle per le quali non si vuole che passi il luogo. Più nello specifico:

- le due semirette uscenti dall'origine descrivono la specifica della sovraelongazione: tanto più piccolo è l'angolo formato da tali semirette con l'asse reale negativo, maggiore sovraelongazione sarà presente;
- la linea verticale $s = -0.4$ rappresenta il requisito sul tempo di assestamento: più i poli di $W(s)$ sono collocati alla sinistra dell'asse reale, meno tempo di assestamento sarà necessario;
- la semicirconferenza nell'origine con raggio $\omega_n = 0.9$ corrisponde al vincolo sul tempo di salita.

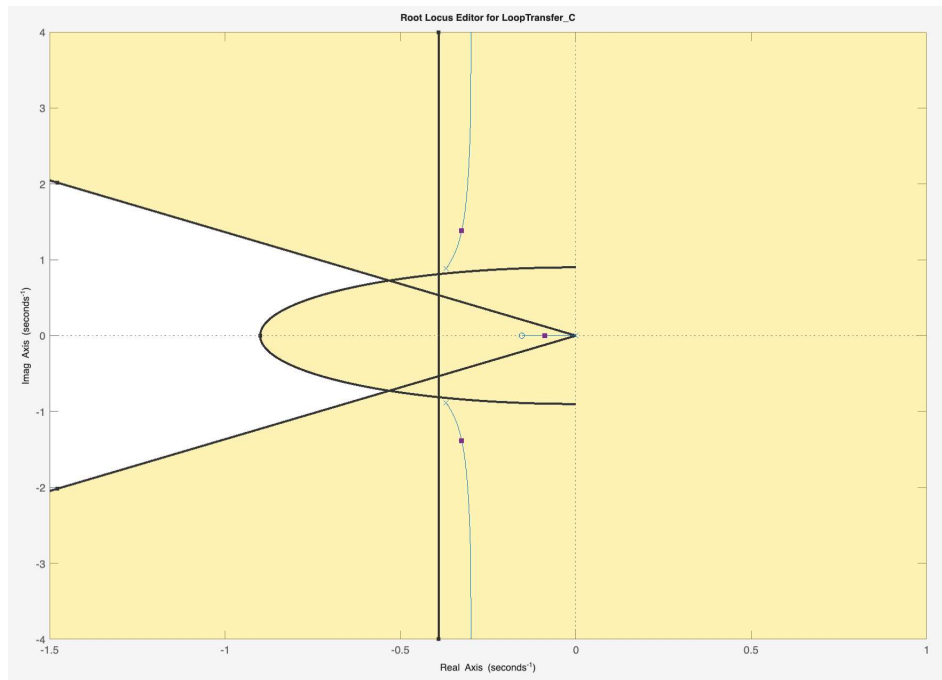


Figura 5.2 Luogo delle radici con specifiche di progetto

Uno sguardo più attento al luogo appena tracciato mostra come nessuno dei tre rami del luogo passa per l'area appena designata della nostra analisi, pertanto variare solamente il parametro K non basta: c'è bisogno anche in questo caso di una rete anticipatrice.

5.2 Progettazione delle rete anticipatrice

Ora è necessario spostare il luogo delle radici più a sinistra del piano complesso: per fare ciò, si utilizza una rete anticipatrice, una funzione di trasferimento avente struttura

$$C(s) = K \frac{s - z}{s - p} \quad |z| < |p|$$

Prima di iniziare, è necessario configurare la struttura del compensatore, cliccando su *Preferences* dal menu in alto, selezionando la voce *Options* e scegliendo il formato del compensatore come *Zero/pole/gain* (figura 5.3(a)). Scelte fondamentali ora sono quelle dei posizionamenti dello zero e del polo, entrambi reali. Posizioniamo lo zero nel punto di incontro tra il semiasse reale negativo e la semicirconferenza: questo assicura che il limite del luogo che terminerà in tale punto non esca mai dalla zona auspicata. Scegliamo quindi $z = -0.9$. Per quanto concerne il polo, lo posizioniamo lontano dall'origine, come richiesto dalla definizione del rete anticipatrice. Per iniziare, scegliamo $p = -3$. Su Sisotool, impostiamo tali valori dalla finestra *Compensator Editor* che si apre con il click destro e poi scegliendo *Edit Compensator*. Aggiungiamo uno zero e un polo con il click destro tramite *Add Pole or Zero* e scegliendo la voce *Lead*. Su *Edit Selected Dynamics* (figura 5.3(b))

