

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Clustering dei picchi di campi random

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Laureando

Mariacristina Fiore

Anno Accademico 2020/2021

Sommario

Scopo di questo elaborato è quello di derivare un'espressione analitica per la densità numerica e la funzione di correlazione a due punti dei picchi per il campo di densità di materia, previa assunzione che la fluttuazione di densità superi una certa soglia. Si porrà particolare attenzione sull'anticorrelazione che si genera tra picchi a piccola distanza e alla sua trattazione analitica attraverso tecniche di analisi funzionale.

Indice

1	Introduzione	v
2	Prerequisiti	1
2.1	Elementi di Cosmologia e Statistica	1
2.2	Prerequisiti matematici: Analisi Funzionale	4
3	Formula per l'espansione asintotica ad alte soglie	7
3.1	Correlazione dei punti oltre soglia	7
3.2	Risultati espliciti fino all'ordine $O(T^{-2})$	9
4	Massimi Locali di un campo random Gaussiano	11
4.1	Densità numerica dei punti estremali	11
4.2	La matrice Λ e il suo ruolo nella discussione dei picchi	12
4.3	Calcolo approssimato della funzione di densità dei picchi	13
4.4	Risultati espliciti all'ordine $O(T^{-2})$ e $\xi(x)/\xi(0)$	17
5	Stima degli errori per le approssimazioni precedenti	18
6	Conclusioni	24
7	Bibliografia	25

1 Introduzione

La modellizzazione matematica dei processi fisici spesso avviene attraverso un approccio statistico. Pensando all'universo è noto che la formazione delle strutture cosmiche deriva da fluttuazioni di campi quantistici, che vanno trattate come campi random e Gaussiani (la distribuzione Gaussiana è assunta in ottemperanza al teorema del limite centrale). Ciò conduce, seguendo il principio cosmologico, ad una descrizione statistica dell'universo come campo random omogeneo e isotropo. Lo studio dei campi random è per definizione lo studio di funzioni random definite su uno spazio Euclideo. In questo genere di analisi ricoprono una posizione di rilievo i cosiddetti "excursion sets" ovvero regioni del campo oltre una certa soglia (treshold). In effetti queste regioni, caratterizzate dalla presenza di "picchi", sono quelle in cui avviene la formazione di strutture. Ad esempio nella teoria della genesi delle galassie polarizzate i picchi massimi del campo di densità di materia, sono i siti in cui si formano galassie luminose o ricchi ammassi di galassie. Possiamo analizzare il comportamento di un generico campo random di nostro interesse $\varepsilon(\vec{x})$ attraverso una distribuzione di probabilità $P[\varepsilon]$ o equivalentemente attraverso i momenti delle distribuzioni di probabilità (assumendone previamente l'esistenza):

$$\langle \varepsilon(\vec{x}_1) \dots \varepsilon(\vec{x}_n) \rangle = \int [d\varepsilon] \varepsilon(\vec{x}_1) \dots \varepsilon(\vec{x}_n) P[\varepsilon] \quad (1.1)$$

Dove le \vec{x}_i sono i punti in uno spazio euclideo D-dimensionale e l'integrazione viene effettuata sui valori di ε in ogni punto di \mathbb{R}^D . In alcuni casi la variabile random ha una dipendenza puramente temporale (D=1), ciò trova un'applicazione nelle reti elettriche. Altri casi sono quelli in cui il campo ε assume valori che dipendono dalla posizione nello spazio (D=3), un esempio a riguardo è legato alla teoria della struttura dell'universo su grande scala dove il campo random è proprio il campo di fluttuazione della densità di materia.

Un'importante classe di campi random è quella dei campi Gaussiani. Questo deriva dal fatto che la densità Gaussiana multivariata ha una forma analitica molto conveniente e ciò rende possibile ottenere risultati espliciti che sarebbe quasi impossibile derivare per processi più generali. Per la distribuzione di probabilità Gaussiana vale:

$$P[\varepsilon] = \frac{1}{Z} \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x d^D y \varepsilon(\vec{x}) \xi^{-1}(|\vec{x} - \vec{y}|) \varepsilon(\vec{y}) \right] \quad (1.2)$$

Dove Z è una costante scelta al fine di normalizzare $P[\varepsilon]$ all'unità e, $\xi^{-1}(|\vec{x} - \vec{y}|)$ è l'inverso della funzione di correlazione a due punti. È opportuno ricordare che per funzione di correlazione generica a N punti, si intende la media funzionale del prodotto degli N campi in una determinata posizione. Ad esempio in questo caso specifico in cui N=2:

$$\langle \varepsilon(\vec{x}) \varepsilon(\vec{y}) \rangle = \xi(|\vec{x} - \vec{y}|)$$

Conseguentemente al fatto che per i funzionali valgono le trasformazioni lineari, e quindi esiste una corrispondenza tra l'integrale funzionale della funzione di correlazione e l'integrale funzionale della sua inversa, possiamo scrivere anche:

$$\int d^D \vec{y} \xi(|\vec{x} - \vec{y}|) \xi^{-1}(|\vec{y} - \vec{z}|) = \delta^D(\vec{x} - \vec{z}) \quad (1.3)$$

Inoltre la dipendenza della funzione ξ dalla sola distanza $|\vec{x} - \vec{y}|$ deriva proprio dal fatto che ci si trova nell'approssimazione di spazio Euclideo D-dimensionale omogeneo e isotropo.

Tuttavia, nonostante questo campo sia Gaussiano, i picchi assunti da quest'ultimo sono descritti da un numero $n_m(\vec{x})$ che non è una variabile random Gaussiana.

Il lavoro seguirà la trattazione svolta da Cline et al. (si veda [1]) e si articolerà nel seguente modo:

- Dapprima verranno esposte alcune nozioni imprescindibili al fine di procedere con la trattazione. Si costruirà poi, attraverso il calcolo differenziale, la formula che genera l'espansione asintotica ad alte soglie T per la correlazione dei punti \vec{x}_i tali che

$$\varepsilon(\vec{x}_i) \geq \sqrt{T\xi(0)}$$

(con T adimensionale). Verranno dati esempi per risultati espliciti fino all'ordine $O(T^{-2})$. All'interno di questa trattazione si assumerà valida per ipotesi un'espansione di tipo asintotico anche se non comprovata.

- Si passerà poi all'analisi dei massimi locali del campo di interesse. A tale scopo, occorre tenere a mente due ipotesi:

$$\vec{\nabla}\varepsilon = 0 \quad | \quad \text{nei picchi}$$

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}\varepsilon \text{ sia definito negativo (autovalori negativi)}$$

Il primo vincolo risulta imprescindibile poichè descrive la condizione necessaria per avere dei picchi, mentre il secondo ha un'interpretazione più complessa. Si inizierà trascurando la restrizione ad autovalori negativi del campo per T grandi assumendo essenzialmente che tutti gli estremi rilevanti su un T grande siano considerabili come picchi. Si esibiranno esplicitamente solo i termini fino al relativo ordine T^{-2} e $\frac{\xi(x)}{\xi(0)}$.

- Si darà successivamente una stima dell'errore per i precedenti calcoli. Si noti che la precedente approssimazione resta valida fino a correzioni di ordine relativo $\exp(-T\xi^2(0)/\xi^2(x)) / \exp(-T)$ e $\exp(-T)$ dove x rappresenta una separazione tipica. Per quanto riguarda la densità dei picchi si trova che i picchi lontani superano i minimi locali e i punti di sella di un fattore $\exp(T)$. I problemi per la correlazione sono considerevolmente meno rilevanti, dal momento che i minimi sulla soglia (essendo molto rari) sono fortemente correlati con i massimi vicini. Risultati semplici sono ottenuti solo per separazioni grandi nell'espansione ad alti T .

All'interno dell'elaborato ci si limiterà al caso di un campo Gaussiano sia per semplificare la trattazione sia poichè da un punto di vista cosmologico tipicamente questi sono i campi che sorgono durante un'espansione inflazionaria dell'universo primordiale.

2 Prerequisiti

2.1 Elementi di Cosmologia e Statistica

L'analisi stocastica dei campi random e Gaussiani rende necessaria l'introduzione di alcuni elementi e nozioni preliminari.

Per decenni l'omogeneità della distribuzione di materia su grande scala, ha rappresentato un presupposto tipico nello studio della cosmologia. Questa caratteristica, sebbene apparisse inizialmente indimostrabile, venne poi suffragata da numerose evidenze sperimentali che ne accertarono la validità, e ad oggi trova diretto riscontro nel Principio cosmologico. Esso afferma che:

“Su una scala opportunamente grande, l'universo appare omogeneo e isotropo”.

In particolare le disomogeneità evidenti su piccola scala, tendono a scomparire a livello degli ammassi di galassie. In tal modo, l'aspetto generale dell'universo, non dipende dalla posizione dell'osservatore e dalla direzione di osservazione. Il modello di un universo omogeneo e isotropo, in accordo con la caratterizzazione attualmente osservabile che noi abbiamo di esso, è detto *“Modello standard dell'universo”* o *“Modello di Hot Big Bang”*.

Nonostante fosse un modello per molti aspetti soddisfacente, la Teoria dell'hot Big Bang presenta alcune incongruenze, tra le quali: il problema della piattezza, l'abbondanza di relitti cosmici e il problema dell'orizzonte. Il problema della piattezza deriva da considerazioni di tipo osservativo. Nello specifico, le osservazioni indicano un universo molto prossimo all'essere piatto ovvero con una densità di materia $\Omega \sim 1$. Nel modello cosmologico standard questo implicherebbe che le condizioni iniziali erano quasi esattamente predisposte (tra tutte quelle possibili) per ottenere questo risultato.

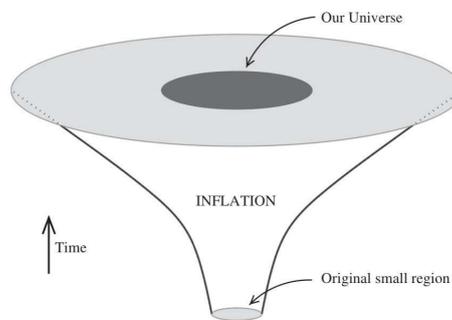


Figura 1: Illustrazione schematica del problema dell'orizzonte

Con l'abbondanza dei relitti cosmici si intende invece la presenza di particelle tipicamente di materia oscura che erano in equilibrio termico nell'universo primordiale, nonostante esse non siano più accoppiate con il resto della materia, restano comunque presenti nell'universo. L'ultimo problema, quello dell'orizzonte, rappresenta invece il più grande limite della teoria. Esso nasce dall'aver appurato che regioni che non dovrebbero mai essere entrate in contatto -poiché poste ad una distanza superiore a quella che la luce avrebbe potuto percorrere dall'evento iniziale del Big Bang- presentano proprietà analoghe. Al fine di giustificare tali contraddizioni fu proposto da Alan Guth nel 1981 il cosiddetto *“Modello Inflazionario”*. L'inflazione è definita come un periodo nell'evoluzione dell'universo in cui il fattore di scala ha accelerato a causa di una forte pressione negativa del vuoto quantistico. Ciò prevede quindi che una regione dell'universo sufficientemente piccola da raggiungere l'omogeneità di temperatura e pressione, sia in grado di espandersi molto oltre il limite dell'universo osservabile. Il modello di Guth oltre ad avvalorare il principio cosmologico, ha permesso di spiegare come le fluttuazioni quantistiche presenti nella regione originaria precedente all'espansione, abbiano determinato disomogeneità gravitazionalmente instabili dalle quali si sono poi originate le strutture cosmiche. Si parla in questo caso di Clustering delle Galassie. Dal momento che si tratta di fluttuazioni quantistiche risulta necessario un approccio statistico, che prevede di studiare il campo stocastico associato alle fluttuazioni. Il campo materiale che si considera deve quindi possedere caratteristiche in ottemperanza alla dinamica e alla geometria dell'universo.

A questo proposito occorre porre particolare attenzione su alcune definizioni.

Si definisce **campo random n-dimensionale** $\mathbf{X}(t)$, $t \in \mathcal{R}^N$ un insieme di variabili casuali,

definito da un insieme di funzioni di distribuzione F_{t_1, \dots, t_n} su \mathcal{B}^{nd} , $n = 1, 2, \dots, t \in \mathcal{R}^N$, che soddisfino:

$$F_{t_1, \dots, t_n} \{B\} = P \{(\mathbf{X}(t_1), \dots, \mathbf{X}(t_n)) \in B\} \quad (2.1)$$

Una variabile random si dice Gaussiana (o normalmente distribuita) se ha media finita $\mu = E\{x\}$; varianza $\sigma^2 = E\{|x - \mu|^2\} > 0$ e segue una distribuzione Gaussiana.

