Università degli studi di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"
Corso di laurea in Matematica

Numero cromatico dei grafi di Cayley

Relatore:
Prof. Andrea Lucchini

Candidato:
Flavio Stacco
Matricola 2071076

Anno accademico 2024/2025
19.09.2025

Indice

1 Numero cromatico di grafi di Cayley **5**
1.1 Minimalità per inclusioni 5
1.2 Minimalità per cardinalità 7

2 Numero cromatico massimo **11**
2.1 Definizioni e risultati preliminari 11
2.2 Gruppi di Dedekind e diedrali generalizzati 13
2.3 Gruppi nilpotenti 15

3 Grafi di numero cromatico 4 **19**
3.1 Il grafo $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3, \{(1,0),(0,1)\})$ 19
3.2 Una domanda aperta 24

4 Le congetture di Babai **27**
4.1 Grafi *no lonely color* e *one popular color* 27
4.2 Le due congetture di Babai 29
4.3 La Congettura 4.8 è falsa 30

Capitolo 1

Numero cromatico di grafi di Cayley

1.1 Minimalità per inclusioni

Ricordiamo che se G è un gruppo e $H \subseteq G \smallsetminus \{1_G\}$, il *grafo di Cayley* $X = \mathrm{Cay}(G, H)$ è il grafo definito da:

$$V(X) = G$$
$$E(X) = \{\{x, y\} \colon x, y \in G, yx^{-1} \in H\}$$

Noi considereremo solamente grafi di Cayley non orientati.

Definizione 1.1. Sia G un gruppo, un sottoinsieme $H \subseteq G$ è un *insieme di generatori minimale* se $G = \langle H \rangle$ e $\forall h \in H, \langle H \smallsetminus \{h\} \rangle \neq G$. In questo caso il grafo di Cayley $\mathrm{Cay}(G, H)$ si dice *minimale*.

Considereremo solo grafi di Cayley minimali. Notare che in questo caso la minimalità è intesa rispetto all'inclusione.

Definizione 1.2. Sia G un gruppo, si definisce il *numero cromatico minimo* di G, $\chi_{\min}(G)$, come:

$$\chi_{\min}(G) \coloneqq \min\{\chi(\mathrm{Cay}(G, H)) \colon H \text{ genera } G\}$$

Lo scopo di questo capitolo è, come per il lavoro di Babai, dimostrare che per ogni gruppo G si ha che $\chi_{\min}(G) \leq 3$. Servono alcuni risultati preliminari. Il seguente lemma è tratto da [1, Lemma 4.2], ma scritto nella forma di [3, Lemma 2.1].

Lemma 1.3. *Sia $(G, \cdot)$ un gruppo, N un sottogruppo normale proprio di G e $C \subseteq G/N$. Allora*

$$\chi(\mathrm{Cay}(G, C \cdot N)) \leq \chi(Cay(G/N, C))$$

dove $C \cdot N \coloneqq \{c \cdot n \mid c \cdot N \in C, n \in N\}$. In particolare, $\chi_{\min}(G) \leq \chi_{\min}(G/N)$.

Dimostrazione. Sia $\pi\colon G \twoheadrightarrow G/N$ la proiezione canonica, notiamo anzitutto che $C \cdot N = \pi^{-1}(C)$ e che ovviamente $C \cdot N$ genera G. Siano $X = \mathrm{Cay}(G/N, C)$ e $Y = \mathrm{Cay}(G, C \cdot N)$. Per dimostrare che $\chi(Y) \leq \chi(X)$, basta osservare che:

$$\{g, h\} \in E(Y) \iff \{\pi(g), \pi(h)\} \in E(X).$$

Pertanto ogni colorazione propria di X si può sollevare a una colorazione propria di Y e segue quindi la tesi. La seconda parte dell'enunciato segue considerando i grafi di Cayley X e Y come sopra, con l'ulteriore condizione $\chi(X) = \chi_{\min}(G/N)$ e osservando che:

$$\chi_{\min}(G) \leq \chi(Y) \leq \chi(X) = \chi_{\min}(G/N). \qquad \square$$

Osserviamo che questo lemma ci permette di restringere lo studio del numero cromatico minimo ai gruppi semplici.

Osservazione 1.4. Se G è un gruppo semplice, allora o è abeliano e in tal caso $G \cong \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p primo, oppure se non è abeliano, G è generato da due elementi, di cui uno è un'involuzione (ovvero un elemento di ordine 2). Si veda a proposito [4, Corollary], che afferma, più in generale, che ogni elemento non identico di un gruppo semplice finito (non abeliano) appartiene a una coppia di elementi che generano G. Questo risultato profondo è una conseguenza della classificazione dei gruppi semplici.

Per dimostrare il teorema sul numero cromatico minimo serve ancora un risultato generale di teoria dei grafi.

Teorema di Brooks 1.5. *Sia X un grafo connesso di grado massimo Δ. Se X non è un grafo completo né un ciclo di lunghezza dispari, allora $\chi(X) \leq \Delta$. In caso contrario, $\chi(X) = \Delta + 1$.*

Ora possiamo dimostrare il seguente teorema, tratto da [3, Theorem 2.2], ma già presente in [1, Propositions 4.4, 4.6] (anche se i risultati sui gruppi semplici accennati nell'osservazione precedente erano solamente congetturati al tempo di [1]).

Teorema 1.6. *Sia G un gruppo. Allora:*

$$\chi_{\min}(G) = \begin{cases} 1 & \textit{se e solo se } G \textit{ è banale,} \\ 2 & \textit{se e solo se } G \textit{ ha un sottogruppo di indice 2,} \\ 3 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione.

1. La dimostrazione che $\chi_{\min}(G) = 1$ se e solo se $G = 1$ è banale.

2. Dimostriamo che $\chi_{\min}(G) = 2$ se e solo se G contiene un sottogruppo di indice 2. Supponiamo che esista N tale che $(G\colon N) = 2$, allora N è normale e dal Lemma 1.3:

$$\chi_{\min}(G) \leq \chi_{\min}(G/N) = \chi_{\min}(\mathbb{Z}_2) = 2$$

in quanto $\mathbb{Z}_2$ ha un grafo di Cayley bipartito.

Supponiamo ora che $\chi_{\min}(G) = 2$ e consideriamo $X = \mathrm{Cay}(G, C)$ tale che $\chi(X) = 2$. Allora X è bipartito, ovvero G può essere partizionato in due

insiemi indipendenti A e B di uguale cardinalità (perché i grafi di Cayley sono transitivi sui vertici). Possiamo supporre (a meno di rinominare tali insiemi) che $1 \in A$, allora A consiste di tutti gli elementi di G che si possono scrivere come parole di lunghezza pari in C, quindi A è un sottogruppo di indice 2.

3. Proviamo infine che $\chi_{\min}(G) \leq 3$. Come osservato precedentemente, il Lemma 1.3 permette di restringere il problema ai gruppi semplici. Escludiamo il caso $G \cong \mathbb{Z}_2$, che abbiamo già trattato sopra. Se G è abeliano, allora $G \cong \mathbb{Z}_p$, con p primo e $\chi_{\min}(\mathbb{Z}_p) = 3$ (i grafi di Cayley di $\mathbb{Z}_p$ sono cicli di ordine dispari).

   Se G è semplice non abeliano, sia $C = \{\alpha, \beta\}$, con $\alpha^2 = 1$, un insieme di generatori (minimale). Allora $X = \mathrm{Cay}(G, C)$ ha grado esattamente 3, in quanto 1 è adiacente ad $\alpha, \beta, \beta^{-1}$ ed essi sono tutti distinti tra loro. Chiaramente, $\alpha \neq \beta$ e $\alpha \neq \beta^{-1}$ altrimenti G sarebbe ciclico. Se per assurdo fosse $\beta = \beta^{-1}$, ovvero $\beta^2 = 1$, allora si avrebbe che $\langle \alpha\beta \rangle \trianglelefteq G$. Infatti, coniugando con i generatori α e β:

$$\alpha(\alpha\beta)\alpha^{-1} = \alpha^2\beta\alpha^{-1} = \beta\alpha = (\alpha\beta)^{-1} \in \langle \alpha\beta \rangle$$
$$\beta(\alpha\beta)\beta^{-1} = \beta\alpha = (\alpha\beta)^{-1} \in \langle \alpha\beta \rangle$$

   Ciò implicherebbe $\langle \alpha\beta \rangle = G$, assurdo perché G non è abeliano.

   Quindi dato che X ha grado 3, X non è né un ciclo (altrimenti avrebbe grado 2) né è il grafo completo K_4 perché nessun gruppo semplice ha ordine 4. La tesi segue quindi direttamente dal Teorema di Brooks. □

1.2 Minimalità per cardinalità

Un altro tipo di minimalità che possiamo considerare per gli insiemi generatori è la minimalità per cardinlità.

Definizione 1.7. Sia G un gruppo, indichiamo con $\mathrm{d}(G)$ la cardinalità minima di un insieme di generatori minimale di G.

Segue immediatamente che un insieme di generatori minimale per cardinalità è anche minimale rispetto all'inclusione, ma non vale il viceversa: l'insieme $C = \{2, 3\} \subseteq \mathbb{Z}$ è un insieme minimale, ma non è minimale per cardinalità in quanto $\mathbb{Z}$ è ciclico e pertanto $\mathrm{d}(\mathbb{Z}) = 1$.

Vogliamo dimostrare un risultato più forte sia del Lemma 1.3 sia del Teorema 1.6, riguardante la minimalità per cardinalità. Definiamo preliminarmente un analogo del numero cromatico minimo di un gruppo G, ma utilizzando questa nozione più forte di minimalità:

$$\widetilde{\chi}_{\min}(G) \coloneqq \min\{\chi(\mathrm{Cay}(G, C)) \colon C \text{ genera } G,\ |C| = \mathrm{d}(G)\}$$

Notiamo che a priori, per ogni gruppo G si ha che $\chi_{\min}(G) \leq \widetilde{\chi}_{\min}(G)$. Lo scopo di questa sezione è provare che in realtà vale l'uguaglianza. Per dimostrare tali risultati, ci servirà il seguente lemma.

Lemma di Gaschütz 1.8. *Siano G un gruppo finito,* $\mathrm{d}(G) \leq d$ *e sia* $N \trianglelefteq G$. *Se* $G = \langle g_1, \dots, g_d \rangle N$, *ovvero* $G/N = \langle g_1 N, \dots, g_d N \rangle$, *allora:*

$$\exists n_1, \dots, n_d \in N \colon G = \langle g_1 n_1, \dots, g_d n_d \rangle.$$

Dimostrazione. Siano $\Omega = \{(g_1, \dots, g_d) \in G^d \mid G = \langle g_1, \dots, g_d \rangle N\}$ e $\mathcal{H} = \{H \leq G \mid HN = G\}$. Allora si ha che:

$$\langle g_1 n_1, \dots, g_d n_d \rangle \leq H \; \exists (n_1, \dots, n_d) \in N^d \iff G = HN.$$

Per ogni $\omega = (g_1, \dots, g_d) \in \Omega$ e $H \in \mathcal{H}$, possiamo definire:

$$A(\omega, H) = \{(n_1, \dots, n_d) \in N^d \mid \langle g_1 n_1, \dots, g_d n_d \rangle \leq H\}, \alpha(\omega, H) = |A(\omega, H)|$$
$$B(\omega, H) = \{(n_1, \dots, n_d) \in N^d \mid \langle g_1 n_1, \dots, g_d n_d \rangle = H\}, \beta(\omega, H) = |B(\omega, H)|$$

Notiamo ora che, fissato $(x_1, \dots, x_d) \in A(\omega, H)$, si ha $(y_1, \dots, y_d) \in A(\omega, H) \iff x_1 y_1^{-1}, \dots, x_d y_d^{-1} \in H \cap N$.