modifichiamo i valori di *Real Zero* e *Real Pole* con quelli appena discussi. Spostando con il mouse sempre più a sinistra la posizione del polo nel luogo delle radici, si può vedere come il grafico si sposti sempre di più verso la regione bianca. Si può osservare come la scelta di $p = -30$ porti il luogo nella regione desiderata; riscalando gli assi, si può avere uno zoom del grafico. In figura 5.3 sono riportati diversi luoghi relativi a diverse posizioni del polo.

Units Time Delays Style Options Line Colors

Compensator Format

☐ Time constant: $DC \times (1 + Tz s) / (1 + Tp s)$

☐ Natural frequency: $DC \times (1 + s/wz) / (1 + s/wp)$

☒ Zero/pole/gain: $K \times (s + z) / (s + p)$

Bode Options

☒ Show plant/sensor poles and zeros

Plot Update Options

☒ Update plots in real-time

Help OK Cancel Apply

(a) Formato del compensatore con rete anticipatrice

Compensator

C = 3.333 $\times \frac{(s + 0.9)}{(s + 3)}$

Pole-Zero

Dynamics

Type	Location	Damping	Frequency
Lead	-0.9, -3	1	0.9, 3

Edit Selected Dynamics

Real Zero: -0.9

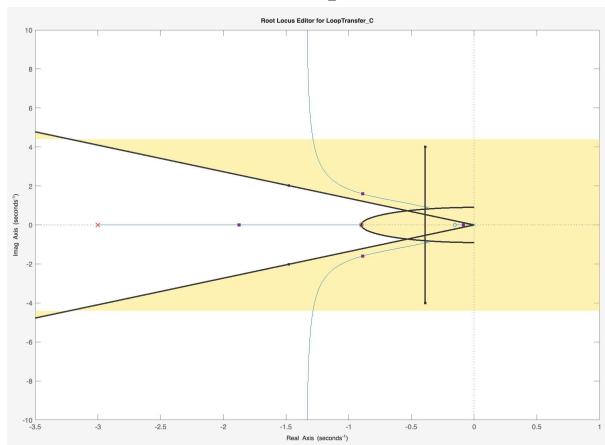
Real Pole: -3

Max Delta Phase (deg): 32.58

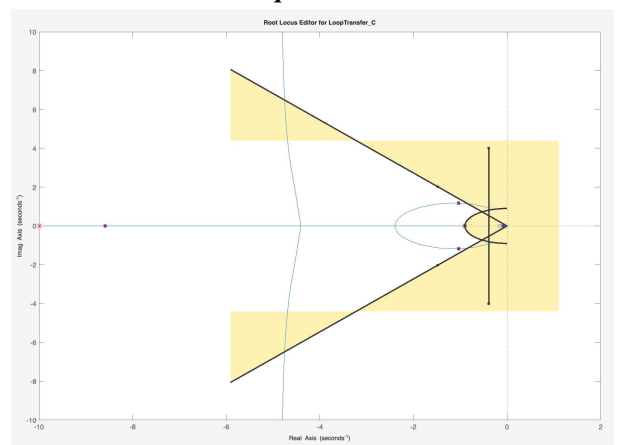
at Frequency: 1.643

Right-click to add or delete poles/zeros

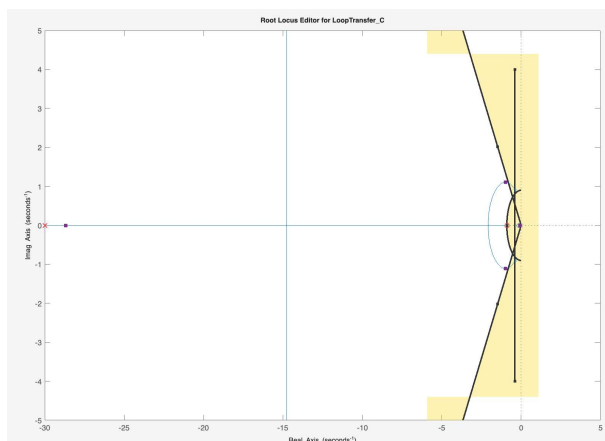
(a) Specifica dei valori della rete anticipatrice