Una variabile random X (su un dominio \mathcal{R}^d) è detta Gaussiana multivariata se per ogni d-pla di numeri reali $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ la variabile reale $Y = \sum^d \alpha_i X_i$ è Gaussiana.

Si definisce ora **campo random Gaussiano** un campo random le cui funzioni di distribuzione sono tutte gaussiane multivariate. La distribuzione di un processo Gaussiano sarà quindi completamente determinato una volta note la media e la covarianza. Esistono poi delle regioni “particolari”, che svolgono un ruolo di fondamentale importanza nella fenomenologia dei campi random: gli “*excursion sets*”. Data una variabile random reale $X(\mathbf{t})$ con $t \in \mathcal{R}^N$, S sottoinsieme di \mathcal{R}^N e u un valore fissato, definiamo excursion set, della funzione X oltre il livello di u in S , l’insieme:

$$A_u(X, S) = \{\mathbf{t} \in S : X(\mathbf{t}) \geq u\} \quad (2.2)$$

Il valore atteso dell’excursion set sarà dunque dato dal valor medio dei punti del campo che si trovano al di sopra di una data soglia.

Un’ulteriore caratteristica fondamentale nello studio dei campi random è quella dell’omogeneità. Un campo random si definisce strettamente omogeneo (o strettamente stazionario) se tutte le funzioni di densità di probabilità finito-dimensionali sono invarianti sotto traslazioni nel parametro t . Ciò vuol dire che per ogni set di punti τ, t_1, \dots, t_k in \mathcal{R}^N le distribuzioni congiunte nella variabile k

$$X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$$

saranno analoghe a quelle nelle variabili $t_j + \tau$

$$X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_k + \tau)$$

Questa proprietà ha due dirette conseguenze:

- la media $m(t)$ è identicamente pari ad una costante e può quindi essere assunta pari a zero
- la covarianza $R(s, t)$ è funzione solo della differenza $s - t$

Spesso non è necessario imporre che un campo random sia strettamente omogeneo quanto piuttosto è sufficiente imporre che valgano le due conseguenze sopracitate. Conviene quindi introdurre una classe di campi detti “*semplicemente omogenei*” che soddisfino:

$$\begin{aligned} E\{X(\mathbf{t})\} &\equiv m = \text{costante} \\ E\{[X(\mathbf{s}) - m][X(\mathbf{t}) - m]\} &\text{ è funzione di } \mathbf{s} - \mathbf{t} \text{ soltanto.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Un campo strettamente omogeneo è chiaramente omogeneo mentre non è necessariamente valida l’implicazione inversa. Un campo random Gaussiano strettamente omogeneo è isotropo se la sua densità di probabilità è invariante per rotazioni e tale sarà anche la sua covarianza. Si può quindi sfruttare la trattazione dei campi random al fine di dare una corretta descrizione delle proprietà delle fluttuazioni di densità. L’utilizzo di oggetti quali i campi random Gaussiani per tali scopi è giustificata per diverse ragioni. Il teorema del limite centrale implica che sorga una distribuzione Gaussiana ogni volta che si abbia un variabile (o più in generale un vettore) come sovrapposizione lineare di un gran numero di variabili casuali indipendenti, tutte estratte dalla medesima distribuzione. In particolare se il campo è scritto come una decomposizione spaziale di Fourier, e i suoi coefficienti di Fourier sono statisticamente indipendenti, ognuno con la stessa forma distribuzionale, allora la probabilità congiunta sarà Gaussiana sotto condizioni deboli.

Appurata quindi l'assunzione di fluttuazioni cosmologiche di densità come campi random Gaussiani, risulta particolarmente utile chiarire il ruolo della funzione di correlazione per descriverne la statistica. Quando si analizza la posizione di galassie o ammassi di galassie è conveniente, discretizzare la distribuzione di materia assumendo gli oggetti distribuiti come punti tra loro indifferenti. La probabilità che un oggetto si trovi nel volume infinitesimo δV è $\delta P = n\delta V$, dove n è il numero medio di densità ed è indipendente dalla posizione.

Esaminando M misure, il numero di volte in cui l'oggetto viene ritrovato in δV è:

$$N = Mn\delta V$$

La probabilità di trovare un oggetto è direttamente proporzionale al volume mentre, la probabilità di trovarne più di uno è un infinitesimo di ordine superiore. Integrando l'equazione precedente, si ottiene il numero medio di oggetti trovati all'interno del volume finito V ovvero, $\langle N \rangle = mV$.

Si può adesso definire la funzione di correlazione a due punti come la probabilità congiunta di trovare un oggetto in entrambi gli elementi di volume posti ad una distanza $r_{1,2}$:

$$\delta P = m^2 \delta V_1 \delta V_2 [1 + \xi(r_{1,2})] \quad (2.4)$$

In un processo uniforme random di Poisson, le probabilità di trovare degli oggetti in δV_1 δV_2 sono indipendenti, perciò la probabilità congiunta è il prodotto delle singole probabilità puntuali: $\delta P = n^2 \delta V_1 \delta V_2$. In questo caso $\xi = 0$; se le posizioni degli oggetti sono correlate, $\xi \geq 0$; se sono anticorrelate, $-1 \leq \xi < 0$. Dal momento che la probabilità di trovare un oggetto in δV è $n\delta V$, la probabilità condizionata di trovare un oggetto in δV_2 assunto che ci sia un oggetto in δV_1 , è:

$$\delta P(2 | 1) = n\delta V_2 [1 + \xi(r_{1,2})] \quad (2.5)$$

Un altro modo di vedere questa definizione è considerando un oggetto scelto in maniera casuale dall'ensemble ma allora, la probabilità che esso abbia un oggetto vicino a distanza r da se stesso in δV_2 è:

$$\delta P = n\delta V [1 + \xi(r)] \quad (2.6)$$

L'integrale di quest'ultima equazione rappresenta il numero medio di vicini posti ad una distanza r da un oggetto scelto arbitrariamente. La funzione di correlazione a due punti rappresenta quindi uno dei modi più semplici per condensare la vasta informazione proveniente dall'analisi del clustering delle galassie, in un processo statistico. Inoltre essa ha un'importanza fondamentale quando si opera con campi random Gaussiani. Un campo random Gaussiano può essere infatti "costruito" a partire dalla sovrapposizione di un gran numero di onde piane, cilindriche o sferiche con fase casuale distribuita uniformemente. Dove applicabile, il teorema del limite centrale impone che in qualsiasi punto, la somma di questi contributi individuali di onde piane mostrerà una distribuzione Gaussiana. Questo tipo di campo è completamente descritto dalla sua densità spettrale di potenza e quindi, attraverso il teorema di Wiener-Khinchin¹, dalla sua funzione di autocorrelazione a due punti, che è correlata alla densità spettrale di potenza attraverso una trasformazione di Fourier. Supponiamo che $f(X)$ sia il valore del campo in questione, in un punto X in qualche spazio D -dimensionale. Se creiamo un vettore dei valori di f a N punti, X_1, \dots, X_N , nel D -spazio dimensionale allora, il vettore $(f(X_1), \dots, f(X_N))$ sarà sempre distribuito come Gaussiana multivariata. Alla luce delle considerazioni fatte fino ad ora, possiamo dunque affermare che l'Universo appare su scale superiori ai 100 Mpc come omogeneo e isotropo e risulta quindi statisticamente trattabile come campo random omogeneo e isotropo ed in questo contesto, la misura quantitativa più usata per le strutture su grande scala è la funzione di correlazione.

¹Il teorema di Wiener-Khinchin è un risultato matematico valido per segnali deterministici di energia e potenza che esprime la coincidenza tra la densità spettrale (rispettivamente di energia o potenza) e la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione del segnale stesso

2.2 Prerequisiti matematici: Analisi Funzionale

Oltre ad essere utilizzata in diversi campi della fisica teorica, l'analisi funzionale viene impiegata nella cosmologia in particolare nella formazione di strutture poichè permette di costruire modelli analitici in accordo con i dati sperimentalmente osservati. Il seguente approccio al formalismo segue da [4], [7].

Definizioni Fondamentali

Si consideri lo spazio L^2 delle funzioni modulo quadro integrabili dotato di una base $\{\varphi_n\}$:

- Ortonormale

$$\int \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \delta_{nm}$$

- Completa

$$\sum_n \varphi_n(x)\varphi_n(y) = \delta(x - y)$$

Un funzionale (multi)lineare è definito come una mappa da questo spazio (o un prodotto cartesiano di questo) a \mathbb{R} (o \mathbb{C}). In breve il funzionale è una qualsiasi funzione che dato un elemento di uno spazio vettoriale, restituisce un valore nel rispettivo campo di scalari. Dal momento che una generica $\varphi \in L^2$ può essere espansa come combinazione lineare dei vettori di base, si può allora esprimere un funzionale nel modo seguente come una funzione di un infinito set di variabili

$$F[\varphi] = F \left[\sum_l c_l \varphi_l \right] = H(c_1, c_2, \dots) \text{ con } c_n = \int \varphi_n(x)\varphi(x)dx \quad (2.7)$$

Un altro modo per esprimere i funzionali lineari come funzioni di infinite variabili è discretizzando il dominio di variazione della funzione $\varphi(x)$ in intervalli di piccola ampiezza e prenderne poi il limite tendente a zero. In questo modo il funzionale può essere interpretato come una funzione degli infiniti valori che φ può assumere.

Differenziali e Integrazione

L'azione di un funzionale lineare su una funzione φ può essere espressa attraverso l'integrale

$$F[\varphi] = \int dx f(x)\varphi(x) \quad (2.8)$$

Occorre quindi introdurre la nozione di derivata funzionale. Essa descrive come l'output del funzionale cambi quando l'argomento va da φ a $\varphi + \eta$ con $\eta(x)$ piccola. Il funzionale al primo ordine diventa:

$$F[\varphi + \eta] = F[\varphi] + \int dy \left(\frac{\delta F}{\delta \varphi(y)} \right) \eta(y) \quad (2.9)$$

vengono spontanee eventuali analogie con uno spazio infinito dimensionale. A livello pratico invece il miglior modo per definire una derivata funzionale è prendendo $\eta_y(x)$ (dove $\eta_y(x)$ rappresenta una variazione della superficie), tale che differisca da zero solo in una piccola regione vicino a y e definendo il volume infinitesimo contenuto tra le due superfici come:

$$\delta\omega = \int \eta_y(x)dx$$

Successivamente si definisce:

$$\frac{\delta F}{\delta \varphi(y)} = \lim_{\delta\omega \rightarrow 0} \frac{F[\varphi + \eta_y] - F[\varphi]}{\delta\omega}$$

Per semplificare il calcolo del limite risulta conveniente scegliere η_x nella forma $\delta\omega$ per una funzione fissata in modo che per ridurre $\delta\omega$ basti cambiare normalizzazione. Applicando questa procedura al funzionale identità $\varphi \rightarrow \varphi$, si trova

$$\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)} = \lim_{\delta\omega \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) + \delta\omega\delta(x-y) - \varphi(x)}{\delta\omega} = \delta(x-y) \quad (2.10)$$

La variabile φ precedentemente considerata è uni-dimensionale, se invece si decide di considerare un sistema di coordinate multi-dimensionale φ_α , si trova:

$$\frac{\delta\varphi_\alpha(x)}{\delta\varphi_\beta(y)} = \delta_{\alpha\beta}\delta(x-y) \quad (2.11)$$

Trasformazioni funzionali lineari

Una trasformazione lineare è nella forma $q(x) = \int k(x,y)q'(y)dy$, essa ha un'inversa caratterizzata dal kernel K^{-1} . Imponendo la relazione di ortonormalità si ottiene

$$\int K(x,y)K^{-1}(y,z)dy = \int K^{-1}(x,y)K(y,z)dy = \delta(x-z) \quad (2.12)$$

di cui è possibile effettuare la trasformata di Legendre. Avendo poi un funzionale F lo si può differenziare rispetto a q ottenendo:

$$\frac{\delta F[q]}{\delta q(x)} = p(x) \quad (2.13)$$

in analogia al momento in meccanica Lagrangiana. $F[q]$ può essere mappato in un nuovo funzionale $G[p]$ che dipende solo dal momento

$$G[p] = F[q] - \int q(x)p(x)dx \quad (2.14)$$

Integrazione Funzionale

L'integrazione funzionale può essere definita a partire da

$$\int F[q][dq] = \int \hat{F}(\{q_i\}) \prod_i dq_i \quad (2.15)$$

dove si è inteso il funzionale come funzione di infinite variabili integrando poi su ognuna delle coordinate in uno spazio infinito dimensionale. Questo integrale non esisterà sempre ma nel caso in cui esista si può effettuare un cambio di variabili. Consideriamo un cambio di variabili lineare il cui Kernel è $K(x,y) \rightarrow q = kq'$, si vuole calcolare l'integrale

$$\int F[kq'] [dkq'] \quad (2.16)$$

come un integrale in $[dq]$: per fare questo bisogna legare le due misure funzionali. Innanzitutto occorre esprimere sia q che q' in termini delle basi ortonormali φ_i , inserendo questi nella legge di trasformazione lineare si ottiene:

$$\begin{aligned} q(x) &= \int k(x,y)q'(y)dy \\ \sum_i q_i \varphi_i &= \int k(x,y) \sum_j q_j \varphi_j(y)dy \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \sum_i q_i \int \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx &= \sum_j q'_j \int k(x,y)\varphi_j(y)\varphi_k(x)dydx \\ \text{con } q_k &= \sum_j q'_j k_{jk} \end{aligned}$$

Successivamente, la misura trasforma con il determinante $\det K$ che espressa come un prodotto infinito degli autovalori di K diventa:

$$[dq] = \left| \frac{\partial q}{\partial q'} \right| [dq'] \quad (2.18)$$

Bisogna notare che solitamente gli integrali funzionali non possono essere calcolati analiticamente, fatta eccezione per quelli Gaussiani.

