UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI SCIENZE STATISTICHE

CORSO DI LAUREA IN STATISTICA ECONOMIA E FINANZA

TESI DI LAUREA

VaR DI UNA STRATEGIA DI COPERTURA CON OPZIONI

Relatore: Ch.mo Prof. CAPPUCCIO NUNZIO

Laureanda: ELISA PIAZZA

ANNO ACCADEMICO 2004-2005

INDICE:

Prefazione

Un parere ha due tempi: al passato su ciò che è meglio, al presente su ciò che è più adatto (*Bacon*)[1]

La valutazione ed il controllo del rischio di mercato da parte degli investitori e degli operatori ha assunto negli ultimi anni un'importanza sempre crescente. Spesso perdite clamorose realizzate da importanti società finanziarie e bancarie erano imputabili soprattutto a carenze dei sistemi di controllo dei rischi delle posizioni. Spesso ciò che agli occhi dell'investitore poteva sembrare sicuro, sicuro non era[2]. Negli ultimi anni, la comunità scientifica e finanziaria ha trovato un certo accordo nel ritenere il Value at Risk un valido strumento che può dare risultati efficienti nella valutazione del rischio di mercato, ed essere al contempo un modello che consente una certa facilità di calcolo e con un ampio spettro di problematiche a cui si può applicare.

Il Value at Risk, conosce le sue prime formulazioni nei primi anni '70 negli studi del Risk Metrics Group[3], ma trova una concreta applicazione accettata dalle maggiori istituzioni finanziarie e di controllo dei mercati solo recentemente.

Una delle caratteristiche più accattivanti del Value at Risk è quello di essere un metodo statistico sintetico di misurazione del rischio in grado di concentrare la stime del rischio in un solo numero[4]. Si è passati da una connotazione qualitativa del rischio ad una quantitativa e di immediata comprensione da parte degli interlocutori. Il VaR riassume la massima perdita attesa su un dato orizzonte di tempo, ed è associato ad un determinato e predefinito intervallo di confidenza.

Nel corso di questo studio si è preso in considerazione il Value at Risk come metodo di stima perché è un metodo utilizzato dalla maggior parte degli operatori e richiesto da alcuni regolamenti[5].

Il VaR nella sua formulazione originale è stato creato per un asset con pay-off lineare[6] e successivamente lo si è applicato a quasi la totalità di quanto la finanza moderna propone, anche se alcune volte non è risultato adatto a misurare il rischio di strumenti finanziari che non sottostanno all'ipotesi di linearità nel *pay-off*.

---

[1] Bacon Sir Francis, *New Atlatis*, In Francis Bacon, Thomas More, Thomas Campanella, James Harrington, (1901) "*ideal commonwealths*". New York; London: P.F. Collier & Son. Electronic Text Center, University of Virginia Library.

[2] Solo per citare i più macroscopici e recenti i casi Enron, Parmalat e Argentina.

[3] www.Riskmetrics.com

[4] L'essere attraente del metodo sta appunto nella sua capacità di riassumere concetti diversi di rischio, spesso nel sapere diffuso degli operatori finanziari più legato a sensazioni e a *know-how* cumulato nella prassi che a evidenze quantitative misurabili.

[5] Successivamente verrà si esaminerà più in profondità previsto da Basilea 2.

[6] Dowd,(2002), *Beyond Value at Risk*, Wiley finance, England

In certi casi il calcolo del VaR di alcuni tipi di opzione può risultare particolarmente ostico e fallace[7]. Alla base del nostro interesse ci sono strategie diffuse tra i gestori e, in particolar modo, tra quelli che vengono chiamati, con una dizione a volte troppo ampia, fondi hedge[8]. Tra le strategie alternative vanno annoverate:

- Operazioni di copertura ("hedging")
- Vendite allo scoperto - vendere azioni senza possederle, sperando di ricomprarle in una data futura ad un prezzo inferiore con la speranza che il prezzo diminuirà
- L'arbitraggio che sfrutta le inefficienze dei prezzi
- L'utilizzo dei derivati
- L'uso del leverage – si prende a prestito denaro cercando di aumentare gli utili
- La possibilità di trarre vantaggio dallo scarto tra i correnti prezzi di mercato e l'ultimo prezzo d'acquisto in situazioni come fusioni o acquisizioni di controllo.

Questi fondi hedge vengono considerati altamente speculativi e pericolosi sia dalla consob[9], che dalla borsa italiana ma il motivo di ciò non è molto chiaro poiché, analizzando i risultati ottenuti da un tale fondo quale quello di Kingate si può affermare che operare con strategie con le opzioni non sia molto rischioso. Il Kingate global fund infatti in 8 anni di risultati riportati solo in 4 mesi ha avuto un rendimento negativo, dei quali quello peggiore del –0.48; il rendimento annuo, sempre positivo, raggiunge un valore massimo pari a 16.24 ed un valore minimo di 7.66. Questo fondo inoltre presenta un rendimento annualizzato, considerando il periodo gennaio 1997-aprile 2005, pari al 12% quando quello di un indice quale S&P500 è del 5.5%, ha una deviazione standard del 2.89% nettamente inferiore a quello del S&P500 che è del 16.57%, presenta inoltre un indice di Sharpe pari a 2.8 mentre quello dell'indice considerato è del 0.1. Tutti questi dati metterebbero in discussione quanto detto dalle autorità italiane ossia che questi fondi siano altamente speculativi[10] anche perché se si rappresenta l'andamento del fondo di Kingate questo ha un andamento lineare crescente.

[7] Butler,(1999), Mastering value at risk, Great Britain
[8] "*Hedge fund*" è il termine usato di solito per descrivere qualsiasi fondo che non sia un convenzionale fondo d'investimento, ovvero che usi una strategia o una serie di strategie diverse dall'investire in obbligazioni, azioni ordinarie (fondi comuni d'investimento a capitale variabile - mutual funds) e titoli di credito (money market funds).
[9] Organo di controllo italiano sulla borsa
[10] Nel senso di volatili e pericolosi infatti per il loro acquisto viene richiesto di essere investitori qualificati, ossia con competenze specifiche e congrua patrimonialità.

Kingate afferma[11]:

"The investment objective of the Fund is long-term capital appreciation. The fund is managed by a New York-based investor that specialises in hedged transactions using common equities and index options. The fund seeks to obtain capital appreciation of its assets through the utilization of a non-traditional stock/option trading strategy. Typically, the strategy entails the purchase of 45 to 50 large-capitalisation S&P100 stocks and the simultaneous sale of out-of-the money calls on the S&P100 Index and the purchase of out-of-the money or at-the-money puts on the S&P100 index. The strategy aims to limit losses when stocks prices decline while still affording an upside potential that is capped to the strike price of the short call when stock prices rise. The long put/short call position constitutes a "synthetic" short of the market, which provides a hedge against the long stock positions. Proprietary system continuously optimize the basket of stocks to replicate the performance of the overall market at low cost. market."

La strategia appena citata prevede appunto l'uso di derivati che sono considerati, come già detto, dalle autorità italiane degli strumenti estremamente pericolosi, intendo quindi applicare a questa strategia il VaR per vedere se risulta uno strumento utile per calcolare il rischio in una tale posizione.

In particolar modo sono state analizzate le posizione long asset e long put utili per coprirsi dal rischio di ribasso del prezzo dell'azione; long asset e short call per assicurarsi un'entrata certa, pari al premio dell'opzione, con la vendita della call ed infine la posizione long asset, long put e short call per limitare i rischi di ribasso dell'azione e diminuire il costo dell'opzione put con il premio della call venduta. A seconda della posizione considerata si vuole vedere se il VaR sulla posizione diminuisca o meno con l'introduzione dell'opzione. Si vuole vedere se il VaR dell'asset è maggiore o minore del VaR dell'intera strategia. Visto che l'opzione in sè non è uno strumento finanziario molto rischioso e visto che la massima perdita che un investitore può subire è il premio pagato per comperarla è utile studiare il loro utilizzo in determinate situazioni poiché è questo che fa aumentare il rischio. Nei casi appena citati, l'uso delle opzioni fa diminuire il rischio determinato dal solo asset. Pensiamo infatti a una situazione long asset, se il prezzo dell'azione scende al di sotto del prezzo al quale l'investitore ha comperato il rischio è illimitato, potrebbe perdere tutto; in una situazione long put invece, al peggio se il prezzo dell'azione sale al di sopra dello strike price della put, l'opzione non viene esercitata e si perde il premio. In una situazione long asset e long put, se il prezzo dell'azione si mantiene al di sopra dello strike price non si esercita la put ma l'asset acquista valore, viceversa se il prezzo dell'asset scende al di sotto dello strike price esercito la put e compenso la perdita di valore del asset.