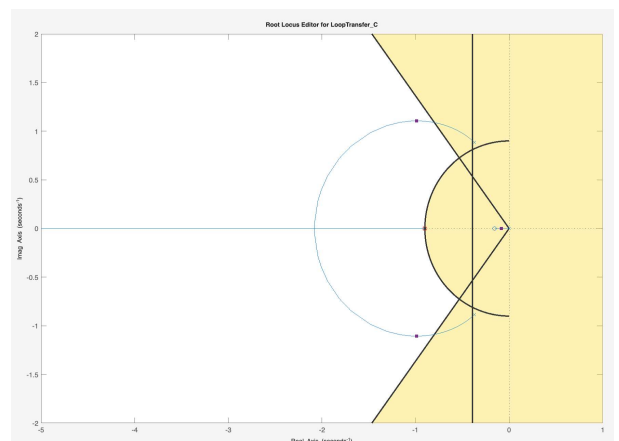
(d) $p = -3$



(d) $p = -10$



(e) $p = -30$



(f) $p = -30$ (zoom)

Figura 5.3 Luogo delle radici con rete anticipatrice al variare della posizione del polo

La figura 5.3 (e) e l'ingrandimento di figura 5.3 (f) mostrano come per $p = -30$ tre rami del luogo ottenuto si adeguano entro i confini specificati, ma non per il ramo riguardante il polo nell'origine che si estende al di fuori della regione di confine. Questo può essere un problema, in quanto essendo vicino all'asse immaginario e corrispondendo nella risposta all'esponenziale più lento, esso domina il comportamento del transitorio del sistema, influenzando e peggiorando il tempo di salita. Fortunatamente la vicinanza dello zero in $z = -0.1541$ fa sì che avvenga una cancellazione zero-polo: tale avvenimento è più evidente tanto più è grande il valore del guadagno K . La posizione dei poli in funzione di tale parametro, impostato automaticamente a 33.3, è rappresentata con dei quadratini viola nel diagramma. E' possibile ora visualizzare la risposta al gradino ad anello chiuso mostrata in figura 5.4 selezionando dal menu in alto *New Plot* e selezionando *New Step* con risposta *IOTransfer_r2y* per la risposta ad anello chiuso dall'ingresso di riferimento r all'uscita y .