Funzionale densità di probabilità

È possibile interpretare la quantità

$$\exp\left(-\frac{1}{2}(q, k, q)\right) D_q \quad (2.19)$$

come una densità funzionale di probabilità Gaussianiana $dP[q]$, dal momento che:

- è definita positiva
- è normalizzata
- se q tende ad infinito allora va a zero

Essendo questo il caso, si può quindi calcolare il valor medio di un funzionale $F[q]$ come

$$\langle F[q] \rangle = \int F[q] dP[q] = \int D_q \exp\left(-\frac{1}{2}(q, k, q)\right) F[q] \quad (2.20)$$

che si può generalizzare a qualunque densità di probabilità non Gaussianiana sostituendo l'esponenziale $\exp(-\frac{1}{2}(q, k, q))$ con un generico $P[q]$. Una tipologia utile di media che possiamo calcolare è data proprio dalla funzione di correlazione a N -punti:

$$C^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = \langle q(x_1) \dots q(x_n) \rangle \quad (2.21)$$

Con la formula data in precedenza, questo può essere calcolato come

$$C^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = \int D_q P[q] \prod_i q(x_i) \quad (2.22)$$

Le funzioni di correlazione sono infatti cruciali quando si discute la formazione di strutture, possono essere facilmente calcolate dalle derivate funzionali finchè si ha il funzionale generatore. Questo funzionale generatore è matematicamente molto simile ad una funzione di partizione in meccanica statistica e ricopre un ruolo analogo: le sue derivate permettono di caratterizzare la dinamica del sistema.

3 Formula per l'espansione asintotica ad alte soglie

3.1 Correlazione dei punti oltre soglia

Prima di iniziare con la derivazione analitica delle espressioni di interesse ci si impone di derivare un'espansione ad alte soglie T per la funzione di correlazione dei punti x_i t.c. $\varepsilon(\vec{x}_i) \geq \sqrt{T\xi(0)}$. Si vuole determinare la probabilità che il campo random Gaussiano $\varepsilon(\vec{x})$ ecceda le soglie.

Invece di considerare subito una funzione a N punti come quella di interesse, conviene limitarsi ad un caso più semplice partendo da un campo classico q e calcolando la probabilità che $q \in (k, k + dk)$ in un certo punto \bar{x} . Questa si esprime con una funzione di densità di probabilità nella forma $\frac{dP_q}{dk} = P_q(x)(k; \bar{x})$.

Si vuole scrivere $P(k)dk$ in termini dell'integrale funzionale; partendo dalla trasformata di Fourier, si ottiene:

$$\int d\beta \exp(i\beta\varphi) P_q(\beta; \bar{x}) = \langle e^{i\beta\varphi} \rangle_\beta$$

Il membro a destra è una media sui possibili valori assunti dal campo q nel punto \bar{x} , ma può anche essere computato facendo la media su tutte le possibili configurazioni del campo nel punto \bar{x} :

$$\int d\beta \exp(i\beta\varphi) P_q(\beta; \bar{x}) = \langle e^{i\beta\varphi} \rangle$$

Nonostante le espressioni sembrino simili si è fatto tra le due un grande salto concettuale. Poichè, $\langle \rangle_\beta$ denota un integrale unidimensionale (la trasformata di Fourier) mentre, $\langle \rangle_q$ denota un integrale funzionale infinito dimensionale.

Era necessario fare questo passo poichè i valori del campo nei diversi punti non sono indipendenti. Quello che si vuole studiare è la correlazione tra essi, così al fine di considerare un singolo punto occorre studiare l'intero campo

Facendo l'antitrasformata di Fourier si trova:

$$\begin{aligned} P_q(k, \bar{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int d\varphi e^{-i\varphi k} \langle e^{i\varphi q(\bar{x})} \rangle_q \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\varphi \langle e^{i\varphi(q(\bar{x}) - k)} \rangle_q = \langle \delta(q(\bar{x}) - k) \rangle_q \end{aligned} \quad (3.1)$$

Questa equazione può essere interpretata come:

“la probabilità che il campo q sia uguale a k in \bar{x} è data dall'integrale delle probabilità di tutte le configurazioni del campo che soddisfino $q(\bar{x}) = k$ ”.

Una volta ricavato questo formalismo lo si può estendere alle funzioni a N punti. La notazione per la probabilità che per $i=1\dots N$ un campo ε assuma valori k_i nelle posizioni x_j è:

$$dP_\varepsilon^N = P_\varepsilon(k_1, \dots, k_N; x_1, \dots, x_N) dx_1, \dots, dx_N = P_\varepsilon([k_N]; [x_N]) dk_1 \dots dk_N \quad (3.2)$$

$$p_\varepsilon([k_N]; [x_N]) = \langle \prod_{i=1}^N \delta(\varepsilon(x_i) - k_i) \rangle_\varepsilon \quad (3.3)$$

Adesso ricordando che il valore medio di un generico funzionale è:

$$\begin{aligned} \langle F[q] \rangle &= \int F[q] dP[q] = \\ &= \int Dq P[q] F[q] \end{aligned}$$

con $P[q]$ densità di probabilità. Nel caso in cui:

$$F[q] = \prod_{i=1}^N \delta(\varepsilon(x_i) - k_i) \quad (3.4)$$

e $P[q] = P[\varepsilon]$ densità di probabilità Gaussiana, si ottiene

$$P_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \int_t^{+\infty} dk_1 \dots \int_t^{+\infty} dk_N \int [d\varepsilon] P[\varepsilon] \prod_{i=1}^N \delta(\varepsilon(\vec{x}_i) - k_i) \quad (3.5)$$

Dove trattandosi di variabili mute si può integrare alternativamente su x_i o k_i , mentre il dominio di integrazione è legato al fatto che ci interessano i valori del campo oltre la soglia t .

Si può adesso passare alla risoluzione dell'integrale, in analogia a quella di integrali ordinari. Usando la rappresentazione $\delta(x) = 1/2\pi \int d\varphi e^{i\varphi x}$ per la delta di Dirac, allora l'integrale funzionale diventa

$$P_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} (\det \tilde{M})^{1/2}} \int_{\vec{t}}^{\infty} dk_1 \dots \int_{\vec{t}}^{\infty} dk_N \times \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1, \dots, k_N) \tilde{M}^{-1} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_N \end{pmatrix} \right] \quad (3.6)$$

Occorre tenere a mente che in questa notazione: $\vec{t} = (t, t, \dots, t)$; con $t = \sqrt{T\xi(0)}$;

$\vec{k} = (k_1, \dots, k_N)$; $[\tilde{M}]_{ij} = \xi(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$;

Si può effettuare un cambio di variabili conveniente nella nuova variabile $\vec{\lambda} = T \left(\frac{k}{t} - \vec{1} \right)$ e per comodità può essere introdotta anche una nuova quantità $M_{ij} = \tilde{M}_{ij}/\xi(0)$. Effettuando gli opportuni cambi l'equazione (3.6) diventa quindi:

$$P_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \frac{\det(M)^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi T)^{N/2}} \exp \left(-\frac{T}{2} \vec{1}^T M^{-1} \vec{1} \right) \cdot \int_0^{\infty} d\vec{\lambda} \exp \left(-\frac{1}{2T} \vec{\lambda}^T M^{-1} \vec{\lambda} - \vec{1}^T M^{-1} \vec{\lambda} \right)$$

Di questa espressione si vuole derivare un'espressione asintotica valida per soglie elevate (T grandi). Si assuma che M , matrice $N \times N$, e la sua inversa siano simmetriche e definite positive, ovvero:

$$\left(M^{-1} \vec{1} \right)_i \equiv \sum_{j=1}^N M_i^{-1} j > 0 \quad \text{con } M_{ij} \text{ elementi di matrice} \quad (3.7)$$

Tenendo conto del fatto che ci si sta occupando di zone ad alte soglie e grandi distanze, ovvero grandi $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|$ dove $\frac{\xi(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)}{\xi(0)} \ll 1$,

si può allora riscrivere nel seguente modo l'integrale nella variabile λ utilizzando la convenzione di Einstein per gli indici ripetuti:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} d\vec{\lambda} \exp \left(-\frac{1}{2T} \vec{\lambda}^T M^{-1} \vec{\lambda} - \vec{1}^T M^{-1} \vec{\lambda} \right) = \\ & = \int_0^{\infty} d\vec{\lambda} \exp \left(-\frac{1}{2T} \vec{\lambda}^T M^{-1} \vec{\lambda} \right) \exp \left(-\vec{1}^T M^{-1} \vec{\lambda} \right) \stackrel{(a)}{=} \\ & = \int_0^{+\infty} d\lambda_1 \dots d\lambda_N \exp \left(-\frac{1}{2T} \lambda_i^T M_{ik}^{-1} \lambda_k \right) \exp \left(-\lambda_j J_j \right) = \\ & = \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2T} \frac{\partial}{\partial J_i} M_{ik}^{-1} \frac{\partial}{\partial J_k} \right] \int_0^{\infty} d\vec{\lambda} \exp \left(-\lambda_j J_j \right) \right\} \Big|_{J_i = \sum_{j=1}^N M_{ij}^{-1}} \end{aligned}$$

dove in (a) si è utilizzata per il primo esponenziale la definizione di prodotto riga per colonna mentre per il secondo, si è sfruttata la definizione data precedentemente in (3.11).

A questo punto l'espressione per la probabilità diventa:

$$P_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \frac{(\det M)^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi T)^{N/2}} \exp \left[-\frac{T}{2} \vec{1}^T M^{-1} \vec{1} \right] \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2T} \frac{\partial}{\partial J_i} M_{ik}^{-1} \frac{\partial}{\partial J_k} \right] \cdot \int_0^{\infty} d\vec{\lambda} \exp \left(-\lambda_j J_j \right) \right\} \Big|_{J_i = \sum_{j=1}^N M_{ij}^{-1}}$$

Il termine $\int_0^\infty d\vec{\lambda} \exp(-\lambda_j J_j)$ può essere poi riscritto nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\vec{\lambda} \exp(-\lambda_j J_j) &= \int_0^\infty d\vec{\lambda} \prod_e^{-\lambda_j J_j} = \int_0^\infty e^{-\lambda_1 T_1} \dots e^{-\lambda_N J_N} d\lambda_1 \dots d\lambda_N = \\ &= \int_0^\infty d\lambda_1 e^{-\lambda_1 J} \int_0^\infty d\lambda_2 e^{-\lambda_2 J_2} \dots \int_0^\infty d\lambda_N e^{-\lambda_N J_N} = \\ &= \left(-\frac{1}{J_1} [e^{\lambda_1 T_1}]_0^{+\infty} \right) \dots \left(-\frac{1}{J_N} [e^{-\lambda_N J_N}]_0^{+\infty} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{J_1} \right) \dots \left(\frac{1}{J_N} \right) = \left(\prod_{j=1}^N J_j \right)^{-1} \end{aligned}$$

Si ottiene quindi per la probabilità:

$$P_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \frac{(\det M)^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi T)^{N/2}} \exp \left[-\frac{T}{2} \vec{1}^\top M^{-1} \vec{1} \right] \exp \left(-\frac{1}{2T} \frac{\partial}{\partial J_i} M^{-1} \frac{\partial}{\partial J_k} \right) \left(\prod_{j=1}^N J_j \right)^{-1} \Big|_{J_j=(M^{-1})_j} \quad (3.8)$$