[11] Tratto dal prospetto informativo del fondo di Kingate

Nel corso di tale analisi si cerca anche di individuare dei correttivi da imporre in modo tale da poter considerare il VaR come un indicatore corretto del rischio. Questo perché l'uso dei derivati quali le opzioni non avendo una struttura lineare del payoff potrebbero determinare dei valori distorti del VaR..

Nella prima parte verranno presentate tutte le assunzioni, i problemi, le caratteristiche degli strumenti utilizzati in tale percorso mentre nella seconda vengono studiati i singoli casi numerici.

Le opzioni:

Negli ultimi tempi i mercati di future e opzioni sono divenuti sempre più importanti nel mondo della finanza e degli investimenti. La principale borsa statunitense per la negoziazione di opzioni su azioni è la Chicago Board Options Exchange, ma ne esistono comunque in numerose altre nazioni. Le opzioni vengono trattate oltre che nei mercati regolamentati anche over the counter in modo che queste possono essere costruite per poter venire incontro alle specifiche necessità del cliente. In questi mercati, come in tutti i mercati del mondo sono presenti tre grandi categorie di operatori:

1) Gli Hedgers usano i forward, i future e le opzioni per ridurre i rischi che derivano dalle loro esposizioni nei confronti di qualche variabile di mercato. La differenza tra l'utilizzo dei forwards, futures e delle opzioni per finalità di copertura è che i contratti forward e futures, fissando il prezzo da pagare o da ricevere in cambio dell'attività sottostante neutralizzano il rischio mentre i contratti di opzione offrono una sorta di assicurazione ovvero consentono agli investitori di proteggersi dai movimenti sfavorevoli dei prezzi senza privarli della possibilità di beneficiare dei movimenti favorevoli.

2) Gli speculatori usano i forward, i future e le opzioni per trarre profitto dall'evoluzione di un determinato mercato. Il mercato dei future e delle opzioni offre allo speculatore una leva finanziaria infatti, con un esborso iniziale relativamente contenuto, egli è in grado di assumere un'ampia posizione speculativa. Desiderando guadagnare sui futuri movimenti del prezzo di un'attività, i futures e le opzioni, danno loro una leva finanziaria extra (in positivo o in negativo).

3) Gli arbitraggisti tentano di sfruttare le disomogeneità nei prezzi di vari mercati e possono assumere posizioni di segno opposto su due o più contratti per bloccare un profitto privo di rischio. Entrando simultaneamente in transazioni su due o più mercati cercano di trarre vantaggio da discrepanze dei prezzi.

Nel mercato delle opzioni esistono 4 tipi di operatori:

- Compratori di Calls
- Compratori di Puts
- Venditori di Calls
- Venditori di Puts

I compratori hanno posizioni lunghe, i venditori invece posizioni corte. Esistono fondamentalmente due tipi di opzioni: le opzioni calls e le opzioni puts. Una "call option" dà al portatore il diritto di comprare un'attività entro una certa data per un certo prezzo. Una "put option" dà al portatore il diritto di vendere un'attività entro una certa data, per un determinato prezzo. Il prezzo indicato nel contratto è detto "prezzo d'esercizio" (*exercise price*) o "prezzo base" (*strike price*") ; la data indicata nel contratto è detta "data di estinzione" (*expiration date*), " data d'esercizio" (*exercise date*). Il portatore non è obbligato ad esercitare questo diritto ed è proprio questo che distingue le opzioni dai futures (o dai *forwards*).Il portatore di un contratto futures lungo si è impegnato a comprare un'attività ad un certo prezzo e ad una certa data. Per contro il portatore di un opzione call può scegliere se comprare l'attività ad un certo prezzo e ad una certa data. Un'altra differenza tra un contratto future e un contratto di opzioni è che la stipula di un contratto future non costa nulla (se non il deposito di garanzia depositato) invece in un contratto d'opzione l'investitore deve pagare un premio iniziale.

Funzionamento dei mercato delle opzioni:

Le opzioni trattate in mercati regolamentati si distinguono in opzioni americane e opzioni europee. Chi acquista una call trae profitto se il prezzo dell'azione, o comunque del sottostante aumenta, chi acquista una put invece se il prezzo del sottostante diminuisce. In un contratto di opzione esistono due parti : l'investitore che ha assunto la posizione lunga (chi ha comprato l'opzione) e l'investitore che ha assunto la posizione corta (chi ha venduto l'opzione). Chi ha venduto l'opzione ha un introito iniziale ma è soggetto ad una perdita potenziale. Il suo profitto è pari alla perdita di chi ha acquistato l'opzione.

Esistono quattro tipi di posizioni su opzioni:

- Posizione lunga su una Call
- Posizione lunga su una Put
- Posizione corta su una Call
- Posizione corta su una Put

Spesso è utile caratterizzare le posizioni su opzioni in termini del loro valore finale (Pay-Off) alla scadenza. In tal caso il costo iniziale dell'opzione non viene incluso nei calcoli. Se S_T è il prezzo finale dell'opzione sottostante e X è il prezzo d'esercizio, il payoff di una posizione lunga su una Call è pari a:

$$\max (S_T\text{-}X,0)$$

Questa formula riflette il fatto che l'opzione verrà esercitata se $S_T > X$ e non verrà esercitata se $S_T<X$..

Il *payoff* di una posizione corta su una *call* europea è pari a

- $\text{Max}(S_T-X, 0) = \text{Min}(X-S_T, 0)$

Il *payoff* di una posizione lunga su una *put* europea è pari a

$$\text{Max}(X-S_T, 0)$$

Il *payoff* di una posizione corta su una *put* europea è pari a

- $\text{Max}(X-S_T, 0) = \text{Min}(S_T-X, 0)$

Opzioni su Azioni

Le principali borse negli Stati Uniti che trattano le "opzioni su azioni" sono CBOE, PHLX, AMEX, PXS.

Vengono trattate opzioni su oltre 10000 azioni; ogni contratto dà alla parte lunga il diritto di comprare o vendere 100 azioni al prezzo di esercizio specificato.

Opzioni su Valute

Una delle borse più importante per la negoziazione di opzioni su valute (*currency option*) è la Philadelphia Stock Exchange dove si trattano opzioni europee ed americane. La dimensione di ogni contratto dipende dalla valuta.

Opzioni su Indici

Negli Stati Uniti le più diffuse sono quelle dei seguenti indici S&P500, S&P100, NASDAQ, DOW JONES INDUSTRIAL.

Tutte queste opzioni sono trattate al CBOE.

Ogni contratto dà alla parte lunga il diritto di comprare o vendere un quantitativo pari a 100 volte l'indice, al prezzo d'esercizio specificato.

Opzioni su Futures

Si trattano opzioni su futures per la maggior parte delle attività.

In questi contratti l'attività sottostante è rappresentata da un futures, che di solito, scade poco dopo l'opzione. Al compratore di una call su tale sottostante, nel momento in cui la esercita, viene assegnata una posizione long future allo strike price, mentre al venditore, colui che ha scritto l'opzione, viene assegnata una posizione short future al prezzo d'esercizio.

Specifiche contrattuali delle opzioni su azioni

Prezzi d'esercizio:

Sono le borse che decidono quali sono i possibili prezzi d'esercizio delle opzioni.

Per le opzioni su azioni i prezzi d'esercizio sono in genere distanziati tra loro di $2.5, $5, $10.

La regola seguita dalle borse è quello di usare un intervallo di $2.5 se il prezzo dell'azione è inferiore a$25, un intervallo di $5 se è compreso tra 25 e 200 e uno di $10 se il prezzo è maggiore di 200. Di solito quando si traduce una nuova scadenza le borse scelgono i due prezzi di esercizio più vicini al prezzo corrente dell'azione. Se uno di questi è molto vicino al prezzo corrente dell'azione, scelgono anche un terzo prezzo d'esercizio. Se il prezzo dell'azione passa al di fuori dall'intervallo definito dal prezzo d'esercizio più basso e più alto si iniziano a trattare opzioni con un nuovo prezzo d'esercizio. Per illustrare queste regole, si supponga che il prezzo dell'azione sia di $84 quando si cominciano a trattare opzioni per ottobre. Le opzioni avranno prezzo d'esercizio di $80, $85 e $90. Se il prezzo dell'azione supera i $90 verrà offerto un prezzo d'esercizio di $95; se scende sotto gli $80, verrà offerto un prezzo d'esercizio di $75 e così via.

