Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

Laurea triennale in Ingegneria dell'Informazione

Modellizzazione e controllo di un reattore nucleare

Candidato

Leonardo Soncin Florio

Matricola 2031124

Relatrice

Ch.ma Prof.ssa Maria Elena Valcher

Università degli Studi di Padova

Anno accademico
2023/2024
27/09/2024

A zia Cristiana,
la mia sostenitrice numero uno,
anche da lassù.

Sommario

Nella prima parte di questa tesina viene presentato il concetto di fissione nucleare, elencando e descrivendo i principali tipi di reattori nucleari più diffusi. Successivamente viene presentata la parte di modellizzazione e il progetto di un controllore di reazione per un reattore, assumendo per esso un modello linearizzato attorno ad uno specifico stato di equilibrio. Il controllore permette il soddisfacimento di alcune specifiche relative alle prestazioni nell'inseguimento a regime, con vincoli nel transitorio sulla sovraelongazione massima, e alla reiezione di disturbi agenti sul sistema.

Indice

Lista delle figure **xi**

1 Introduzione **1**
1.1 La fissione nucleare 1
1.2 Il reattore nucleare 2
1.2.1 Reattori ad acqua bollente (BWR) 5
1.2.2 Reattori ad acqua pressurizzata (PWR) 6
1.3 Tipi di combustibili 7

2 Modello di un reattore **9**
2.1 Descrizione dei parametri 9
2.1.1 Fattore di criticità e reattività 9
2.1.2 Tempo di vita dei neutroni 10
2.1.3 Neutroni prompt e ritardati 11
2.1.4 Densità di neutroni 12
2.2 Costruzione del modello 13
2.3 Analisi del sistema 15
2.3.1 Punti d'equilibrio 15
2.3.2 Traiettoria limite e risposta impulsiva 17
2.3.3 Linearizzazione 19
2.3.4 Stabilità 21

3 Progetto di un controllore **23**
3.1 Richiamo ai controlli automatici 23
3.2 Specifiche di controllo 24
3.3 Progettazione 25
3.3.1 Pre-controllore 26
3.3.2 Rete anticipatrice 31

3.3.3 Attenuazione dei disturbi 35
3.3.4 Simulazione con Simulink 38

4 Barre di controllo e potenza **43**

5 Sicurezza ed incidenti **45**
5.0.1 Incidente di Chernobyl 46

6 Conclusioni **49**

Bibliografia **51**

Ringraziamenti **53**

Lista delle figure

1.1 Fissione nucleare nell'uranio 2
1.2 Ruolo dei moderatori e delle barre di controllo 3
1.3 Evoluzione delle centrali nucleari 4
1.4 Reattore BWR 5
1.5 Reattore PWR 6
1.6 Esempio di barre di combustibile 7

2.1 Neutroni prompt e ritardati nella fissione nucleare 11
2.2 Componenti della risposta impulsiva del modello ottenute tramite MATLAB 18

3.1 Schema a blocchi in retroazione unitaria negativa 23
3.2 Schema a blocchi in retroazione unitaria negativa con la presenza di disturbi 24
3.3 Grafico del segnale di riferimento 25
3.4 Risposta al gradino con integratore (arancione) e senza (azzurro) 26
3.5 Diagrammi di Bode in catena aperta di $C_{pre}(s)G_{\rho}(s)$ 29
3.6 Risposte al gradino dei sistemi retroazionati $W_{PI}(s)$ (arancione) e $W_{PRE}(s)$ 30
3.7 Diagrammi di Bode in catena aperta di $C_{PI}(s)G_{\rho}(s)$ 31
3.8 Risposte al gradino dei sistemi retroazionati W_{PI} (arancione) e W_{ANT} (azzurro) 33
3.9 Diagrammi di Bode in catena aperta di $C_a(s)G_{\rho}(s)$ 34
3.10 Diagrammi di Bode in catena aperta di $C_{ANT}(s)G_{\rho}(s)$ 34
3.11 Schema a blocchi con disturbi 35
3.12 Risposta ai disturbi in catena chiusa con ampiezza unitaria e pulsazione ω_d 37
3.13 Diagrammi di Bode in catena aperta di $G_{PI}(s)$ 37

3.14 Setup contenente controllore PI e modello del sistema reattore. . . 38
3.15 Densità misurata in uscita senza disturbi 39
3.16 Densità misurata in uscita senza disturbi (ingrandimento) 39
3.17 Errore tra riferimento e uscita 40
3.18 Densità misurata in uscita 41
3.19 Densità misurata in uscita (ingrandimento) 41

4.1 Sezione di una barra di controllo 43

5.1 Resti del reattore n.4 46

1

Introduzione

1.1 La fissione nucleare

Per **fissione nucleare** si intende una reazione nella quale il nucleo di un atomo si frammenta in due parti di eguale massa, sprigionando un'elevata quantità di energia ed emettendo un certo numero di neutroni liberi (di solito due o tre). La fissione interessa prevalentemente nuclei di atomi con numero di massa atomica superiore a 100 ed è molto più facile osservarne gli effetti in quelli aventi un numero di massa intorno al valore di 230.

Il fenomeno di emissione di neutroni liberi si deve al fatto che i nuclei degli atomi che costituiscono il materiale fissile sono caratterizzati da un numero medio di neutroni nettamente maggiore di quello dei nuclei più leggeri. Quando un nucleo si rompe in due frammenti, i neutroni in eccesso vengono rilasciati.

Nel momento in cui avviene la fissione di questi nuclei, circa 200 MeV di energia a riposo viene convertita in energia cinetica dei frammenti di fissione e dei neutroni emessi.

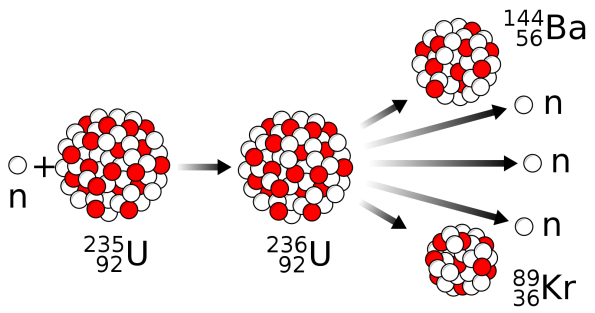

Figura 1.1: Fissione nucleare nell'uranio

I frammenti di fissione a loro volta urtano gli atomi circostanti, perdendo rapidamente la loro energia cinetica che a sua volta viene convertita in energia di tipo termico nel mezzo circostante alla reazione.

I frammenti, inoltre, presentano massa minore rispetto al nucleo iniziale, possedendo però un eccesso di neutroni. A causa di ciò, tali nuclei incorrono in decadimenti di tipo β^- e γ fino alla formazione di nuclei stabili con massa identica. Questi nuclei prendono il nome di **prodotti di fissione**.

Come prima accennato, è importante evidenziare che durante il processo di fissione vengono emessi, assieme ai frammenti precedentemente citati, anche dei neutroni liberi di due tipi. Quelli emessi immediatamente dopo il fenomeno prendono il nome di **neutroni prompt**, invece quelli emessi dopo un tempo maggiore **neutroni ritardati**.

Sia i prodotti di fissione che i due tipi di neutroni hanno un ruolo di fondamentale importanza nella descrizione del modello di un reattore nucleare, trattato nel Capitolo due.

1.2 Il reattore nucleare

Un reattore nucleare è un sistema nel quale viene utilizzata la fissione nucleare per produrre, in condizioni controllate, energia da utilizzare per scopi industriali (come la produzione di energia elettrica, teleriscaldamento, conversione di materiale fertile in fissile...) oppure per scopi di ricerca o medici (come la produzione di radioisotopi, la produzione di nuclidi, lo studio del comportamento dei materiali all'esposizione di radiazioni...).

Ciò che accomuna però la stragrande maggior parte di essi è la presenza di elementi quali **moderatori** e **barre di controllo**.

I **moderatori** hanno il compito di rallentare (ma non catturare!) i neutroni veloci, andando a massimizzare la probabilità degli stessi di scontrarsi con i nuclei. Due esempi di moderatori sono la grafite e l'acqua pesante.

Il controllo di reazione, invece, viene fatto mediante le cosiddette **barre di controllo**, di solito composte da metalli come cadmio o indio. Regolando la posizione delle barre nel nocciolo, si otterrà una riduzione o un aumento della velocità di reazione, variando la quantità di neutroni catturati. Il loro utilizzo verrà approfondito nel capitolo riguardante i sistemi di controllo.

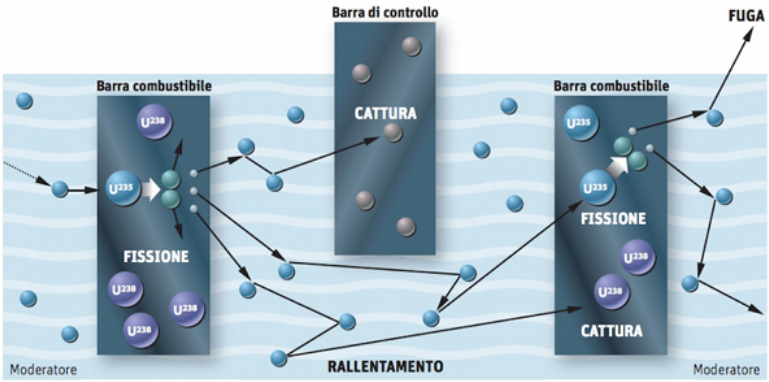

Figura 1.2: Ruolo dei moderatori e delle barre di controllo

Più specificatamente, il soggetto dell'elaborato sono i reattori industriali/-commerciali. Il loro scopo risulta essere quello di produrre vapore in pressione riuscendo ad alimentare il gruppo turbina-alternatore della centrale, permettendo dunque la generazione di elettricità, immessa successivamente nella rete elettrica.

Nei numerosi decenni di sviluppo, le centrali nucleari hanno passato diverse generazioni permettendo il miglioramento dei sistemi di controllo e di sicurezza, rendendo le centrali sempre più sicure ed efficienti.

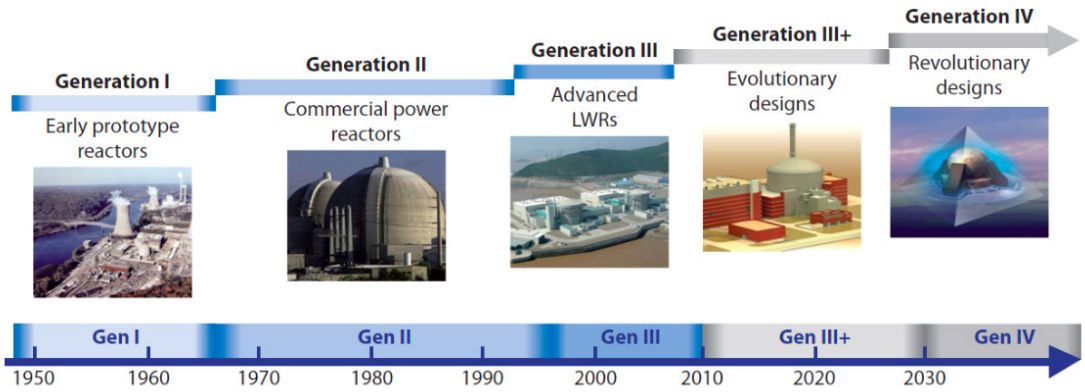

Figura 1.3: Evoluzione delle centrali nucleari

Non esiste un unico criterio per suddividere e classificare i reattori nucleari, dato che possono essere suddivisi in base a: energia dei neutroni, tipologia di combustibile adoperato, posizione del combustibile, tipo di moderatore e di refrigerante. Tra le varie tecnologie attualmente disponibili troviamo ad esempio reattori: ad alta temperatura (HTR), ad acqua pesante (HWR) e veloci (FBR).

La famiglia di reattori che nel tempo ha riscosso più successo risulta però essere quella degli **LWR**, ossia **reattori nucleari ad acqua leggera**, costituendo il 90% dei reattori commerciali installati. Ciò che caratterizza questa tipologia di reattori è l'utilizzo di acqua (non pesante) sia come moderatore, sia come liquido refrigerante.

Gli LWR si classificano in: **reattori ad acqua bollente** (**BWR**) e **reattori ad acqua pressurizzata** (**PWR**).

1.2.1 Reattori ad acqua bollente (BWR)

I reattori ad acqua bollente risultano essere uno dei tipi di reattore più "semplici" da realizzare, questo perché il vapore immesso nella turbina, viene prodotto direttamente all'interno del nocciolo del reattore. Inizialmente sviluppati negli USA, frutto della collaborazione tra General Electric e Hitachi, nel tempo la loro realizzazione ha interessato diversi stati come Germania, Svezia e Giappone arrivando a ricoprire una vasta fetta nel panorama mondiale dei reattori commerciali/industriali installati, attorno al 30%.

In breve, il funzionamento è il seguente: una portata d'acqua pressurizzata attraversa il nocciolo, diventando in parte vapore che, una volta separato e deumidificato (andando ad eliminare dunque le particelle d'acqua residue), passa direttamente nel gruppo turbina-alternatore permettendo la generazione di energia elettrica. Il vapore passa poi attraverso un sistema di condensazione tornando dunque acqua e rientrando infine in circolo al sistema.