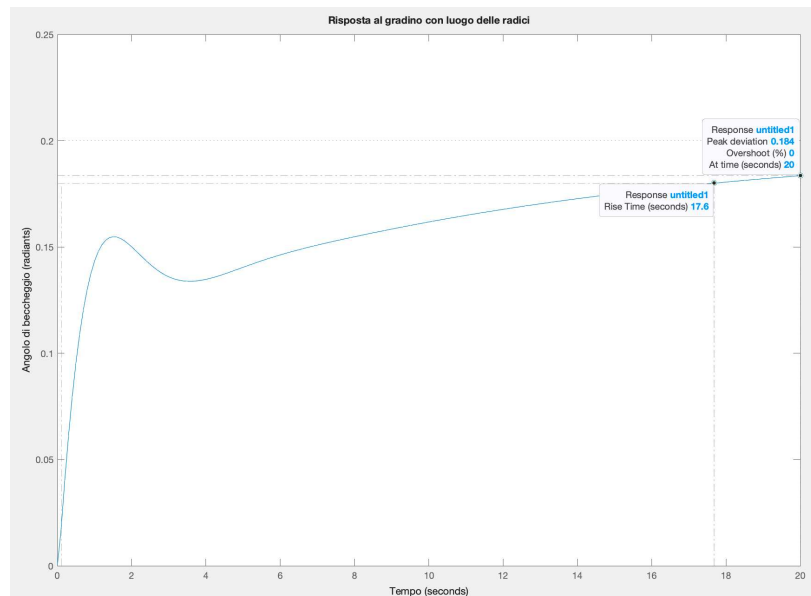


Figura 5.4 Risposta al gradino in catena chiusa per $C(s) = 33.3 \frac{s + 0.9}{s + 30}$

Si vede chiaramente come purtroppo i vincoli di progetto non siano rispettati: i valori del tempo di salita e di assestamento sono troppo elevati. L'obiettivo è quello di modificare il guadagno K in modo che il polo più a destra si avvicini allo zero, rendendo il sistema più veloce. Ovviamente si vuole limitare il valore di tale variabile, per evitare di far uscire gli altri poli dalla fascia angolare delimitata dalle due semirette, ovvero la condizione sulla sovraelevazione massima. Un valore di $K = 200$ è una scelta adeguata in quanto, oltre a confinare il luogo nella regione desiderata, presenta il notevole vantaggio di avere tutti i poli di $W(s)$ sul semiasse reale negativo: in questo modo la risposta sarà quasi priva di oscillazioni

e sovraelongazioni. In *figura 5.5* viene mostrato il luogo delle radici finale ed un suo ingrandimento vicino all'origine.

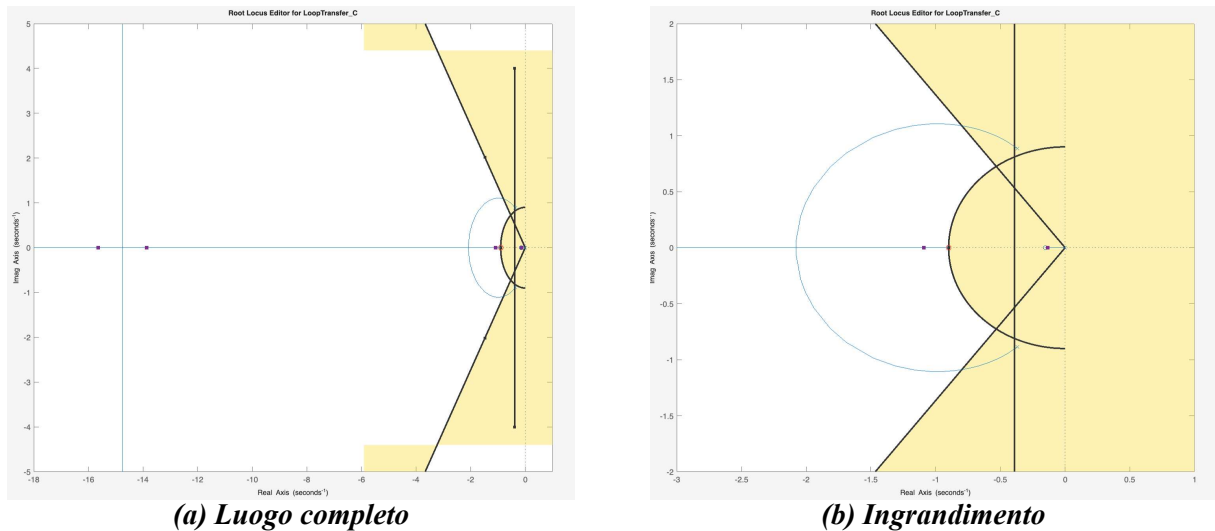


Figura 5.5 Luogo delle radici per $C(s) = 200 \frac{s + 0.9}{s + 30}$

Infine, viene illustrata in *figura 5.6* la risposta al gradino per tale rete anticipatrice progettata.