Il secondo esponente può essere scritto nella seguente convenzione $\exp \left(-(1/2T) \vec{\nabla}_J^\top M^{-1} \vec{\nabla}_J \right)$ e per alte soglie, si può espandere in serie di potenze inverse di T ottenendo l'espansione asintotica. Nel caso in cui N=1, la probabilità diventa:

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-T/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n-1)!! T^{-(n+1/2)} \quad (3.9)$$

in cui

$$\begin{aligned} M &= \frac{\tilde{M}}{\xi(0)} \quad \tilde{M} = \xi(|x_i - x_j|) \\ e \text{ per } N=1 \text{ vale } &\frac{\xi(0)}{\xi(0)} = 1 \end{aligned}$$

Si tratta di un'espansione asintotica e in quanto tale non converge per alcun valore di T. Essendo nella condizione in cui $\varepsilon(\vec{x}_i) \geq \sqrt{T\xi(0)}$, quindi al di sopra di una certa soglia, sussiste la seguente relazione fra la funzione di correlazione a N punti e la Probabilità P_N :

$$1 + \xi_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = P_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) P_1^{-N} \quad (3.10)$$

Il ragionamento fatto fino ad ora implica quindi:

$$\begin{aligned} \xi_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) &= -1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n-1)!! T^{-n} \right)^{-N} (\det M)^{-1/2} \\ \cdot \exp \left(-\frac{T}{2} \sum_{i \neq j} M_{ij}^{-1} \right) &\left\{ \exp \left(-\frac{1}{2T} M_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial J_i} \frac{\partial}{\partial J_j} \right) \prod_{k=1}^N J_k^{-1} \right\} \Big|_{J_k=(M^{-1})_k} \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2 Risultati espliciti fino all'ordine $O(T^{-2})$

Dai precedenti calcoli appare chiaro che al fine di ottenere l'espansione asintotica della funzione di correlazione, occorre passare attraverso l'espansione in serie di potenze del termine all'interno delle parentesi graffe. Vengono in seguito dati dei risultati espliciti approssimati, al fine di contestualizzare le espressioni analitiche derivate in precedenza. Il calcolo esplicito dell'espansione fino all'ordine T^{-2} è il seguente:

$$\begin{aligned}
\xi_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = & -1 + (\det M)^{-1/2} \exp\left(-\frac{T}{2} \sum_{i \neq j} M_{ij}^{-1}\right) \left(\prod_{m=1}^N J_m^{-1}\right) \\
& \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{T} \left(N - \sum_i \frac{M_{ii}^{-1}}{J_i^2} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{M_{ij}^{-1}}{J_i J_j} \right) + \frac{1}{T^2} \left(\frac{N(N-5)}{2} \right. \right. \\
& - N \sum_i \frac{M_{ii}^{-1}}{J_i^2} - \frac{N}{2} \sum_{i \neq j} \frac{M_{ij}^{-1}}{J_i J_j} + 3 \sum_i \frac{M_{ii}^{-1} M_{ii}^{-1}}{J_i^4} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \frac{M_{ii}^{-1} M_{kk}^{-1}}{J_i^2 J_k^2} \\
& + \sum_{i \neq j} \frac{M_{ij}^{-1} M_{ij}^{-1}}{J_i^2 J_j^2} + 3 \sum_{i \neq k} \frac{M_{ii}^{-1} M_{ik}^{-1}}{J_i^3 J_k} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k \neq l} \frac{M_{ii}^{-1} M_{kl}^{-1}}{J_i^2 J_k J_l} \\
& \left. \left. + \sum_{i \neq i \neq j} \frac{M_i^{-1} M_{ij}^{-1}}{J_i^2 J_l J_j} + \frac{1}{8} \sum_{i \neq j \neq k \neq l} \frac{M_{ij}^{-1} M_{kl}^{-1}}{J_i J_j J_k J_l} \right) + O(1/T^3) \right\} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

dove $J_i = \sum_j M_{ij}^{-1}$.

A grandi distanze, dove $\xi(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)/\xi(0)$ sono piccole, si può anche effettuare un'espansione in queste quantità. Si possono adesso ottenere delle espressioni esplicite per l'espansione della funzione di correlazione a due e a tre punti. Nota l'espressione (3.10) e la seguente proprietà di fattorizzazione per la funzione di correlazione

$$1 + \xi_3(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = (1 + \xi_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2)) (1 + \xi_2(\vec{x}_2, \vec{x}_3)) (1 + \xi_2(\vec{x}_3, \vec{x}_1)) \quad (3.13)$$

si ottiene quindi per la funzione di correlazione a due punti:

$$\begin{aligned}
1 + \xi_2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = & \exp(Ta/(1-a^2)) \left\{ \left(1 + 2a + \frac{3}{2}a^2 \right) \right. \\
& \left. - T^{-1}(3a + 8a^2) + T^{-2}(16a + 62a^2) + O(T^{-3}, a^3) \right\} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

dove si è definito il parametro $a = \xi(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)/\xi(0)$ mentre per la funzione di correlazione a tre punti:

$$\begin{aligned}
1 + \xi_3(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = & \exp(T(A-B)(1-C+2D)) \\
& \cdot \left\{ \left(1 + 2A + 3B + \frac{3}{2}C \right) - T^{-1}(3A + 13B + 8C) \right. \\
& \left. + T^{-2}(16A + 62B + 100C) + O(T^{-3}, a_i^3) \right\} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}
A = \sum_i a_i, \quad B = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1, \quad C = \sum_i a_i^2, \quad D = a_1 a_2 a_3, \\
a_1 = \xi(\vec{x}_2 - \vec{x}_3)/\xi(0), \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Dalle precedenti espressioni occorre notare che il numero di termini notevoli dipende esclusivamente dalla larghezza del termine Ta_i . Nonostante siano stati precedentemente espressi calcoli validi solo fino all'ordine $O(T^2)$, si può comunque assumere che essi siano validi per ogni ordine. Ciò avviene poichè si sta trascurando un termine di ordine (Ta^2) nell'esponente, mentre si mantiene un termine di ordine a/T nel fattore lineare. Tuttavia nel regime che si sta considerando $(Ta^2) \ll a/T$, allora appare chiaro che la fattorizzazione resta valida anche per grandi valori di T .

4 Massimi Locali di un campo random Gaussiano

4.1 Densità numerica dei punti estremali

Ci si propone ora di trovare i principali risultati della seguente trattazione ovvero l'espressione analitica dei massimi del campo random Gaussiano preso in considerazione. Nell'approccio al problema che si sta considerando, l'obiettivo è quello di concentrarsi sui massimi locali delle perturbazioni iniziali della densità. Si assume infatti che si formino condensazioni di materia attorno a picchi di densità locale sufficientemente alti. Affinchè il campo di densità possieda un insieme ben definito di massimi locali, deve essere liscio e differenziabile. Il modello in esame prevede quindi un'operazione non locale e non lineare che, applicata ad un campo di densità iniziale continuo $F(r)$, produca una "popolazione", descritta dal campo di densità, di una somma del tipo:

$$n_{\text{pk}}(\mathbf{r}) = \sum_p \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \quad (4.1)$$

Nell'espressione, r_p indica le posizioni dei massimi che soddisfano determinate condizioni fisicamente motivabili, come ad esempio l'eccedere una soglia. L'introduzione del criterio di soglia ingloba infatti la non località del processo in esame. La precedente equazione descrive quindi il numero di punti selezionati per essere massimi del campo random. Infatti in linea di principio per ottenere una descrizione accurata del processo sarebbe necessario un approccio discreto, tuttavia a livello pratico è possibile ricavare solo un risultato medio. Generalizzando allora al caso di un campo $\varepsilon(\vec{x})$ possiamo ampliare il processo da puntuale a continuo ottenendo:

$$n_m(\vec{x}) = \int_t^\infty dm \sum_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \delta(\varepsilon(\vec{x}) - m)$$

Dove la sommatoria viene intesa sulle posizioni \vec{x}_i in \mathbb{R}^D alle quali $\varepsilon(\vec{x}_i)$ è un massimo locale. Si vuole adesso esprimere il processo interamente in termini del campo e delle sue derivate. Nei pressi di un massimo il campo può essere espanso assieme al suo gradiente in uno sviluppo di Taylor del tipo²:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\vec{x}) &\approx \varepsilon(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{a,b} \omega_{a,b} (x - x_i)_a (x \cdot x_i)_b \\ \eta_i(\vec{x}) &\approx \sum_b \omega_{a,b} (x - x_i)_b \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il primo vincolo relativo alla presenza di un massimo ovvero si è considerato nullo il gradiente del campo calcolato nel punto di interesse.

Imponendo ora che la matrice ω sia non singolare in x_i , si ottiene $\vec{x} - x_i \approx \omega^{-1}(x_i) \eta(\vec{x})$, da cui

$$\sum_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) = \delta(\vec{\nabla} \varepsilon(\vec{x})) |\det \nabla_a \nabla_b \varepsilon(\vec{x})|$$

Bisogna ora tenere in considerazione una seconda prerogativa dei punti di massimo locale, imponendo che la matrice $D \times D$ simmetrica di componenti $\omega^{ab} = \nabla_a \nabla_b \varepsilon(\vec{x})$ abbia autovalori negativi. In tal modo l'espressione per il numero di densità dei massimi locali in termini delle derivate diviene:

$$n_m(\vec{x}) = \int_t^\infty dm \delta(\vec{\nabla} \varepsilon(\vec{x})) \delta(\varepsilon(\vec{x}) - m) \int_D d\omega \delta(\vec{\nabla} \vec{\nabla} \varepsilon(\vec{x}) - \omega) (-1)^D \det \omega \quad (4.2)$$

Il dominio D di integrazione è una complicata sottovarietà di $\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}$ e prevede ω definita negativa. Infatti per quanto riguarda ω , occorre tenere a mente due aspetti cruciali

²La notazione usata prevede di rappresentare con la lettera η la derivata prima e con la lettera ω il secondo ordine di derivazione: $\eta(\vec{x}) \equiv \nabla \varepsilon(\vec{x})$; $\omega_{a,b} \equiv \nabla_a \nabla_b \varepsilon(\vec{x})$

- $|\det \omega| = (-1)^D \det \omega$ che giustifica la scelta del dominio
- $d\omega = \prod d\omega^{ab}$, dove $a, b = 1, \dots, D$ risultato utile per i successivi conti.

Al fine di valutare l'espressione (4.2), si richiede per la distribuzione di probabilità congiunta che il campo assuma valori in $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$, il campo del gradiente stia nel range $[\eta, \eta + d\eta]$ e la matrice che ha per entrate le derivate seconde stia in $[\zeta_{a,b}, \zeta_{a,b} + d\zeta_{a,b}]$. Questa distribuzione può essere valutata come una distribuzione Gaussiana multivariata ma allora, la densità di probabilità di trovare N picchi nel campo $\varepsilon(\vec{x})$ in posizioni $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$ è:

$$P_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \int [d\varepsilon] P[\varepsilon] \prod_{i=1}^N n_m(\vec{x}_i) \quad (4.3)$$

dove $P[\varepsilon]$ è la densità di probabilità Gaussiana. Sfruttando la riscrittura della funzione delta di n_m attraverso gli integrali di funzioni di andamento esponenziale ed in seguito ad aver completato il quadrato si ottiene un'espressione integrabile tramite la tecnica dell'analisi funzionale che conduce a:

$$P_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \left(\prod_{i=1}^N \int_t^\infty dm_i \int_D d\omega_i \int \frac{d\vec{k}_i}{(2\pi)^d} (-1)^D \det \omega_i \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{A,B,j,k} k_j^A \Lambda_{jk}^{AB} k_k^B - i \sum_{A,j} k_j^A N_j^A \right) \quad (4.4)$$

4.2 La matrice Λ e il suo ruolo nella discussione dei picchi

A questo punto della trattazione risulta imprescindibile fare chiarezza sulle grandezze in gioco e introdurne di nuove che faciliteranno la futura trattazione. In particolare, facendo riferimento all'equazione (4.4), le $\omega_j, j = 1 \dots N$, sono le matrici $D \times D$ simmetriche di componenti $(\omega_j)^{ab}$, $a, b = 1, \dots, D$.