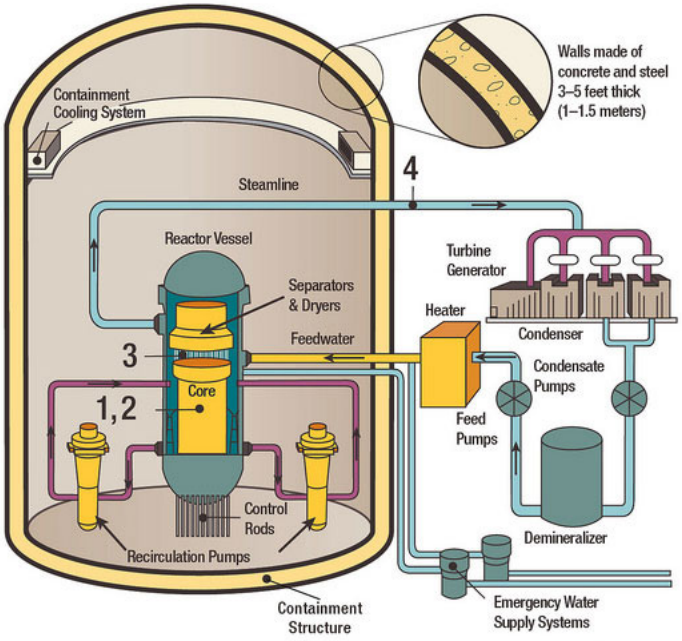

Figura 1.4: Reattore BWR

1.2.2 Reattori ad acqua pressurizzata (PWR)

I reattori ad acqua pressurizzata risultano essere i tipi di reattori più diffusi a livello mondiale, ricoprendo una percentuale del 60%. Sono molto simili ai BWR, con la differenza che il vapore non viene generato nel nocciolo, ma indirettamente da un generatore di vapore, sfruttando il trasferimento di calore tra ciclo primario (nocciolo-generatore di vapore) e secondario (generatore di vapore-turboalternatore). L'acqua che giunge nel nocciolo ha una pressione pari a più del doppio di quella che arriva in un BWR, mediante l'utilizzo di un pressurizzatore. In questo modo il punto d'ebollizione aumenta, non permettendo l'ebollizione dell'acqua nel circuito primario (legge di Clausius–Clapeyron).

Il calore viene dunque trasferito al generatore di vapore che, permette la generazione di vapore sfruttando il circuito secondario.

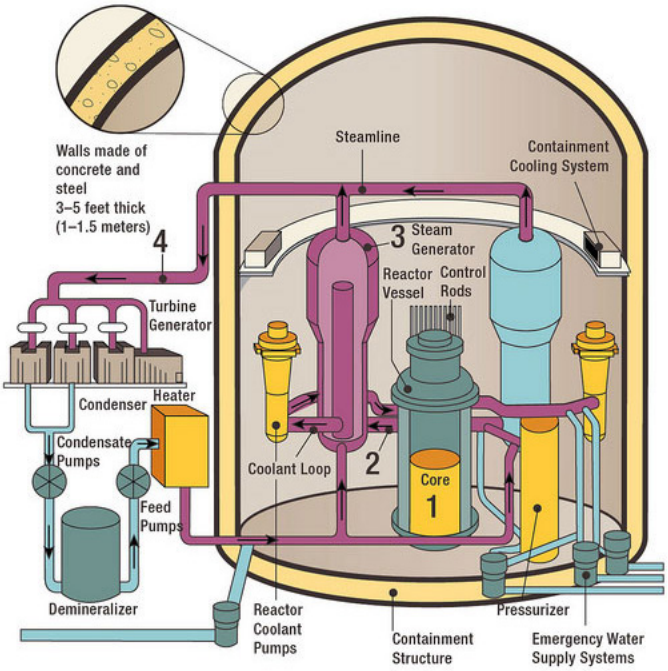

Figura 1.5: Reattore PWR

1.3 Tipi di combustibili

Le due grandi famiglie di combustibili per reattori nucleare, risultano essere liquidi e solidi. A prescindere dalla tipologia, di norma i combustibili comprendono almeno una di queste specie fissili: ^{233}U, ^{235}U, ^{239}Pu o ^{241}Pu

Nei reattori commerciali di potenza come gli LWR da noi analizzati, risultano essere utilizzati esclusivamente combustibili solidi. Questo è dovuto al fatto che i liquidi, nonostante posseggano numerosi vantaggi come ad esempio costo ridotto di produzione e possibilità di "rigenerazione" continua, risultano essere difficili da immagazzinare, possiedono una densità energetica inferiore ai solidi ed inoltre risultano essere altamente corrosivi.

Tra i tipi più sviluppati di combustibili solidi troviamo: combustibili metallici puri e/o a leghe, a dispersione e ceramici. I combustibili di tipo ceramico risultano però essere quelli utilizzati nella quasi totalità dei reattori di potenza grazie al loro punto di fusione molto alto, assenza di trasformazione di fase e stabilità. Inoltre, risultano essere inerti verso i refrigeranti più utilizzati.

Figura 1.6: Esempio di barre di combustibile

I **pellets** costituiscono le barre di combustibile che a loro volta vengono raggruppate in dei fasci.

Esistono diversi materiali utilizzati per creare i pellets. Allo stato dell'arte tra i più popolari troviamo quelli a base di biossido di uranio UO_2 (e/o a biossido di plutonio PuO_2), seguiti da quelli ancora in via di sviluppo a base di carburi di uranio come UC, U_2C_3, UC_2 e carburi misti di uranio e plutonio.

2

Modello di un reattore

2.1 Descrizione dei parametri

Prima di introdurre i parametri del modello di un reattore, è bene fare le seguenti premesse. Il modello analizzato in questo elaborato è una versione approssimata ma comunque sufficientemente accurata per la progettazione di un controllore. Un'analisi più dettagliata, richiederebbe la risoluzione di equazioni del trasporto di neutroni, le quali non ammettono soluzioni numeriche esatte, rendendo impraticabile il progetto di un sistema di controllo.

Inoltre, vengono considerate le seguenti ipotesi:

- Il nocciolo del reattore all'equilibrio critico è considerato come un contenitore di gas neutronico
- Tutti i neutroni hanno stessa velocità e distribuzione spaziale.

2.1.1 Fattore di criticità e reattività

Tra i parametri chiave, troviamo il fattore di criticità k e la reattività ρ.

Il fattore k indica il grado di criticità del reattore. Specificatamente:

- $k = 1$ Critico
- $k > 1$ Supercritico
- $k < 1$ Subcritico

Questo parametro torna utile, perché, se moltiplicato per la densità di neutroni *n(t)* in un determinato istante, permette di conoscerne il valore un tempo di ciclo neutronico dopo.

Ciò che realmente però interessa per la successiva realizzazione del controllore, è però la reattività:

$$\rho = \frac{k-1}{k} \tag{2.1}$$

dato che viene utilizzata come ingresso del sistema reattore preso in considerazione. Essa, come il fattore di criticità, ha tre stati possibili:

- $\rho = 0$ Critico
- $\rho > 0$ Supercritico
- $\rho < 0$ Subcritico

Utilizzare la reattività anziché il fattore di criticità risulta più pratico in fisica nucleare, dato che permette di valutare la "deviazione" di k dalla criticità, rendendo più immediata l'analisi dello stato del reattore. Uno dei modi per comandare la reattività è sicuramente quello di inserire (decremento di ρ) o estrarre (incremento di ρ) le barre di controllo.

2.1.2 Tempo di vita dei neutroni

Il tempo di vita l è l'intervallo di tempo medio, che intercorre tra l'istante di generazione dei neutroni e il loro assorbimento. Il valore di tale parametro non dipende solo dal tipo di reattore preso in considerazione, ma è inoltre soggetto a variazioni a seconda delle varie condizioni del reattore in quel preciso momento. Ciò rende difficile trovarne un effettivo valore costante utilizzabile per la modellizzazione e dunque si definisce l_e all'equilibrio:

$$l_e = k\, l_* \tag{2.2}$$

dove l_* è detto tempo di vita invariante dei neutroni e dipende esclusivamente dal tipo di reattore, mentre invece k è sempre il fattore di criticità. Molte volte, essendo k molto vicino ad 1, l_e e l_* quasi coincidono, permettendo dunque un valore di l approssimabile ad uno costante.

2.1.3 Neutroni prompt e ritardati

Il tempo di ciclo dei neutroni C è l'intervallo di tempo medio in cui i neutroni vengono generati. Se tutti i neutroni fossero emessi dal fenomeno di fissione, C corrisponderebbe al tempo di vita l. Si può dunque creare la seguente classificazione:

- **Neutroni prompt**: emessi immediatamente dopo la reazione di fissione
- **Neutroni ritardati**: emessi per decadimento radioattivo dei precursori, ossia gli isotopi instabili presenti dentro il nocciolo.

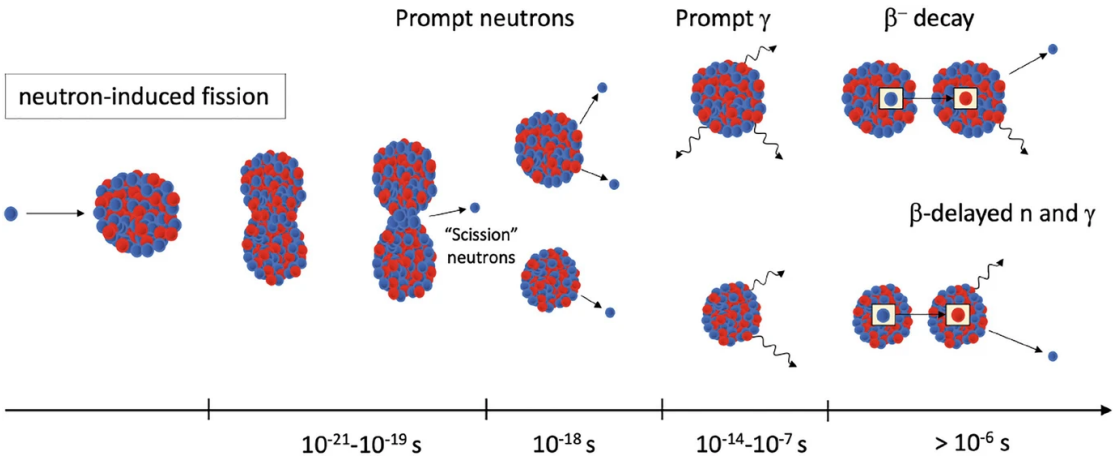

Figura 2.1: Neutroni prompt e ritardati nella fissione nucleare

Si introduce dunque β, ossia il parametro di frazione dei precursori. Questo parametro adimensionale permette di conoscere, dato un insieme n^* di neutroni, il numero di neutroni ritardati presenti, uguale a βn^*. Il numero di neutroni prompt, invece, si ricava per differenza ossia $(1-\beta)\, n^*$.
Da quanto appena detto si evince dunque che, dato M il numero di precursori presi in considerazione (nella pratica, si considera un insieme che va tra i sei ed i nove precursori, ma per semplicità ci limiteremo a M = 2), la frazione β può essere considerata come:

$$\beta = \sum_{i=1}^{M} \beta_i \tag{2.3}$$

dove β_i risulta essere la fazione del precursore i-esimo. Una volta chiara la differenza tra i due tipi di neutroni, torna utile indicare rispettivamente con c_i e λ_i la densità [nuclei/cm^3] e la costante di decadimento [s^{-1}] dell'i-esimo

precursore degli M considerati. La variazione di densità dell'iesimo precursore è dunque:

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = -\, c_i(t)\lambda_i \tag{2.4}$$

Assumendo come condizioni iniziali per $t = 0, c_i(0) = c_{0i}$ risolvendo l'equazione differenziale di primo ordine, si ottiene:

$$c_i(t) = c_{0i}e^{-\lambda_i t} \tag{2.5}$$

Si noti che, la *costante di tempo* τ_i risulta essere l'inverso di quella di decadimento.

Ricapitolando, nel reattore sono prodotti un gruppo di neutroni prompt ed M gruppi di neutroni ritardati. I primi con tempo di vita l, i secondi sempre con tempo di vita l e con però un ritardo dato da τ_i. Grazie a queste informazioni, e considerando *n(t)* come la densità totale di neutroni, è possibile risalire al tempo di ciclo C nominato all'inizio del paragrafo.

$$C(t) = l + \frac{1}{n(t)} \sum_{i=1}^{M} \tau_i (l\lambda_i c_i(t)) \tag{2.6}$$

$$C(t) = l \left(1 + \frac{1}{n(t)} \sum_{i=1}^{M} c_i(t) \right) \tag{2.7}$$

Se il reattore si trova in equilibrio critico, ossia lo stato in cui in assenza di ingresso esterno, ogni singola fissione a sua volta ne causa una soltanto successiva, permettendo l'autosostenimento della reazione totale, si ottiene che $\beta_i = \frac{l\lambda_i c_i(t))}{n(t)}$ e dunque il tempo di ciclo risulta essere:

$$C_e(t) = l_e + \sum_{i=1}^{M} \tau_i \beta_i \tag{2.8}$$

2.1.4 Densità di neutroni

Un ulteriore aspetto da tenere in considerazione è la **densità di neutroni** precedentemente citata. Ricordiamo che *n(t)*, dopo un tempo di ciclo C è esprimibile come:

$$n(t + C) = kn(t) \tag{2.9}$$

La differenza tra prima e dopo il ciclo risulta dunque:

$$n(t + C) - n(t) = kn(t) - n(t) = (k - 1)n(t) \tag{2.10}$$

Volendo esprimerla come velocità di variazione della densità dei neutroni si ottiene:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{n(t)}{C} \tag{2.11}$$

Assumendo $k = c$ con $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $n(0^+) = n_0$ si ha per ogni t $\geq$ 0:

$$n(t) = n_0 e^{t/T_s} \tag{2.12}$$

Dove $T_s = \frac{k-1}{C}$ e viene definito come **tempo di periodo stabile**

2.2 Costruzione del modello

Una volta presentati tutti i parametri di un possibile modello, è possibile ricavare le equazioni di stato che lo descrivono. Le due equazioni di stato sono quelle che riguardano la variazione di densità dei precursori e dei neutroni.