Proviamo per induzione su $|H \cap N|$ che $\beta(\omega, H)$ non dipende da ω. Se $H \cap N = \{1\}$, allora $\beta(\omega, H) = \alpha(\omega, H) = 1 \; \forall \omega \in \Omega$. Supponiamo ora che $H \cap N \neq \{1\}$. Osserviamo preliminarmente che:

$$A(\omega, H) = \bigcup_{K \in \Delta(H)} B(\omega, K)$$

dove $\Delta(H) \coloneqq \{K \leq H \mid K \in \mathcal{H}\}$ e l'unione è disgiunta. Ciò implica che:

$$|H \cap N|^d = \alpha(\omega, H) = \sum_{K \in \Delta(H)} \beta(\omega, K) = \beta(\omega, H) + \sum_{K \in \Delta(H), K \neq H} \beta(\omega, K)$$

Ma dato che $\beta(\omega, K)$ non dipende da ω per $K \lneq H$ per ipotesi induttiva, allora $\beta(\omega, H)$ è indipendente da ω.

Dato che $\mathrm{d}(G) \leq d$, esistono $\overline{g_1}, \dots, \overline{g_d} \in G$ tali che $\langle \overline{g_1}, \dots, \overline{g_d} \rangle = G$. Allora, posto $\overline{\omega} = (\overline{g_1}, \dots, \overline{g_d})$, si ha che $(1, \dots, 1) \in B(\overline{\omega}, G)$ e allora $\beta(\omega, G) = \beta(\overline{\omega}, G) \neq 0 \; \forall \omega \in \Omega$ e questo è equivalente alla tesi. □

Proposizione 1.9. *Sia G un gruppo finito,* $N \trianglelefteq G$, *sia* $C = \{g_1 N, \dots, g_r N\}$ *un insieme di generatori di* G/N, *e sia* $t \coloneqq \max\{r, \mathrm{d}(G)\}$. *Allora:*

$$\exists Y \subseteq G \colon G = \langle Y \rangle, \; |Y| = t, \; \chi(\mathrm{Cay}(G/N, C)) = \chi(\mathrm{Cay}(G, Y)).$$

Dimostrazione. Come per il Lemma 1.3, consideriamo:

$$\widetilde{Y} \coloneqq \bigcup_{j=1}^{r} g_j \cdot N = C \cdot N \subseteq G$$

Se $Y \subseteq \widetilde{Y}$ è ancora un insieme di generatori di G, allora $\mathrm{Cay}(G, Y)$ e $\mathrm{Cay}(G/N, C)$ hanno lo stesso numero cromatico. Pertanto è sufficiente provare che $\widetilde{Y}$ contiene un insieme di generatori di cardinalità t. Ma per il Lemma di Gaschütz,

$$\exists n_1, \dots, n_t \in N \colon G = \langle g_1 n_1, \dots, g_r n_r, g_r n_{r+1}, \dots, g_r n_t \rangle. \qquad \square$$

Osservazione 1.10. Se G è un gruppo e $N \trianglelefteq G$, allora $\mathrm{d}(G/N) \leq \mathrm{d}(G)$. Se infatti $G = \langle g_1, \ldots, g_d \rangle$, con $d = \mathrm{d}(G)$, allora $G/N = \langle g_1 N, \ldots, g_d N \rangle$, ovvero $\mathrm{d}(G/N) \leq d$. Nella proposizione precedente posso quindi sempre considerare $r \leq \mathrm{d}(G)$ e ottenere che esiste un insieme di generatori Y di G che ha cardinalità $\mathrm{d}(G)$ con la proprietà che $\chi(\mathrm{Cay}(G, Y)) = \chi(\mathrm{Cay}(G/N, C))$. In particolare, $\widetilde{\chi}_{\min}(G) \leq \chi_{\min}(G/N) \leq 3$ (dimostrazione analoga a quella del Lemma 1.3).

Corollario 1.11. *Per ogni gruppo G, si ha $\chi_{\min}(G) = \widetilde{\chi}_{\min}(G)$.*

Dimostrazione. Dalla definizione di $\widetilde{\chi}_{\min}$ e dall'osservazione precedente, si ha per ogni sottogruppo normale $N \trianglelefteq G$:

$$\chi_{\min}(G) \leq \widetilde{\chi}_{\min}(G) \leq \chi_{\min}(G/N) \leq 3 \tag{1.1}$$

Supponiamo che $G \neq 1$, cioè, per il Teorema 1.6, $2 \leq \chi_{\min}(G) \leq 3$. Se $\chi_{\min}(G) = 2$, allora, sempre per il Teorema 1.6, G ha un sottogruppo normale $\widetilde{N}$ di indice 2, pertanto $\chi_{\min}(G/\widetilde{N}) = 2$ e di conseguenza $\widetilde{\chi}_{\min}(G) = 2$. Se invece $\chi_{\min}(G) = 3$, allora la tesi segue banalmente da (1.1). $\square$

Capitolo 2

Numero cromatico massimo

Come per il numero cromatico minimo, si possono dimostrare alcuni risultati sul numero cromatico *massimo* per alcune classi di gruppi. L'obiettivo di questo capitolo è provare che esso è al più 3 per alcune classi particolari di gruppi, ovvero i gruppi di Dedekind (che include quelli abeliani), diedrali generalizzati e nilpotenti, come è dimostrato in [3].

2.1 Definizioni e risultati preliminari

Definizione 2.1. Sia G un gruppo, si definisce il *numero cromatico massimo di* G come:

$$\chi_{\max}(G) := \max\{\chi(\mathrm{Cay}(G, C)) \colon C \text{ è insieme di generatori minimale di } G\}$$

Definizione 2.2. Sia G gruppo, $H \leq G$ un suo sottogruppo e $C \subseteq G$. Il *grafo di Schreier delle classi laterali* $\mathrm{Sch}(G, H, C)$ è il grafo che ha come vertici le classi laterali sinistre di H e i cui archi sono del tipo:

$$\{gH, g'H\} \iff \exists h, h' \in H \colon (gh)^{-1}g'h' \in C$$

In altre parole, due classi laterali gH e $g'H$ sono adiacenti se e solo se esistono due opportuni rappresentanti di gH e $g'H$ rispettivamente tali che il prodotto dell'inverso del primo per il secondo sia contenuto in C.

Notare che i grafi di Cayley sono particolari grafi di Schreier, basta infatti considerare $H = \{1_G\}$.
Il risultato principale che ci permetterà di ottenere i risultati positivi sulle classi di gruppi già accennate è il seguente.

Lemma 2.3. ([3, Lemma 2.3]) *Sia G un gruppo finitamente generato e $C \subseteq G$ un insieme di generatori minimale, allora:*

$$\chi(\mathrm{Cay}(G, C)) \leq \max\{\chi(\mathrm{Sch}(G, \langle C \setminus \{c\}\rangle, c)) \colon c \in C\}.$$

Per dimostrare questo lemma abbiamo bisogno di qualche risultato preliminare. Il primo di essi mette in relazione le componenti connesse di $\mathrm{Cay}(G, C)$ col numero delle classi laterali di $H = \langle C\rangle$.

Lemma 2.4. *Consideriamo il grafo* $\mathrm{Cay}(G, C)$ *e sia* $H = \langle C \rangle \leq G$. *Allora due vertici* $u, v \in G$ *sono nella stessa componente connessa di* $\mathrm{Cay}(G, C)$ *se e solo se* $uH = vH$. *In particolare, il grafo* $\mathrm{Cay}(G, C)$ *è connesso se e solo se* C *genera* G.

Dimostrazione. Sia $X = \mathrm{Cay}(G, C)$. A meno di considerare $\widetilde{C} = C \cup C^{-1}$, con $C^{-1} = \{c^{-1} \colon c \in C\}$, possiamo supporre che C sia chiuso per inversi. Supponiamo che u, v siano nella stessa componente connessa X_k di X. Allora esiste (almeno) un cammino da u a v in X_k, sia esso $P = \{x_1, \dots, x_m\}$ con $x_1 = u$ e $x_m = v$. Allora $\forall i = 1, \dots, m-1,\ x_{i+1}x_i^{-1} \in C$ per definizione di grafo di Cayley. Pertanto:

$$v = (\underbrace{vx_{m-1}^{-1}}_{\in C})(\underbrace{x_{m-1}x_{m-2}^{-1}}_{\in C}) \dots (\underbrace{x_2u^{-1}}_{\in C})u = hu \ \exists h \in H$$

e quindi $vu^{-1} = h \in H$, ovvero $uH = vH$.
Viceversa, supponiamo $uH = vH$, ovvero $\exists h \in H \colon v = hu$. Dato che $H = \langle C \rangle$, possiamo scrivere $h = c_m c_{m-1} \dots c_1$ con $c_1, \dots c_m \in C$. Definiamo ora $x_0 = u,\ x_1 = c_1x_0, \dots, x_m = c_m x_{m-1} = c_m \dots c_1 x_0 = hu = v$. Abbiamo quindi ottenuto un cammino $u, x_1, \dots, x_{m-1}, v$ da u a v, dunque u, v stanno nella stessa componente connessa di X. □

Corollario 2.5. *Nelle ipotesi del lemma precedente, posto* $m = (G : H)$, *il grafo di Cayley* $X = \mathrm{Cay}(G, C)$ *ha come componenti connesse* $X_1, \dots, X_m$, *dove* $V(X_1), \dots, V(X_m)$ *sono le* m *classi laterali sinistre di* H.

Dimostrazione. Dal lemma precedentte, due vertici $u, v \in G$ stanno nella stessa classe laterale (sinistra) di H se e solo se stanno nella stessa componente connessa di X. Pertanto, le m classi laterali di H sono proprio gli insiemi dei vertici delle componenti connesse di X. □

Definizione 2.6. Dati due grafi $X_i = (V_i, E_i)$ con $i = 1, 2$, si definisce il *prodotto cartesiano dei grafi* X_1 *e* X_2 come il grafo $Y = X_1 \boxtimes X_2$ che ha come insieme dei vertici $V_1 \times V_2$ e, dati $u_i, v_i \in V_i$ $(i = 1, 2)$, i due vertici $w = (u_1, u_2)$ e $z = (v_1, v_2)$ sono adiacenti se e solo se $u_1 = v_1$ e $\{u_2, v_2\} \in E_2$, oppure $u_2 = v_2$ e $\{u_1, v_1\} \in E_1$.