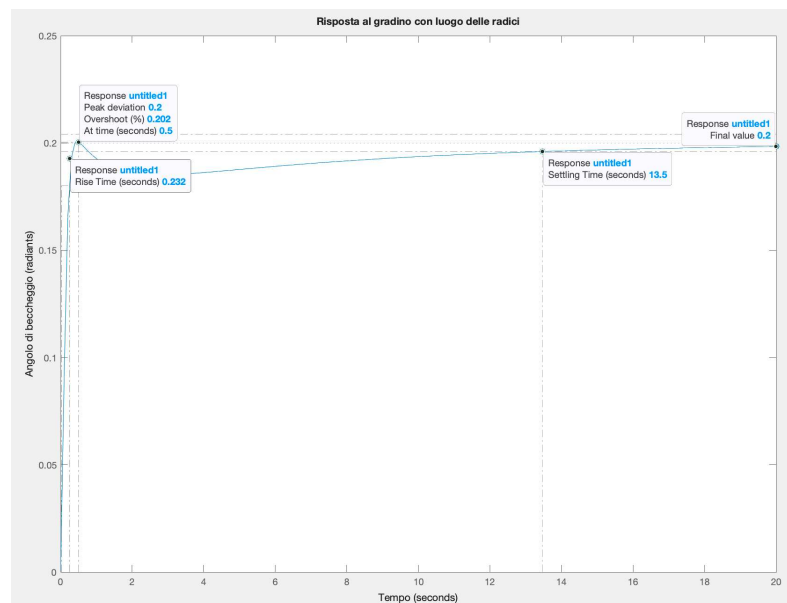


Figura 5.6 Risposta al gradino in catena chiusa per $C(s) = 200 \frac{s + 0.9}{s + 30}$

Il compensatore scelto per la metodologia del luogo delle radici risulta quindi essere

$$C(s) = 200 \frac{s + 0.9}{s + 30}$$

Si nota come non sia rispettata, ma vicina al valore voluto, la specifica riguardante il tempo di assestamento. Siccome la trattazione è già stata abbastanza complessa e comunque il resto dei vincoli è stato ben oltre soddisfatto, possiamo considerare questa soluzione accettabile.

Capitolo 6

Confronto tra le soluzioni progettuali

Per concludere l'elaborato, mettiamo a confronto in *tabella 6.1* le soluzioni progettuali dei compensatori determinate nei capitoli precedenti discutendo eventuali considerazioni sui metodi utilizzati per ricavarle.

Metodologia	Funzione di trasferimento del compensatore $C(s)$	Rise time (secondi)	Overshoot (%)	Settling time (secondi)
Controllore PD	$3.5699s + 8.7872$	0.316	9.74	9.85
Risposta in frequenza	$10 \frac{0.5495s + 1}{0.001s + 1}$	0.256	5.39	9.06
Luogo delle radici	$200 \frac{s + 0.9}{s + 30}$	0.232	0.202	13.5

Tabella 6.1 Confronto tra le soluzioni progettuali del compensatore $C(s)$

In *figura 6.1* vengono inoltre riportate tutte le risposte al gradino dei sistemi retroazioni progettati con rispettivo codice MATLAB. Si nota, come già detto in precedenza, che tutte le strade intraprese con i diversi metodi per ottenere il sistema di controllo richiesto hanno portato a determinare un controllore che rispetta tutti i vincoli di progetto.

```

1  T = 0.1;
   t = 0:T:20;
   G = tf([1.151 0.1774], [1 0.739 0.921 0]);
   C_PD = tf([3.5699 8.7872], 1); % FDT del compensatore PD
5  C_frequency = 10 * tf([0.5495 1], [0.001 1]); % FDT del compensatore in frequenza
   C_root = 200 * tf([1 0.9], [1 30]); % FDT del compensatore con luogo delle radici
   compensators = [C_PD, C_frequency, C_root];
   compensatorsTypes = ["PD", "Frequenza", "Luogo delle radici"];
   colors = ["m", "b", "k"]; % Vettore per i colori dei grafici
10 figure; % Creazione del sistema di riferimento
   hold on; % Abilitazione hold on (mantenimento dei grafici già aggiunti)
   lgd = {}; % Vettore per la legenda
   for j = 1 : length(compensators) % Per ogni elemento del vettore compensators
       W = feedback(compensators(j)*G, 1); % Retroazione unitaria negativa
15   stepplot(0.2*W, t, colors(j)); % Risposta al gradino avente j-esimo colore
       lgd{end + 1} = compensatorsTypes(j); % Aggiornamento della legenda
   end
   legend(lgd, "Location", "northeast"); % Aggiunta e posizionamento della legenda
   axis([0 20 0 0.25]);
20 xlabel("Tempo");
   ylabel("Angolo di beccheggio (radiants)");
   title("Confronto tra le risposte al gradino");