Regolamentazione:

Le borse e le options clearing corporation hanno regole che disciplinano il comportamento degli operatori; esistono autorità di controllo sia federali che statali. In generale i mercati delle opzioni hanno dimostrato di volersi autoregolamentare. La Securities And Exchange Commission (SEC)[12] supervisiona, a livello federale, i mercati delle opzioni scritte su azioni, indici azionari, valute ed obbligazioni. La Commodity Futures Trading Commission (CFTC)[13] è responsabile dei mercati delle opzioni su futures. I più importanti mercati delle opzioni si trovano negli Stati Uniti dell'Illinois e di New York.

Terminologia

In qualsiasi istante si possono trattare, per ogni attività diverse opzioni. Consideriamo per esempio un titolo per cui esistono quattro date di scadenza e cinque prezzi d'esercizio, se vengono trattate Puts e Calls per ogni data di scadenza e per ogni prezzo di esercizio esistono in totale quaranta diversi contratti. Tutte le opzioni dello stesso tipo (Calls e Puts) costituiscono una classe di opzioni.

Questi derivati possono essere:

---

[12] www.sec.gov U.S. Securities and Exchange Commission

[13] www.cftc.gov Commodity Futures Trading Commission

“in the money” -> comporterebbe un flusso di cassa positivo se fosse esercitata immediatamente

“at the money”-> comporterebbe un flusso di cassa nullo

“out of the money”-> comporterebbe un flusso di cassa negativo se fosse esercita immediatamente.

Se S è il prezzo dell’azione e X quello d’esercizio allora:

Un’opzione Call è:

1. “in the money” quando $S>X$
2. “at the money” quando $S=X$
3. “out of the money” quando $S<X$

Un’opzione put è:

1. “in the money” quando $S<X$
2. “at the money” quando $S=X$
3. “out of the money” quando $S>X$

In assenza di costi di transazione un’opzione che è “in the money” verrà sempre esercitata alla scadenza se non è stata esercitata in precedenza. Il valore intrinseco di un’opzione è definito come il massimo tra zero e il valore che l’opzione avrebbe, se fosse esercitata immediatamente.

Un’opzione americana in the money deve valere almeno quanto il suo valore intrinseco dato che, se il valore intrinseco è maggiore di zero il possessore può realizzarlo esercitando l’opzione immediatamente. Il valore complessivo di un’opzione è pari alla somma del valore intrinseco e del valore temporale.

Opzioni Flessibili

Questo tipo di opzioni sono caratterizzate da caratteristiche non standard quali il prezzo d’esercizio o la scadenza che possono essere diversi da quelli offerti di solito. Le flex option rappresentano un tentativo compiuto dalle borse per attrarre negoziazione che di solito si svolgono sui mercati OVER THE COUNTER. E’ necessario specificare una dimensione minima per la negoziazione di tali contratti. Le prime opzioni Over The Counter erano protette dallo stacco dei dividenti. Se una società distribuiva un dividendo il prezzo d’esercizio delle opzioni scritte sulle sue azioni veniva decurtato, nella data di stacco, dell’importo del dividendo.

Le opzioni trattate in borsa non vengono in genere aggiustate per conto dei dividendi. Quando si verifica lo stacco di un dividendo, le condizioni contrattuali delle opzioni non vengono aggiustate, ciò succede solo nel caso di frazionamenti. (stock splits). I

frazionamenti si hanno quando le azioni esistenti vengono frazionate in più azioni. In genere dopo un frazionamento n*m il prezzo dell'azione dovrebbe ridursi ad m/n- esimi del suo valore precedente. Le condizioni contrattuali dell'opzione vengono modificate per tener conto della variazione attesa del prezzo dell'azione. Se il prezzo dell'azione si riduce nel modo atteso la posizione di chi ha scritto e di chi ha acquistato l'opzione rimane invariata.
Le opzioni su azioni vengono aggiustante anche nel caso di assegnazioni gratuite (stock dividends)ovvero quando la società emette azioni da assegnare gratuitamente agli azionisti; queste assegnazioni gratuite non mutano la situazione patrimoniale o reddituale della società.
Il limite di posizione è il numero massimo che un investitore può possedere dello stesso segno[14]. Di solito il limite massimo di posizione sui principali titoli è pari a 75000 contratti; il limite di esercizio è pari al limite di posizione ed è definito dal numero massimo di opzioni che un individuo può esercitare in 5 giorni lavorativi consecutivi. Questi due limiti vengono introdotti per evitare che il mercato venga indebitamente influenzato dall'attività di un singolo investitore o comunque da un gruppo di investitori.

Quotazioni

La quotazione si riferisce ad un'opzione per l'acquisto o la vendita di una azione. Ogni contratto è scritto su 100 azioni per cui ogni contratto costa 100 volte il prezzo indicato.

Market makers

Al fine di agevolare gli scambi, la maggior parte delle borse utilizza un sistema di market makes. Il market maker di una certa opzione è colui il quale quota un prezzo denaro (bid) e un prezzo lettera (ask) per opzione ogni volta gli sia richiesto.
Bid è il prezzo al quale il market maker è disposto a comprare, ask invece il prezzo al quale è disposto a vendere. Nel momento in cui fornisce le quotazioni bid e ask non sa se l'operatore che gli ha chiesto le quotazioni voglia comperare o vendere l'opzione.
Ask è in genere più alto di bid e la differenza tra la quotazione bid e ask è chiamata bid-ask spread. Le borse fissano dei limiti superiori per i bid-ask spread: non possono essere maggiori di $0.25, $0.50, $0.75 ed $1 per le opzioni con quotazioni che risultino minori di $0.5, comprese tra $0.5 e $10, comprese tra $10 e $20 e maggiori $20.

Ordini di segno opposto

Chi acquista un'opzione può chiudere la posizione dando un ordine di segno opposto per la vendita della stessa, analogamente, chi scrive un'opzione può chiudere la posizione dando un ordine di segno opposto per l'acquisto della stessa. Quando si negozia l'opzione, se nessuna

[14] Si considerano posizioni dello stesso segno calls lunghe e put corte e viceversa

delle 2 controparti sta chiudendo una posizione in essere, l'open interest aumenta di una unità. Se una parte sta chiudendo una posizione in essere e l'altra no allora l'open interest resta invariato se entrambe invece stanno chiudendo una posizione in essere allora si riduce di un'unità.

Commissioni

Le commissioni applicate ai singoli investitori variano molto da broker a broker: i discount brokers chiedono in genere commissioni inferiori rispetto a quelle dei full-service broker.
L'effettivo importo richiesto è di solito pari ad un costo fisso più una posizione dell'ammontare in dollari della negoziazione. Se si chiude una posizione su opzioni dando un ordine di segno opposto si pagano di nuovo le commissioni. Se l'opzione viene esercitata, l'investitore paga le stesse commissioni che avrebbe pagato per l'acquisto o la vendita del titolo sottostante. Si tratta, in genere di un importo compreso tra l'1% e il 2% del valore del titolo. In genere il sistema delle commissioni tende a spingere gli investitori a vendere le opzioni piuttosto che ad esercitarle. Un costo non apparente nelle compravendite di opzioni e il bid-ask spread del market maker[15].

Depositi di garanzia

Negli Usa quando si acquistano azioni si può pagare in contanti o usare un deposito di garanzia (margin account)[16]. Il margine iniziale è pari al 50% del valore delle azioni e il margine di margine di mantenimento al 25%. Quando si acquistano calls o puts si deve pagare l'intero prezzo delle opzioni. Non si possono comperare opzioni a credito(on margin) perché le opzioni contengono un alto livello di leverage. Quando si vendono opzioni scoperte, si deve effettuare un versamento in deposito di garanzia, questo viene richiesto dal broker e dalle borse stesse per garantire che l'investitore non sia insolvente nel caso in cui l'opzione venga esercitata.