Gli \vec{N}_j sono vettori con $d = 1 + D + \frac{1}{2}D(D+1)$ componenti, $N_j^A, A = 1, \dots, d$ la cui forma esplicita è la seguente

$$\vec{N}_j \equiv \begin{pmatrix} \vec{N}_j \\ \omega_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (\omega_j)^{ab}, a = 1, \dots, D; b \leq a \end{pmatrix}_{\frac{1}{2}} D(D+1)$$

È quindi possibile introdurre la matrice $Nd \times Nd$ simmetrica Λ di componenti:

$$\Lambda_{jk}^{AB} = D_j^A D_k^B \xi(|\vec{x}_j - \vec{x}_k|)$$

dove

$$\vec{D}_j = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_j^a} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_j^a \partial x_j^b}, a = 1, \dots, D; b \leq a \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} D \\ \} \frac{1}{2} D(D+1) \end{array} \right\}$$

Può essere utile decomporre la matrice appena introdotta nella sua forma a blocchi tale che

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

dove A e B sono blocchi quadrati di dimensione rispettivamente $(D+1)N \times (D+1)N$ e $\frac{D}{2}(D+1)N \times \frac{D}{2}(D+1)N$, mentre C è un blocco di dimensione $(D+1)N \times \frac{D}{2}(D+1)N$.

Le $(D+1)N$ componenti riflettono la condizione $\vec{\nabla}\varepsilon = 0$ e il vincolo $\varepsilon \geq t$ mentre le $\frac{1}{2}D(D+1)N$ componenti riflettono il fatto che $\vec{\nabla}\varepsilon$ sia definito negativo. Le sottomatrici A, B, C sono date da

$$A_{ij}^{ab} = \left\{ \delta_{a1}\delta_{b1} + \delta_{a1}(1-\delta_{b1})\frac{\partial}{\partial x_j^{b-1}} + \delta_{b1}(1-\delta_{a1})\frac{\partial}{\partial x_i^{a-1}} + (1-\delta_{a1})(1-\delta_{b1})\frac{\partial^2}{\partial x_i^{a-1}\partial x_j^{b-1}} \right\} \xi(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$$

$$B_{i,j}^{ab,cd} = \frac{\partial^4}{\partial x_i^a \partial x_i^b \partial x_j^c \partial x_j^d} \xi(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$$

$$C_{i,j}^{a,bc} = \left\{ \delta_{a1}\frac{\partial^2}{\partial x_j^b \partial x_j^c} + (1-\delta_{a1})\frac{\partial^3}{\partial x_i^{a-1}\partial x_j^b \partial x_j^c} \right\} \xi(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$$

$$(C^T)_{i,j}^{bc,a} = C_{j,i}^{a,bc}$$

con x_i^a l' a -esima componente di \vec{x}_i , $a = 1, \dots, D$. Nell'espressione per la sottomatrice A , la coppia ab assume valori $a \leq b = 1, \dots, D$, ciò riflette il fatto che ω_i^{ab} è per l'appunto simmetrica. Analogo ragionamento può essere effettuato per cd , e bc . Gli indici i e j indicano le posizioni spaziali \vec{x}_i e \vec{x}_j e per questo vanno da 1 a N per le correlazioni a N -punti dei picchi.

Si può ora passare al calcolo dell'inversa della matrice Λ ottenendo:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} X & Z \\ Z^T & Y \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

A questo punto è automaticamente giustificata la seguente uguaglianza:

$$X = A^{-1} + ZY^{-1}Z^T \quad (4.7)$$

4.3 Calcolo approssimato della funzione di densità dei picchi

Sfruttando le quantità appena introdotte, e svolgendo l'integrazione nella variabile k , l'espressione (4.4) fornisce il seguente risultato:

$$P_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \left(\prod_{j=1}^N \int_t^\infty dm_j \int_Q d\omega_j (-1)^D \det \omega_j \right) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\vec{N}^T \Lambda^{-1} \vec{N}\right)}{[(2\pi)^{Nd} \det \Lambda]^{1/2}} \quad (4.8)$$

Attraverso le espressioni (4.6), (4.7) ricavate a partire dalla matrice Λ , l'argomento dell'esponenziale diventa

$$\vec{N}^T \Lambda^{-1} \vec{N} = \vec{N}^T A^{-1} \vec{N} + (\vec{\omega} - \vec{G})^T Y (\vec{\omega} - \vec{G})$$

dove

$$\vec{G} = -Y^{-1}Z^T \vec{N}$$

Usando poi la relazione: $\Lambda \Lambda^{-1} = 1$, si può dedurre che $Y^{-1}Z^T = -C^T A^{-1}$. Allora \vec{G} ha componenti:

$$G_j^{ab} = (C^T)_{j,k}^{ab,c} (A^{-1})_{kl}^{cd} \bar{N}_t^d$$

con $a, b = 1, \dots, D$; $b \leq a$; $c, d = 1, \dots, D+1$ e $j, k, l = 1, \dots, N$.

Inoltre dal momento che $\bar{N}_l^d = \delta_1^d m_l$, dando l'ulteriore definizione che prevede

$$(\bar{A}^{-1})_{ij} = (A^{-1})_{ij}^{11}$$

l'espressione per la densità di probabilità congiunta che i picchi si trovino in posizioni $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$ diventa:

$$P_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \left[(2\pi)^{Nd} \det \Lambda \right]^{-1/2} \left(\prod_{j=1}^N \int_t^\infty dm_j \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \vec{m}^T \bar{A}^{-1} \vec{m} \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^N \int_D d\omega_k (-)^D \det \omega_k \right) \exp \left(-\frac{1}{2} (\vec{\omega} - \vec{G})^T Y (\vec{\omega} - \vec{G}) \right) \quad (4.9)$$

Occorre tuttavia notare che l'estremo di integrazione D con cui si sta operando, risulta particolarmente complicato. Conviene per cui non limitarsi al considerare i punti di massimo, ma allargare la ricerca a tutti i punti critici (coinvolgendo quindi anche minimi e punti di sella). In tal modo infatti il dominio di integrazione si allarga passando da D a tutto $\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}$.

Ciò è conveniente poichè questa scelta, conduce ad una notevole semplificazione della trattazione inducendo un errore assolutamente trascurabile³. Approssimiamo quindi P_N a P'_N , dove:

$$P'_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \left[(2\pi)^{Nd} \det \Lambda \right]^{-1/2} \prod_{j=1}^N \int_t^\infty dm_j \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \vec{m}^T \bar{A}^{-1} \vec{m} \right) I'_N \left[\left[\mathbb{R}^{(1/2)ND(D+1)} \right] \right] \quad (4.10)$$

dove $I'_N[A^N] = (-1)^{ND} \int_{A^N} \prod_{k=1}^N d\omega_k \det \omega_k \exp \left(-\frac{1}{2} (\vec{\omega} - \vec{G})^T Y (\vec{\omega} - \vec{G}) \right)$

con $A^N = A \times A \times \dots \times A$

Al fine di esprimere chiaramente l'integrazione in ω , i determinanti di ω_j possono essere ora espressi come integrali sulle variabili di Grassmann⁴ θ e $\bar{\theta}$:

$$\det \omega_j = \int \prod_{a=1}^D d\eta_j^a d\bar{\eta}_j^a \exp \left(\bar{\eta}_j^a (\omega_j)^{ab} \eta_j^b \right)$$

Allora

$$I'_N \left[\mathbb{R}^{(1/2)ND(D+1)} \right] = \left(\prod_{k=1}^N \int \left(\prod_{a=1}^D d\eta_k^a d\bar{\eta}_k^a \right) \right) \cdot \exp \left(\sum_j \bar{\eta}_j^a G_j^{ab} \eta_j^b + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \bar{\eta}_k^a \eta_l^b (Y^{-1})_{k,l}^{ab,cd} \bar{\eta}_l^c \eta_l^d \right)$$

Per ricavare l'espansione asintotica di P'_N in T^{-1} , occorre espandere l'esponenziale del termine di ordine 4 in una serie di potenze, esibendo l'integrazione di Grassmann e poi l'integrazione in m_j tramite la tecnica introdotta nel paragrafo 3

Per ciò che concerne le integrazioni alla Grassmann esse sfruttano l'identità:

$$\int \prod_i d\eta_i d\bar{\eta}_i (\bar{\eta}_{i_1} \eta_{j_1}) \dots (\bar{\eta}_{i_m} \eta_{j_m}) e^{\bar{\eta}_j A_{jk} \eta_k} = \det A \sum_{P \in S_m} \delta_p A_{i_1 P(j_1)}^{-1} \dots A_{i_m P(j_m)}^{-1}$$

³Gli errori sono dell'ordine di $\exp(-T\xi(0)^2/\xi(x)^2) / \exp(-T)$ e $\exp(-T)$

⁴Un numero di Grassmann (o numero anticommutante), gode della proprietà di anticommutare con gli altri numero di Grassmann ma di commutare con i numeri ordinari. In particolare, il quadrato di un numero di Grassmann è nullo.

dove S_m sono le permutazioni degli m indici $j_1 \dots j_m$ e δ_p è il segno della permutazione. Allora l'espansione diventa:

$$I'_N \left[\mathbb{R}^{(1/2)ND(D+1)} \right] = (-1)^{ND} (2\pi)^{ND(D+1)/4} (\det Y)^{-1/2} \cdot \prod_{j=1}^N \det G_j \left\{ 1 + \frac{1}{2} (Y^{-1})_{kl}^{ab,cd} \left[(G_k^{-1})^{ab} (G_l^{-1})^{cd} + (G_k^{-1})^{ad} (G_l^{-1})^{cb} \delta_{kl} \right] + O(G^{-1})^4 \right\}$$

Definendo ora una matrice ε tale che

$$G_j^{ab} = -\alpha \delta^{ab} m_j + \varepsilon_{jk}^{ab} m_k$$

dove $\alpha = -\nabla^2 \xi(0) / D \xi(0) > 0$, vale allora $(G_j^{-1})^{ab} = -\frac{\delta^{ab}}{\alpha m_j} - \frac{\varepsilon_{jk}^{ab} m_k}{(\alpha m_j)^2} + O(\varepsilon^2)$

Per grandi separazioni, ε può essere espansa in una serie di potenze di $\xi(x)/\xi(0)$.

A partire dalla definizione di $(G_j^{-1})^{ab}$, si trova che $\varepsilon_{jk}^{ab} = (1 - \delta_{jk}) (\alpha \delta^{ab} + \nabla_a \nabla_b) \hat{\xi}_{jk} + O(\hat{\xi}^2)$ dove è stata introdotta la quantità $\hat{\xi}_{jk} \equiv \xi_{jk}/\xi(0) \equiv \xi(|\vec{x}_j - \vec{x}_k|)/\xi(0)$, con $j \neq k$

Si noti che con la notazione $O(\hat{\xi}^2)$ si intende $O(\hat{\xi}^2, (\nabla \hat{\xi})^2, \hat{\xi} \nabla^2 \hat{\xi}, \text{etc.})$.