```

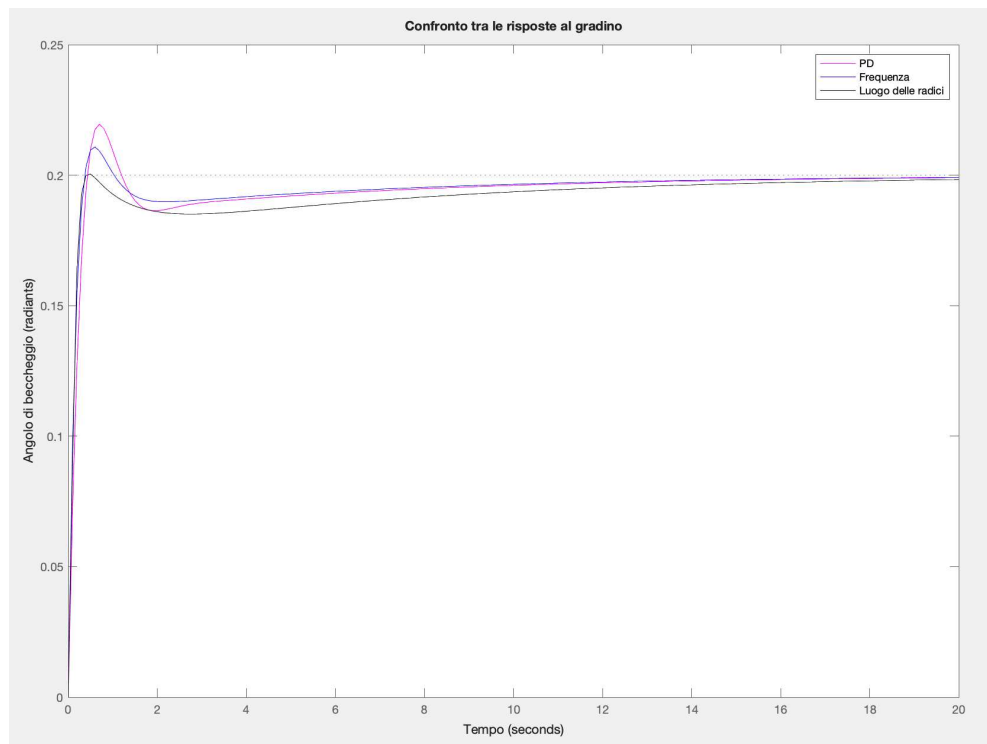


Figura 6.1 Confronto tra le risposte al gradino dei sistemi retroazionati progettati

Si evince come l'utilizzo del controllore in frequenza risulti essere la soluzione migliore in quanto è un buon compromesso tra le varie richieste di progetto, soprattutto per quanto riguarda l'importante fattore del tempo di assestamento, componente di fondamentale importanza per la stabilità di un velivolo. Il compensatore PD risulta, d'altra parte, quello di più facile comprensione concettuale, ma la sua progettazione può essere molto lunga in termini di tempo, in quanto può richiedere una lunga serie di iterazioni svolte con l'utilizzo di Sisotool per la taratura assistita dei parametri di progetto. Da apprezzare comunque come la progettazione mediante luogo delle radici conduca ad una soluzione che quasi azzeri (valore 0.202) la sovraelongazione, che è un risultato straordinario se si pensa quanto possa essere deleteria una qualsiasi turbolenza per un velivolo e per i passeggeri a bordo. Grazie a questo risultato, si può quasi ignorare che il tempo di assestamento superi di circa 3 secondi quanto richiesto, anche perché i valori che assume in quel periodo di tempo sono comunque molto vicini a quelli degli altri controllori progettati.