Come prima cosa si ha necessità di "aggiustare" l'equazione di variazione di densità dei precursori, non solo considerando tutti gli M elementi ma aggiungendo anche il contributo che i neutroni ritardati stessi apportano all'aumento di concentrazione in un tempo l. Se non considerassimo ciò, la reazione non potrebbe essere "a catena", dato che la variazione di densità sarebbe sempre negativa causa decadimento. Inoltre, essendoci più precursori, ognuno avrà ovviamente la propria equazione di stato:

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i k}{l} n(t) - \lambda_i c_i(t) \tag{2.13}$$

Per quanto riguarda la densità dei neutroni, possiamo assumere che, dopo un periodo di vita l si abbia:

$$n(t+l) = (1-\beta)kn(t) + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i c_i(t) l \tag{2.14}$$

L'utilizzo di l anziché di $C(t)$ nell'equazione di densità neutronica, permette di considerare separatamente i due tipi di neutroni, dato che C comprenderebbe il tempo totale di generazione sia dei prompt che dei ritardati.
La variazione di $n(t)$ può dunque essere scritta come:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{n(t+l) - n(t)}{l} = \frac{(1-\beta)kn(t) - n(t)}{l} + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i c_i(t) \tag{2.15}$$

e ricordando che $\rho = \frac{k-1}{k}$ si ottiene

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{(\rho(t) - \beta)n(t)}{l} + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i c_i(t) \tag{2.16}$$

Il modello finale è dunque:

$$\begin{cases} \dfrac{dn(t)}{dt} = \dfrac{(\rho(t) - \beta)n(t)}{l} + \displaystyle\sum_{i=1}^{M} \lambda_i c_i(t) + q(t) \\ \dfrac{dc_i(t)}{dt} = \dfrac{\beta_i k}{l} n(t) - \lambda_i c_i(t) \end{cases} \tag{2.17}$$

Alla prima equazione di stato, è stato aggiunto inoltre un nuovo termine di ingresso (che non dipende dal reattore in sé) $q(t)$, ossia la densità di neutroni provenienti da una sorgente esterna, che permette l'alimentazione della fissione. Si osservi che il modello ottenuto, non risulta essere lineare dato che nella prima equazione, la reattività (ingresso) $\rho(t)$ moltiplica $n(t)$.

2.3 Analisi del sistema

Una volta ottenuto il modello, vengono presentate quattro importanti fasi di analisi del modello, ossia la ricerca dei punti di equilibrio, lo studio della risposta impulsiva, la linearizzazione attorno a un suo punto di equilibrio ad ingresso costante e l'analisi della stabilità dell'equilibrio in un ipotetico scenario corrispondente ai valori dei parametri di modello riportati a lato.

$$\begin{cases} M = 2 \\ l = 20\mu s \\ \beta_1 = 0.000896 \\ \beta_2 = 0.000182 \\ \lambda_1 = 1.4s^{-1} \\ \lambda_2 = 3.87s^{-1} \end{cases} \tag{2.18}$$

2.3.1 Punti d'equilibrio

Durante l'analisi di un sistema dinamico è importante trovare i punti d'equilibrio ad ingresso costante di quest'ultimo, ossia quei punti nei quali lo stato di tale rimane ancorato in presenza di una sollecitazione in ingresso costante e di specifico valore. Per lo studio dei punti d'equilibrio si assume che $\rho(t) = 0$. Questo risulta importante perché, il reattore è critico solo con $\rho(t) = 0$ (come indicato nei paragrafi precedenti). Con un valore inferiore, la reazione non riuscirebbe ad autosostenersi (subcritico), invece un valore superiore porterebbe ad un aumento esponenziale del numero di neutroni (supercritico). Avendo l'ingresso $\rho(t) = 0$, la non linearità della prima equazione di stato sparisce ed è dunque possibile rappresentarlo direttamente in forma matriciale:

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{l} & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \frac{\beta_1}{l} & -\lambda_1 & 0 \\ \frac{\beta_2}{l} & 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{2.21}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

sostituendo i parametri con i valori da noi utilizzati, si ottiene:

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{539}{10} & \frac{7}{5} & \frac{387}{100} \\ \frac{224}{5} & -\frac{7}{5} & 0 \\ \frac{91}{10} & 0 & -\frac{387}{100} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Per trovare l'insieme di punti d'equilibrio è necessario trovare il $kerF$, ossia il *kernel* del sistema (avendo $\rho = 0$, si avrà $k = 1$):

ottenendo le seguenti soluzioni:

$$x_{eq} \in \left\{ \left[\tfrac{387}{910} c_2, \quad \tfrac{6192}{455} c_2, \quad c_2 \right]^{\top}, c_2 \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2.24}$$

Esistono quindi infiniti punti d'equilibrio (si poteva notare anche dal fatto che il determinante di F risulta essere pari a zero).

2.3.2 Traiettoria limite e risposta impulsiva

Per riuscire a delineare lo stato in cui il reattore si trova all'equilibrio critico, è necessario valutare il valore limite a cui lo stato del sistema si assesta, partendo dallo stato nullo, quando gli viene applicato un ingresso impulsivo. In altre parole, cerchiamo il valore a regime della risposta impulsiva (intesa come risposta dello stato, e non dell'uscita, all'impulso). Si assume che l'ingresso $q(t)$ sia impulsivo, andando a simulare i neutroni che, provenienti da una sorgente esterna all'istante iniziale, daranno il via alla fissione nucleare bombardando i nuclei degli isotopi presenti nel nocciolo.

Considerando tutte e tre le variabili di stato come uscite, è possibile attraverso le matrici di stato, ricavare le tre funzioni di trasferimento nel dominio di Laplace $G_n(s)$, $G_{c_1}(s)$ e $G_{c_2}(s)$ che mettono in relazione le uscite del sistema e l'ingresso $q(t)$.

$$G_n(s) = H_{1,:}(sI - F)^{-1}G_{:,2} = \frac{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}{s(s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\beta}{l})s + (\lambda_1\lambda_2 + \frac{\beta_1\lambda_2+\beta_2\lambda_1}{l}))} \tag{2.25}$$

$$G_{c_1}(s) = H_{2,:}(sI-F)^{-1}G_{:,2} = \frac{\beta_1}{l}\frac{(s+\lambda_2)}{s(s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\beta}{l})s + (\lambda_1\lambda_2 + \frac{\beta_1\lambda_2+\beta_2\lambda_1}{l}))} \tag{2.26}$$

$$G_{c_2}(s) = H_{3,:}(sI-F)^{-1}G_{:,2} = \frac{\beta_2}{l}\frac{(s+\lambda_1)}{s(s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\beta}{l})s + (\lambda_1\lambda_2 + \frac{\beta_1\lambda_2+\beta_2\lambda_1}{l}))} \tag{2.27}$$

ottenendo le espressioni numeriche:

$$G_n(s) = \frac{(s+1.4)(s+3.87)}{s(s^2 + 53.9s + 191.534)} \tag{2.28}$$

$$G_{c_1}(s) = 44.8\frac{(s+3.87)}{s(s^2 + 53.9s + 191.534)} \tag{2.29}$$

$$G_{c_2}(s) = 9.1\frac{(s+1.4)}{s(s^2 + 53.9s + 191.534)} \tag{2.30}$$

Utilizzando il **teorema del valore finale** per tutte e tre le precedenti funzioni di trasferimento, è possibile calcolare la traiettoria limite, ossia il valore a regime

delle risposte impulsive (ricordando che la trasformata di Laplace di $\delta(t)$ è 1):

$$n_{lim} = \lim_{s \to 0^+} sG_n(s) \tag{2.31}$$

$$c_{1_{lim}} = \lim_{s \to 0^+} sG_{c_1}(s) \tag{2.32}$$

$$c_{2_{lim}} = \lim_{s \to 0^+} sG_{c_2}(s) \tag{2.33}$$

ottenendo dunque:

$$X_{lim} = [0.0283, 0.9056, 0.0665]^T \tag{2.34}$$

Il grafico della risposta all'impulso, dimostra quanto appena enunciato riguardo la traiettoria limite.

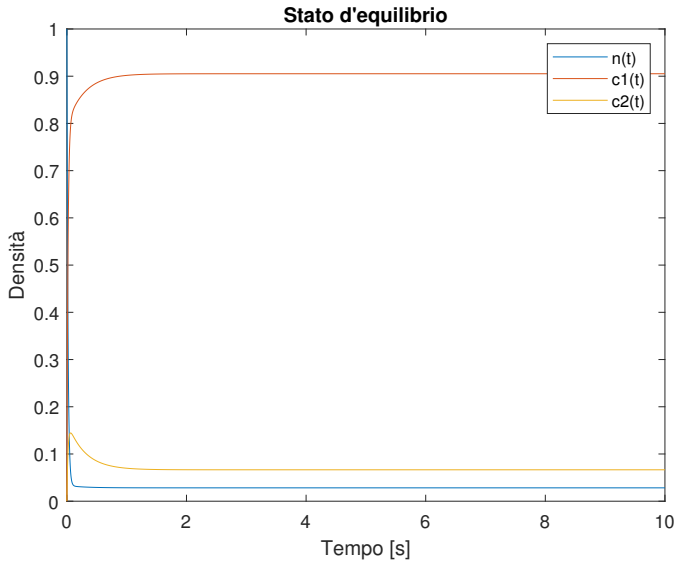

Figura 2.2: Componenti della risposta impulsiva del modello ottenute tramite MATLAB

La traiettoria di stato costante appena ottenuta, risulta far parte dell'insieme dei punti d'equilibrio precedentemente individuati. Il sistema verrà dunque successivamente linearizzato attorno ad esso nel prossimo paragrafo.

2.3.3 Linearizzazione

Finora si è assunto che l'ingresso di reattività $\rho(t)$ sia nullo, portando in tal modo ad un sistema lineare. L'unica sollecitazione esterna era rappresentata da $q(t)$. La reattività risulta però essere l'ingresso che verrà effettivamente utilizzato per il controllo e, nel momento in cui non è più pari a zero, introduce una non linearità nel sistema.

I punti d'equilibrio sono stati trovati in corrispondenza ad ingressi $\rho(t)$ e $q(t)$ nulli. Per riuscire ad ottenere una funzione di trasferimento utilizzabile per il progetto di un controllore, risulta necessario descrivere il comportamento del sistema attorno ad uno specifico punto d'equilibrio, mediante l'utilizzo di un modello linearizzato, facendo però le seguenti ipotesi:

- La condizione iniziale di partenza del sistema non sia molto distante dal punto d'equilibrio;
- Gli ingressi $\rho(t)$ e $q(t)$ siano piccoli, ma non nulli.

Come punto d'equilibrio, viene presa la traiettoria di stato costante ricavata nel precedente paragrafo, considerando dunque $X_{eq} = [0.0283, 0.9056, 0.0665]$.

In questo modo è possibile ottenere i due Jacobiani calcolati in $(x, \rho, q) = (X_{eq}, 0, 0)$, relativi agli stati e agli ingressi:

$$F^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial n} & \frac{\partial f_1}{\partial c_1} & \frac{\partial f_1}{\partial c_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial n} & \frac{\partial f_2}{\partial c_1} & \frac{\partial f_2}{\partial c_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial n} & \frac{\partial f_3}{\partial c_1} & \frac{\partial f_3}{\partial c_2} \end{bmatrix}_{X_{eq}} = \begin{bmatrix} -\frac{539}{10} & \frac{7}{5} & \frac{387}{100} \\ \frac{224}{5} & -\frac{7}{5} & 0 \\ \frac{91}{10} & 0 & -\frac{387}{100} \end{bmatrix}_{X_{eq}} \tag{2.35}$$

$$G^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_3}{\partial \rho} \\ \frac{\partial f_1}{\partial q} & \frac{\partial f_2}{\partial q} & \frac{\partial f_3}{\partial q} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \frac{n_{eq}}{l} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{(0,0)} \tag{2.36}$$

ottenendo dunque il seguente sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \dfrac{dn(t)}{dt} = \dfrac{\beta}{l} n(t) + \lambda_1 c_1(t) + \lambda_2 c_2(t) + \dfrac{n_{eq}}{l} \rho(t) + q(t) \\ \dfrac{dc_1(t)}{dt} = \dfrac{\beta_1}{l} n(t) - \lambda_1 c_1(t) \\ \dfrac{dc_2(t)}{dt} = \dfrac{\beta_2}{l} n(t) - \lambda_2 c_2(t) \end{cases} \tag{2.37}$$

Essendo $n(t)$ l'obbiettivo del futuro controllo lo assumeremo dunque come l'unica uscita, conseguentemente si ricavano due funzioni di trasferimento, una relativa all'ingresso $\rho(t)$ e una a $q(t)$:

$$G_\rho(s) = H_{1,:}(sI - F^*)^{-1}G^*_{:,1} = \frac{n_{eq}}{l}\frac{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}{s(s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\beta}{l})s + (\lambda_1\lambda_2 + \frac{\beta_1\lambda_2+\beta_2\lambda_1}{l}))} \tag{2.38}$$

$$G_q(s) = H_{1,:}(sI - F^*)^{-1}G^*_{:,2} = \frac{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}{s(s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\beta}{l})s + (\lambda_1\lambda_2 + \frac{\beta_1\lambda_2+\beta_2\lambda_1}{l}))} \tag{2.39}$$

ovvero:

$$G_\rho(s) = \frac{n(s)}{\rho(s)} = 1415\frac{(s+1.4)(s+3.87)}{s(s^2+53.9s+191.534)} \tag{2.40}$$

$$G_q(s) = \frac{n(s)}{q(s)} = \frac{(s+1.4)(s+3.87)}{s(s^2+53.9s+191.534)} \tag{2.41}$$

Per l'analisi della stabilità e per la realizzazione del sistema di controllo presente nel prossimo capitolo, verrà utilizzata la prima funzione di trasferimento, dato che come precedentemente accennato, l'ingresso di controllo risulta essere la reattività.