Si ottiene allora la seguente espressione

$$\begin{aligned} I'_N \left[\mathbb{R}^{(1/2)ND(D+1)} \right] &= (2\pi)^{(1/4)ND(D+1)} (\det Y)^{-1/2} \prod_{j=1}^N (\alpha m_j)^D \left(1 - \alpha^{-1} \sum_{j,t} \varepsilon_{jl}^{aa} \frac{m_l}{m_j} + O(\hat{\xi}_{ij}^2) \right) \\ &\left\{ 1 + \frac{\alpha^{-2}}{2} \sum_k \left[(Y^{-1})_{k,k}^{aabb} - (Y^{-1})_{k,k}^{ab,ba} \right] \frac{1}{m_k^2} + \frac{\alpha^{-2}}{2} \sum_{k \neq l} (Y^{-1})_{k,b}^{a,bb} \frac{1}{m_k m_l} \right. \\ &\left. + \alpha^{-3} \sum_{k,l} \left[(Y^{-1})_{k,k}^{aa,bc} - (Y^{-1})_{k,k}^{ab,c} \right] \frac{\varepsilon_{kl}^{bc} m_l}{m_k^3} + O(\xi_{ij}^2, m^{-4}) \right\} \stackrel{(a)}{=} \\ &(2\pi)^{(1/4)ND(D+1)} (\det Y)^{-1/2} \prod_{j=1}^N (\alpha m_j)^D \left(1 - \sum_{j \neq l} \frac{m_l}{m_j} \left(D + \frac{\nabla^2}{\alpha} \right) \hat{\xi}_{jt} \right. \\ &\left. + O(\hat{\xi}_{ij}^2) \right) \left\{ 1 - \sum_k \frac{D(D-1)}{2m_k^2} \xi(0) - \sum_{k \neq l} \frac{1}{2m_k m_l} \left(D + \frac{\nabla^2}{\alpha} \right)^2 \xi_1 \right. \\ &\left. - \sum_{k \neq l} \frac{m_l}{m_k^3} (D-1) \left(D + \frac{\nabla^2}{\alpha} \right) \xi_{kl} + O(\xi_{ij}^2, m^{-4}) \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

In (a) sono state sfruttate le seguenti considerazioni:

- Espandendo $\Lambda \Lambda^{-1} = 1$ in termini delle sottomatrici A, B, C (come visto precedentemente), $Y^{-1} = B - C^T A^{-1} C$. In tal modo è possibile esprimere i termini che coinvolgono Y^{-1} sfruttando ξ_{ij} e le sue derivate, ottenendo:

$$(Y^{-1})_{i,j}^{ab,cd} = [\nabla_a \nabla_b \nabla_c \nabla_d + \alpha (\delta^{ab} \nabla_c \nabla_d + \delta^{cd} \nabla_a \nabla_b) + \alpha^2 \delta^{ab} \delta^{cd}] \xi_{ij} + O(\xi_{ij}^2) \quad (4.12)$$

Ciò implica:

$$\begin{aligned} (Y^{-1})_{k,k}^{a,bb} - (Y^{-1})_{k,k}^{ab,ba} &= -D(D-1)\alpha^2 \xi(0) \\ (Y^{-1})_{k,b}^{a,bc} - (Y^{-1})_{k,k}^{ab,ca} &= -\delta^{bc} (D-1)\alpha^2 \xi(0) \end{aligned}$$

- $\varepsilon_{jk}^{ab} = (1 - \delta_{jk}) (\alpha \delta^{ab} + \nabla_a \nabla_b) \hat{\xi}_{jk} + O(\hat{\xi}^2)$

Sostituendo il risultato appena ottenuto in (4.10) e procedendo con l'integrazione, si ottiene:

$$\begin{aligned}
P'_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) &= [(2\pi)^{Nd} \det \Lambda]^{-1/2} (2\pi)^{ND(D+1)/4} (\det Y)^{-1/2} \alpha^{ND} t^{N(D-1)} \\
&\cdot \exp\left(-\frac{1}{2} t^2 \vec{1}^T \bar{A}^{-1} \vec{1}\right) \left(\prod_i J_i^{-1}\right) \left(1 - \sum_{j \neq l} \hat{O} \hat{\xi}_{jl} + O(\hat{\xi}_{ij}^2)\right) \\
&\cdot \left\{1 + \frac{D}{t^2} \sum_i J_i^{-1} - \frac{ND(D-1)\xi(0)}{-2t^2} + \frac{1}{2t^2} \left(\sum_k \frac{2\bar{A}_{kk}^{-1}}{J_k^2} + \sum_{k \neq l} \frac{\bar{A}_{kl}^{-1}}{J_k J_l}\right)\right\} \quad (4.13) \\
&- \frac{1}{2t^2} \sum_{k \neq l} \left(\hat{O}^2 + 2(D-1)\hat{O}\right) \hat{\xi}_{kl} + O(\hat{\xi}_{ij}^2, t^{-4})
\end{aligned}$$

dove $J_i = \sum_j \bar{A}_{ij}^{-1}$ e $\hat{O} = D + \alpha^{-1} \nabla^2$. Al fine di valutare i determinanti presenti nell'equazione, si sfruttano le seguenti identità:

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C^x & 1 \end{pmatrix}$$

quindi $\det \Lambda \det Y = \det A$.

Dal momento che la parte diagonale di A è costituita da N blocchi di $\xi(0)$ mentre al di fuori della diagonale $\text{diag}(1, \alpha, \dots, \alpha)$ troviamo $O(\xi_{ij})$, si ottiene per $\det A$:

$$\sqrt{\det A} = \xi(0)^{N(D+1)/2} \alpha^{ND/2} (1 + O(\xi_{ij}^2))$$

Tenendo inoltre in considerazione il limite a grandi distanze in cui ci si è posti si ottiene

$$\bar{A}_{ij}^{-1} = \frac{\delta_{ij}}{\xi(0)} - (1 - \delta_{ij}) \frac{\xi_{ij}}{(\xi(0))^2} + O(\xi_{ij}^2).$$

Adesso è finalmente possibile ricavare le espressioni analitiche per la densità numerica e la funzione di correlazione a due punti per il campo di densità di materia:

$$\begin{aligned}
P'_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) &= (2\pi)^{-(1/2)N(D+1)} \alpha^{(1/2)ND} \xi(0)^{-(1/2)N(D-1)} t^{N(D-1)} \\
&\cdot \exp\left(-\frac{1}{2} t^2 \vec{1}^T \bar{A}^{-1} \vec{1}\right) \left\{ (1 - 2(D-1)x - 2y) \right. \\
&+ \frac{\xi(0)}{t^2} (N(D-1)(1 - \frac{1}{2}D) + x(D-1)[N(D-1)(D-2) - (D-3)] \\
&\left. + y[N(D-1)(D-2) + 2] + z) + O(\xi_{ij}^2, t^{-4}) \right\} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

dove $x = \sum_{i < j} \hat{\xi}_{ij}$, $y = \sum_{i < j} \alpha^{-1} \nabla^2 \hat{\xi}_{ij}$, $z = \sum_{i < j} \alpha^{-2} \nabla^4 \hat{\xi}_{ij}$.

Il numero di densità dei picchi oltre la soglia risulta quindi:

$$P'_1 = \frac{\alpha^{D/2} t^{D-1}}{(2\pi)^{(D+1)/2} \xi(0)^{(D-1)/2}} \cdot \exp(-t^2/2\xi(0)) \left\{ 1 + (D-1) \left(1 - \frac{1}{2}D\right) \frac{\xi(0)}{t^2} + O(t^{-4}) \right\} \quad (4.15)$$

La correlazione a N-punti dei picchi ξ_N è quindi:

$$1 + \xi_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = P'_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) / (P'_1)^N$$

che, in accordo con l'equazione (4.15), diventa

$$1 + \xi_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} \left(\vec{1}^T \bar{A}^{-1} \vec{1} - N/\xi(0)\right)\right)$$

$$\left\{ [1 - 2(D-1)x - 2y] + \frac{\xi(0)}{t^2} [-(D-1)(D-3)x + 2y + z] + O\left(\xi_{ij}^2, t^{-4}\right) \right\} \quad (4.16)$$

Le equazioni (4.14) e (4.15) rappresentano quindi i risultati principali della trattazione.

4.4 Risultati espliciti all'ordine $O(T^{-2})$ e $\xi(x)/\xi(0)$

Sfruttando

$$\bar{A}_{ij}^{-1} = \frac{\delta_{ij}}{\xi(0)} - (1 - \delta_{ij}) \frac{\xi_{ij}}{\xi(0)^2} + \frac{1}{\xi(0)^3} \sum_{l \neq i,j} \left[\xi_{il} \xi_{lj} + \frac{1}{\alpha} \vec{\nabla}_l \xi_{il} \cdot \vec{\nabla}_l \xi_{lj} \right] + \dots$$

l'argomento dell'esponente può essere espanso in serie di potenze delle correlazioni ξ_{ij} che sono piccole a grandi distanze $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|$. Ad esempio per $D = 3$, le correlazioni e due e tre punti dei picchi sono approssimativamente:

$$1 + \xi_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \left\{ \left(1 - 4 \frac{\xi_{12}}{\xi(0)} + 6 \frac{\nabla^2 \xi_{12}}{\nabla^2 \xi(0)} \right) + T^{-1} \left(-6 \frac{\nabla^2 \xi_{12}}{\nabla^2 \xi(0)} + 9 \xi(0) \frac{\nabla^4 \xi_{12}}{(\nabla^2 \xi(0))^2} \right) + O(\xi_{12}^2, T^{-2}) \right\} \\ \cdot \exp \left\{ T \left(\hat{\xi}_{12} - \hat{\xi}_{12}^2 + 3 \frac{(\vec{\nabla} \hat{\xi}_{12})^2}{\nabla^2 \xi(0)/\xi(0)} + O(\hat{\xi}_{12}^3) \right) \right\}$$

Occorre notare che per questi risultati trovati valgono considerazioni analoghe a quelle fatte nel capitolo 3 per i punti oltre la soglia.

5 Stima degli errori per le approssimazioni precedenti

Nella trattazione svolta nel precedente capitolo si è arrivati a fornire un'espressione analitica per la densità di probabilità congiunta P_N per i massimi locali oltre una certa soglia. Tuttavia si è sfruttata una condizione più ampia rispetto a quella che prevede di considerare solo i massimi come punti stazionari. Infatti, come precedentemente accennato, si è scelto di allargare il dominio di integrazione a tutto $\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}$ ottenendo l'espressione di P'_N per la probabilità. Si procederà adesso a verificare l'accuratezza di questa approssimazione nel caso in esame in cui, ci si trova al di sopra di una data soglia $t \gg \sqrt{\xi(0)}$ e a grandi distanze $|\vec{x}_i - \vec{x}_j| \gg \sqrt{1/\alpha}$.

Prima di enunciare il risultato che garantirà l'accuratezza di tale approssimazione, è conveniente introdurre due risultati preliminari.

Lemma 1. *Sia A la regione di ω -spazio definito da $\omega_{aa} \leq 0$ per $a = 1, \dots, D$ e $|\omega_{ab}| \leq \eta(D)\sqrt{\omega_{aa}\omega_{bb}}$ per $a < b = 2, \dots, D$, con $\eta(D) = (D!)^{-1/2}$. Allora $A \subset \mathcal{D}$ (dove \mathcal{D} è lo spazio delle matrici $D \times D$ simmetriche e definite negative).*

Dimostrazione. Sia $\omega_{ab}^{(m)}$ la matrice ottenuta da ω_{ab} restringendo gli indici a e b con $a, b \leq m \leq D$, e sia $\Delta_m = \det \omega^{(m)}$. È noto dall'algebra lineare che ω è definita negativa se e solo se $\forall_m (-1)^m \Delta_m > 0$ con

$$\Delta_m = \omega_{11} \dots \omega_{mm} + B$$

$$B = \frac{1}{m!} \varepsilon_{a_1 \dots a_m} \varepsilon_{b_1 \dots b_m} \omega_{a_1 b_1} \dots \omega_{a_m b_m} - \omega_{11} \dots \omega_{mm}$$

Infatti B è la somma di $m! - 1$ termini b_α . Per $m > 1$ si nota che ogni b_α ha al più $m - 2$ elementi diagonali di ω . Ciò implica che

$$|b_\alpha| \leq \eta^2 |\omega_{11} \dots \omega_{mm}|$$

e quindi

$$|B| \leq (m! - 1)\eta^2 |\omega_{11} \dots \omega_{mm}| = \frac{m! - 1}{D!} |\omega_{11} \dots \omega_{mm}|$$

Ma $m \leq D$, allora $(-1)^m \omega_{11} \dots \omega_{mm} = |\omega_{11} \dots \omega_{mm}| > |B|$, e $(-1)^m \Delta_m > 0$ per $m > 1$. Per $m = 1$, $-\Delta_1 > 0$ dato che $\omega_{11} < 0$ e ciò conclude la dimostrazione.

Lemma 2. *Si consideri l'integrale uni-dimensionale $I[E]$,*

$$I[E] = \int_B d\omega |\omega^n| \exp\left(-\frac{1}{2}y(\omega - g)^2\right)$$

dove $n = 0, 1, \dots, y > 0$, e la regione di integrazione E è tale che $r = \inf_{\omega \in C} |\omega - g| > 0$.

Inoltre

$$I[E] < \frac{1}{ry} e^{-(1/2)r^2 y} Q_n(r, |g|, y^{-1/2})$$

dove Q_n è un polinomio omogeneo di grado n .

Dimostrazione. Dal momento che l'integrando è positivo,

$$\begin{aligned} I[E] &< I[(-\infty, g - r] \cup [g + r, \infty)] \\ &= \left(\int_{-\infty}^{-r} + \int_r^{\infty} \right) d\omega |\omega + g|^n e^{-(1/2)y\omega^2} \\ &\leq 2 \int_r^{\infty} d\omega (\omega + |g|)^n e^{-(1/2)y\omega^2} \\ &= 2 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} |g|^{n-j} \int_r^{\infty} d\omega \omega^j e^{-(1/2)y\omega^2} \end{aligned}$$

L'integrazione per parti combinata alla seguente disuguaglianza

$$\int_r^\infty d\omega e^{-(1/2)y\omega^2} < \frac{1}{ry} e^{-(1/2)r^2y}$$

fornisce il risultato desiderato.