Abbiamo bisogno infine di un risultato di G. Sabidussi sul numero cromatico del prodotto cartesiano dei grafi (ovvero [7, Lemma 2.6]):

Teorema 2.7. (Teorema di Sabidussi sul numero cromatico) *Siano* X *e* Y *grafi con almeno un vertice ciascuno. allora:*

$$\chi(X \boxtimes Y) = \max\{\chi(X), \chi(Y)\}$$

Dimostrazione. Sia $m = \max\{\chi(X), \chi(Y)\}$. Fissati $x \in V(X)$ e $y \in V(Y)$, consideriamo i sottografi X_y e Y_x di $X \boxtimes Y$ definiti da:

$$V(X_y) = V(X) \times \{y\},\ V(Y_x) = \{x\} \times V(Y)$$

Ovviamente X_y e Y_x sono isomorfi a X e Y rispettivamente e si ha quindi $\chi(X \boxtimes Y) \geq m$.
Siano ora f_X e f_Y delle m-colorazioni di X e Y rispettivamente, pensate come

funzioni a valori in $\mathbb{Z}_m$ (dotiamo cioè l'insieme di colori $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ della struttura di gruppo additivo di $\mathbb{Z}_m$). Definiamo ora una m-colorazione di $X \boxtimes Y$ nel seguente modo:

$$f\colon V(X \boxtimes Y) \to \mathbb{Z}_m,\ (x, y) \mapsto f_X(x) + f_Y(y),\ \text{con } x \in V(X),\ y \in V(Y)$$

Dimostriamo dunque che se $(x, y), (x', y')$ sono adiacenti, allora $f(x, y) \neq f(x', y')$. Poiché tali vertici sono adiacenti si hanno due possibilità: $x = x'$ e $(y, y') \in E(Y)$ oppure $(x, x') \in E(X)$ e $y = y'$. Basta considerare il primo caso, il secondo si dimostra in maniera analoga. Si ha quindi che $f_X(x) = f_X(x')$ e che $f_Y(y) \neq f_Y(y')$. Otteniamo che:

$$f(x, y) = f_X(x) + f_Y(y) \neq f_X(x) + f_Y(y') = f_X(x') + f_Y(y') = f(x', y')$$

Pertanto f è una m-colorazione di $X \boxtimes Y$ e $\chi(X \boxtimes Y) \leq m$. □

Possiamo ora dimostrare il Lemma 2.3.

Dimostrazione del Lemma 2.3. $C = \{c_1, \ldots c_m\}$ è un insieme di generatori minimale di G, pertanto $\forall c \in C$, $\mathrm{Cay}(G, C \setminus \{c\})$ è disconnesso e le sue componenti connesse corrispondono alle classi laterali sinistre di $\langle C \setminus \{c\}\rangle$ (per il Corollario 2.5), che a loro volta sono i vertici di $\mathrm{Sch}(G, \langle C \setminus \{c\}\rangle, c)$.
Se $x \in G$, denotiamo con x_c la classe laterale $x \cdot \langle C \setminus \{c\}\rangle$ per comodità di notazione. Osserviamo che se due vertici x e y di $\mathrm{Cay}(G, C)$ sono connessi con un arco corrispondente a c, allora x e y sono contenuti in differenti componenti connesse di $\mathrm{Cay}(G, C \setminus \{c\})$ e inoltre i vertici x_c, y_c di $\mathrm{Sch}(G, \langle C \setminus \{c\}\rangle, c)$ sono adiacenti. Possiamo così definire una funzione:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathrm{Cay}(G, C) & \longrightarrow & \mathrm{Sch}(G, \langle C \setminus \{c_1\}\rangle, c_1) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathrm{Sch}(G, \langle C \setminus \{c_m\}\rangle, c_m) \\ & x & \longmapsto & (x_{c_1}, \ldots, x_{c_m}) \end{array}$$

Dimostriamo che f è un omomorfismo di grafi. Siano x e y due vertici adiacenti in $\mathrm{Cay}(G, C)$, allora $\exists k = 1, \ldots m\colon y = c_k x$ $(yx^{-1} = c_k \in C)$. Pertanto $\forall i \neq k$ si ha $x_{c_i} = y_{c_i}$ in quanto $c_k \in C \setminus \{c_i\}$, mentre invece x_{c_k} e y_{c_k} sono due vertici adiacenti in $\mathrm{Sch}(G, \langle C \setminus \{c_k\}\rangle, c_k)$ per quanto osservato in precedenza. Per definizione di archi nel prodotto cartesiano di grafi, si ha che $f(x) = (x_{c_1}, \ldots, x_{c_m})$ e $f(y) = (y_{c_1}, \ldots, y_{c_m})$ sono adiacenti, ovvero f è omomorfismo di grafi.
Otteniamo pertanto che:

$$\begin{aligned} \chi(\mathrm{Cay}(G, C)) &\leq \chi(\mathrm{Sch}(G, \langle C \setminus \{c_1\}\rangle, c_1) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathrm{Sch}(G, \langle C \setminus \{c_k\}\rangle, c_k)) = \\ &= \max\{\chi(\mathrm{Sch}(G, \langle C \setminus \{c_1\}\rangle, c_1)), \ldots, \chi(\mathrm{Sch}(G, \langle C \setminus \{c_k\}\rangle, c_k))\} \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è utilizzato il Teorema di Sabidussi. Ciò conclude la dimostrazione. □

2.2 Gruppi di Dedekind e diedrali generalizzati

Definizione 2.8. Un gruppo G si dice *di Dedekind* se tutti i suoi sottogruppi sono normali. In particolare, tutti i gruppi abeliani sono di Dedekind.

Teorema 2.9. ([3, Theorem 2.5]) *Ogni grafo di Cayley minimale di un gruppo di Dedekind è 3-colorabile.*

Dimostrazione. Sia G di Dedekind e $\mathrm{Cay}(G, C)$ un suo grafo di Cayley minimale, allora in particolare $\forall c \in C, \langle C \setminus \{c\}\rangle \trianglelefteq G$. Si ha quindi che il gruppo quoziente $G/\langle C \setminus \{c\}\rangle$ è ciclico. Dunque il grafo di Schreier delle classi laterali (che in questo caso è un grafo di Cayley) è un ciclo, quindi $\chi(\mathrm{Cay}(G/\langle C \setminus \{c\}\rangle), c) \leq 3$. La tesi segue quindi direttamente dal Lemma 2.3. □

Definizione 2.10. Sia G un gruppo abeliano (additivo). Si definisce il *gruppo diedrale generalizzato di* G, $\mathrm{Dih}(G)$ come il gruppo $\mathrm{Dih}(G) := G \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$, con $\varphi\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(G)$ tale che $\varphi(0) = \mathrm{id}_G$ e $\varphi(1)$ è l'inversione. L'operazione di $\mathrm{Dih}(G)$ è pertanto la seguente $\forall g_1, g_2 \in G, \forall t \in \mathbb{Z}_2$:

- $(g_1, 0) * (g_2, t) = (g_1 + g_2, t)$
- $(g_1, 1) * (g_2, t) = (g_1 - g_2, 1 + t)$

Notare chiaramente che $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathrm{Dih}(\mathbb{Z}_n) = D_n$.

Teorema 2.11. ([3, Theorem 2.6]) *Ogni grafo di Cayley minimale di un gruppo diedrale generalizzato è 3-colorabile.*

Dimostrazione. Sia $X = \mathrm{Cay}(\mathrm{Dih}(G), C)$ il grafo di Cayley di $\mathrm{Dih}(G) = G \rtimes \mathbb{Z}_2$ generato minimalmente da C. Definiamo i seguenti insiemi: $C_i := C \cap (G \times \{i\})$ con $i = 0, 1$ e $H := (G \times \{0\}) \cap \langle C_1\rangle$. Per minimalità di C:

a. i vertici corrispondenti agli elementi di H formano un insieme indipendente in X,

b. le classi laterali di C_0 generano minimalmente il gruppo abeliano $(G \times \{0\})/H$ (è abeliano perché $G \times \{0\} \cong G$).

Da b. e dal teorema precedente segue che $\mathrm{Sch}(G \times \{0\}, H, C_0)$ (che è isomorfo al grafo di Cayley di $G \times \{0\}/H$ ottenuto con le classi laterali di C_0) è 3-colorabile. Sia quindi $\widetilde{f}\colon (G \times \{0\})/H \to \{0, 1, 2\}$ una colorazione propria. Da a. segue che la funzione $f\colon G \times \{0\} \to \{0, 1, 2\}$ definita da $f(g, 0) := \widetilde{f}((g, 0) * H)$ è una colorazione propria di $\mathrm{Cay}(G \times \{0\}, C_0)$.
Scegliamo ora $(y, 1) \in C_1$ e consideriamo la seguente funzione:

$$\begin{array}{rccl} h\colon & \mathrm{Dih}(G) & \longrightarrow & \{0,1,2\} \\ & (g,0) & \longmapsto & f(g,0) \\ & (g,1) & \longmapsto & f(g-y,0)+1 \mod 3 \end{array}$$

L'obiettivo è dimostrare che h è una colorazione propria. Consideriamo (g_1, t_1), (g_2, t_2) due vertici adiacenti di X e dimostriamo che $h(g_1, t_1) \neq h(g_2, t_2)$. Procediamo per casi.

1. $\underline{t_1 = t_2 = 0:}$ allora $(g_1, 0)$ e $(g_2, 0)$ sono adiacenti in $\mathrm{Cay}(G \times \{0\}, C_0)$, quindi $h(g_1, 0) = f(g_1, 0) \neq f(g_2, 0) = h(g_2, 0)$

2. $\underline{t_1 = t_2 = 1:}$ allora $(g_1, 1)$ e $(g_2, 1)$ sono adiacenti se e solo se $\exists (x, 0) \in C_0\colon (g_1, 1) = (g_2, 1) * (x, 0) = (g_2 - x, 1)$, quindi:

$$(g_1 - y, 0) = (g_1, 1) * (y, 1) = (g_2 - x, 1) * (y, 1) = (g_2 - y - x, 0) = \\ = (g_2 - y, 0) * (-x, 0)$$

Abbiamo dunque mostrato che $(g_1 - y, 0)$ e $(g_2 - y, 0)$ sono adiacenti in $\mathrm{Cay}(G \times \{0\}, C_0)$, quindi:

$$h(g_1, 1) = f(g_1 - y, 0) + 1 \mod 3 \neq f(g_2 - y, 0) + 1 \mod 3 = h(g_2, 1)$$

3. $\underline{t_1 = 0,\ t_2 = 1}$: allora $(g_1, 0)$ e $(g_2, 1)$ sono adiacenti se e solo se $\exists (z, 1) \in C_1 \colon (g_2, 1) = (g_1, 0) * (z, 1) = (g_1 + z, 1)$, allora:

$$\begin{aligned} h(g_2, 1) &= f(g_2 - y, 0) + 1 \mod 3 = f(g_1 + z - y, 0) + 1 \mod 3 = \\ &= f(g_1, 0) + 1 \mod 3 \neq f(g_1, 0) = h(g_1, 0) \end{aligned}$$

L'uguaglianza $f(g_1 + z - y, 0) = f(g_1, 0)$ segue dal fatto che $(z - y, 0) = (z, 1) * (y, 1) \in H$. □

2.3 Gruppi nilpotenti

Prima di enunciare il teorema sulla 3-colorabilità dei grafi di Cayley dei gruppi nilpotenti, ricordiamo le definizioni di gruppo nilpotente, commutatore e sottogruppo di Frattini e alcune loro proprietà che saranno utili in seguito. Esse sono tratte da [5].