2.3.4 Stabilità

L'analisi della stabilità per un sistema lineare può essere condotta secondo due punti di vista. Il primo riguarda la stabilità interna e riguarda il comportamento asintotico dei modi del sistema. In questo modo, si riesce a delineare il comportamento a regime del sistema in evoluzione libera, ossia quando non viene applicato alcun ingresso. Il suo studio si basa sul polinomio caratteristico $\det(sI - F)$ dell'intero sistema, permettendo di concludere se il sistema sia instabile, semplicemente stabile o asintoticamente stabile.

- **Stabilità asintotica**: Si definisce asintoticamente stabile un sistema i cui modi elementari tendono asintoticamente a zero. Il suo studio si basa sul polinomio caratteristico $\det(sI-F)$ dell'intero sistema, permettendo di concludere se il sistema sia instabile, semplicemente stabile o asintoticamente stabile. Ciò si verifica se e solo se le radici del polinomio caratteristico $\det(sI - F)$ hanno parte reale negativa, i.e. $Re(s) < 0$.

- **Stabilità semplice**: Si definisce semplicemente stabile un sistema i cui modi rimangono limitati nel tempo. Ciò si verifica se e solo se le radici del polinomio caratteristico $\det(sI - F)$ appartengono al semipiano $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) \leq 0\}$ con la condizione che, nel caso in cui risultino avere $Re(s) = 0$, la loro molteplicità algebrica dovrà coincidere con quella molteplicità geometrica, che è la dimensione dell'autospazio relativo a tale radice, ovvero $ker(sI - F)$. Nel caso in cui non venga rispettata tale condizione, il modo associato risulterà essere divergente.

- **Instabilità**: Si definisce instabile un sistema i cui modi tendono a divergere asintoticamente.

Il secondo tipo di stabilità è quella di tipo BIBO (Bounded Input Bounded Output), che riguarda l'evoluzione (forzata) dell'uscita del sistema nel caso in cui venga applicato un qualunque segnale limitato. Nel nostro caso l'unica uscita risulta essere la densità neutronica $n(t)$. Tale forma di stabilità collegata invece alle proprietà della funzione di trasferimento del processo da controllare. I modi considerati non saranno più tutti quelli del sistema come precedentemente visto, ma solo ed esclusivamente quelli coinvolti nell'espressione della risposta impulsiva.

Considerando una generica funzione di trasferimento espressa come:

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \tag{2.42}$$

dove $n(s)$ e $d(s)$ sono polinomi coprimi, per studiare la BIBO stabilità del sistema di funzione di trasferimento $G(s)$ è sufficiente valutare se tutti gli zeri

del denominatore $d(s)$ sono a parte reale negativa. Interessante notare come, le radici di $d(s)$ siano un sottoinsieme delle radici del polinomio caratteristico $\det(sI - F)$ del sistema. L'asintotica stabilità implica dunque la BIBO.

Tutte le considerazioni fatte finora sulla stabilità risultano essere valide nel caso in cui il sistema sia lineare. In quel caso, infatti, la stabilità è una caratteristica **globale** e fa riferimento al comportamento dell'origine che è sempre punto di equilibrio ad ingresso nullo.

Il sistema preso in considerazione però, non è lineare e presenta in generale più punti di equilibrio. Dunque, l'eventuale stabilità di ciascun punto di equilibrio è una proprietà non più globale ma **locale**, che fa riferimento al comportamento del sistema a partire da una condizione iniziale appartenente ad un intorno del punto di equilibrio stesso.

Sotto opportune ipotesi è possibile studiare la stabilità di un punto di equilibrio per un sistema non lineare ricorrendo al sistema linearizzato attorno a tale punto di equilibrio. L'alternativa sarebbe quella di ricorrere al teorema di Lyapunov per sistemi non lineari.

La peculiarità che ci permette però di utilizzare comunque le regole dei sistemi lineari, deriva dal fatto che sebbene il sistema non sia lineare, il sistema in corrispondenza a ingressi nulli, lo è. Poiché lo specifico punto di equilibrio in esame fa parte di una retta, è evidente che tale punto di equilibrio possa essere al più semplicemente stabile. D'altra parte osservando $\det(sI - F) = s(s^2 + 53.9s + 191.534)$ se ne deduce che il sistema è effettivamente semplicemente stabile ma non asintoticamente stabile e in particolare il punto di equilibrio x_{eq} è punto di equilibrio semplicemente stabile. Per studiare la stabilità BIBO del sistema linearizzato attorno a tale punto di equilibrio prendo in esame la funzione di trasferimento G_ρ:

$$G_\rho(s) = \frac{n(s)}{q(s)} = 1415\frac{(s + 1.4)(s + 3.87)}{s(s^2 + 53.9s + 191.534)} \tag{2.43}$$

Possiamo notare che la presenza del polo nell'origine esclude la BIBO stabilità a priori. Questo conferma l'assenza di asintotica stabilità.

Dopo le considerazioni riguardo alla stabilità, è possibile passare alla progettazione e realizzazione di un sistema di controllo adatto a permettere l'inseguimento di una certa variazione del segnale di riferimento $n(t)$.

3

Progetto di un controllore

3.1 Richiamo ai controlli automatici

Il tipo di schema di controllo sul quale viene basato il nostro progetto è detto in **catena chiusa**, precisamente in **retroazione unitaria negativa**.

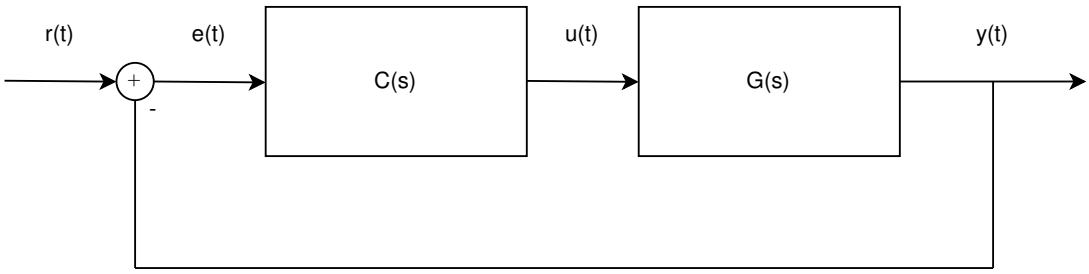

Figura 3.1: Schema a blocchi in retroazione unitaria negativa

Il controllore $C(s)$ riceve in ingresso un errore, dato dalla differenza tra il segnale di riferimento $r(t)$ e l'uscita del sistema $y(t)$, fornita al nodo sommatore mediante una retroazione, in questo caso, unitaria. La funzione di trasferimento in catena aperta è dunque data da $C(s)G(s)$, mentre invece quella finale in catena chiusa è:

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \tag{3.1}$$

La funzione di trasferimento $C(s)$ del controllore sarà dunque composta da un guadagno e da un insieme di poli e zeri, atti a compensare il comportamento del processo di partenza nel modo desiderato.

3.2 Specifiche di controllo

Prima di passare alla progettazione vera e propria del controllore, è giusto presentare le specifiche che il sistema controllato dovrà rispettare.

- **Specifiche dinamiche**: Tempo di assestamento a $t_{s_{5\%}} \leq 1.0s$, Sovraelongazione $M_p \leq 10\%$ in corrispondenza ad un ingresso a gradino;
- **Specifiche statiche**: Errore a regime $e_{rp} = 0$ in corrispondenza ad un ingresso a rampa;
- **Attenuazione ai disturbi**: Attenuazione di almeno $60dB$ su disturbi che agiscono sulla misura di $n(t)$ con pulsazioni maggiori o uguali a $3.5\,10^4 rad/s$.

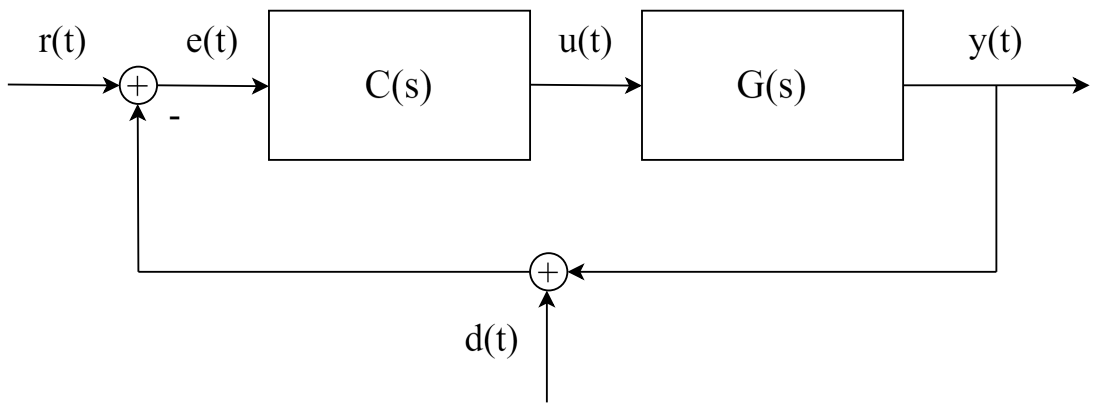

Figura 3.2: Schema a blocchi in retroazione unitaria negativa con la presenza di disturbi

Il segnale di riferimento usato come ingresso nella parte finale del capitolo sarà il seguente:

$$n_{rif}(t) = t\delta_{-1}(t) + (50 - t)\delta_{-1}(t - 50) \tag{3.2}$$

composto da una rampa unitaria per i primi 50secondi, per poi saturare al valore costante 50.

Il segnale scelto evidenzia come, in un ipotetico scenario reale, al reattore venga “chiesto" di raggiungere un determinato valore a regime cautamente e gradualmente.

Nella fase iniziale di progetto verranno invece fatte delle considerazioni riguardo l’inseguimento di segnali canonici quali rampa e gradino per convalidare le specifiche di progetto richieste.

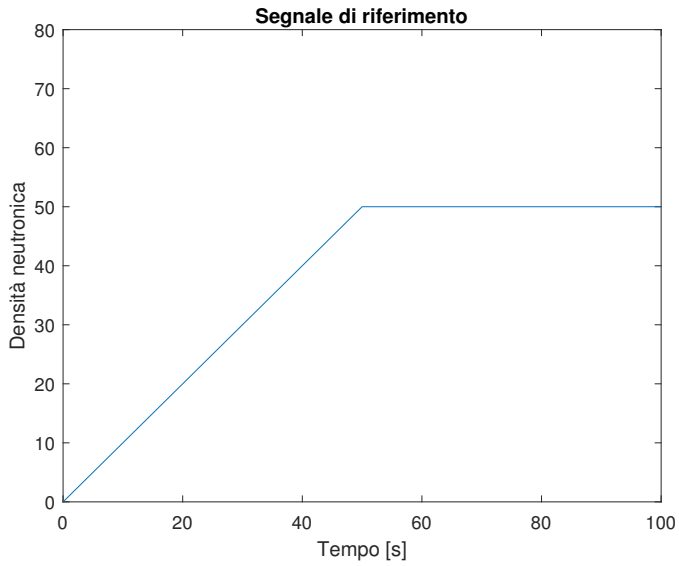

Figura 3.3: Grafico del segnale di riferimento

Il sistema complessivo dovrà risultare abbastanza rapido nell'inseguimento del segnale a rampa per ottenere quanto prima possibile un errore a regime pari a zero.

Si ricorda che, se il sistema complessivo riesce ad inseguire a regime una rampa, l'inseguimento del gradino è garantito. Si rimanda ai seguenti paragrafi per un'analisi più dettagliata riguardo all'incremento del tipo del sistema retroazionato.

3.3 Progettazione

Una volta che gli obbiettivi di controllo risultino ben definiti, è possibile procedere alla fase di progettazione. Per prima cosa, si richiama la funzione di trasferimento in catena aperta trovata nel capitolo di modellizzazione:

$$G_\rho(s) = \frac{n(s)}{\rho(s)} = 1415\frac{(s+1.4)(s+3.87)}{s(s^2+53.9s+191.534)} \tag{3.3}$$

Come precedentemente osservato, essa possiede due poli complessi coniugati stabili e un polo nell'origine di molteplicità uno. Dalla teoria dei controlli si evince dunque che i prerequisiti per la progettazione di un controllore tramite **tecnica di sintesi per tentativi** risultano essere soddisfatti in partenza, non avendo $G_\rho(s)$ poli con parte reale positiva.

3.3.1 Pre-controllore

Al fine di soddisfare la specifica statica richiesta, ossia ottenere errore a regime alla rampa $e_{rp} = 0$, è necessario valutare la molteplicità del polo nell'origine della funzione di trasferimento in catena aperta. Avendo esso molteplicità $\nu = 1$, il sistema ottenuto da essa per retroazione unitaria negativa è di tipo $k = 1$. Pertanto esso riuscirà ad inseguire un segnale a gradino senza errore a regime. Il problema però è che il segnale fornito risulta essere composto anche da una rampa ed un sistema di tipo $k = 1$ non permette l'inseguimento di tale segnale senza errore a regime.