La scelta finale della metodologia spetta quindi a chi progetta la dinamica del beccheggio di un aereo e in base a quali specifiche vuole dare più rilevanza e a quali invece anche una soluzione non completamente ottimale può essere accettabile per raggiungere l'obiettivo.

6.1 Considerazioni sul segnale $u(t)$

Per concludere definitivamente la relazione, discutiamo qualche considerazione riguardo al segnale $u(t)$, uscita del compensatore $C(s)$ e ingresso della funzione di trasferimento del sistema reale $G(s)$. Uno dei problemi da valutare è quello della saturazione del segnale: il segnale $u(t)$ potrebbe raggiungere valori troppo elevati in ampiezza, il che comporterebbe un rischio per il sistema reale. Per evitare questo inconveniente, subito dopo il blocco del compensatore, nello schema si inserisce solitamente un saturatore con il compito di limitare l'ampiezza del segnale in modo che non superi una certa soglia che vada ad intaccare la stabilità del sistema. Specificando come passo di campionamento $T = 0.0001$ per ottenere dei grafici più precisi ed appropriati per l'analisi dell'ampiezza del segnale $u(t)$ e studiando la risposta al gradino dei rispettivi compensatori $C(s)$ in catena aperta, si ottengono i grafici di tale segnale mostrati in *figura 6.2*, rispettivamente per il controllo in frequenza e per quello tramite luogo delle radici.

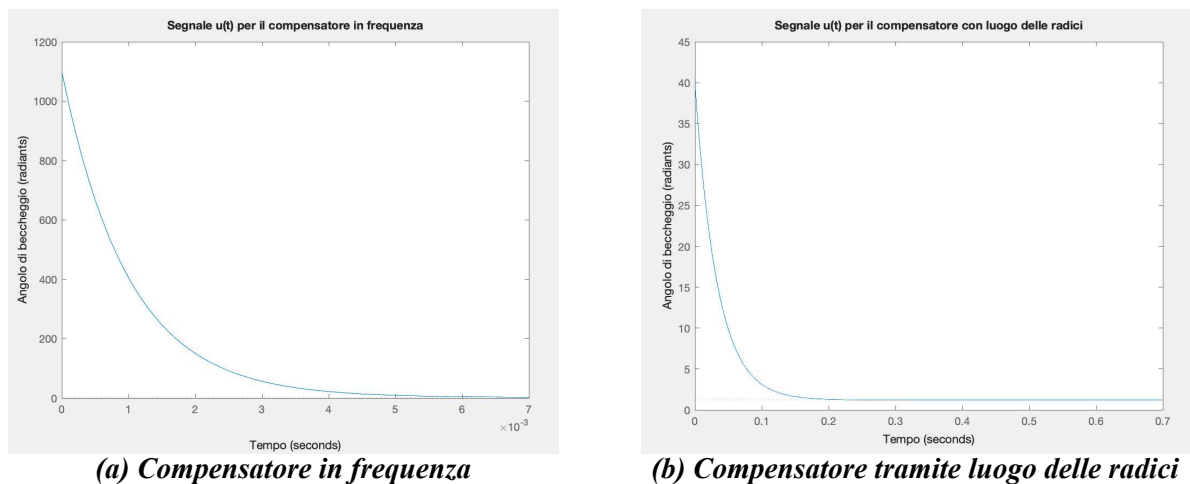


Figura 6.2 Segnale $u(t)$ in uscita dal compensatore $C(s)$

Si nota come, mentre per il compensatore in frequenza, il segnale $u(t)$ raggiunge un picco molto pericoloso di ampiezza superiore a 1000, per il compensatore progettato tramite luogo delle radici tale valore (ampiezza di circa 40) è già più plausibile, rendendo questo sistema di controllo molto migliore in termini di affidabilità e prestazioni rispetto al precedente.