Scrivere opzioni scoperte

L'opzione si dice scoperta[17] se non è compensata da una posizione di segno opposto sul titolo sottostante. Il margine iniziale per una posizione corta su una call scoperta è pari al margine tra i risultati relativi ai 2 seguenti calcoli:

1. 100% del ricavo della vendita maggiorato del 20% del prezzo dell'azione sottostante meno l'eventuale importo per il quale l'opzione risulti out of the money
2. 100% del ricavo di vendita più un10% del prezzo dell'azione sottostante

[15] Si veda per quanto riguarda bid-ask spreads il capitolo sul rischio finanziario.
[16] si parla in questo caso di acquisto a credito o buying on margin
[17] O *naked* in gergo finanziario

Il margine iniziale per una posizione corta su una put scoperta è pari al maggiore tra i risultati ai 2 seguenti calcoli:

1. 100% del ricavo della vendita maggiorato del 20% del prezzo dell'azione sottostante meno l'eventuale importo per il quale l'opzione risulti out of the money
2. 100% del ricavo di vendita più un10% del prezzo dell'azione sottostante

Se il deposito richiesto (*manteinence margin*) è inferiore al saldo corrente il cliente può prelevare denaro, se invece è significativamente superiore viene richiesta l'integrazione dei margini.

Scrivere Call coperte:

Scrivere Call coperte significa scrivere call su titoli che si possiedono, fare questa operazione è meno rischiosa di scrivere call scoperte dato che il peggio che può succedere è che l'investitore debba vendere le sue azioni ad un prezzo inferiore a quello di mercato. Le azioni che sono a fronte delle opzioni vendute possono essere acquistate a credito e con il ricavato usato per adempiere a parte degli obblighi di garanzia. Anche nel caso in cui le calls coperte siano in the money non è richiesto alcun deposito di garanzia, tuttavia il prezzo delle azioni viene ridotto dell'importo per il quale l'opzione risulta in the money per calcolare la posizione dell'investitore.

Option Clearing Corporation:

L'option clearing corporation garantisce che i venditori di opzioni mantengano gli impegni presi e tiene conto di tutte le posizioni lunghe e corte. Quando si acquista un'opzione, l'investitore deve pagare l'intero importo dovuto più il premio, entro la mattina del giorno lavorativo successivo. Questi fondi vengono depositati presso la OCC: il broker effettua un deposito di garanzia presso il socio della OCC che regola le sue operazioni, questo socio a sua volta effettua un deposito presso la OCC. Le brokkerage house possono chiedere ai clienti depositi maggiori ma non minori.

Le vendite presunte:

Se il proprietario vende allo scoperto le stesse proprietà o delle proprietà sostanzialmente identiche le vendite vengono considerate presunte come nel caso in cui entra in una posizione futures o forward il cui sottostante è rappresentato dalle stesse proprietà o da proprietà identiche o ancora quando entra in uno o più contratti che eliminano definitivamente il rischio verso ribassi o rialzi del mercato. Le transazioni che invece riducono solo il downside risk non fanno scattare la presunzione di vendita.

Proprietà fondamentali delle opzioni su azioni:

Una delle proprietà fondamentali delle opzioni su azioni è la put-call parity che lega i prezzi di calls e puts europee nel caso il sottostante sia rappresentato da un titolo che non paga dividendi.

Essa mostra come il valore di una call europea con un certo prezzo d'esercizio ed una certa scadenza può essere dedotta dal valore di una put europea con lo stesso prezzo d'esercizio e la scadenza e viceversa. Se l'equazione non venisse rispettata esisterebbero delle opportunità di arbitraggio.

I fattori che influiscono sui prezzi delle opzioni sono:

- S_0 Prezzo corrente dell'azione
- S_T Prezzo dell'azione al tempo T
- X Prezzo d'esercizio
- T Vita residua
- σ Volatilità del prezzo dell'azione
- r Tasso si interesse privo di rischio a T anni
- D Valore Attuale dei dividendi attesi durante la vita dell'opzione
- C valore di una call americana per l'acquisto di un'azione
- P valore di una put americana per l'acquisto di un'azione
- c valore di una call europea per l'acquisto di un'azione
- p valore di una call americana per l'acquisto di un'azione
- r tasso di interesse nominale, non reale

La call-put parity è quindi:

$$C + Xe^{(-rt)} = p + S_0$$

La call-put parity vale solo per le opzioni europee tuttavia, è possibile ricavare alcune relazioni tra i prezzi delle opzioni americane. Si può dimostrare che:

$$S_0 - X < C - P < S_0 - Xe^{(-rt)}$$

Non è mai ottimale l'esercizio anticipato di una call americana scritta su un titolo che non paga dividendi se l'investitore ha intenzione di mantenere la posizione long asset per il resto della vita dell'opzione, risulta invece, in alcuni casi, ottimale l'esercizio anticipato di una put americana scritta sullo stesso titolo. L'esercizio anticipato non comporta vantaggi se l'investitore pensa di tenersi il titolo per il resto della vita dell'opzione.

Dato che:

$$c \geq S_0 - Xe^{(-rt)}$$

$$C \geq c$$

$$C \geq S_0 - Xe^{(-rt)}$$

E dato che $r > 0$

$$C > S_0 - X$$

Se l'esercizio anticipato fosse ottimale allora $C = S_0 - X$.

Esistono due motivi per cui le opzioni americane scritte su titoli che non pagano dividendi non dovrebbero mai essere esercitate prima della scadenza.

1. Per un valore assicurativo : una call detenuta al posto dell'azione sottostante protegge il detentore contro la caduta del prezzo dell'azione al di sotto del prezzo d'esercizio X. Una volta che l'opzione è stata esercitata ed il prezzo d'esercizio viene scambiato, l'assicurazione svanisce.

2. Per un valore temporale del denaro: più tardi si paga il prezzo d'esercizio meglio è.

Può essere ottimale esercitare prima della scadenza una put americana scritta su un titolo che non paga dividendi, poiché, al pari della call, la put può essere considerata come una polizza assicurativa infatti l'investitore si assicura contro il ribasso del prezzo dell'azione sotto un certo livello.

In generale l'esercizio anticipato di una put diventa più conveniente al diminuire di S_0, all'aumentare di r e al diminuire di σ.

Il prezzo dell'opzione non potrà mai superare il prezzo dell'azione qualunque cosa accada. Il prezzo dell'azione rappresenta un limite superiore per la call $c < S_0$ e $C < S_0$ mentre per quanto riguarda la put il prezzo non potrà mai essere maggiore di X: $p < X$ e $P < X$ ne segue che ora, al tempo T, il valore di p non potrà mai essere superiore al suo valore attuale :

$$p < Xe^{-(rt)}$$

Se ciò non valesse un arbitraggista potrebbe conseguire un profitto privo di rischio vendendo l'opzione ed investendo il ricavato al tasso privo di rischio.

Il limite inferiore di una call europea scritta su un titolo che non paga dividendi è dato da:

$$Ce > S_0 - Xe^{(-rt)}$$

Per una put invece questo limite diventa:

$$P > Xe^{(-rt)} - S_0$$

Le calls valgono di più se il prezzo dell'azione cresce e valgono meno se cresce il prezzo d'esercizio. Per una put che viene esercitata il valore finale è pari alla differenza tra il prezzo d'esercizio e il prezzo dell'azione:si comportano in maniera opposta delle calls: valgono meno se il prezzo dell'azione aumenta, valgono di più se il prezzo d'esercizio aumenta.
Per quanto riguarda il valore di calls e puts americane questo aumenta al crescere della vita residua, questo concetto per le opzioni europee però non vale sempre.

Volatilità:

La volatilità misura l'incertezza circa il futuro comportamento di un titolo. Se la volatilità aumenta, la probabilità che la performance del titolo risulti molto brillante o estremamente negativa aumenta. Chi possiede una call trae beneficio dai rialzi di prezzo dell'azione ma ha un rischio inferiore limitato perché in caso di ribasso il massimo che si può perdere è il prezzo dell'opzione. Chi ha una put invece trae beneficio dai ribassi ma ha un rischio inferiore limitato in caso di rialzo. Il valore delle opzioni aumenta all'aumentare della volatilità

Dividendi:

I dividendi fanno diminuire il prezzo delle azioni nel giorno di stacco, la relazione che intercorre tra il valore di una calls e l'importo dei dividendi attesi è negativa, risulta invece positiva per le puts. Quando ci si attende che vengono distribuiti dividendi non si può più affermare che una call americana non verrà mai esercitata anticipatamente. Talvolta è ottimale esercitare una call americana prima di una data di stacco dei dividendi, mai in altri momenti. Quando il titolo sottostante paga dividendi la put-call parity diventa:

$$C + D + Xe^{(-rt)} = p + S_0$$

cioè diventa:

$$S_0 - D - X \leq C - P \leq S0 - Xe^{(-rt)}$$

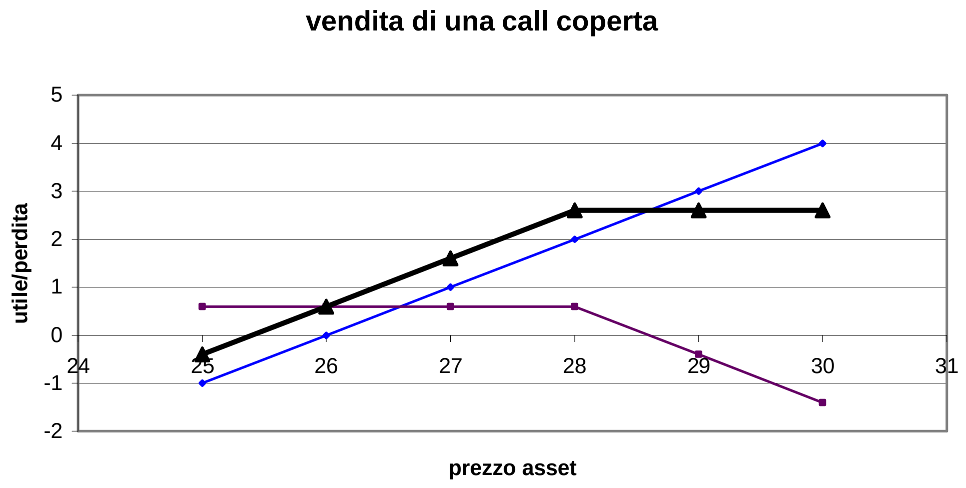
Strategie operative mediante opzioni:

Opzioni europee :

Una caratteristica delle opzioni è che si prestano ad essere utilizzate per creare un'ampia varietà di funzioni di profitto. Se fossero disponibili opzioni europee per tutti i prezzi d'esercizio potremmo creare una qualsiasi funzione di profitto[18].

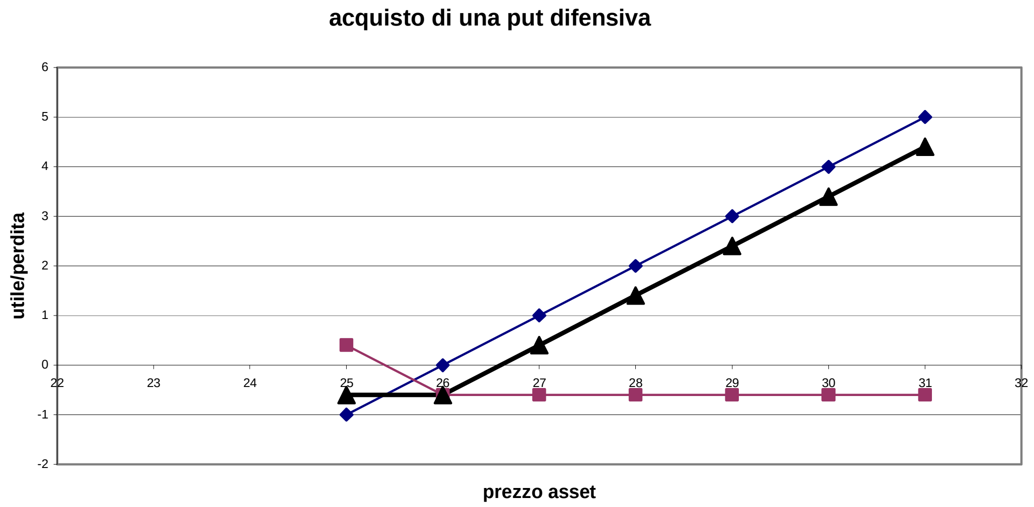
[18] Il profitto è il risultato dato dalla differenza del valore finale della strategia e il costo iniziale.

<u>Strategie con un'opzione e l'azione sottostante</u>: Supponiamo di avere un portafoglio composto da una posizione long asset e una posizione short call, questa strategia è detta " vendita di una call coperta":



La vendita della call permette all'investitore l'incasso del premio dell'opzione e quindi un entrata di cassa.

La strategia sotto rappresentata riguarda invece l'acquisto di una put e dell'azione sottostante. Questa strategia prende anche il nome di "acquisto di una put difensiva" e permette all'investitore di coprirsi in caso ribasso del prezzo del titolo.

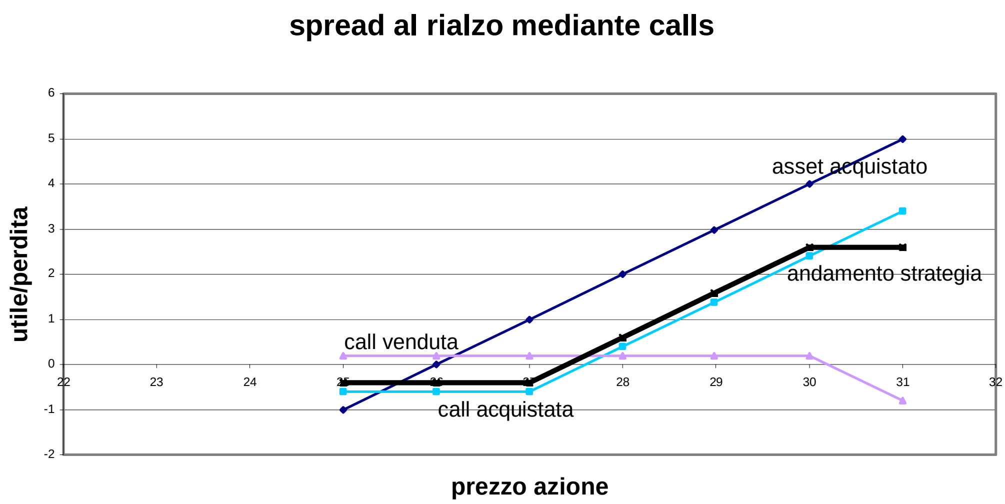


Spreads:

Si parla di una strategia operativa mediante spreads quando si assumono due o più opzioni dello stesso tipo(cioè, due o più *calls* o due o più *puts*).

Spreads al rialzo (Bull call spreads):

Si può creare uno spreads al rialzo comprando una call con un certo prezzo d'esercizio e vendendone un'altra con un prezzo d'esercizio più alto. Entrambe le opzioni sono scritte sullo stesso titolo ed hanno uguale scadenza; dato che il prezzo della call diminuisce al crescere di X il valore dell'opzione venduta sarà sempre minore del valore dell'opzione comprata. Un tale investimento creato con le calls richiede un investimento iniziale.



Se

X_1 è il prezzo d'esercizio della call comprata

X_2 è il prezzo d'esercizio della call venduta

S_T è il prezzo dell'azione alla scadenza delle opzioni

Prezzo Azione	Valore finale call lunga	Valore finale Call corta	Valore finale complessivo
$S_T < X_1$	0	0	0
$X_1 \le S_T \le X_2$	$S_T - X_1$	0	$S_T - X_1$
$X_2 \le S_T$	$S_T - X_1$	$-(S_T - X_2)$	$X_2 - X_1$

Se il prezzo dell'azione, alla data di scadenza è minore del prezzo d'esercizio più basso, il valore finale è nullo, se è compreso tra i due prezzi d'esercizio il valore finale sarà $S_T - X_1$, se invece sarà maggiore del prezzo d'esercizio più alto il valore finale sarà $X_2 - X_1$.

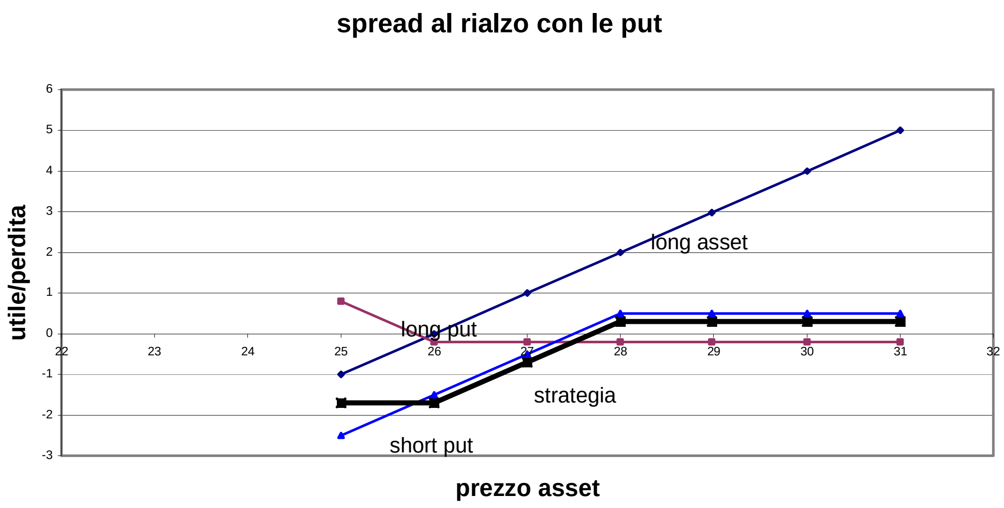
Le strategie mediante Bull-Spreads limitano i profitti in caso di rialzo e le perdite in caso di ribasso.