È adesso possibile enunciare il teorema cercato, che rappresenta una pura generalizzazione del secondo lemma al caso di un integrale del tipo di I'_N . Nella fattispecie valgono le corrispondenze:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathbb{R}^{(1/2)ND(D+1)} - \mathcal{D}^N, \\ \omega &\rightarrow \omega_i^{ab} \\ y &\rightarrow Y_{i,j}^{ab,cd} \\ g &\rightarrow G_j^{ab} \\ r &\rightarrow O(t). \end{aligned}$$

L'idea di base prevede, dal momento che $G_j^{ab} = -\alpha\delta^{ab}m_j + \varepsilon_{jk}^{ab}m_k$, allora $\omega_j^{ab} = G_j^{ab}$ sarà all'interno della regione di integrazione \mathcal{D} finchè $\varepsilon_{jk}^{ab}m_k$ non sarà troppo grande. Successivamente, attraverso l'analogo del Lemma 2 in dimensione superiore, l'errore che si ottiene estendendo \mathcal{D} a $\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}$ sarà effettivamente piccolo ad alte soglie. Al contrario, se $m_i \geq (\alpha/|\varepsilon|)t$, allora $\omega = G$ potrebbe trovarsi al di fuori della regione di integrazione \mathcal{D} poichè in tal caso, la strategia sopracitata non può essere utilizzata. Tuttavia questi contributi a P_N vengono soppressi dal fattore $\exp(-\frac{1}{2}\vec{m}^T \bar{A}^{-1}\vec{m})$ quando viene effettuata l'integrazione su \vec{m} . Ciò non esprime altro che una sorta di "principio di esclusione", per cui non è possibile avere due picchi attaccati. Enunciamo ora il risultato matematico:

Teorema Si assuma che Y e \bar{A}^{-1} siano definiti positivi; sia poi

$$\begin{aligned} |P_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) - P'_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)| &< [(2\pi)^{ND} \det A]^{-1/2} t^{-N} (\det \bar{A}^{-1})^{-1} \\ &\left\{ \frac{\exp(-\frac{1}{2}r^2 \operatorname{tr} Y - \frac{1}{2}t^2 \operatorname{tr} \bar{A}^{-1})}{r^{(1/2)ND(D+1)} (\det Y)^{1/2}} Q_{ND}^{(1)}(\alpha t) + \frac{\exp(-\frac{1}{2}\vec{m}^2 \operatorname{tr} \bar{A}^{-1})}{\left(\frac{1}{2N} \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) \frac{\eta}{1+\eta}\right)^N} Q_{ND}^{(2)}(\alpha \vec{m}) \right\} \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} ND(D+1) \right)^{-1/2} \left(\frac{\eta}{1+\eta} \right) \alpha t \\ \vec{m} &= \frac{1}{2N} \left(\frac{\alpha}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\eta}{1+\eta} \right) t \\ \varepsilon &= \max_{a,b,i,j} \left\{ \left| \varepsilon_{ij}^{ab} \right| \right\}, \quad \eta = (D!)^{-1/2} \end{aligned}$$

e $Q_{ND}^{(1,2)}$ sono polinomi di grado ND-esimo i cui coefficienti sono funzioni di Y , e \bar{A}^{-1}

Dimostrazione Si definiscano le regioni in un \vec{m} -spazio

$$\begin{aligned} A &= \{ \vec{m} : m_i \geq t \}, \\ B &= \left\{ \vec{m} : \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i > \vec{m} \right\} \cap A \\ C &= \left\{ \vec{m} : \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i \leq \vec{m} \right\} \cap A \end{aligned}$$

si definisca inoltre

$$I_N [C^N] = \int_{B^N} \prod_{j=1}^N d\omega_j |\det \omega_j| \exp \left(-\frac{1}{2} (\vec{\omega} - \vec{G})^T Y (\vec{\omega} - \vec{G}) \right)$$

dove $C^N = C \times C \times \dots \times C$

$$\begin{aligned} P_N[\mathcal{D}; A] &= k_N \int \prod_{Aj=1}^N dm_j \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{m}^T \bar{A}^{-1} \vec{m}\right) I_N[\mathcal{D}^N] \\ P'_N[\mathcal{D}; A] &= k_N \int \prod_{Aj=1}^N dm_j \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{m}^T \bar{A}^{-1} \vec{m}\right) I'_N[\mathcal{D}^N] \end{aligned}$$

e $k_N = ((2\pi)^{Nd} \det \Lambda)^{-1/2}$. Così

$$P_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = P_N[\mathcal{D}; A]$$

e

$$P'_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = P'_N\left[\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}; A\right]$$

I. In primo luogo occorre ottenere una stima per $|P_N[\mathcal{D}; C] - P'_N[\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}; C]|$. Per $\omega_i^{ab} \in \mathcal{D}$, $|\det \omega_i| = (-1)^D \det \omega_i$, allora $P_N[\mathcal{D}; C] = P'_N[\mathcal{D}; C]$. Dunque è valido dire:

$$\left|P'_N[\mathcal{D}; C] - P'_N\left[\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}; C\right]\right| \leq k_N \int_C \prod_i dm_j e^{-(1/2)\vec{m}^T \bar{A}^{-1} \vec{m}} \left|I'_N\left[\mathbb{R}^{(1/2)ND(D+1)} - \mathcal{D}^N\right]\right|$$

Tuttavia, sfruttando la disuguaglianza triangolare si vede che $|I'_N| \leq I_N$, allora ci si può concentrare direttamente su $I_N[\mathbb{R}^{(1/2)ND(D+1)} - \mathcal{D}^N]$ ristretto alla regione $\vec{m} \in C$.

Oss. Esiste una sfera nello $\vec{\omega}$ -spazio centrata in \vec{G}

di raggio $R = \frac{1}{2}[\eta/(1+\eta)]\alpha t$ che giace interamente in \mathcal{D}^N . Per $\vec{m} \in C$,

$$G_i^{aa} = -\alpha m_i + \varepsilon_{ij}^{aa} m_j \leq -\alpha t + \varepsilon N \bar{m} \quad (5.1)$$

e

$$\left|G_i^{ab}\right| = \left|\varepsilon_{ij}^{ab} m_j\right| \leq \varepsilon N \bar{m} \quad \text{if } a \neq b \quad (5.2)$$

Inoltre, per i $\vec{\omega}$ all'interno della sfera

$$\|\vec{\omega} - \vec{G}\|^2 = \sum_{\substack{i \leq N \\ a \leq b \leq D}} \left|\omega_i^{ab} - G_i^{ab}\right|^2 < R^2$$

si ha

$$\omega_i^{aa} < G_i^{aa} + R \quad (5.3)$$

e

$$\left|\omega_i^{ab}\right| < \left|G_i^{ab}\right| + R \quad (5.4)$$

Combinando la (5.1) e la (5.4), si ottiene

$$-\omega_i^{aa} > -G_i^{aa} - R \geq \alpha t - \varepsilon N \bar{m} - R$$

inoltre combinando (5.2) e (5.4)

$$\left|\omega_i^{ab}\right| < \varepsilon N \bar{m} + R = \eta(\alpha t - \varepsilon N \bar{m} - R)$$

Questi ultimi due risultati forniscono quindi:

$$\left|\omega_i^{ab}\right| < \eta \sqrt{\omega_i^{aa} \omega_i^{bb}}$$

ciò garantisce tramite il Lemma 1 che $\omega_i \in D$, giustificando l'osservazione fatta.

Adesso dal momento che $B \subset \mathcal{D}^N$, la positività dell'integrando in I_N implica $0 < I_N [\mathbb{R}^{(1/2)ND(D+1)} - B] - I_N [D^N] < I_N [\mathbb{R}^{(1/2)ND(D+1)} - B]$. Per stimare quest'ultimo, assumiamo che Y sia diagonalizzata dalla trasformazione $SO(\frac{1}{2}ND(D+1))$

$$Y = O^T \bar{Y} O$$

In seguito al cambio di variabili $\vec{\omega} = O^T \vec{\omega}'$ si ottiene

$$I_N [\mathbb{R}^{(1/2)ND(D+1)} - B] = \int d\vec{\omega}' \prod_{j=1}^N \left| \det (O^T \vec{\omega}')_j \right| \exp \left(-\frac{1}{2} (\vec{\omega}' - \vec{G}')^T \bar{Y} (\vec{\omega}' - \vec{G}') \right)$$

dove $\vec{G}' = O\vec{G}$.

Dal momento che O è una rotazione, la regione di integrazione trasformata è $\mathbb{R}^{(1/2)ND(D+1)} - B'$, dove B' è la sfera di raggio R centrata in $\vec{\omega}' = \vec{G}'$. All'interno di B' si può inscrivere un ipercubo di lunghezza $2r$, con $r = [\frac{1}{2}ND(D+1)]^{-1/2} R$. Successivamente, esprimendo il prodotto dei determinanti come una somma di monomi, si ottiene

$$I_N [\mathbb{R}^M - B] < \sum_{i_1, \dots, i_M} C_{i_1, \dots, i_M} \left[\prod_{\alpha=1}^M \left(\int_{-r}^{G'_\alpha - r} + \int_{G'_\alpha + r}^{\infty} \right) d\omega'_\alpha |\omega'_\alpha|^{i_\alpha} \exp \left(-\frac{1}{2} (\omega'_\alpha - G'_\alpha)^2 \bar{Y}_{\alpha\alpha} \right) \right] \quad (5.5)$$

dove $M = \frac{1}{2}ND(D+1)$ e le componenti di $\vec{\omega}'$ e \vec{G}' sono state labellate da ω'_α e G'_α , $\alpha = 1, \dots, M$. Dal momento che ogni determinante ha D fattori di ω'_α , ci sono ND fattori di ω'_α in ogni termine dell'equazione (5.5) allora, $C_{i_1, \dots, i_M} = 0$ a meno che $\sum_{\alpha=1}^M i_\alpha = ND$, nel cui caso

C_{i_1, \dots, i_M} è solo un numero dell'ordine dell'unità. Applicando il Lemma 2 ad ogni integrale dell'equazione (5.5) si ottiene:

$$I_N [\mathbb{R}^M - B] < \frac{\exp(-\frac{1}{2}r^2 \text{tr} Y)}{r^M \det Y} Q_{ND} \left(r, |G'_\alpha|, \bar{Y}_{\alpha\alpha}^{-1/2} \right) \quad (5.6)$$

con Q_{ND} un polinomio di grado ND . Combinando i risultati precedentemente ottenuti si trova:

$$\left| P_N[\mathcal{D}; C] - P'_N [\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}; C] \right| < \frac{k_N \exp(-\frac{1}{2}r^2 \text{tr} Y)}{r^M \det Y} \int_C \prod_j dm_j e^{-(1/2)\vec{m}^T \bar{A}^{-1} \vec{m}} Q_{ND} \left(r, |G'_\alpha|, \bar{Y}_{\alpha\alpha}^{-1/2} \right) \quad (5.7)$$

Per ottenere una stima di questo integrale, si sfrutta la solita tecnica di integrazione funzionale. In questo caso, la regione C è una distanza $R = \sqrt{N}t$ dal punto $\vec{m} = 0$ dove il fattore esponenziale è massimizzato. Occorre tenere a mente che G'_α è lineare in m_i . Dopo aver nuovamente applicato il lemma 2 si ottiene

$$\left| P_N[\mathcal{D}; C] - P'_N [\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}; C] \right| < k_N \frac{\exp(-\frac{1}{2}r^2 \text{tr} Y)}{r^M \det Y} \frac{\exp(-\frac{1}{2}t^2 \text{tr} \bar{A}^{-1})}{t^N \det \bar{A}^{-1}} \cdot Q_{ND}^{(1)} \left(\alpha t, r, \bar{Y}_{\alpha\alpha}^{-1/2}, \alpha a_j^{-1/2} \right) \quad (5.8)$$

dove $Q_{ND}^{(1)}$ è di grado ND e a_j sono gli autovalori di \bar{A}^{-1} . Nell'esprimere i precedenti calcoli sono state soppresse alcune dipendenze in Y e \bar{A}^{-1} . La dipendenza debole non polinomiale che deriva dalle matrici ortonormali che la diagonalizzano; quella da ε_{kl}^{ij} , rimpiazzando ε con α .