Definizione 2.12. Un gruppo G si dice *nilpotente* se ammette una *serie centrale*, cioè una catena subnormale di sottogruppi:

$$\{1_G\} = Z_0 \lhd Z_1 \lhd Z_2 \lhd \cdots \lhd Z_n = G, \text{ con } \frac{Z_i}{Z_{i-1}} \subseteq Z\left(\frac{G}{Z_{i-1}}\right) \forall i.$$

Osservazione 2.13. Chiaramente ogni sottogruppo abeliano è nilpotente in quanto $\{1_G\} \lhd Z(G) = G$ è una serie centrale. Inoltre, ogni gruppo nilpotente è risolubile, in quanto la serie centrale è una catena subnormale di sottogruppi a quozienti abeliani (Z_i/Z_{i-1} è abeliano $\forall i$).

Teorema 2.14. ([5, Theorem 1.22]) *Sia G un gruppo nilpotente e sia $H < G$ un suo sottogruppo proprio. Allora $N_G(H) > H$, dove $N_G(H)$ è il normalizzante di H in G.*

Introduciamo una notazione per la dimostrazione di questo teorema. Se G è gruppo e $N \lhd G$, denotiamo con $\overline{G}$ il gruppo quoziente G/N. Pensiamo inoltre a $\overline{\cdot} \colon G \to \overline{G},\ g \mapsto \overline{g} = gN$ come la proiezione canonica. Se inoltre $H < G$, denotiamo con $\overline{H}$ l'immagine di H attraverso la proiezione canonica.
Ricordiamo che per il teorema di corrispondenza, la proiezione canonica definisce una biiezione tra i sottogruppi di $\overline{G}$ e quelli di G contenenti N. Ogni sottogruppo di $\overline{G}$ ha quindi la forma $\overline{H}$ per qualche $H \leq G$, inoltre l'unico tale sottogruppo di G che contiene N è HN.

Proposizione 2.15. *Nelle notazioni precedenti, se $N \leq H \leq G$, allora $\overline{N_G(H)} = N_{\overline{G}}(\overline{H})$.*

Dimostrazione. Sempre dal teorema di corrispondenza, si ha che se $N \subseteq H \subseteq K \subseteq G$, allora $H \trianglelefteq K \iff \overline{H} \trianglelefteq \overline{K}$. In particolare, se $N \subseteq H$, si ha $\overline{H} \trianglelefteq \overline{N_G(H)}$ e quindi $\overline{N_G(H)} \subseteq N_{\overline{G}}(\overline{H})$.
Per quanto osservato precedentemente, $N_{\overline{G}}(\overline{H}) = \overline{M}$, con M l'unico sottogruppo di G che soddisfa tale condizione e tale che $N \leq M \leq G$. Allora per definizione si ha $\overline{H} \trianglelefteq \overline{M} = N_{\overline{G}}(\overline{H})$ e pertanto $H \trianglelefteq M$. Da questo segue che $M \subseteq N_G(H)$ e infine $N_{\overline{G}}(\overline{H}) = \overline{M} \subseteq \overline{N_G(H)}$. □

Possiamo ora dimostrare il Teorema 2.14.

Dimostrazione del Teorema 2.14. G è nilpotente, dunque ammette la serie centrale:

$$\{1_G\} = Z_0 \lhd Z_1 \lhd \cdots \lhd Z_n = G, \text{ con } \frac{Z_i}{Z_{i-1}} \subseteq Z\left(\frac{G}{Z_{i-1}}\right) \forall 1 \leq i \leq n$$

Abbiamo che $\{1\} = Z_0 \subseteq H$ e $Z_n = G \nsubseteq H$. Quindi $\exists k < n \colon Z_k \subseteq H$, ma $Z_{k+1} \nsubseteq H$. Basta dimostrare che $Z_{k+1} \subseteq N_G(H)$, in tal caso seguirà che $N_G(H) > H$.
Scriviamo $\overline{G} = G/Z_k$. Per definizione della serie centrale, otteniamo che:

$$\overline{Z_{k+1}} \subseteq Z(\overline{G}) \subseteq N_{\overline{G}}(\overline{H}) = \overline{N_G(H)}$$

dove vale l'uguaglianza per la proposizione precedente in quanto $Z_k \subseteq H$. Ora, dal fatto che $Z_k \subseteq H \subseteq N_G(H)$, otteniamo grazie al teorema di corrispondenza che $Z_{k+1} \subseteq N_G(H)$, da cui la tesi. □

Corollario 2.16. *In un gruppo nilpotente G, ogni sottogruppo proprio massimale (se esiste) è normale.*

Dimostrazione. Sia $H < G$ massimale. Allora per il teorema precedente $H < N_G(H) \leq G$. Per massimalità di H, concludiamo che $N_G(H) = G$, ovvero $H \lhd G$. □

Definizione 2.17. Sia $(G, \cdot)$ gruppo e siano $x, y \in G$. Definiamo il *commutatore di x e y* come l'elemento $[x, y] := x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1}$. Si definisce il *commutatore* o *derivato di G*, come l'insieme $G' := \langle \{[x, y] | x, y \in G\} \rangle$, cioè il sottogruppo generato da tutti i commutatori di due elementi di G.

Notare che due elementi $x, y \in G$ commutano se e solo se $[x, y] = 1_G$. Di conseguenza, G è abeliano se e solo se $G' = \{1_G\}$. Un'altra conseguenza immediata è che $G' \trianglelefteq G$, che segue dal fatto che:

$$\forall x, y, z \in G, \ [x, y]^z = [x^z, y^z] \in G'.$$

Proposizione 2.18. *Se $\varphi \colon G \longrightarrow H$ è un omomorfismo di gruppi, allora $\varphi(G') \subseteq H'$. Se inoltre φ è suriettiva, si ha l'uguaglianza. In particolare, se H è un gruppo abeliano, allora $G' \subseteq \ker(\varphi)$.*

Dimostrazione. La prima parte segue immediatamente osservando che $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$. Supponiamo ora che φ sia suriettiva e consideriamo $[h_1, h_2] \in H'$. Per suriettività, $\exists x, y \in G \colon \varphi(x) = h_1, \ \varphi(y) = h_2$ e quindi:

$$[h_1, h_2] = [\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y])$$

da cui $\varphi(G') = H'$. La dimostrazione dell'ultima affermazione è banale. □

Corollario 2.19. *Sia G gruppo e $N \trianglelefteq G$ tale che G/N è abeliano. Allora $G' \subseteq N$, cioè G' è il più piccolo sottogruppo normale di G tale che il gruppo quoziente di G con tale sottogruppo è abeliano.*

Dimostrazione. La proiezione canonica $\pi \colon G \longrightarrow G/N$ è un omomorfismo di gruppi suriettivo e per ipotesi G/N è abeliano. Pertanto per la proposizione precedente $G' \subseteq \ker(\pi) = N$. □

Denotiamo con $\Phi(G)$ il *sottogruppo di Frattini di* G, che è definito come l'intersezione di tutti i sottogruppi propri massimali di G, se essi esistono. Il sottogruppo di Frattini non è quindi sempre ben definito in quanto non tutti i gruppi ammettono sottogruppi *propri* massimali, come ad esempio il gruppo additivo $(\mathbb{Q}, +)$. Vediamo ora che i gruppi finitamente generati ammettono sottogruppi propri massimali.

Teorema 2.20. *Sia G un gruppo finitamente generato. Allora ogni sottogruppo proprio di G è contenuto in un sottogruppo proprio massimale.*

Dimostrazione. Dimostriamo preliminarmente che esistono sottogruppi propri massimali di G. Sia X l'insieme dei sottogruppi propri di G, è un insieme parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione. Sia $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X$ una catena, dimostriamo che ha un maggiorante. Consideriamo:

$$M := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

e dimostriamo che $M \in X$. Anzitutto, $1_G \in M \neq \emptyset$ perché unione di sottogruppi ($1_G \in X_\lambda\ \forall\lambda \in \Lambda$). Siano $m_1, m_2 \in M$, dunque $\exists\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda\colon m_1 \in X_{\lambda_1},\ m_2 \in X_{\lambda_2}$. Essendo $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X$ una catena, possiamo supporre senza perdere generalità che $X_{\lambda_1} \subseteq X_{\lambda_2}$, pertanto $m_1, m_2 \in X_{\lambda_2}$ e $m_1 m_2^{-1} \in X_{\lambda_2} \subseteq M$. Dunque M è un sottogruppo di G. Supponiamo per assurdo che $M = G$. Si ha $G = \langle g_1, \dots g_n\rangle$ per ipotesi. Allora:

$$\exists\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda\colon g_1 \in X_{\lambda_1}, \dots, g_n \in X_{\lambda_n}$$

A meno di rinominare gli indici, possiamo supporre senza perdere generalità che $X_{\lambda_1} \subseteq \cdots \subseteq X_{\lambda_n}$. Si ha dunque che $g_i \in X_{\lambda_n} \forall i = 1, \dots, n$, ma allora dovrei avere che $X_{\lambda_n} = G$, contro il fatto che X_{λ_n} è un sottogruppo proprio. Quindi $M \in X$ è un maggiorante della catena e per il Lemma di Zorn, X ammette un elemento massimale. Pertanto, G ha un sottogruppo proprio massimale.
Sia ora $H < G$, per dimostrare che esiste un sottogruppo proprio massimale di G contenente H si procede come sopra, considerando al posto di X l'insieme Y dei sottogruppi propri di G contenenti H, sempre ordinato dalla relazione di inclusione. □

Teorema 2.21. *Sia G un gruppo nilpotente finitamente generato. Allora si ha che $G' \subseteq \Phi(G)$.*

Dimostrazione. G è finitamente generato, quindi ammette sottogruppi propri massimali, che sono normali per il Corollario 2.16. Sia H uno di essi. Allora per il teorema di corrispondenza c'è una biiezione tra i sottogruppi di G/H e i sottogruppi di G contenenti H. Per massimalità di H, G/H ha solo due sottogruppi, quindi preso $xH \in G/H$ non banale, si ha che $\langle xH\rangle = G/H$, ovvero G/H è ciclico, dunque abeliano (anzi, dal fatto che ha solo due sottogruppi possiamo concludere che $G/H \cong \mathbb{Z}_p$, con p primo). Per il Corollario 2.19, abbiamo dunque che $G' \subseteq H$, ma ciò vale per ogni sottogruppo proprio massimale di G, pertanto $G' \subseteq \Phi(G)$. □

Lemma 2.22. ([3, Lemma 2.7]) *Sia G gruppo, allora $\chi_{\max}(G) \leq \chi_{\max}(G/\Phi(G))$.*

Dimostrazione. Sia C un insieme di generatori minimale di G. Utilizziamo le seguenti proprietà del sottogruppo di Frattini:

a. $\Phi(G) \trianglelefteq G$,

b. $\Phi(G) \cap C = \emptyset$ (se $\langle X, g\rangle = G$ con $g \in \Phi(G)$, allora $\langle X\rangle = G$),

c. $C/\Phi(G) = \{c \cdot \Phi(G) | c \in C\}$ è un insieme di generatori minimale di $G/\Phi(G)$.