Ci sono 3 tipi di bull-spreads:

1. Entrambe le calls sono in of the money
2. Una call è in the money, l'altra out of the money
3. Entrambe le calls sono out of the money

Gli spreads più aggressivi sono quelli del primo tipo, costano però molto ed è piccola la probabilità di un valore finale alto.

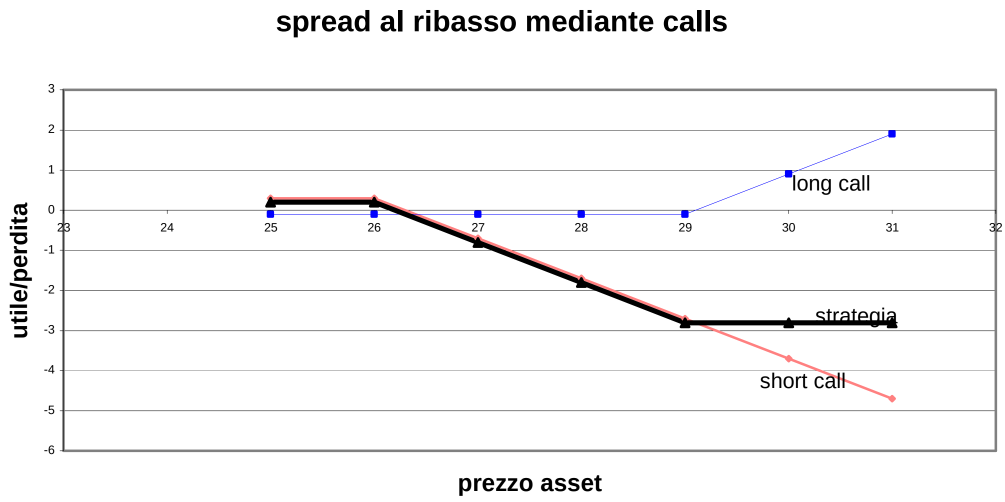
Lo spreads al rialzo si può costruire anche andando lunghi su una put con prezzo d'esercizio basso e corti su una put con prezzo d'esercizio alto. E' presentato di seguito il grafico di tale strategia:



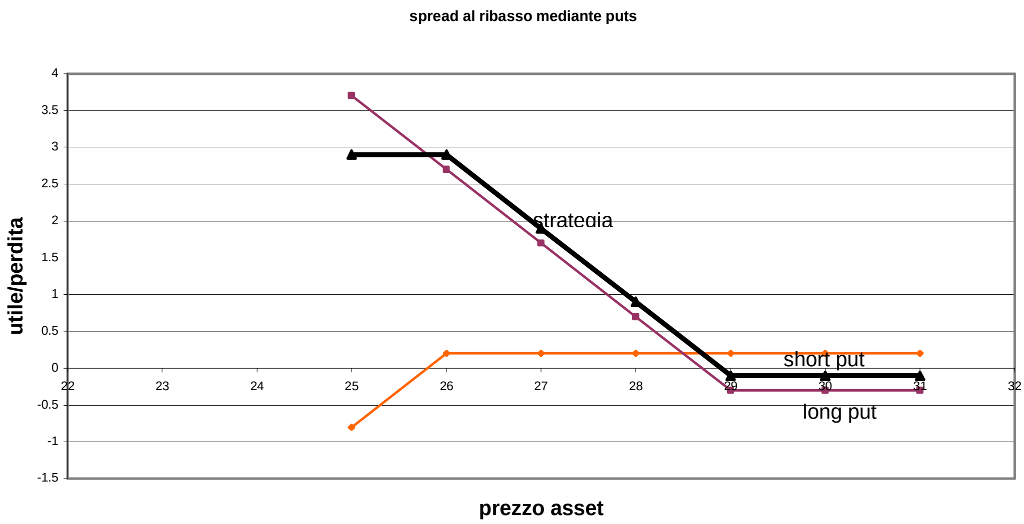
Spreads al ribasso:

Chi costruisce uno spreads al ribasso si augura che il prezzo dell'azione scenda. Lo spread al ribasso si ottiene acquistando una call con un certo prezzo d'esercizio e vendendone un'altra con un prezzo d'esercizio più basso.

Nel caso del "Bear Spread" il prezzo d'esercizio della call acquistata è maggiore del prezzo d'esercizio della call venduta, in questo caso l'incasso è immediato dato che il prezzo d'esercizio della call venduta è maggiore del prezzo della call acquistata. Al pari degli spreads al rialzo gli spreads al ribasso limitano l'upside potential e il downside risk.



Anche questi possono essere costruiti usando le puts piuttosto che calls: si compra una put con prezzo d'esercizio alto e si vende una put con prezzo d'esercizio basso.

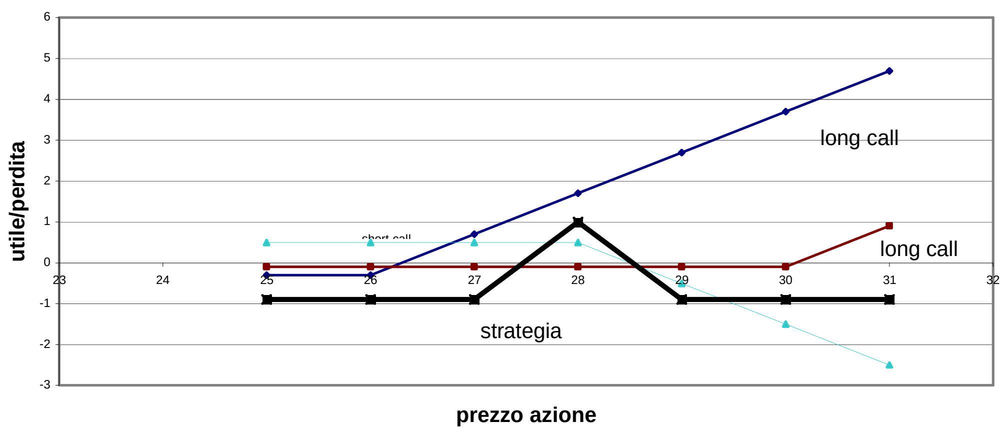


Prezzo dell'Azione	Valore finale della call lunga	Valore finale della call corta	Valore finale complessivo
$S_T \leq X_1$	0	0	0
$X_1 \leq S_T \leq X_2$	0	$-(S_T - X_1)$	$X_1 - S_T$
$X_2 < S_T$	$S_T - X_2$	$-(S_T - X_1)$	$X_1 - X_2$

Spread a Farfalla:

Questa strategia si ottiene assumendo posizioni su opzioni con tre diversi prezzi di esercizio, si possono costruire comprando una call con prezzo d'esercizio basso, X_1, comprando una call con prezzo d'esercizio alto, X_3, e vendendo due calls con prezzo d'esercizio intermedio,X_2, vicino al prezzo corrente dell'azione. Consentono profitti se il prezzo dell'azione resta vicino a X_2 ma generano una perdita nel caso di un rialzo o di un ribasso significativo, questa strategia è appropriata per chi ritiene improbabili variazioni estreme del prezzo dell'azione. Richiedono un piccolo investimento iniziale.

spread a farfalla mediante calls



Come per le altre strategie anche questa si può costruire usando le puts anziché le calls.

<u>Spreads di calendario:</u>

Fino ad ora abbiamo considerato opzioni con la stessa scadenza per costruire gli spreads, in questo caso però le opzioni hanno lo stesso prezzo d'esercizio ma hanno scadenze diverse. Gli spreads di calendario possono essere costruiti vendendo una call con un certo prezzo d'esercizio e comprandone un'altra con uguale prezzo d'esercizio ma durata più lunga. In genere più la scadenza dell'opzione è lontana più l'opzione è cara. L'opzione più lunga viene venduta quando scade l'opzione più breve e l'operatore consegue un profitto se alla scadenza il prezzo dell'azione è prossimo al prezzo d'esercizio, ma consegue ad una perdita se il prezzo dell'azione è significativamente maggiore o minore al prezzo d'esercizio.