Risulta dunque necessario incrementare il tipo del sistema, introducendo un **pre-controllore** composto solamente da un integratore. In questo modo, si otterrà un sistema retroazionato di tipo $k = 2$ che permette, in catena chiusa, l'inseguimento di un segnale rampa senza errore a regime.

$$C_{pre}(s) = \frac{1}{s} \tag{3.4}$$

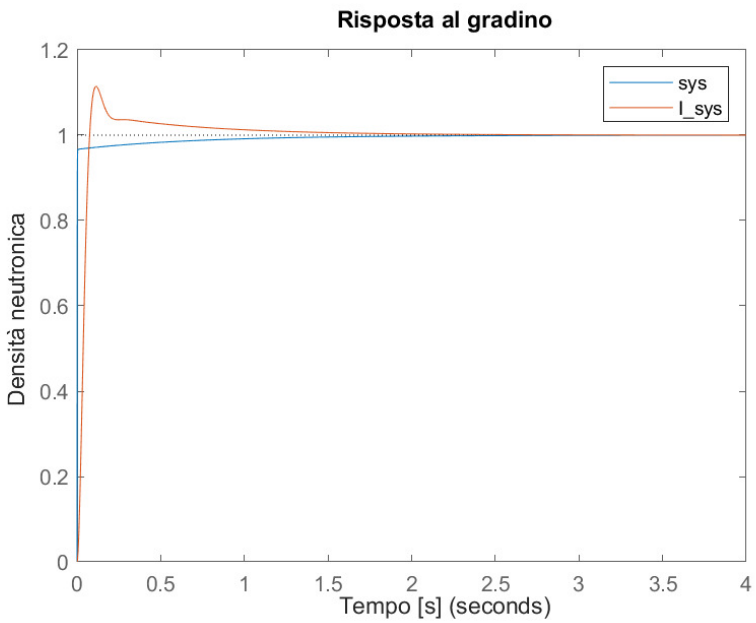

Figura 3.4: Risposta al gradino con integratore (arancione) e senza (azzurro)

ottenendo il seguente sistema retroazionato:

$$W_{PRE}(s) = \frac{1415s^2 + 7457s + 7666}{s^4 + 53.9s^3 + 1607s^2 + 7457s + 7666} \tag{3.5}$$

Un controllore di tipo puramente proporzionale, ossia che agisce solamente sul guadagno della funzione di trasferimento in catena aperta, non permetterebbe assolutamente di rispettare la condizione di errore a regime nullo, perché non andrebbe ad influire sul tipo di sistema. D'altro canto, dal grafico precedente si nota come il comportamento dinamico relativo al tempo di assestamento e alla sovraelongazione sia peggiorato con la sola introduzione dell'integratore, causando un overshoot maggiore di quanto richiesto ed un incremento del tempo di assestamento.

Né l'azione di un integratore né l'intervento sul guadagno, se introdotti singolarmente, risultano dunque soluzioni sufficienti a far rispettare tutte le specifiche richieste, sottolineando la necessità di progettare un controllore più sofisticato.

Una possibile soluzione è quella del progetto di un controllore **PI**, ovvero *proporzionale-integrativo*. Un controllore PI si presenta nella seguente forma:

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \tag{3.6}$$

ed è composto dunque da un'azione proporzionale data dal guadagno K_p e da un'azione integrativa data da $\frac{K_i}{s}$. Per ottenere un risultato efficace, è dunque necessario trovare i giusti coefficienti per ottenere l'azione di controllo desiderata. Uno dei metodi possibili è quello che passa attraverso l'approssimazione del sistema preso in considerazione (di grado tre) con uno di grado due, rendendo più semplice la sintesi del controllore. Questo ci permette di ricondurci all'analisi di un sistema del tipo:

$$P'(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{3.7}$$

Dove ω_n è la pulsazione naturale dei due poli coniugati del sistema approssimato, che risulta essere molto vicina al valore della banda passante ω_B del corrispondente sistema in catena chiusa. A sua volta, la pulsazione ω_B in catena chiusa risulta essere approssimabile dalla pulsazione di attraversamento ω_a della funzione di trasferimento in catena aperta, ossia la pulsazione (se esiste ed è unica) in corrispondenza alla quale il modulo della risposta in frequenza del sistema in catena aperta, composto da precontrollore e processo, è pari a $0dB$.

La costante di smorzamento del sistema è invece definita come $\delta \in (-1, 1)$.

Inoltre, viene definito margine di fase ϕ della risposta in frequenza in catena aperta la distanza tra la fase in ω_a^* e -180°. Esso è un indicatore della stabilità BIBO del sistema finale e della sua robustezza.

Lo scopo dei seguenti passaggi è quello di riuscire a progettare un controllore che permetta sia di modificare la pulsazione di attraversamento in catena aperta rendendola pari a quella desiderata ω_a^*, sia di ottenere un margine di fase in ω_a^* più consono.

Per questa prima parte, viene imposto un tempo di assestamento molto più piccolo ($0.19s$) di quanto effettivamente richiesto, dato che la futura implementazione dell'attenuazione dei disturbi renderà la risposta al gradino più lenta.

Ricordando che per sistemi del secondo ordine valgono queste relazioni approssimate [2]:

- La **pulsazione di attraversamento** desiderata è data da:

$$\omega_a^* = \frac{3}{\delta t_{s_{5\%}}} = 26.7095 rad/s$$

- La **sovraelongazione percentuale** è espressa come:

$$M_p = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.1$$

Si ottiene che lo **smorzamento** risulta essere:

$$\delta = \frac{\log(M_p^{-1})}{\sqrt{\pi^2 + \log^2(M_p^{-1})}} = 0.5912$$

Osservando i diagrammi di Bode di modulo e fase del sistema con precontrollore in catena aperta ed avendo calcolato la pulsazione di attraversamento desiderata ω_a^* , è possibile ricavare fase e modulo relativi a tale pulsazione.

Definiamo $L(j\omega_a*) = C_{pre}(j\omega_a*)G_\rho(j\omega_a*)$. Come è possibile notare, il modulo in dB di $L(j\omega_a*)$ risulta essere approssimativamente pari a zero. La ω_a^* calcolata coincide dunque con la pulsazione di attraversamento ω_a del sistema attuale dato che il tempo di assestamento non viene modificato.

Il suo valore risulta essere già molto inferiore a quello indicato nei requisiti (ossia 1 secondo), rendendo dunque inutile agire su di esso.

Il controllore PI risulterà dunque interessante più per una modifica della fase, piuttosto che per una modifica della pulsazione di attraversamento.

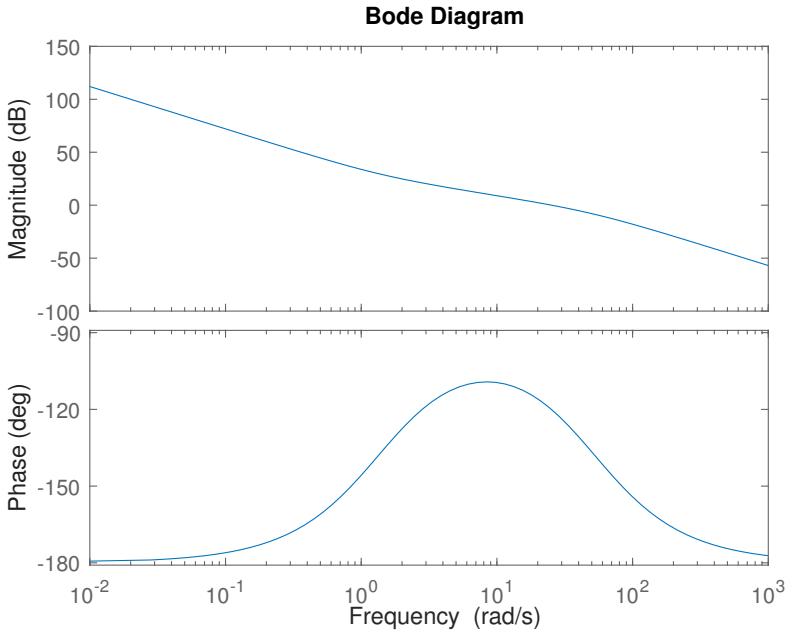

Figura 3.5: Diagrammi di Bode in catena aperta di $C_{pre}(s)G_p(s)$

Sfruttando la fase ricavata da Bode, è possibile calcolare il margine di fase attuale del sistema:

$$\phi_m = -\pi + \angle L(j\omega_a*) = -5.2524rad \tag{3.8}$$

Per la sintesi del controllore risulta essenziale conoscere anche il margine di fase desiderato da raggiungere. In questo modo, utilizzando i parametri presentati precedentemente, si ottiene:

$$\phi_m^* = arctan\frac{2\delta}{\sqrt{\sqrt{1+4\delta^4}-2\delta^2}} = 1.0226rad \tag{3.9}$$

Non resta che calcolare la differenza tra il margine di fase attuale in ω_a^* e quello che si vuole ottenere in corrispondenza a tale pulsazione:

$$\Delta\phi = \phi_m^* - \phi_m = \phi_m^* + \pi - \angle L(j\omega_a) = -0.0041rad \tag{3.10}$$

Una volta trovati tutti i parametri essenziali, è possibile finalmente calcolare i coefficienti del controllore PI desiderato, difatti [8]:

$$\begin{cases} K_p = |L(j\omega_a^*)|^{-1}\cos(\Delta\phi) = 0.4519, \\ K_i = -\omega_a|L(j\omega_a^*)|^{-1}\sin(\Delta\phi) = 1.084. \end{cases} \tag{3.11}$$

A questo punto abbiamo tutto il necessario per determinare finalmente il controllore PI desiderato:

$$C_{PI}(s) = 0.4519 + \frac{1.084}{s} \tag{3.12}$$

La funzione di trasferimento finale in catena chiusa risulta essere dunque la seguente:

$$W_{PI}(s) = \frac{1513s^3 + 8143s^2 + 9080s + 905}{s^4 + 1567s^3 + 8334s^2 + 9080s + 905} \tag{3.13}$$

ottenendo la seguente risposta al gradino per il sistema retroazionato:

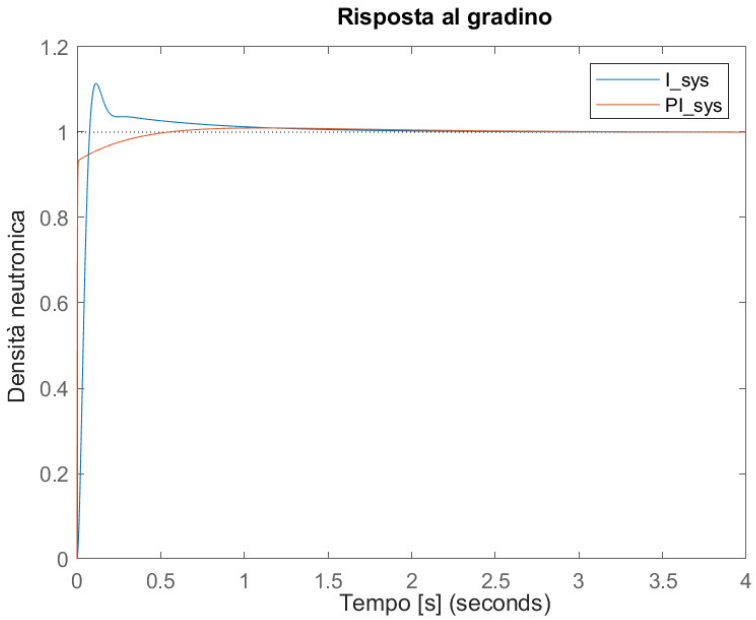

Figura 3.6: Risposte al gradino dei sistemi retroazionati $W_{PI}(s)$ (arancione) e $W_{PRE}(s)$

Come è possibile osservare dalle risposte al gradino, le prestazioni del sistema retroazionato con il controllore PI risultano essere migliori di quello con il pre-controllore, eliminando quasi del tutto la sovraelongazione.

Adottare come controllore solamente il PI (escludendo dunque il pre-controllore), risulta essere sufficientemente efficiente dato che il PI possiede già di suo un polo nell'origine, garantendo che il sistema reatroazionato sia di tipo 2.

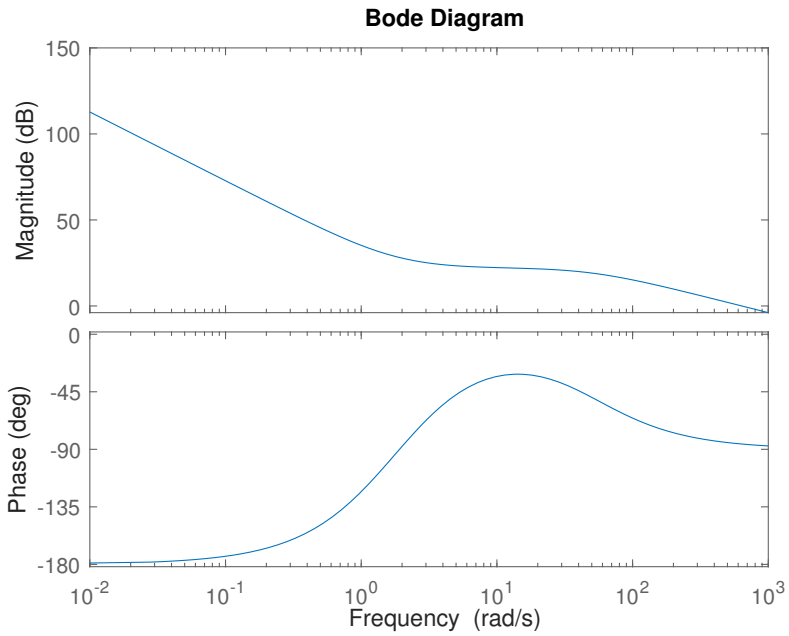

Figura 3.7: Diagrammi di Bode in catena aperta di $C_{PI}(s)G_p(s)$

3.3.2 Rete anticipatrice

Dopo aver completato la sintesi del controllore PI, risulta interessante domandarsi se sia possibile ottenere un controllore che garantisca prestazioni simili ma ottenuto con un metodo leggermente differente. La risposta è affermativa e in questo paragrafo verrà presentata la progettazione di una **rete correttrice**, più precisamente di una **rete anticipatrice**

Osservando i precedenti diagrammi di Bode di $C_{pre}(s)G_p(s)$, è evidente che nel nostro caso sia richiesta un'azione anticipatrice che consiste nell'inserire un controllore al fine di ottenere una pulsazione di attraversamento maggiore ed aumentare il margine di fase alla pulsazione desiderata.