Da a., b. e dal Lemma 1.3 segue che $\chi(\mathrm{Cay}(G, C)) \leq \chi(\mathrm{Cay}(G/\Phi(G), C/\Phi(G)))$. Da c., $\chi(\mathrm{Cay}(G/\Phi(G), C/\Phi(G))) \leq \chi_{\max}(G/\Phi(G))$. □

Possiamo ora dimostrare il seguente teorema.

Teorema 2.23. ([3, Theorem 2.8]) *Sia G un gruppo finitamente generato tale che $G' \subseteq \Phi(G)$. Allora ogni grafo di Cayley minimale di G è 3-colorabile. In particolare, ciò è vero se G è nilpotente.*

Dimostrazione. Sia $X = \mathrm{Cay}(G, C)$ con C un insieme di generatori minimale di G. Dato che $G' \subseteq \Phi(G)$, allora $G/\Phi(G)$ è abeliano per il Corollario 2.19. Per il Teorema 2.9, $\mathrm{Cay}(G/\Phi(G), C/\Phi(G))$ è 3-colorabile. Allora dal fatto che $C \subseteq C/\Phi(G) \cdot \Phi(G)$ e dal Lemma 1.3, possiamo concludere che X è 3-colorabile. □

Capitolo 3

Grafi di Cayley minimali di numero cromatico 4

Nello scorso capitolo, abbiamo dimostrato che per alcune classi particolari di gruppi, i loro grafi di Cayley hanno numero cromatico massimo che è al più 3. A questo punto, sorge immediatamente la seguente domanda:

Domanda 3.1. *È vero che tutti i grafi di Cayley minimali hanno numero cromatico al più 3?*

Contrariamente a quanto si possa pensare in un primo momento, la risposta a tale domanda è negativa: esistono gruppi che ammettono grafi di Cayley minimali di numero cromatico (almeno) 4. In questo capitolo analizziamo un grafo di Cayley minimale del gruppo $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$ che ha numero cromatico 4 e proporremo una congettura che afferma che esistono infiniti gruppi che ammettono un grafo di Cayley minimale di numero cromatico 4.

3.1 Il grafo $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3, \{(1,0),(0,1)\})$

L'obiettivo di questa sezione è dimostrare che non è possibile estendere il teorema sulla 3-colorabilità di alcuni grafi di Cayley ai gruppi risolubili. Infatti esibiremo un grafo di Cayley di un gruppo risolubile non nilpotente ($\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$) che ha numero cromatico 4. Studiamo preliminarmente tale gruppo.

Notiamo che esistono due gruppi di ordine 21 a meno di isomorfismo: essi sono $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_{21}$ (abeliano) e $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$ (non abeliano).
Infatti, se G è un gruppo di ordine 21, per i Teoremi di Sylow (n_p denota il numero dei p-sottogruppi di Sylow di G), si ha che $n_7 \equiv 1 \mod 7$ e $n_7 \mid 3$, quindi necessariamente $n_7 = 1$, cioè il 7-sottogruppo di Sylow di G è normale. Invece $n_3 \equiv 1 \mod 3$ e $n_3 \mid 7$, quindi ho due possibilità: $n_3 = 1$ oppure $n_3 = 7$. Sia P il 7-sottogruppo di Sylow di G e Q un 3-Sylow. Allora nel secondo caso si ha $P \cap Q = \{1_G\}$, $PQ = G$ (per confronto tra cardinalità), $P \trianglelefteq G$ e $Q \leq G$. Pertanto $G = P \rtimes Q \cong \mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$. Nel primo caso invece si ha $G = P \times Q \cong \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_{21}$ in quanto anche Q è normale.

Sia ora $G = P \rtimes Q \cong \mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$ e studiamo come funziona l'operazione di G. Sia $P = \langle x \rangle$ e $Q = \langle y \rangle$, vogliamo studiare il coniugio $yxy^{-1} = x^i$, con $i \in \{0, 1, \ldots, 6\}$. Si ha:

$$x = y^3xy^{-3} = y^2x^iy^{-2} = y(x^i)^iy^{-1} = yx^{i^2}y^{-1} = x^{i^3}$$

Pertanto, $i^3 \equiv 1 \mod 7$. Facendo i conti, le uniche possibilità sono $i = 1, 2, 4$. Se fosse $i = 1$, G sarebbe ciclico di ordine 21 ($xy = yx$ e hanno ordini coprimi, dunque $|xy|$=21). I gruppi che si ottengono per $i = 2$ e per $i = 4$ sono isomorfi: posto $z = y^2$ e supponendo $i = 4$, si ha $zxz^{-1} = y^2xy^{-2} = x^{16} = x^2$, se invece $i = 2$, chiaramente $zxz^{-1} = y^2xy^{-2} = x^4$. Si può quindi supporre $i = 2$.
L'operazione su $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$ è quindi definita come segue $\forall a, b \in \mathbb{Z}_7, t \in \mathbb{Z}_3$:

- $(a, 0) \cdot (b, t) = (a + b, t)$
- $(a, 1) \cdot (b, t) = (a + 2b, 1 + t)$
- $(a, 2) \cdot (b, t) = (a + 4b, 2 + t) = (a - 3b, 2 + t)$

Notiamo preliminarmente che $G \cong \mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$ non è nilpotente in quanto il 3-sottogruppo di Sylow non è normale (ricordando che un gruppo finito è nilpotente se e solo se tutti i suoi sottogruppi di Sylow sono normali), però è risolubile in quanto prodotto semidiretto di gruppi abeliani (anzi, ciclici): $\{1_G\} \lhd P \lhd G$ ($P \cong \mathbb{Z}_7$, $G/P \cong \mathbb{Z}_3$).

Possiamo quindi studiare il grafo $\Gamma = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3, C)$ con $C = \{(0, 1), (1, 0)\}$, dal fatto che $(a, 0) \cdot (1, 0) = (a + 1, 0)$, $(a, 1) \cdot (1, 0) = (a + 2, 1)$, $(a, 2) \cdot (1, 0) = (a + 4, 2)$ e infine $(a, t) \cdot (0, 1) = (a, t + 1)$ si ottiene che Γ è rappresentato nel modo seguente.

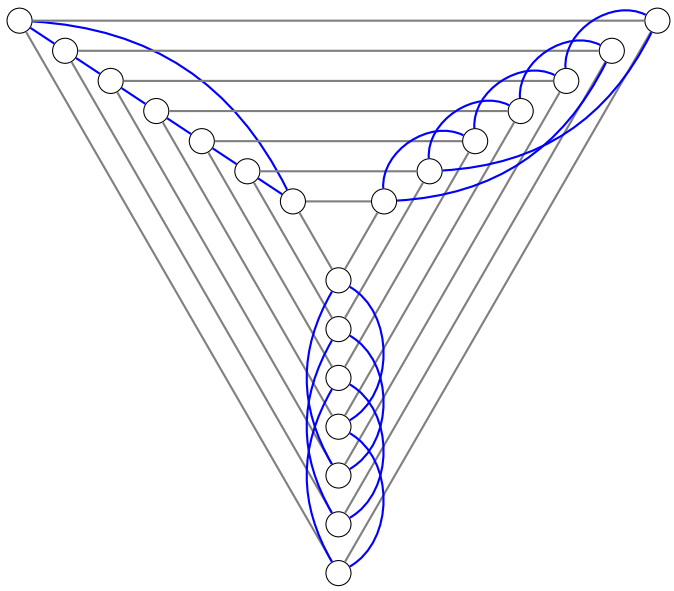


Figura 3.1: Il grafo Γ, gli archi in grigio corrispondono alla moltiplicazione per $(0, 1)$, mentre quelli in blu a quella per $(1, 0)$

Dimostriamo ora che non possiamo estendere il teorema sulla 3-colorabilità ai grafi di Cayley dei gruppi risolubili.

Teorema 3.2. *Γ è 4-colorabile, ma non 3-colorabile. In altre parole, $\chi(\Gamma) = 4$.*

Dimostrazione. Notiamo anzitutto che ogni vertice di Γ ha grado 4, pertanto per il teorema di Brooks $\chi(\Gamma) \leq 4$. Resta quindi da dimostrare che Γ non è 3-colorabile. Se due vertici $(a,t),(b,s) \in \mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$, scriveremo $(a,t) \sim (b,s)$ per dire che sono adiacenti.
Supponiamo per assurdo che esista una 3-colorazione propria di Γ, sia essa:

$$f\colon \mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \{0,1,2\}$$

A meno di rinominare i colori, possiamo supporre che $\underline{f(0,0) = 0,\ f(0,1) = 1}$ e $\underline{f(0,2) = 2}$. Notiamo inoltre che i tre vertici del tipo (i,j) con i fissato devono essere mandati in tre colori diversi. Esaminiamo i vari casi possibili per gli elementi del tipo $(1,j)$ con $j = 0,1,2$:

a. $f(1,0) = 1,\ f(1,1) = 2,\ f(1,2) = 0,$

b. $f(1,0) = 1,\ f(1,1) = 0,\ f(1,2) = 2,$

c. $f(1,0) = 2,\ f(1,1) = 0,\ f(1,2) = 1,$

d. $f(1,0) = 2,\ f(1,1) = 1,\ f(1,2) = 0.$

Prima di procedere con la dimostrazione vera e propria, enunciamo i principali due modi per stabilire che colore ha un determinato nodo (i,j) di Γ. Essi sono (dove $i,i',i'' \in \mathbb{Z}_7,\ j,j',j'' \in \mathbb{Z}_3,\ x,x',x'' \in \{0,1,2\}$ sono tutti distinti tra loro):

(I) Se $(i,j) \sim (i',j')$ e $(i,j) \sim (i'',j'')$ e inoltre $f(i',j') = x',\ f(i'',j'') = x''$, allora $f(i,j) = x$.

(II) Supponiamo ora che $i \in \mathbb{Z}_7$ sia fissato. Se $f(i,j') \neq x \neq f(i,j'')$, allora $f(i,j) = x$ in quanto in ogni triangolo devono apparire tutti e tre i colori.

Inoltre dopo ogni ipotesi di assurdo (da a. a d.), inseriremo un'immagine per rendere più chiare le implicazioni e gli assurdi. Le implicazioni saranno mostrate con il colore di un cerchio attorno ai nodi nel seguente ordine: verde scuro (ipotesi di assurdo), ciano, viola, rosa, arancione e marrone. Un cerchio rosso attorno a un nodo simboleggia un assurdo.