- Se alla scadenza dell'opzione più breve, il prezzo dell'azione è molto basso allora l'opzione in scadenza non ha valore ed il valore dell'opzione più lunga è prossimo a zero. L'operatore subisce una perdita di poco inferiore al costo iniziale dello spread.
- Se invece il prezzo dell'azione, S_T, è molto alto quando scade l'opzione più breve, l'esercizio dell'opzione in scadenza costa all'investitore un importo pari a S_T - X mentre l'opzione più lunga vale poco più di S_T – X dove X è il prezzo d'esercizio di entrambe le

opzioni. In questo caso l'investitore subisce una perdita di poco inferiore al costo iniziale dello spread.

- Se S_T è prossimo a X, l'opzione in scadenza in scadenza costa all'investitore poco o nulla mentre l'opzione lunga ha un valore non trascurabile che genera un profitto netto significativo.

Negli spreads di calendario neutrali, in genere si sceglie un prezzo d'esercizio prossimo al prezzo corrente dell'azione, in quelli al rialzo invece si sceglie un prezzo d'esercizio più alto mentre in quelli al ribasso più basso.

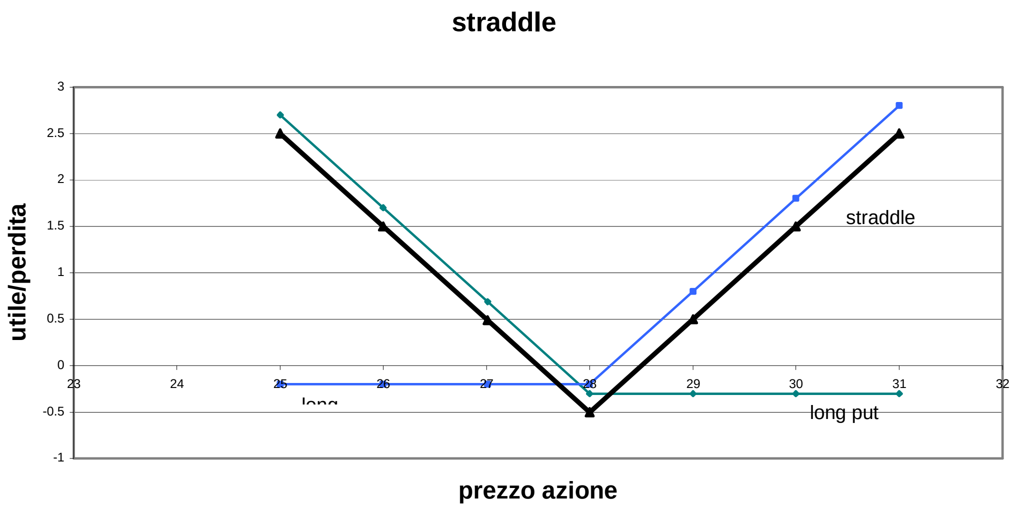
Gli spreads inversi di calendario consistono nel comprare un'opzione breve e vendere un'opzione con una durata superiore. In genere questo tipo di spread genera un profitto se il prezzo dell'azione, alla scadenza del opzione breve è ben al di sopra, o al di sotto del prezzo d'esercizio delle opzioni, ma comporta una perdita significativa se il prezzo dell'azione è vicino al prezzo d'esercizio.

<u>Spreads diagonali :</u>

Sono spread in cui le due calls o puts hanno prezzo d'esercizio e scadenze diverse. Esistono diversi spreads diagonali, il profilo dei profitti e delle perdite di questi dipende da una variazione del profitto proprio di uno spread al rialzo o al ribasso.

<u>Straddles:</u>

Si tratta di comprare una call e una put con prezzo d'esercizio e scadenze uguali. Se alla scadenza delle opzioni il prezzo dell'azione è prossimo al prezzo d'esercizio, lo straddle comporta una perdita, se invece il prezzo dell'azione varia in modo significativo in una delle due direzioni comporta un profitto significativo. Gli straddle sono appropriati quando l'operatore si aspetta una forte variazione del prezzo del sottostante ma non sa in quale direzione.

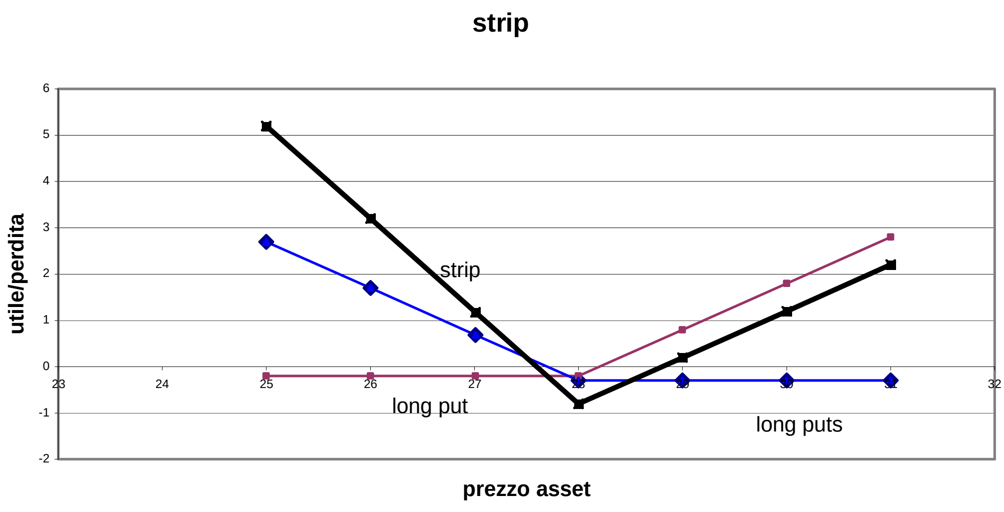


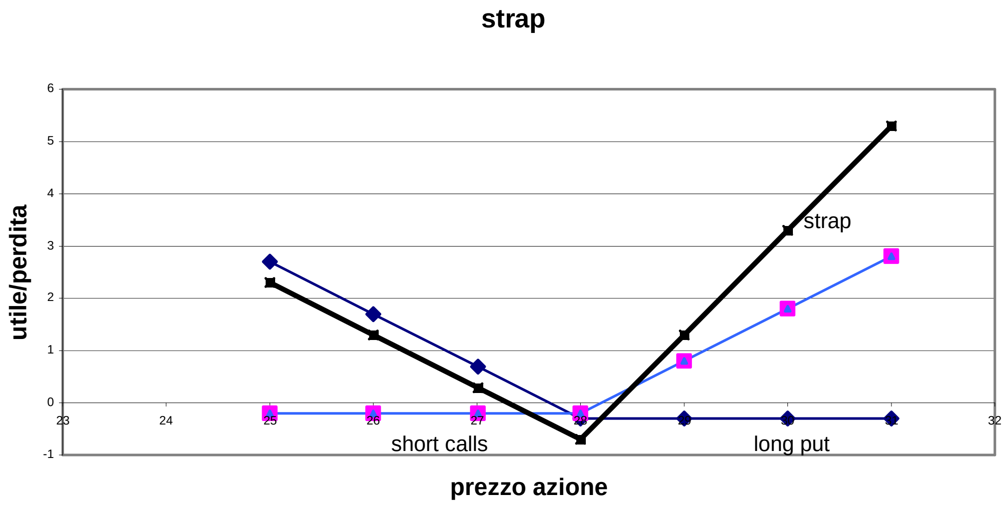
Prezzo azione	**Valore finale call**	**Valore finale put**	**Valore finale complessivo**
$S_T \leq X$	0	$X - S_T$	$X - S_T$
$X < S_T$	$S_T - X$	0	$S_T - X$

E' una strategia naturale, ma molto rischiosa e si pratica quando ci si aspetta una forte discontinuità (jump) del prezzo dell'azione. Questa aspettativa sarà riflessa dai prezzi delle opzioni: quando l'operatore cercherà di comprare le opzioni le troverà significativamente più care di quelle scritte sui titoli sui quali non vi sono aspettative di discontinuità. Affinché lo straddle sia efficace le aspettative dell'operatore devono essere diverse da quelle della maggior parti degli altri partecipanti al mercato. Lo straddle in vendita (straddle write) si ottiene vendendo una call ed una put con lo stesso prezzo d'esercizio e la stessa scadenza. Se il prezzo d'esercizio, alla scadenza delle opzioni, è prossimo al prezzo d'esercizio, lo straddle comporta un profitto significativo però la perdita che comporta nel caso di un'ampia variazione dell'azione è illimitata.