Volendo progettare una rete che abbia caratteristiche simili a quelle del precedente controllore, risulterà opportuno utilizzare la stessa pulsazione di attraversamento osservabile dal diagramma di Bode in catena aperta di $C_{PI}(s)G_\rho(s)$.

La pulsazione di attraversamento desiderata risulta dunque essere $\omega_a^* = 1513 rad/s$.

Per l'analisi si considera sempre il sistema in catena aperta composto da pre-controllore e processo.

Ovviamente anche in questo caso, è necessario trovare la differenza tra il margine di fase desiderato ϕ_m^* e $\phi_m(\omega_a^*)$, ossia il margine di fase che si avrebbe se la pulsazione di attraversamento fosse proprio ω_a^*. Inoltre è essenziale conoscere il modulo in valore assoluto nella pulsazione di attraversamento desiderata ω_a^* del sistema in catena aperta con pre-controllore, ponendo $L(j\omega_a*) = C_{pre}(j\omega_a*)G_\rho(j\omega_a*)$ come nel caso precedente.

$$|L(j\omega_a^*)| = 6.1179 \cdot 10^{-4} \quad \Delta\phi = \phi_m^* - \phi_m(\omega_a*) = -5.2564\,\text{rad} \tag{3.14}$$

Dai calcoli ϕ_m^*, ossia il margine di fase desiderato, risulterebbe in realtà leggermente maggiore a 90°. Per non introdurre una seconda rete correttrice rendendo più complesso il processo di sintesi, è stato approssimato a 90°.

A questo punto non resta che andare a progettare in modo concreto la rete anticipatrice adottando la forma:

$$C_a(s) = \frac{1 + sT}{1 + \alpha sT} \tag{3.15}$$

dove (ricordando che $T > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$) [2]:

$$\alpha = \frac{|L(j\omega_a^*)|^{-1} cos\Delta\phi - 1}{|L(j\omega_a^*)|^{-1}(|L(j\omega_a^*)|^{-1} - cos\Delta\phi)} \qquad T = \frac{|L(j\omega_a^*)|^{-1} + cos\Delta\phi}{\omega_a^* sin\Delta\phi} \tag{3.16}$$

Ottenendo come controllore:

$$C(s) = C_{pre}(s)C_a(s) = \frac{1.071s^2 + 53540s + 50000}{1.042s^2 + 50000s} \tag{3.17}$$

Il sistema controllato ottenuto è veramente molto simile in termini di risposta al gradino a quello ottenuto in corrispondenza al controllore proporzionale-integrativo e questo sottolinea come al problema del controllo di un sistema non

esiste solamente una soluzione univoca, ma molteplici che portano a risultati molto simili tra di loro.

Per ottenere un diagramma delle fasi più simile a quello del controllore PI, è possibile aggiungere uno zero attorno ai 50000 rad/s, in modo che la fase non cali, ma rimanga invece costante.

Il controllore finale è dunque:

$$C_{ANT}(s) = (1 + 0.2 \cdot 10^{-4}s)\frac{1.071s^2 + 53540s + 50000}{1.042s^2 + 50000s} \tag{3.18}$$

In questo modo la funzione di trasferimento in catena chiusa risulta essere:

$$W_{ANT}(s) = \frac{1515 \cdot 10^{-8}s^4 + 7.576 \cdot 10^{-1}s^3 + 4.7s^2 + 7.833s + 3.833}{1.042 \cdot 10^{-8}s^5 + 5.157 \cdot 10^{-4}s^4 + 7.846 \cdot 10^{-1}s^3 + 4.796s^2 + 7.833s + 3.833} \tag{3.19}$$

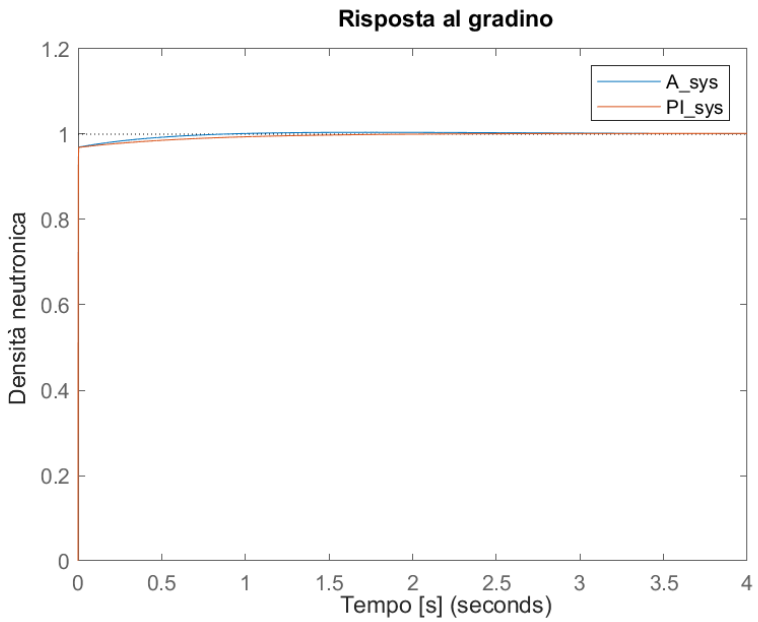

Figura 3.8: Risposte al gradino dei sistemi retroazionati W_{PI} (arancione) e W_{ANT} (azzurro)

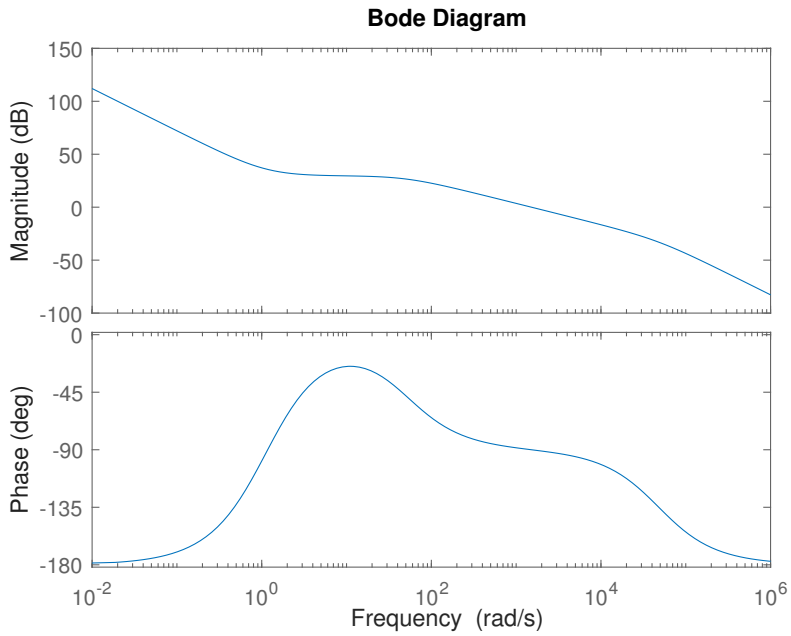

Figura 3.9: Diagrammi di Bode in catena aperta di $C_a(s)G_\rho(s)$

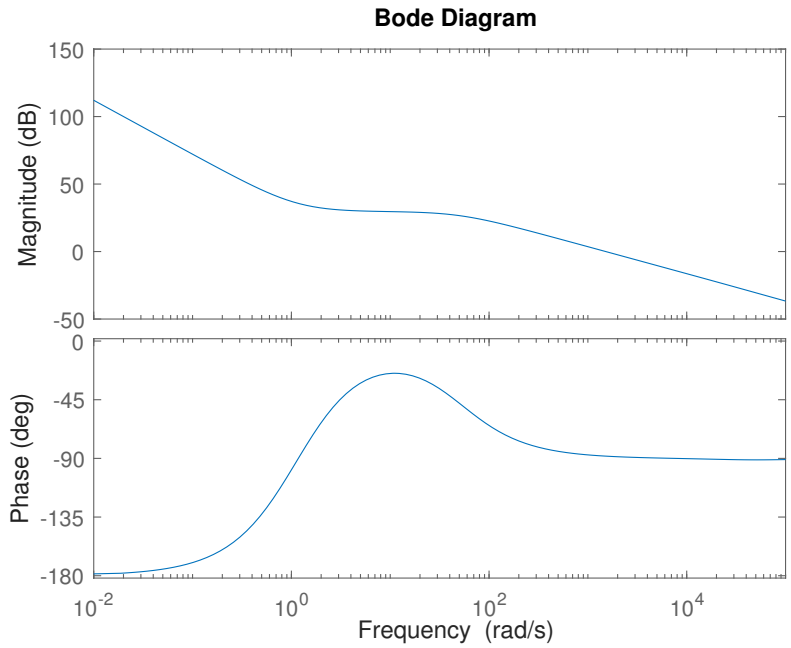

Figura 3.10: Diagrammi di Bode in catena aperta di $C_{ANT}(s)G_\rho(s)$

3.3.3 Attenuazione dei disturbi

Fino a questo punto abbiamo considerato solamente le prime due specifiche di controllo richieste per sistema controllato. Ne manca però una, ossia quella riguardo l'attenuazione dei disturbi.

Immaginare di progettare un sistema di controllo senza però considerare eventuali disturbi, risulta essere un approccio valido in un mondo ideale, che lascia però al quanto desiderare in applicazioni nel mondo reale.

Il progettista è dunque obbligato a considerare pure i disturbi nella fase di progetto, per ottenere un sistema che sia sufficientemente robusto nell'azione di controllo.

In questo caso si è deciso di prendere come esempio la presenza di disturbi sinusoidali con pulsazione maggiore o pari a $3.5\ 10^4 rad/s$ sul ramo di feedback. Viene richiesto di progettare un controllore che permetta l'attenuazione di questi disturbi di almeno $60dB$.

In un primo momento si consideri l'ingresso pari a zero, ottenendo così il seguente schema:

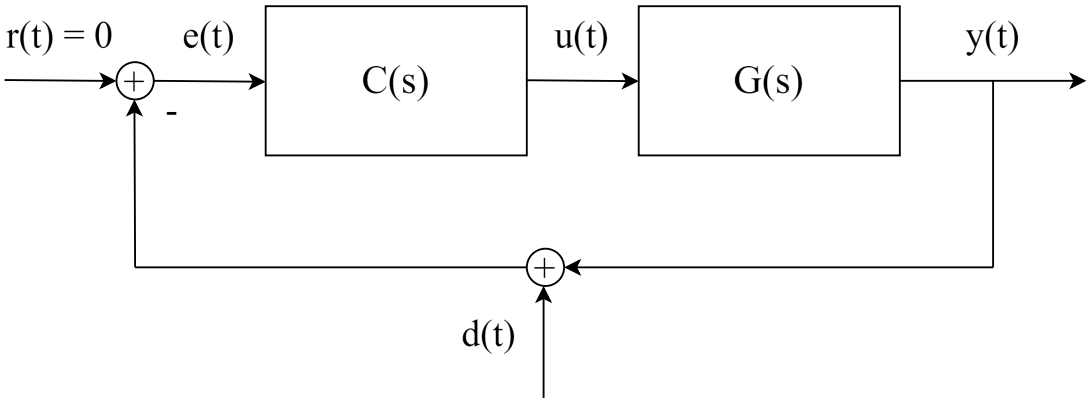

Figura 3.11: Schema a blocchi con disturbi

In questo modo, si può osservare come i disturbi agiscano come se fossero un vero e proprio ingresso.

Per aiutarci in ciò, è possibile osservare i diagrammi di Bode (per l'analisi viene utilizzato il controllore proporzionale-integrativo) del sistema in catena aperta presentati nel paragrafo precedente. Un possibile modo per ottenere l'attenuazione desiderata risulta essere quello di aggiungere un polo al controllore ad una specifica pulsazione.

Il polo si comporterà da **filtro passa-basso**, filtrando dunque i disturbi.

La risposta in frequenza di $G_{PI}(s) = C_{PI}(s)G\rho(s)$ con l'aggiunta del polo è:

$$G'_{PI}(j\omega) = \frac{(3.87 + j\omega)(0.118 + 1.07j\omega)(1981 + 1415j\omega)}{\omega^2\left(\omega^2 - 5.39j\omega - 191.534\right)(1 + \tau j\omega)} \tag{3.20}$$

Considerando i moduli in valore assoluto $|G_{PI}(j\omega_d)|' = 0.0432$ e $|G_{PI}(j\omega_d)| = 10^{-3}$, si ottiene che il valore della costante τ risulta essere:

$$\tau = \frac{\sqrt{\left(\frac{|G(j\omega_d)|'}{|G(j\omega_d)|}\right)^2 - 1}}{\omega_d} = 0.1235 \tag{3.21}$$

che corrisponde dunque a collocare un polo in corrispondenza a circa -8.1.

La funzione di trasferimento completa del sistema in catena aperta risulta essere:

$$G_{PI}(s) = 1415\left(0.4519 + \frac{1.084}{s}\right)\left(\frac{(s + 1.4)(s + 3.87)}{s(s^2 + 53.9s + 191.534)}\right). \tag{3.22}$$

Per testare l'azione attenuatrice del polo, viene utilizzato come ingresso un disturbo sinusoidale con pulsazione pari a ω_d di ampiezza unitaria.

Dai grafici di risposta al gradino e di Bode è possibile osservare come il risultato desiderato sia stato raggiunto.

Nel paragrafo successivo, verrà testato il comportamento finale del sistema con il segnale precedentemente introdotto assieme all'azione dei disturbi.