Analizziamo dunque le quattro ipotesi di assurdo.
<u>Supponiamo che a. sia vero</u>. Poiché $f(0,2) = 2,\ f(1,2) = 0$, segue che $f(4,2) = 1$, in quanto $(4,2)$ è adiacente a tali altri nodi (stiamo usando (I)). Inoltre $f(3,1) \neq f(1,1) = 2$ e $f(3,2) \neq f(0,2) = 2$ (in entrambi i casi perché tali nodi sono adiacenti), perciò segue che $f(3,0) = 2$ (qua si sta utilizzando (II)). Da ciò e dal fatto che $f(1,0) = 1$, segue immediatamente che $f(2,0) = 0$ (per (I): $(1,0) \sim (2,0) \sim (3,0)$) e quindi $f(2,1) = 2$ perché è adiacente a $(2,0)$ e a $(0,1)$ (non può avere colore 1). Ma ciò è assurdo perché $\forall j = 0,1,2,\ f(4,j) \neq 2$ in quanto $(4,0)$ e $(4,1)$ sono adiacenti rispettivamente a $(3,0)$ e $(2,1)$, entrambi di colore 2, e $f(4,2) = 1 \neq 2$. Dunque a. non si può verificare.

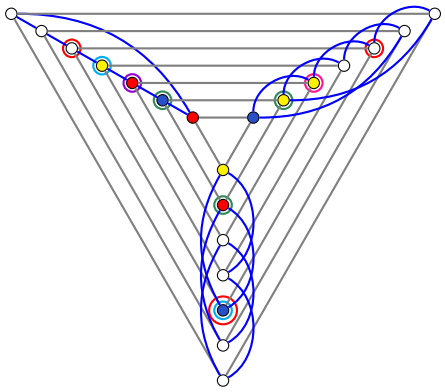


Figura 3.2: La 3-colorazione (assurda) di Γ proposta in a. I colori 0, 1 e 2 sono rosso, blu e giallo rispettivamente (e saranno tali anche nelle figure successive).

Supponiamo ora che valga b. Segue subito che $f(2,2) = 1$ in quanto $f(2,0) \neq f(1,0) = 1$ e $f(2,1) \neq f(0,1) = 1$, cioè entrambi non possono avere colore 1 e si usa (II). Ciò implica immediatamente che $f(5,2) = 0$ perché $2 = f(1,2) \neq f(5,2) \neq f(2,2) = 1$ ($(5,2)$ è adiacente a entrambi tali nodi). In modo analogo, $0 = f(5,2) \neq f(5,1) \neq f(0,1) = 1$, dunque $f(5,1) = 2$. Per completare la colorazione del triangolo di vertici $(5,j)$ otteniamo che $f(5,0) = 1$. Inoltre $f(3,1) = 1$ perché $2 = f(5,1) \neq f(3,1) \neq f(1,1) = 0$. Da queste ultime informazioni segue infine che $f(6,0) = 2$ ($(6,0)$ è adiacente a $(5,0)$ e a $(0,0)$, di colori rispettivamente 1 e 0) e $f(3,2) = 0$ (analogamente, è adiacente a $(3,1)$ e a $(0,2)$, di colori rispettivamente 1 e 2). Ma allora:

$$f(6,2) \neq \begin{cases} 0 \text{ perché } (6,2) \sim (3,2) \\ 1 \text{ perché } (6,2) \sim (2,2) \\ 2 \text{ perché } (6,2) \sim (6,0) \end{cases}$$

Dunque anche b. è assurdo.

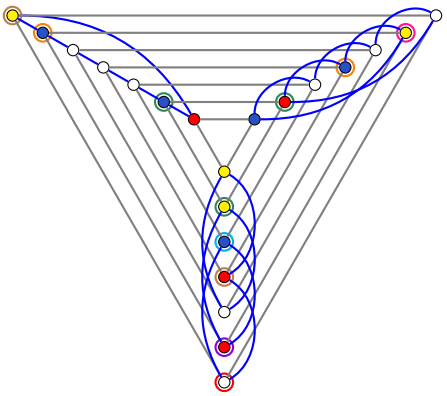


Figura 3.3: La 3-colorazione assurda di b.

Passiamo ora ad esaminare c. Allora $f(4,2) = 0$ (si procede in modo analogo a

quanto fatto in a., sfruttando l'adiacenza con $(0,2)$ e $(1,2)$). Inoltre $f(5,0) = 1$ poiché $f(5,1) \neq f(0,1) = 1$, $f(5,2) \neq f(1,2) = 1$ (si usa ancora (II)). Segue subito che $f(6,0) = 2 = f(4,0)$, in quanto essi sono adiacenti rispettivamente a $(0,0)$ e a $(4,2)$ (entrambi di colore 0) ed entrambi sono adiacenti a $(5,0)$. Ma ciò implicherebbe che $f(6,1) = 1 = f(4,1)$ perché $2 = f(6,0) \neq f(6,1) \neq f(1,1) = 0$ e analogamente $2 = f(4,0) \neq f(4,1) \neq f(4,2) = 0$, e questo è assurdo perché $(4,1)$ e $(6,1)$ sono adiacenti.

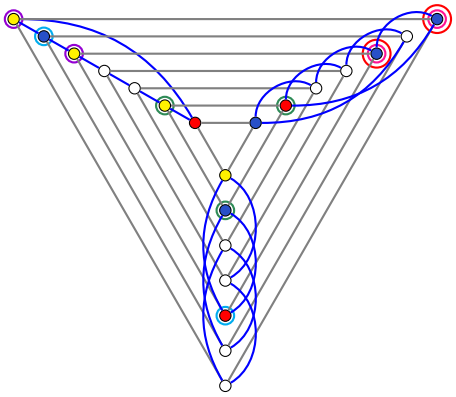


Figura 3.4: La 3-colorazione assurda di c.

<u>Studiamo infine d.</u> Come per i punti precedenti (a. e c.), segue immediatamente che $f(4,2) = 1$. Ciò implica, assieme alle ipotesi di d., che $f(i,1) \neq 1$ $\forall i \neq 0,1$: infatti i vertici $(2,1)$ e $(5,1)$ sono adiacenti a $(0,1)$, poi $(3,1)$ e $(6,1)$ sono entrambi adiacenti a $(1,1)$, infine $(4,1) \sim (4,2)$. Osserviamo inoltre che $f(2,1) = f(6,1) = f(4,0) \neq 1$. Infatti se i vertici $(2,1)$ e $(6,1)$ avessero due colori distinti (e chiaramente diversi da 1), $(4,1)$ sarebbe adiacente a tre vertici che hanno colori diversi tra loro, assurdo. La seconda uguaglianza segue invece dal fatto che $(4,0)$ è adiacente a $(4,1)$ e a $(4,2)$ e $f(4,1) \notin \{1, f(2,1)\}$. Studiamo quindi i due casi separatamente.

- Supponiamo che $f(2,1) = f(6,1) = f(4,0) = 0$, allora $f(4,1) = 2$ (per quanto visto sopra). Di conseguenza, $f(2,0) = 1$ poiché $2 = f(1,0) \neq f(2,0) \neq f(2,1) = 0$. Pertanto si ha anche che $f(3,0) = 2$ per adiacenza con $(2,0)$ e $(4,0)$, che implica $f(3,1) = 0$ ($(3,1)$ è adiacente a $(3,0)$ e a $(1,1)$). Ma allora $\forall j \in \mathbb{Z}_3$, $f(5,j) \neq 0$ perché $(5,0) \sim (4,0)$, $(5,1) \sim (3,1)$ e $(5,2) \sim (1,2)$, ma ciò è assurdo.

- Sia infine $f(2,1) = f(6,1) = f(4,0) = 2$, allora $f(4,1) = 0$. Inoltre $f(6,0) = 1$ poiché $(6,0) \sim (0,0)$ e $(6,0) \sim (6,1)$, di conseguenza si ha $f(6,2) = 0$ usando (II). Osserviamo inoltre che $f(2,2) = 1 = f(3,2)$, in quanto entrambi tali vertici sono adiacenti a $(6,2)$, di colore 0, e ad un vertice di colore 2 (rispettivamente $(2,1)$ e $(0,2)$). Ergo, seguirebbe che $f(2,0) = 0 = f(3,0)$ in quanto essi sono entrambi adiacenti a un vertice di colore 1 (rispettivamente $(2,2)$ e $(3,2)$) e a uno di colore 2 (rispettivamente $(1,0)$ e $(4,0)$). Ma anche in questo caso otteniamo un assurdo, poiché $(2,0) \sim (3,0)$.

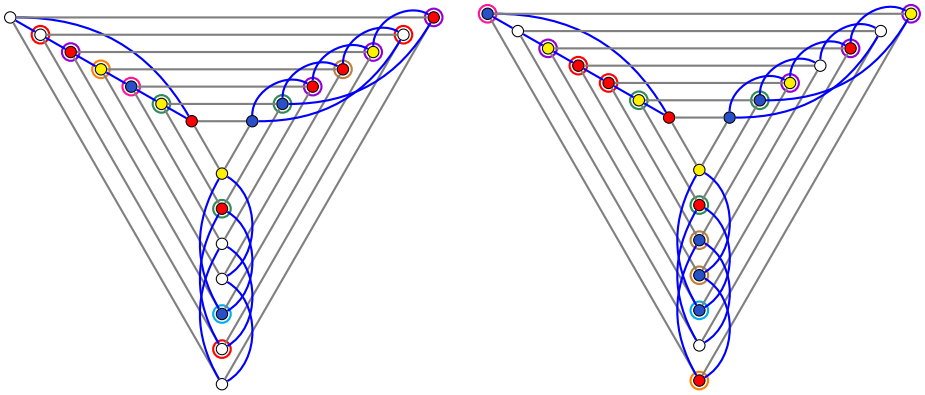
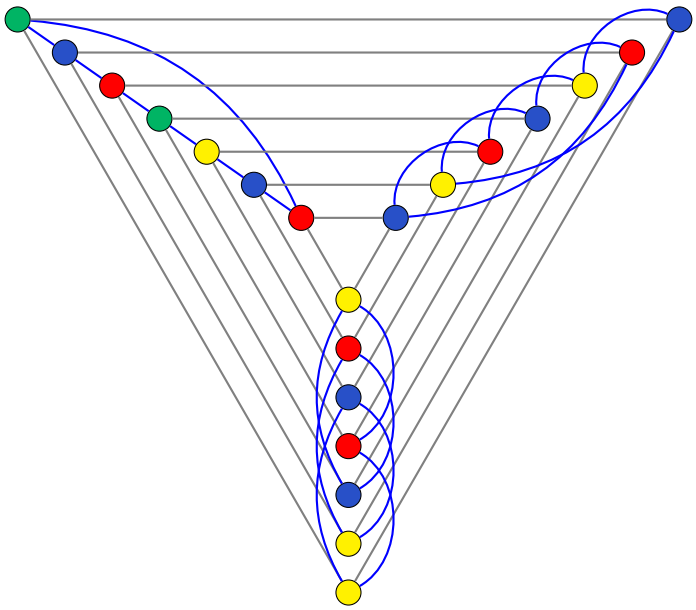


Figura 3.5: Le due colorazioni assurde esposte in d. In questo caso, un cerchio viola attorno a un nodo denota le ipotesi utilizzate per distinguere i due casi. L'ordine logico dei colori dei cerchi resta comunque immutato.