Entrambi questi argomenti possono essere inglobati in $Q_{ND}^{(1)}$, visto che $r \propto \alpha t$

II. Il prossimo passo è stimare $|P_N[\mathcal{D}; B] - P'_N [\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}; B]|$, o equivalentemente,

$$\left| P'_N[\mathcal{D}; B] - P'_N [\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}; B] \right| \leq k_N \int_B \prod_i dm_j \exp \left(-\frac{1}{2} \vec{m}^T \bar{A}^{-1} \vec{m} \right) \left| I'_N \left[\mathbb{R}^{\frac{N}{2}D(D+1)} - D^N \right] \right|$$

Per $\vec{m} \in B$, sono concessi solo legami deboli per I'_N , dato che G_i^{ab} non è necessariamente definito negativo. Perciò si usa $|I'_N [\mathbb{R}^{(1/2)ND(D+1)} - D^N]| \leq I_N [\mathbb{R}^{(1/2)ND(D+1)} - D^N] < I_N [\mathbb{R}^{(1/2)ND(D+1)}]$ e similmente all'equazione (5.5),

$$\begin{aligned} I_N [\mathbb{R}^M] &= \sum_{i_1, \dots, i_M} C_{i_1, \dots, i_M} \prod_{\alpha=1}^M \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'_\alpha |\omega'_\alpha + G'_\alpha|^{i_\alpha} \exp\left(-\frac{1}{2} (\omega'_\alpha)^2 \bar{Y}_{\alpha\alpha}\right) \\ &= \frac{Q_{ND}(G'_\alpha, \bar{Y}_{\alpha\alpha}^{-1/2})}{(\det Y)^{1/2}} \end{aligned}$$

si ottiene attraverso l'integrazione Gaussiana standard nuovamente un polinomio di grado ND . Similmente a quanto fatto per la parte I si può dimostrare la seconda parte. In particolare, la regione B risiede ad una distanza $R = \sqrt{N\bar{m}}$ dal punto $\vec{m} = 0$. Perciò ripetendo gli stes della prima parte si ottiene:

$$|P_N[\mathcal{D}; B] - P'_N [\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}; B]| < \frac{k_N}{(\det Y)^{1/2}} \frac{\exp(-\frac{1}{2}\bar{m}^2 \text{tr } \bar{A}^{-1})}{\bar{m}^N \det A^{-1}} Q_{ND}^{(2)}(\alpha\bar{m}, \bar{Y}_{\alpha\alpha}^{-1/2}, \alpha\alpha^{-1/2}) \quad (5.9)$$

III. La disuguaglianza triangolare implica ora:

$$\begin{aligned} &|P_N[\mathcal{D}; A] - P'_N [\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}; A]| \\ &= |P_N[\mathcal{D}; B] + P_N[\mathcal{D}; C] - P'_N [\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}; B] - P'_N [\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}; C]| \\ &\leq |P_N[\mathcal{D}; B] - P'_N [\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}; B]| + |P_N[\mathcal{D}; C] - P'_N [\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}; C]| \end{aligned}$$

Usando

$$P_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = P_N[\mathcal{D}; A]$$

e

$$P'_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = P'_N [\mathbb{R}^{(1/2)D(D+1)}; A]$$

assieme alle equazioni (5.8) e (5.9) si ottiene

$$\begin{aligned} &|P_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) - P'_N(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)| < \frac{k_N}{(\det Y)^{1/2}} t^{-N} (\det \bar{A}^{-1})^{-1} \\ &\cdot \left\{ \frac{\exp(-\frac{1}{2}r^2 \text{tr } Y - \frac{1}{2}t^2 \text{tr } \bar{A}^{-1})}{r^M (\det Y)^{1/2}} Q_{ND}^{(1)}(\alpha t) + \frac{\exp(-\frac{1}{2}\bar{m}^2 \text{tr } \bar{A}^{-1})}{(\bar{m}/t)^N} Q_{ND}^{(2)}(\alpha\bar{m}) \right\} \end{aligned}$$

Segue quindi dai precedenti ragionamenti, la verifica del teorema.

L'errore frazionario può quindi essere espresso come:

$$\begin{aligned} \frac{|P_N - P'_N|}{P'_N} &\sim \exp\left(\frac{1}{2}t^2 \sum_{i \neq j} \bar{A}_{ij}^{-1}\right) \left\{ \frac{\exp(-\frac{1}{2}r^2 \text{tr } Y)}{r^{(1/2)ND(D+1)} (\det Y)^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\alpha}{2N\varepsilon} \left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)\right)^{N(D-1)} \exp\left(-\frac{1}{2}(\bar{m}^2 - t^2) \text{tr } \bar{A}^{-1}\right) \right\} \quad (5.10) \end{aligned}$$

Occorre inoltre ricordare che per grandi distanze di separazione $|\vec{x}_i - \vec{x}_j| \rightarrow \infty$, $\bar{A}_{ij}^{-1} \rightarrow 0$ per $i \neq j$ e $\bar{m} \rightarrow \infty$, visto che $\varepsilon \rightarrow 0$;

comunque $\text{tr } \bar{A}^{-1}$ e $\text{tr } Y$ rimangono finite. L'errore relativo può quindi essere preso arbitrariamente piccolo considerando distanze e soglie sufficientemente grandi. Nel caso dei picchi oltre una soglia con $N = 1$, l'errore relativo è più fortemente limitato. In questo caso \bar{A}_{ij}^{-1} è zero per definizione a meno che $i = j = 1$, e similmente $\varepsilon_{ij}^{ab} \equiv 0$, allora $\bar{m} = \infty$ e il secondo termine in

(5.10) svanisce. Perciò come prevedibile, la densità dei punti di sella e dei minimi locali sopra una soglia è soppressa esponenzialmente in relazione ai picchi.

In ultima analisi, si vuole dimostrare la positività di \bar{A}^{-1} e Y nel limite a grandi distanze. Dal momento che $|\vec{x}_i - \vec{x}_j| \rightarrow \infty$

$$\bar{A}_{ij}^{-1} \rightarrow \delta_{ij}/\xi(0)$$

Similmente

$$Y_{ij}^{ab,cd} \rightarrow \delta_{ij} Y_{(1)}^{ab,cd}$$

Questo può essere diagonalizzato ottenendo

$$\bar{Y}_{(1)} = \frac{1}{\beta\xi(0)} \text{diag} \left(\underbrace{\frac{1}{2} D^2 (1-S)^{-1}}_1, \underbrace{1}_1 \underbrace{2}_2, \dots, \frac{1}{2}_{D-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{1/2D(D-1)} \right),$$

dove

$$S = \frac{D}{D+2} \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{(\nabla^2 \xi(0))^2}{\xi(0) \nabla^4 \xi(0)}$$

Per far sì che il primo autovalore di $\bar{Y}_{(1)}$ sia positivo, si richiede che $S \leq 1$. Nello spazio di Fourier questa condizione può essere espressa nel modo seguente:

$$\langle k^2, 1 \rangle^2 \leq \langle k^2, k^2 \rangle \langle 1, 1 \rangle \quad (5.11)$$

dove

$$\langle A, B \rangle = \left(\int d^D k A B \tilde{\xi}(k) \right) / \left(\int d^D k \tilde{\xi}(k) \right)$$

Se $\tilde{\xi}(k) > 0$, allora $\langle A, B \rangle$ è un prodotto interno definito positivo, e la disuguaglianza di Schwarz implica che sia valida (5.11), infatti $S \leq 1$. Ma allora l'espressione per la probabilità può essere scritta come:

$$P[\varepsilon] = \frac{1}{Z} \exp \left[-\frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} |\varepsilon(k)|^2 / \tilde{\xi}(k) \right]$$

Affinchè essa sia normalizzabile, è sufficiente che $\tilde{\xi}(k) > 0$. Perciò \bar{Y} è definita positiva a separazioni infinite così come \bar{A}^{-1} . Questa conclusione resta valida anche a separazioni grandi e finite, visto che gli autovalori cambiano solo per un fattore $1 + O(\hat{\xi}_{ij}^2)$.

6 Conclusioni

Nella trattazione appena svolta, sono state derivate espressioni essenziali nello studio di campi random Gaussiani intesi come fluttuazioni di densità. Si tratta di campi random le cui funzioni di distribuzione sono tutte Gaussiane multivariate e i massimi locali di questi campi sono i siti in cui avviene la formazione di strutture non lineari. In effetti, le proprietà statistiche dei picchi possiedono un ruolo fondamentale nel predire le abbondanze e le proprietà di clustering degli oggetti cosmici. Nello specifico attraverso tecniche di analisi funzionale si è ricavata un'espressione analitica per la densità numerica e per la funzione di correlazione, dove quest'ultima rappresenta una quantità di fondamentale importanza nella descrizione delle distanze a livello cosmologico. Si è dapprima sfruttato il calcolo differenziale per generare un'espansione asintotica ad alte soglie T , per la correlazione dei punti \vec{x}_i tali che $\varepsilon(\vec{x}_i) \geq \sqrt{T\xi(0)}$.

Si è così ottenuta un'espressione in grado di legare la funzione di correlazione alla probabilità P_N che il campo considerato ecceda tale soglia. Successivamente si è svolta l'analisi dei punti critici del campo densità di materia. Nonostante fosse di interesse l'analisi dei massimi locali in quanto siti di condensazione di materia, si è scelto di allargare il dominio di ricerca assumendo che tutti gli estremi rilevanti oltre una certa soglia fossero considerabili come picchi. Questa scelta ha permesso di semplificare notevolmente la trattazione, ma anche di approfondire un risultato matematico con un interessante significato fisico. In effetti analizzando, in ultima analisi, la covarianza dei picchi si è appurato che la densità dei punti di sella e dei minimi locali sopra una soglia è soppressa esponenzialmente in relazione ai picchi. Ciò mette in evidenza l'improbabilità di trovare due picchi attaccati e in particolare all'aumentare del valore di soglia si registra un aumento della probabilità di ottenere un unico picco.

7 Bibliografia

- [1] Cline J.M., Politzer H.D., Soo-Jong R. and Wise M.B.: "Correlation of peaks of Gaussian random fields" Commun. Math. Phys. 112,217 (1987)
- [2] Politzer,H.D.,Wise, M. B.: Ap. J. 285, L1 (1984)
- [3] Peebles P.J.E.: The Large Scale Strustructure of the Universe. Princeton: Princeton University Press 1980
- [4] Matarrese, S., An introduction to path integrals and their cosmological applications, lecture notes
- [5] Bardeen, J. M., Bond, J. R., Kaiser, N., Szalay, A. S.: Ap. J. 304, 15 (1986)
- [6] Adler R.J., The Geometry of Random Fields, John Wiley Sons, Ltd (1981)
- [7] M. H. Zaidi. "Functional Methods". In: Fortschritte der Physik/Progress of Physics 31.7 (1983)
- [8] Liddle A.: An introduction to Modern Cosmology. John Wiley Sons, Ltd (2015)
- [9] Candilera M., Bertapelle, Algebra lineare e primi elementi di geometria, McGraw-Hill, 2011
- [10] Lucchin F., Introduzione alla Cosmologia, Zanichelli, Bologna, 1990

Ringraziamenti

A conclusione di questo lavoro di tesi e di questo percorso triennale desidero ringraziare tutti coloro che hanno contribuito alla mia crescita personale e didattica supportandomi con dedizione e pazienza.

In primo luogo vorrei ringraziare il mio relatore, il professore Sabino Matarrese che con la sua infinita disponibilità e professionalità mi ha sapientemente guidato durante questo percorso di tesi sin dalla scelta dell'argomento, riponendo in me tanta fiducia e incoraggiandomi anche a distanza.

Desidero poi ringraziare i miei genitori, per il sostegno costante e affettuoso, senza di loro non sarei stata in grado di superare gli ostacoli derivanti dalla scelta di questo percorso. Un ringraziamento va anche a mia zia Alessandra, sempre pronta ad ascoltarmi e capirmi anche nei momenti più difficili.

Ringrazio inoltre le mie amiche per avermi dimostrato che la distanza non conta quando un legame è davvero profondo. Un grazie a Claudia che con la sua delicatezza riesce a starmi accanto, sempre con la risposta pronta a sanare ogni mia insicurezza. Un grazie ad Allegra che con il suo entusiasmo mi ha dato la forza di sostenere gli ultimi sforzi prima del completamento di questo percorso, resterà sempre una compagna di vita imprescindibile.

Inoltre è doveroso ringraziare Luca, per aver camminato con me mano nella mano, insegnandomi a credere in me stessa, spronandomi a lottare anche nei momenti più bui e standomi accanto nonostante i miei sbalzi d'umore e il timore di non farcela che ha condizionato negativamente il mio carattere. Infine vorrei dedicare questo elaborato e il compimento del mio percorso a mia nonna. La mia più grande sostenitrice che avrebbe fatto qualunque cosa pur di poter condividere con me la gioia di questo traguardo. Nonostante gli ultimi mesi senza di lei siano stati duri da affrontare, la sua forza mi è stata di ispirazione nei momenti di maggiore sconforto.