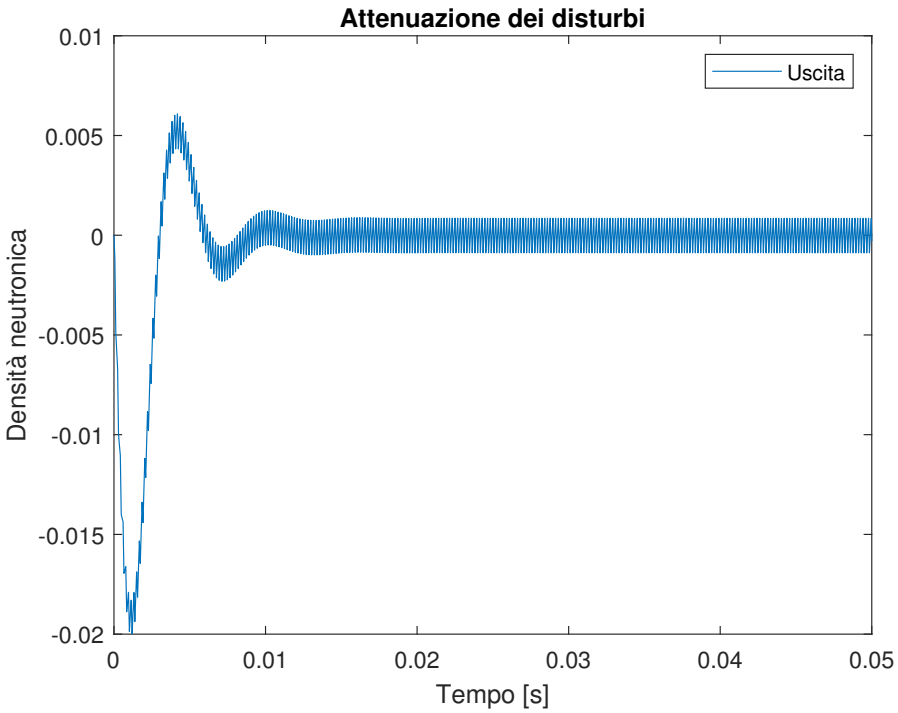

Figura 3.12: Risposta ai disturbi in catena chiusa con ampiezza unitaria e pulsazione ω_d

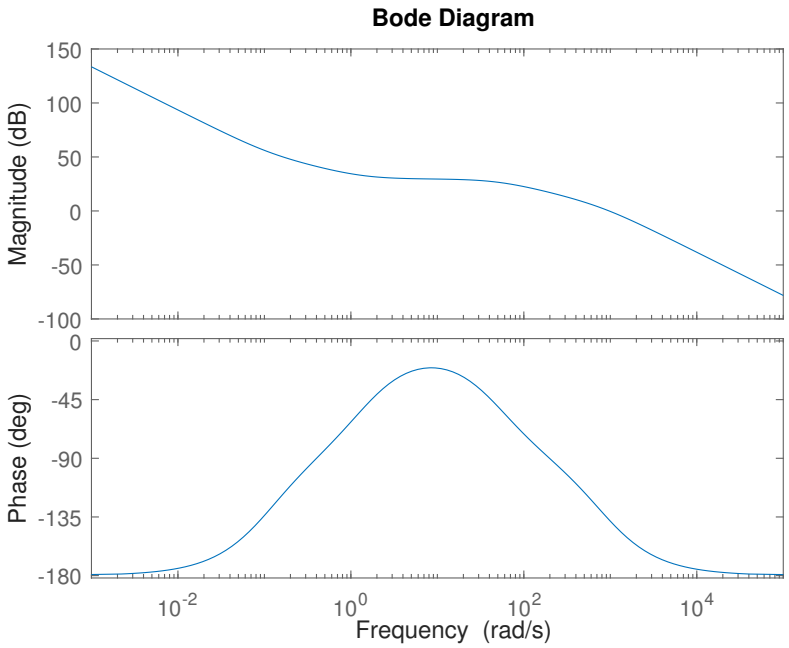

Figura 3.13: Diagrammi di Bode in catena aperta di $G_{PI}(s)$

3.3.4 Simulazione con Simulink

Una volta terminata l'analisi del modello e la progettazione dei controllore, è giunto il momento di passare a simulare la risposta del sistema finale utilizzando come ingresso il segnale di riferimento inizialmente presentato, aggiungendo in un secondo momento i disturbi nella catena di retroazione. Per evitare ripetizioni, dato che si otterrebbero risultati pressoché identici, viene analizzato il comportamento del sistema solamente con il controllore PI.

La simulazione verrà fatta mediante l'utilizzo di Simulink, un ambiente di simulazione appartenente all'ecosistema Matlab.

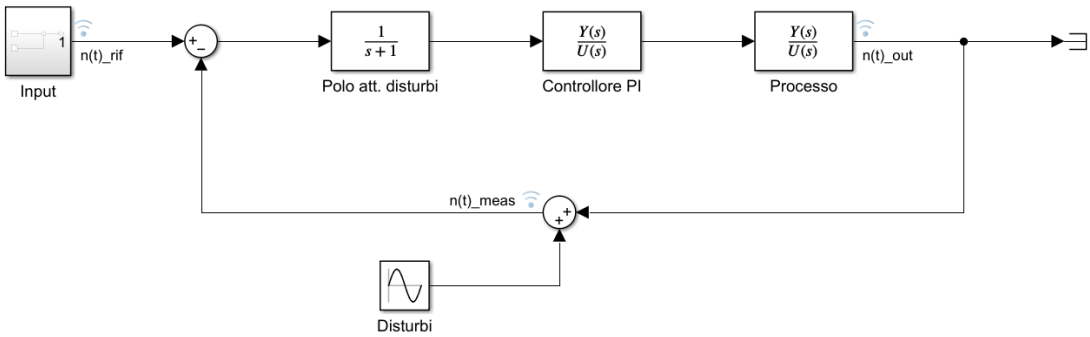

Figura 3.14: Setup contenente controllore PI e modello del sistema reattore.

Dalla simulazione senza disturbi si osserva come l'inseguimento del riferimento è stato rispettato con successo, adempiendo alle prime due richieste di progetto. La sovraelongazione è minima e l'errore a regime tende a zero durante l'inseguimento sia della rampa che del gradino con un tempo di assestamento consono.

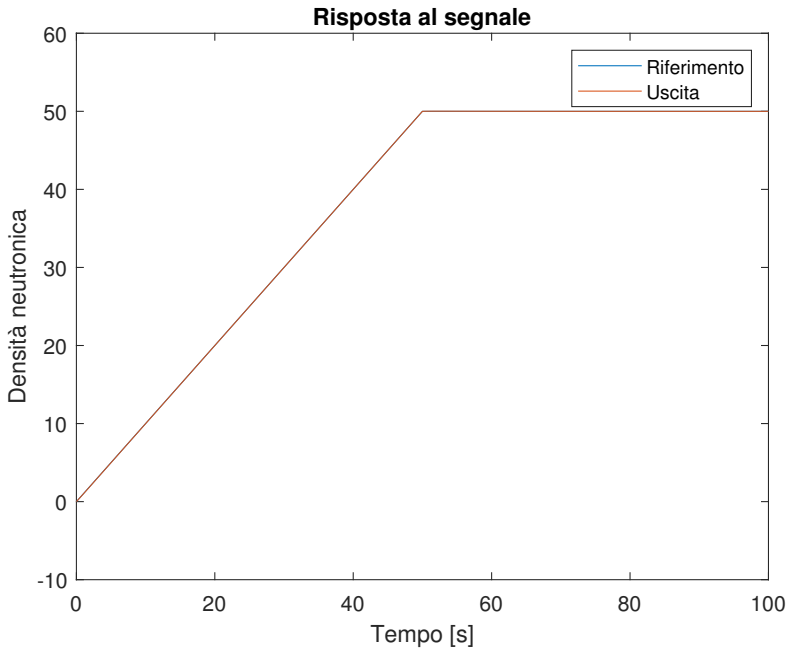

Figura 3.15: Densità misurata in uscita senza disturbi

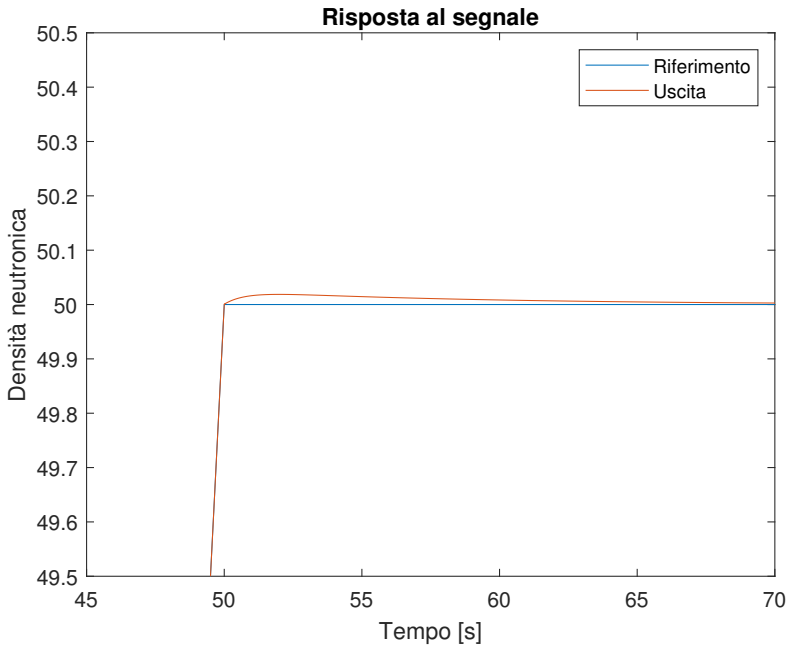

Figura 3.16: Densità misurata in uscita senza disturbi (ingrandimento)

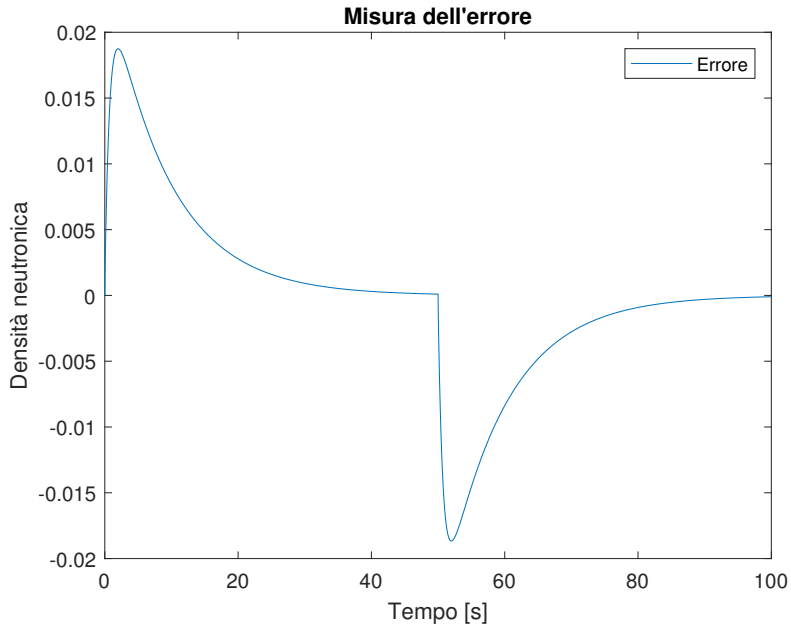

Figura 3.17: Errore tra riferimento e uscita

In secondo luogo osserviamo cosa succede applicando anche i disturbi sul ramo di feedback, introducendo un disturbo di ampiezza unitaria e con pulsazione proprio $\omega_d = 3.5 \cdot 10^4$ rad/s.

Il sistema riesce ad attenuare ottimamente i disturbi introdotti grazie al filtro passa-basso presentato nel paragrafo precedente.

In questo modo oltre alle prime due specifiche di progetto, riusciamo a soddisfare anche la terza ottenendo quanto voluto.

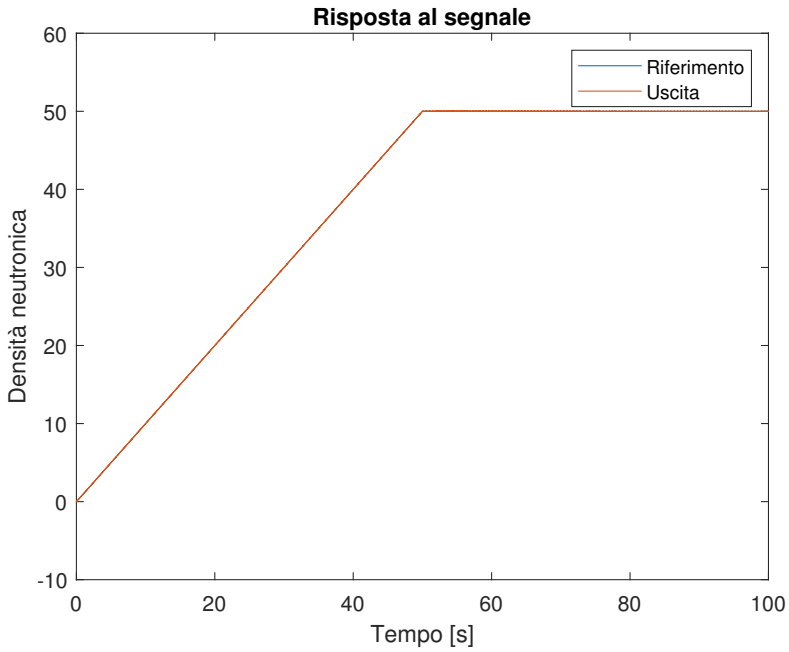

Figura 3.18: Densità misurata in uscita

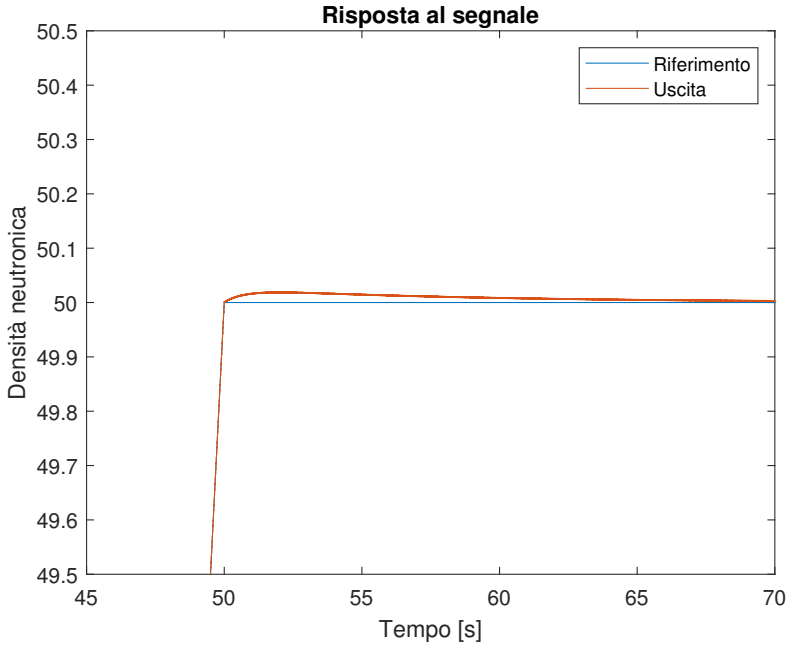

Figura 3.19: Densità misurata in uscita (ingrandimento)

4

Barre di controllo e potenza

I sistemi di controllo analizzati, sebbene soddisfino le specifiche di progetto prefissate, non restituiscono alcuna informazione sia riguardo a come fisicamente il controllo di densità neutronica venga attuato nelle centrali nucleari sia riguardo al perché venga scelta proprio tale grandezza come uscita da controllare.