Dunque nessuno dei casi analizzati si può verificare. Pertanto, Γ non è 3-colorabile e $\chi(\Gamma) = 4$. $\square$

Esibiamo infine una 4-colorazione di Γ:



3.2 Una domanda aperta

Abbiamo visto che il Teorema 3.2 afferma che esiste un grafo di Cayley minimale di numero cromatico 4, ciò prova che la Domanda 3.1 ha una risposta negativa. A questo punto, sorge spontanea la seguente domanda, che è aperta:

Domanda 3.3. *Esiste una famiglia infinita di gruppi (a cui apparterrebbe il gruppo $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$) che ammettono un grafo di Cayley minimale di numero cromatico 4?*

Noi congetturemo che tale domanda ha risposta positiva, anzi proporremo una congettura più forte che renderebbe esplicita tale famiglia. Prima di esporre la congettura, costuiamo la famiglia di gruppi e spieghiamo le motivazioni della sua scelta.

Sia $G_p = \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_3$ con $p \in P := \{q \in \mathbb{Z} \colon q \equiv 1 \mod 3,\ q \text{ primo}\}$ e, analogamente a quanto fatto per $G_7 = \mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$, consideriamo $\Gamma_p = \mathrm{Cay}(G_p, \{(1,0),(0,1)\})$. Notiamo che 7 è il più piccolo primo congruo a 1 modulo 3 e chiaramente $\Gamma_7 = \Gamma$. La motivazione che ci spinge a scegliere questa specifica famiglia di gruppi, $\{G_p\}_{p \in P}$, è che il grafo Γ_p, per p generici, ha una struttura simile a Γ. Infatti Γ_p è una generalizzazione di Γ, poiché è costituito da p triangoli e da 3 p-cicli. Inoltre notiamo che la dimostrazione del Teorema 3.2 si basa fortemente sulla struttura a triangoli e 7-cicli di Γ. Per questo motivo, la famiglia infinita di gruppi $\{G_p\}_{p \in P}$ è un ottimo candidato per rispondere positivamente alla domanda precedente.
Possiamo ora esporre la seguente congettura:

Congettura 3.4. *Per ogni $p \in P$, i grafi Γ_p hanno numero cromatico 4. In particolare, esiste una famiglia infinita di gruppi $\{G_p\}_{p \in P}$ che soddisfa le richieste della Domanda 3.3.*

Capitolo 4

Le congetture di Babai

I risultati esposti finora pongono immediatamente una domanda, posta inizialmente da L. Babai e che è tutt'ora un problema aperto:

Domanda 4.1. *Esiste una costante m tale che ogni grafo di Cayley minimale ha numero cromatico al più m?*

Babai propone dapprima una congettura in [1], che implicherebbe una risposta positiva a tale domanda, mentre più avanti ne proporrà una opposta in [2]. Lo scopo di questo capitolo è analizzare tali congetture e in particolare dimostrare che la prima di esse è falsa, come fatto in [3].

4.1 Grafi *no lonely color* e *one popular color*

Prima di esporre le congetture di Babai, abbiamo bisogno di alcune definizioni e alcuni risultati sui grafi di Cayley minimali e *semiminimali*.

Definizione 4.2. Sia G gruppo. Un insieme di generatori C di G si dice *semiminimale* se C può essere bene ordinato in modo tale che nessun suo elemento è contenuto nel sottogruppo generato dai suoi predecessori. Un grafo di Cayley $\mathrm{Cay}(G, C)$ si dice *semiminimale* se C è un insieme di generatori semiminimale di G.

Notiamo subito che un insieme di generatori minimale è semiminimale e pertanto grafi di Cayley minimali sono semiminimali.
Babai in [1, Sezione 3] definisce due tipologie di grafi che serviranno sia per la prima congettura sia per fornire una condizione necessaria per essere un grafo di Cayley minimale o semiminimale.

Definizione 4.3. Un grafo X si dice *no lonely color* se ammette una colorazione degli archi tale che:

(i) ogni vertice è incidente con al più due archi dello stesso colore,

(ii) ogni ciclo non contiente alcun colore esattamente una volta (cioè nessun colore è "da solo").

Un grafo X si dice *one popular color* (o *no pied circuit* in [1]) se ammette una colorazione degli archi che verifica (i) e tale che:

(iii) ogni ciclo contiene almeno due archi che hanno lo stesso colore.

Segue subito dalla definizione che un grafo *no lonely color* è anche *one popular color*. Osserviamo inoltre che sottografi di un grafo *no lonely color* (risp. *one popular color*) sono *no lonely color* (risp. *one popular color*).

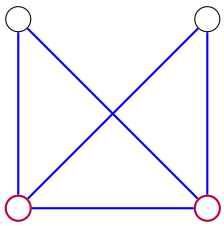
Teorema 4.4. ([1, Prop. 3.2]) *Ogni grafo di Cayley minimale (risp. semiminimale) è* no lonely color *(risp.* one popular color*).*

Dimostrazione. Siano G gruppo, C un suo insieme di generatori e $X = \mathrm{Cay}(G, C)$. L'idea è di associare a ogni elemento di C un colore e di assegnare all'arco $\{g, cg\}$ il colore c.
Gli archi di colore c incidenti a $g \in G$ sono $\{g, cg\}$ e $\{g, c^{-1}g\}$, quindi ci sono al più due archi (è uno se e solo se $c = c^{-1}$) di colore c incidente a g. Dunque (i) è dimostrato.
Notiamo inoltre che se esiste un ciclo in X che ha come colori $c_1, \dots, c_k$ (in quest'ordine), allora si deve avere $c_1^{\pm 1} \dots c_k^{\pm 1} = 1_G$.
Un colore "da solo" nel ciclo può essere espresso in funzione degli altri colori. Se C è minimale, questo non è possibile, dunque la colorazione proposta soddisfa (ii) ed è quindi *no lonely color*.
Sia ora C semiminimale e sia $c_m := \max\{c_1, \dots c_k\}$ nel corrispondente buon ordinamento di C. Dunque c_m non può essere espresso in funzione degli altri colori del ciclo, pertanto $\exists j \neq m$ $(1 \leq j \leq k)$: $c_j = c_m$. La colorazione soddisfa quindi (iii) (il colore c_m è "popolare") ed è *one popular color*. □

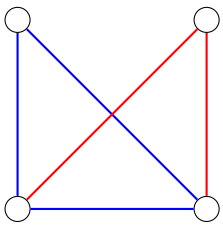
Diamo ora esempi di grafi che <u>non</u> sono *no lonely color* o *one popular color*: essi non potranno essere sottografi di grafi di Cayley minimali o semiminimali rispettivamente. Denotiamo con K_4^- il grafo completo K_4 privato di un arco.

Lemma 4.5. ([1, Lemma 3.3]) *Un grafo* one popular color *non contiene* $K_{5,17}$ *come sottografo. Un grafo* no lonely color *non contiene né* $K_{3,5}$ *né* K_4^- *come sottografi. In particolare, tali grafi non possono essere sottografi di grafi di Cayley semiminimali e minimali rispettivamente.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $K_{5,17}$ sia un grafo *one popular color*. Abbiamo che $V(K_{5,17}) = A \cup B$, con $|A| = 5$, $|B| = 17$ e tutti gli archi collegano un elemento di A con uno di B. Sia $b \in B$. Per (i), esistono $a_1, a_2, a_3 \in A$ tali che gli archi $\{b, a_i\}$, con $i = 1, 2, 3$, abbiano colori diversi. Denotiamo con γ_i il colore associato all'arco $\{b, a_i\}$. Sempre per (i), ci sono al più cinque archi incidenti ad a_i (con i fissato) e a un elemento di $B \setminus \{b\}$ i cui colori appartengono a $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Pertanto $\exists b' \in B \setminus \{b\}$ tale che nessuno degli archi $\{b', a_i\}$ abbia uno dei colori $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Inoltre, almeno due archi del tipo $\{b', a_i\}$, che possiamo supporre che siano $\{b', a_1\}$ e $\{b', a_2\}$ a meno di rinominare gli a_i, devono avere colori diversi tra loro (ancora una volta per (i)). Ma allora il ciclo b - a_1 - b' - a_2 ha quattro colori diversi, in contraddizione con (iii).
In modo simile si dimostra che $K_{3,5}$ non è *no lonely color*.
Dimostriamo ora che K_4^- non è *no lonely color*. Supponiamo per assurdo che lo sia e osserviamo che K_4^- è costituito da due triangoli con un lato/arco in comune. Per (ii), gli archi dei due triangoli devono avere lo stesso colore. Dato che esiste un arco in comune tra i due triangoli, tutti gli archi di K_4^- devono avere lo stesso colore, ma ciò è in contraddizione con (i). □



(a) La colorazione degli archi di K_4^- della dimostrazione precedente.



(b) Una colorazione *one popular color* di K_4^-.

Osserviamo invece che K_4^- è *one popular color*, come mostrato nella seguente figura (a destra).

Prima di illustrare le congetture di Babai, osserviamo un ultimo risultato.

Definizione 4.6. Sia X un grafo. Una *cricca* (o *clique*) è un sottografo completo di X. Denotiamo con $\omega(X)$ la dimensione della cricca più grande contenuta in X.

Corollario 4.7. *Se X è un grafo* no lonely color*, allora $\omega(X) \leq 3$. In particolare, ciò è vero se X è un grafo di Cayley minimale.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal lemma precedente, in quanto i grafi *no lonely color* non possono contenere K_4^-, e quindi anche K_4, come sottografi. □

4.2 Le due congetture di Babai

Ritorniamo alla domanda posta all'inizio del capitolo. Con le nozioni introdotte nella sezione precedente, possiamo enunciare la prima congettura di Babai ([1, Conjecture 3.5]).

Congettura 4.8. *Esiste una costante m finita tale che ogni grafo* one popular color *(quindi anche ogni grafo* no lonely color*) ha numero cromatico al più m.*

Questa congettura implica che grafi di Cayley minimali e semiminimali hanno pure numero cromatico limitato (al più m) e pertanto fornirebbe una risposta positiva alla Domanda 4.1.

Per enunciare invece la seconda congettura di Babai, esposta in [2, Sezione 3.4], abbiamo bisogno di alcune ulteriori definizioni.

Definizione 4.9. Un grafo X si dice *vuoto* se $E(X) = \emptyset$, ma $V(X) \neq \emptyset$.

Definizione 4.10. Siano X grafo e $U \subseteq V(X)$. Il *sottografo di X indotto da U* è il sottografo Y di X definito da:

$$V(Y) = U,\ E(Y) = \{\{u, v\} \colon u, v \in U\}$$

ovvero è il sottografo ottenuto da X eliminando i vertici non appartenenti a U e gli archi contenenti un vertice eliminato.

Definizione 4.11. Sia X grafo. Un insieme di vertici $U \subseteq V(X)$ si dice *insieme indipendente* se induce un sottografo vuoto. Denotiamo con $\alpha(X)$ la cardinalità del più grande insieme indipendente di $V(X)$.