Bibliografia

- <https://lavionnaire.fr/ItaControllodelvolo.php>: sito web dedicato al controllo, alla dinamica e all'aerodinamica del volo
- <https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=AircraftPitch>: pagina web dedicato all'analisi e alla progettazione del sistema di controllo del beccheggio tramite le metodologie proposte nell'elaborato con utilizzo di MATLAB e Sisotool
- <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/pitch.html>: simulazione grafica del beccheggio di un aereo creato dalla NASA
- https://courses.cit.cornell.edu/mae5070/B747_Data.pdf: caratteristiche di stabilità di un Boeing 747
- Mauro Bisiacco, Maria Elena Vacher, *Controlli Automatici*, Libreria Progetto, Padova, 2008

Figure e tabelle

Elenco delle figure

1.1 Schematizzazione di un velivolo aereo e movimenti del mezzo nello spazio tridimensionale . . .	1
1.2 La cabrata e la picchiata di un velivolo	1
1.3 Dinamica di volo, con rappresentazione delle forze in gioco	2
1.4 Scheda tecnica di un velivolo Boeing 747	4
2.1 Schema a blocchi ad anello aperto	7
2.2 Risposta al gradino ad anello aperto	8
2.3 Schema a blocchi ad anello chiuso	9
2.4 Risposta al gradino ad anello chiuso	11
2.5 Schema a blocchi ad anello chiuso con compensatore	12
3.1 Schema a blocchi in retroazione con compensatore PID	13
3.2 Risposte al gradino con controllo proporzionale al variare del parametro K_p	15
3.3 Risposte al gradino con controllo proporzionale al variare del parametro K_p	16
3.4 Risposta al gradino per $C_p(s) = 2$	16
3.5 Risposta al gradino per $C_{PI}(s) = 2 + \frac{K_i}{s}$ per valori crescenti di K_i	17
3.6 Simulazione tramite Sisotool della progettazione del compensatore PD	19
4.1 Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $C_1(s)G(s)$	24
4.2 Progettazione del compensatore $C_2(s)$ tramite Sisotool	25
4.3 Risposta al gradino in frequenza con compensatore $C(s)$	26
5.1 Risultato del comando <code>sisotool("rlocus", G)</code>	28
5.2 Luogo delle radici con specifiche di progetto	29
5.3 Luogo delle radici con rete anticipatrice al variare della posizione del polo	30
5.4 Risposta al gradino in catena chiusa per $C(s) = 33.3 \frac{s + 0.9}{s + 30}$	31
5.5 Luogo delle radici per $C(s) = 200 \frac{s + 0.9}{s + 30}$	32
5.6 Risposta al gradino in catena chiusa per $C(s) = 200 \frac{s + 0.9}{s + 30}$	32

6.1 Confronto tra le risposte al gradino dei sistemi retroazionati progettati	34
6.2 Segnale $u(t)$ in uscita dal compensatore $C(s)$	35

Bibliografia delle figure

Figura 1.1: <https://lavionnaire.fr/ItaControlloModelloVolo.php>

Figura 1.2: <https://lavionnaire.fr/ItaControlloModelloVolo.php>

Figura 1.3: <https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=AircraftPitch>

Figura 1.4: https://courses.cit.cornell.edu/mae5070/B747_Data.pdf

Tutti gli schemi a blocchi sono stati creati autonomamente grazie al software grafico draw.io

Tutti i grafici sono presi dalle simulazioni svolte con MATLAB e Sisotool

Elenco delle tabelle

1.1 Grandezze fisiche della dinamica del beccheggio	3
3.1 Effetti dei guadagni di un compensatore PID sulle specifiche di progetto	14
6.1 Confronto tra le soluzioni progettuali del compensatore $C(s)$	33

Bibliografia delle tabelle

Tabella 1.1: <https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=AircraftPitch>

Tabella 3.1: <https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=AircraftPitch>

Tabella 6.1: soluzioni ottenute durante la stesura dell'elaborato