Come accennato nell'introduzione, il controllo di un reattore avviene mediante l'inserimento, elettroattuato o idraulico, delle **barre di controllo**.

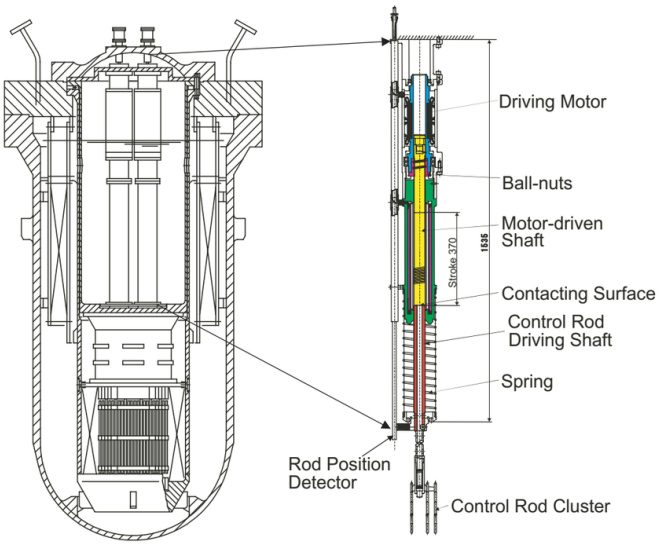

Figura 4.1: Sezione di una barra di controllo

Le barre di controllo hanno il compito di catturare neutroni, rallentando o meno la reazione a seconda della loro posizione. Durante la fase di progetto,

vengono fissati un intervallo di escursione delle barre e le corrispondenti velocità di manovra, per permettere avvio e spegnimento del reattore in totale sicurezza.

L'elemento di feedback, che permette il movimento delle barre, risulta essere un dispositivo denominato **LPRM** ossia **Local Power Range Monitoring System**. Ogni barra di controllo possiede un LPRM che misura la densità neutronica attorno ad essa e dunque il movimento di ognuna risulta indipendente da quello delle altre.

È importante notare che, in questo modo l'ipotesi di distribuzione spaziale fatta all'inizio del capitolo di analisi del modello viene a mancare. La formulazione di tale ipotesi risultava però essenziale per trattare nel modo meno complicato possibile la formulazione del modello di un reattore.

Veniamo poi al perché della scelta di $n(t)$ come grandezza da controllare oltre al fine di attuare le barre di controllo. Tecnicamente, la grandezza di maggior interesse nelle centrali sarebbe la potenza (termica e/o elettrica) dato che il loro fine risulta essere proprio la produzione di essa.

Questa scelta di progetto viene adoperata perché non esiste un modo per misurare direttamente la potenza termica generata durante la reazione. Esiste però una relazione tra la densità neutronica $n(t)$ e la densità di potenza termica generata per unità di volume, data da:

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial V} = n(t)\sigma_f N E_\rho \tag{4.1}$$

dove $\frac{\partial \dot{Q}}{\partial V}$ è la densità sopracitata, σ_f è la sezione d'urto microscopica media dei materiali fissili usati, N è la densità di atomi fissili nel combustibile ed infine E_ρ è l'energia media generata da ogni fissione.

5

Sicurezza ed incidenti

Il controllo di reazione è solamente uno dei numerosissimi sistemi di controllo presenti in una centrale nucleare (basti pensare che una centrale basata su tecnologia BWR possiede circa 80000 valvole!). La sicurezza degli impianti non viene affidata dunque solamente a tale controllore, ma vengono implementati numerosi sistemi di sicurezza attivi e passivi in modo da escludere il verificarsi degli incidenti precedentemente accaduti.

I quattro principi alla base della progettazione degli impianti di sicurezza sono: **ridondanza**, **diversità**, **separazione fisica** e "**fail-safe**".

- **Ridondanza**: tutte le componentistiche soggette ad usura ed invecchiamento sono presenti nell'impianto in quantità molteplice in modo tale che, in caso di guasti singoli o multipli, venga lo stesso garantita la continuità di servizio. Ad esempio: invece di una sola pompa, ne vengono collegate in parallelo tre o quattro.

- **Diversità**: le componentistiche sopracitate devono essere scelte in sede di progettazione in modo tale che svolgano lo stesso compito ma siano di tipo diverso, garantendo che lo stesso identico guasto non metta fuori servizio tutti i componenti.

- **Separazione fisica**: le componenti che svolgono la stessa funzione devono essere separate fisicamente tra di loro, in modo tale che, uno stesso evento (come ad esempio un incendio) non comprometta le riserve.

- **Fail-safe**: nel caso di guasti gravi, l'impianto è studiato in modo tale che nel caso peggiore entri in uno stato totalmente sicuro, a prova d'errore. Ad esempio, nel caso di black-out sono predisposti sistemi di alimentazione di riserva come ad esempio generatori backup a diesel e batterie di accumulo.

5.0.1 Incidente di Chernobyl

Il 26 aprile 1986 il reattore numero quattro della centrale nucleare della centrale di Chernobyl esplose, causando uno dei due incidenti nucleari più gravi della storia, assieme a quello avvenuto a Fukushima (Giappone, 2011). Secondo recenti stime provenienti dall'**Onu**, l'incidente provocò in totale più di 4mila vittime e 116mila sfollati, contaminando migliaia di chilometri quadrati comprensivi di terreni, falde acquifere e laghi, causando mutazioni genetiche in tantissime parti d'Europa per via della nube tossica alzatasi.

Figura 5.1: Resti del reattore n.4

Il reattore n.4 era di tipo RBMK. Questi possedevano un coefficiente di vuoto di temperatura positivo **alle basse potenze**, laddove invece risulta essere negativo nella quasi totalità dei casi.

Il coefficiente di vuoto indica quanto la reattività del reattore cambia in corrispondenza di una variazione del rapporto in volume tra vapore e il volume totale occupato dalla miscela acqua-vapore.

Un coefficiente negativo controbilancia l'aumento di temperatura nel nocciolo causato da un aumento di potenza, riducendo la potenza stessa a sua volta. Se il reattore possiede un coefficiente positivo, viene meno questo meccanismo di autoregolazione.

Poiché i reattori RBMK utilizzano l'acqua sia come refrigerante che come elemento moderatore (essendo BWR di seconda generazione), l'innalzamento della temperatura comporta la sostituzione dell'acqua liquida con vapore. In un reattore con coefficiente negativo questo fenomeno viene controbilanciato grazie

all'automatica diminuzione di potenza, ma non nel caso degli RBMK, dove il vapore aumenta sempre di più, diminuendo le prestazioni di moderazione e aumentando la reattività.

Inoltre, a differenza dei reattori di più recente concezione (progettati seguendo il principio **fail-safe**), quello in questione non era protetto da una struttura che potesse resistere ad un'esplosione così devastante.

Ad aggravare la situazione, si aggiunge il fatto che al reattore fu aggiunta della grafite come secondo elemento di moderazione, permettendo l'aumento di prestazioni ma diminuendo la sicurezza.

Il colpo di grazia venne dato proprio durante un test, contribuendo in modo attivo al disastro.

Per un errore di valutazione, la potenza si stabilizzò attorno ai 30MW, ben al di sotto di quanto preventivato, causando **avvelenamento da xenon** (ossia un accumulo spropositato di tale gas) del reattore e un'importante incremento di vapore a causa proprio del coefficiente che, a quei livelli di potenza d'esercizio, risultava enormemente positivo.

Nonostante il personale si fosse accorto dell'avvelenamento, il test proseguì, comportando un aumento di potenza, temperatura e vapore, trasformando il nocciolo in una massa rovente e causando una fortissima esplosione, scaraventando in aria il tetto del reattore stesso.

6

Conclusioni

Durante la stesura di questa tesi, frutto della conclusione della mia laurea triennale in Ingegneria dell'Informazione, è stato possibile sfruttare le conoscenze assimilate durante i corsi di Controlli automatici, Laboratorio di Controlli e Sistemi e modelli, approfondendo inoltre il mondo delle centrali nucleari, estraneo al mio percorso di studi ma che da sempre suscita in me moltissima curiosità. Sistemi e modelli mi ha permesso di analizzare il modello, studiandone i punti d'equilibrio e la stabilità. Controlli automatici ed il relativo laboratorio, mi hanno conferito gli strumenti per la progettazione di un ipotetico sistema di controllo. Inoltre, le attività di laboratorio hanno contribuito allo sviluppo ed ampliamento delle mie conoscenze ed abilità riguardo l'ambiente Matlab (con Simulink), permettendo la simulazione del modello e del sistema di controllo e la creazione di grafici.

Sebbene le soluzioni trovate non risultino direttamente applicabili in un contesto nucleare reale, rappresentano però uno spunto di riflessione riguardo a quanto complesso e trasversale il lavoro di un ingegnere specializzato in sistemi e controlli sia, avendo la necessità di doversi interfacciare costantemente con una miriade di ambiti diversi tra loro come ad esempio la fisica nucleare, la meccanica, l'elettronica e l'informatica.

Bibliografia

[1] Mauro Bisiacco, Gianluigi Pillonetto e Mauro Bisiacco. *Sistemi e modelli / Mauro Bisiacco, Gianluigi Pillonetto*. ita. 2. ed. Bologna: Esculapio, 2017.

[2] Mauro Bisiacco, M. E. Valcher e Mauro Bisiacco. *Controlli automatici : ... tutto quello che avreste voluto sapere a riguardo ma non avete mai osato chiedere / Mauro Bisiacco e Maria Elena Valcher*. ita. 2. ed. Padova: Progetto, 2015.

[3] Mauro Cappelli. *Instrumentation and Control Systems for Nuclear Power Plants*. eng. Woodhead Publishing Series in Energy. Cambridge, MA: Elsevier Ltd., 2023.

[4] *Chernobyl Accident 1986*. `https://world-nuclear.org/information-library/safety-and-security/safety-of-plants/chernobyl-accident`. 2024.

[5] Maurizio Cumo e Maurizio Cumo. *Impianti nucleari / Maurizio Cumo*. ita. Manuali. Roma: Università La Sapienza, 2008.

[6] Giovanni Ricco Enzo De Sanctis Stefano Monti. *ENERGIA E FISSIONE NUCLEARE*. `https://www.fe.infn.it/u/lenisa/sub/2019/lezioni/SIF_fissione.pdf`. 2010.

[7] *Nuclear Reactors*. `https://www.nrc.gov/reactors/power/bwrs.html`.

[8] L. Schenato. *PID Design in Frequency Domain*. `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/787047/mod_resource/content/1/FrequencydomainPIDDesign.pdf`. 2024.

[9] L. Schenato. *Second Order Dynamical Systems*. `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/787033/mod_resource/content/3/SecondOrderSystems.pdf`. 2024.

Ringraziamenti

Per prima cosa ringrazio la prof.ssa Maria Elena Valcher per aver supervisionato la stesura di questa tesi.

Vorrei ringraziare tutta la mia famiglia, in particolare: mamma Stefania, papà Edoardo, nonna Anna Maria, nonno Renato, nonna Grazia, mia cugina Gaia, zio Mirco e zia Manuela per aver sempre creduto in me. Un pensiero va ovviamente anche a tutto il resto della mia numerosissima famiglia, sparsa per tutta Italia.

Ringrazio tutti gli amici più cari, parte fondamentale della mia infanzia, adolescenza ed inizio della mia vita di adulto, in particolare chi c'è sempre stato: Riccardo, Giacomo, Giovanni, Francesco, Federico, Alessandro, Marco, Filippa e Martina.

Inoltre, dei ringraziamenti vanno anche alla mia ex scuola superiore ITIS Vito Volterra, per aver contributo a stimolare in me l'interesse verso la tecnica e al negozio di elettronica EPM di San Donà di Piave, fornitore di tutto il materiale utilizzato per i miei progettini di elettronica e robotica fatti durante l'adolescenza, nonché fonte di preziosi consigli.

Infine, non per ultima, ringrazio zia Cristiana: il mio angelo custode.