Congettura 4.12. *Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un grafo di Cayley minimale X tale che $\alpha(X) \leq \varepsilon|V(X)|$.*

Questa congettura implicherebbe dunque che i grafi di Cayley minimali non hanno numero cromatico limitato, pertanto è opposta alla Congettura 4.8 e darebbe una risposta negativa alla Domanda 4.1.

4.3 La Congettura 4.8 è falsa

Come accennato all'inizio del capitolo, la Domanda 4.1 resta tutt'ora un problema aperto. Si può tuttavia dimostrare che la Congettura 4.8 è falsa, cioè i grafi *one popular color* non hanno numero cromatico limitato; questo è l'obiettivo di questa sezione. Prima di dimostrare ciò abbiamo bisogno di qualche risultato preliminare.

Definizione 4.13. Sia $X = (V, E)$ un grafo. Un sottoinsieme $M \subseteq E$ è un *matching* se ogni vertice di V è un estremo di al più un arco di M, ovvero: $\forall e, f \in M,\ e \cap f = \emptyset$. Un matching M si dice *perfetto* se $|M| = \frac{|V|}{2}$, cioè ogni vertice è un estremo di uno e un solo arco di M.

Notare che la definizione di matching è il corrispettivo per gli archi della definizione di insieme indipendente. Prima di enunciare il prossimo teorema ricordiamo il *pigeonhole principle* (o *principio dei cassetti*) nella versione generale tratta da [8]:

Pigeonhole Principle/Principio dei cassetti. *Siano n e m due interi positivi con $n > m$. Allora se n oggetti sono distribuiti in m insiemi ("contenitori"), allora un insieme contiene almeno $\lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor + 1$ oggetti.*

Il seguente teorema è un caso particolare di [6, Theorem 1] per i grafi non contenenti triangoli (cioè cicli di lunghezza 3). Esso fu sviluppato indipendentemente da Blanche Descartes (pseudonimo di W. Tutte) e da A. Zykov.

Teorema 4.14. *Per ogni intero positivo k, esiste un grafo Γ_k che non contiene triangoli e tale che $\chi(\Gamma_k) \geq k$.*

Dimostrazione. Si procede per induzione su k. Sia Γ_1 il grafo con un solo vertice, chiaramente soddisfa le condizioni richieste dal teorema.
Sia ora $k \geq 1$. Supponiamo che Γ_k non contenga triangoli e verifichi $\chi(\Gamma_k) \geq k$. D'ora in poi scriviamo $\Gamma = \Gamma_k$ e sia n il numero dei vertici di tale grafo.
Sia X un insieme (di vertici) di cardinalità $k(n-1)+1$ e consideriamo per ogni sottoinsieme $Y \subseteq X$ di cardinalità n una copia isomorfa Γ_Y di Γ. Inoltre collego ogni vertice di Γ_Y a Y tramite un matching perfetto E_Y (collego cioè ogni vertice di Γ_Y con uno e un solo elemento di Y).
Denotiamo con Γ_{k+1} il grafo che ha come vertici gli elementi di X e i vari vertici dei Γ_Y al variare di $Y \subseteq X,\ |Y| = n$ e come archi gli archi dei vari Γ_Y e quelli dei matching E_Y (sempre al variare di $Y \subseteq X,\ |Y| = n$). Notiamo che la

costuzione di Γ_{k+1} non è univoca in quanto la scelta dei matching è arbitraria. Mostriamo ora i primi tre grafi di questa costruzione:

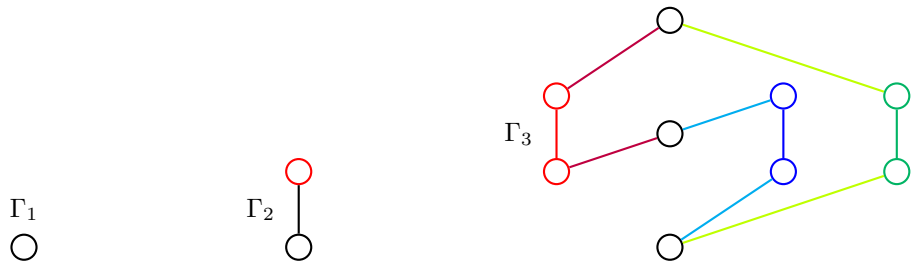


Figura 4.2: I primi tre grafi della costruzione. Per il secondo grafo, X_1 ha cardinalità $1(1-1)+1=1$ (in questo caso $k=1=n$), quindi c'è un unico sottoinsieme di X_1 di cardinalità $n=1$. Il grafo Γ_2 è pertanto K_2. Per costruire Γ_3, X_2 ha cardinalità $2(2-1)+1=3$ (in questo caso $k=2=n$) e ha dunque $\binom{3}{2}=3$ sottoinsiemi di cardinalità $n=2$. In rosso, blu e verde sono disegnate le copie di Γ_2 corrispondenti ai vari sottoinsiemi di X_2, i matching sono colorati rispettivamente in viola, ciano e lime. Osserviamo quindi che (questo) Γ_3 è un ciclo di ordine 9, C_9.

Mostriamo che Γ_{k+1} non contiene triangoli. Notiamo anzitutto che X è un insieme indipendente e che se $Y \neq Y'$ (con $Y, Y' \subseteq X$, entrambi di cardinalità n), allora Γ_Y e $\Gamma_{Y'}$ non sono collegati da archi. Quindi se per assurdo Γ_{k+1} contenesse triangoli, essi dovrebbero avere o tutti e tre i vertici in uno dei Γ_Y, oppure un vertice in X e gli altri due in un Γ_Y. Ma la prima opzione non è possibile in quanto Γ_Y è isomorfo a Γ, che per ipotesi induttiva non contiene triangoli; mentre la seconda non si può verificare in quanto ciò implicherebbe che esistono due elementi di un Γ_Y adiacenti a uno stesso $y \in Y$ e ciò è impossibile per costruzione (abbiamo collegato Γ_Y a Y tramite un matching).
Dimostriamo infine che $\chi(\Gamma_{k+1}) \geq k+1$, ovvero che Γ_{k+1} non è k-colorabile. Supponiamo per assurdo che lo sia e utilizziamo il *pigeonhole principle*. Interpretiamo come contenitori k colori e come elementi i vertici di X (essi sono quindi $k(n-1)+1$). Allora per il *pigeonhole principle* un contenitore/colore contiene almeno:

$$\left\lfloor \frac{k(n-1)+1-1}{k} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{k(n-1)}{k} \right\rfloor + 1 = n-1+1 = n \text{ elementi.}$$

Dunque ci sono (almeno) n vertici di X che hanno lo stesso colore, dunque esiste un sottoinsieme $\widetilde{Y} \subseteq X$ di cardinalità n che è monocromatico. Ma allora $\Gamma_{\widetilde{Y}}$ (isomorfo a Γ) dovrebbe essere $(k-1)$-colorabile, in contraddizione con l'ipotesi induttiva che $\chi(\Gamma_k) \geq k$. $\square$

Grazie a questo risultato, possiamo ora dimostrare che la Congettura 4.8 è falsa.

Teorema 4.15. ([3, Theorem 3.3]) *Per ogni intero positivo k esiste un grafo* one popular color Γ_k *tale che $\chi(\Gamma_k) \geq k$.*

Dimostrazione. Notiamo che basta dimostrare che i grafi Γ_k della dimostrazione precedente ammettono una colorazione degli archi *one popular color*. Si procede sempre per induzione su k. Chiaramente, Γ_1 è *one popular color* in quanto non ha archi. Supponiamo ora che Γ_k sia *one popular color* e dimostriamo che Γ_{k+1} è *one popular color*. Sia X come nella dimostrazione precedente.
Coloriamo gli archi di ogni Γ_Y, al variare di $Y \subseteq X$, $|Y| = n$, allo stesso modo della colorazione *one popular color* di Γ_k. Coloriamo inoltre gli archi di ogni matching E_Y ognuno con un proprio colore "privato": a ogni matching E_Y associo un colore γ_Y (tutti gli archi di E_Y hanno il colore γ_Y) tale che se $Y \neq Y'$, allora $\gamma_Y \neq \gamma_{Y'}$ e inoltre ogni γ_Y è diverso dai colori utilizzati nella colorazione *one popular color* dei Γ_Y.
Dobbiamo quindi dimostrare che questa colorazione soddisfa (i) e (iii). Notiamo anzitutto che ogni classe di colorazione degli archi è un matching (iterando la costruzione) e ciò implica (i).
Tutti i cicli di Γ_{k+1} che sono contenuti in un Γ_Y hanno un *popular color* (un colore appare almeno due volte) per ipotesi induttiva. Dato che X è un insieme indipendente, ogni altro ciclo deve entrare e uscire da un qualche Γ_Y, ma allora due dei suoi archi sono nello stesso matching E_Y e pertanto hanno il medesimo colore. Ciò dimostra quindi (iii). □

Dunque i grafi *one popular color* non hanno numero cromatico limitato, tuttavia non possiamo concludere nulla per i grafi *no lonely color* e per i grafi di Cayley minimali e semiminimali. Infatti delle varianti deboli della Congettura 4.8 per tali tipologie di grafi rimangono problemi aperti. Alla fine di [3] viene proposto un rafforzamento della versione debole della Congettura 4.8 per i grafi *no lonely color*, essa è la seguente.

Congettura 4.16. ([3, Conjecture 3.4]) *Esiste una funzione $f\colon \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$, con $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tale che se gli archi di un grafo X possono essere colorati in modo tale che il sottografo indotto da qualunque colore abbia grado massimo d e nessun colore appare esattamente una volta in un ciclo di X, allora $\chi(X) \leq f(d)$.*

Quest'ultima congettura per $d = 2$ è proprio la variante debole della Congettura 4.8 e tuttavia è aperta anche per $d = 1$. Osserviamo infine che è un problema aperto anche se la Congettura 4.12 vale per i grafi *one popular color*.

Bibliografia

[1] László Babai. "Chromatic number and subgraphs of Cayley graphs". In: *Theory and Applications of Graphs: Proceedings, Michigan May 11–15, 1976*. Springer, 1976, pp. 10–22.

[2] László Babai. "Automorphism groups, isomorphism, reconstruction". In: *Handbook of Combinatorics*. USA: University of Chicago, 1994, pp. 1447–1540.

[3] Ignacio García-Marco e Kolja Knauer. "Coloring minimal Cayley graphs". In: *European Journal of Combinatorics* 125 (2025), p. 104108.

[4] Robert M. Guralnick e William M. Kantor. "Probabilistic generation of finite simple groups". In: *Journal of Algebra* 234.2 (2000), pp. 743–792.

[5] I. Martin Isaacs. *Finite group theory*. Vol. 92. Graduate studies in mathematics. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2008. ISBN: 9780821843444.

[6] Jaroslav Nešetril. "A combinatorial classic—sparse graphs with high chromatic number". In: *Erdos Centennial, Springer* (2013), pp. 383–407.

[7] Gert Sabidussi. "Graphs with Given Group and Given Graph-Theoretical Properties". In: *Canadian Journal of Mathematics* 9 (1957), pp. 515–525.

[8] Wikipedia contributors. *Pigeonhole principle — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Ultimo accesso: 13.08.2025. 2025. URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Pigeonhole_principle`.