Strips e straps:

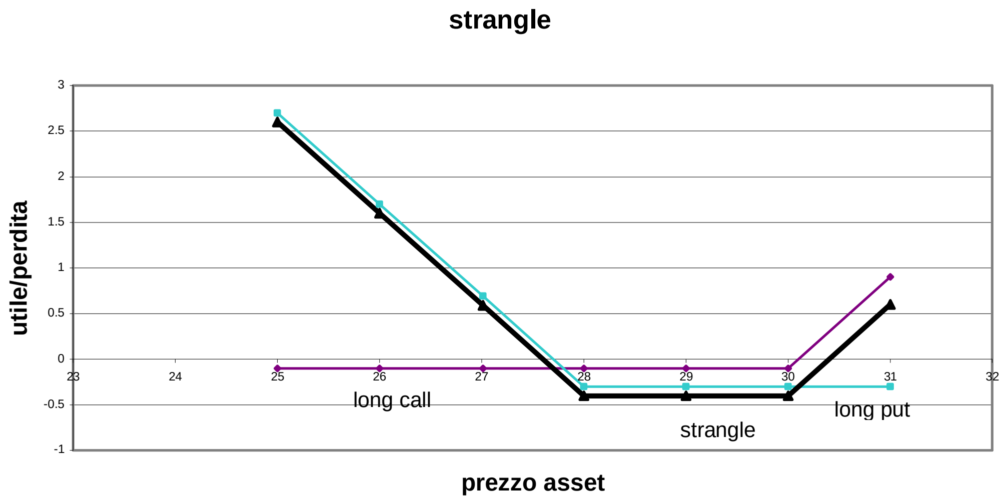
Gli strips vengono costruiti comprando una call e due puts con uguale prezzo d'esercizio e uguale scadenza scritte sullo stesso titolo. L'operatore scommette sul fatto che si verificherà una forte variazione del prezzo del sottostante, ma ritiene che i ribassi siano più probabili dei rialzi. Nel caso degli straps invece l'operatore scommette che si verificherà una forte variazione del prezzo dell'azione ma ritiene che i rialzi siano più probabili dei ribassi.





Strangles:

Sono combinazioni verticali inferiori (bottom vertical combinations) che si ottengono comprando una put e una call con la scadenza ma con prezzi d'esercizio diversi.



Il profilo dei profitti e delle perdite di uno strangles è :

Prezzo dell'azione	Valore finale call	Valore finale put	Valore finale complessivo
$S_T \leq X_1$	0	X_1-S_T	X_1-S_T
$X_1 < S_T < X_2$	0	0	0
$X_2 < S_T$	$S_T – X_2$	0	$- X_2 + S_T$

Lo strangle è simile allo straddle: l'operatore scommette sul fatto che si verifichi una forte variazione del prezzo dell'azione, ma non è certo se si tratterà di un rialzo o di un ribasso.

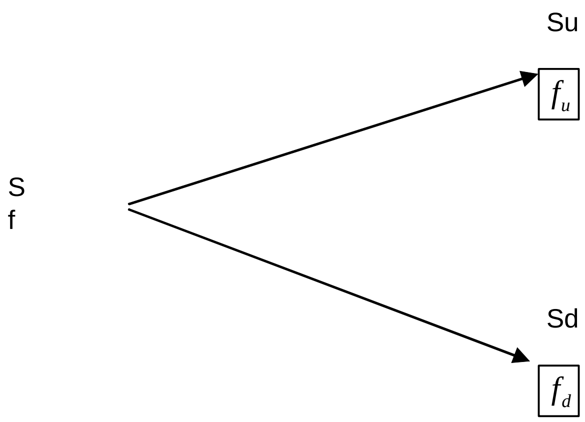
Se il prezzo dell'azione finisce con l'assumere un valore centrale rispetto ai due prezzi d'esercizio, la perdita subita in uno strangle è inferiore a quella di uno straddle. Il profilo dei profitti e delle perdite dipende da quanto sono distanti tra loro i prezzi d'esercizio: più sono lontani, più piccolo è il downside risk e più ampia è la variazione del prezzo dell'azione per consentire un profitto.

La vendita di uno strangle è una combinazione verticale superiore è appropriata se l'operatore ritiene improbabile che si verifichino ampie variazioni del prezzo dell'azione. Si tratta anche in questo caso di una strategia rischiosa perché le possibili perdite sono illimitate.

Prezzaggio delle opzioni:

Ci sono più metodi per prezzare le opzioni quelli che introdurrò sono il modello binomiale e il modello black and sholes che è quello che ho usato maggiormente durante il mio lavoro.

Modello binomiale:



E' una tecnica usata per valutare le opzioni su azioni, si tratta di un albero che rappresenta i diversi sentieri che potrebbero essere seguiti dal prezzo dell'azione durante la vita dell'opzione.

Consideriamo un titolo il cui prezzo sia *S* e un'opzione scritta su questo titolo il cui prezzo sia *f*. Supponiamo l'opzione scada al tempo T e che il prezzo dell'azione possa salire da *S* a S_u o scendere da *S* a S_d con (u>1 ; d <1).

Il tasso di variazione del prezzo dell'azione in caso di rialzo è $u - 1$ e in caso di ribasso $1 - d$. Se il prezzo dell'azione sale a S_u il valore finale dell'opzione sarà f_u , se il prezzo scende a

S_d allora scenderà a f_d. Se c'è un movimento al rialzo del prezzo dell'azione il valore del portafoglio alla fine della vita dell'opzione sarà S_u Δ - f_u, se c'è un movimento a ribasso invece avremmo S_d Δ - f_d le due espressioni sono uguali quando

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{s_u - s_d}$$

l'equazione dimostra che Δ è il rapporto tra la variazione del prezzo derivato e la variazione del prezzo dell'azione che si verifica passando da un momento all'altro.
Se r è il tasso risk-free il valore attuale del portafoglio risulta :

$$(S_u * \Delta - f_u) * e^{(-rt)}$$

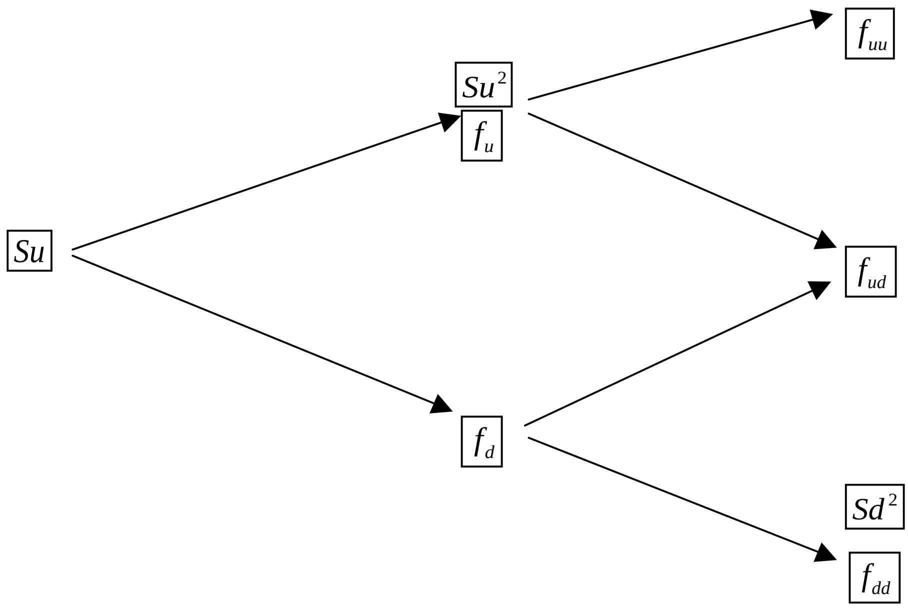
considerando (S* Δ - f) il costo iniziale del portafoglio;
f= $e^{(-rt)}$ [p f_u + (1-p) f_d] il costo iniziale dell'opzione[19]

dove p= $\frac{e^{rt} - d}{u - d}$.

Nella formula di valutazione dell'opzione non compaiono le probabilità associate al rialzo o al ribasso del prezzo dell'azione poiché non si sta valutando l'opzione in termini assoluti ma relativamente al prezzo del sottostante e per cui le probabilità dei futuri movimenti al rialzo o al ribasso sono già incorporate nel prezzo dell'azione.

[19] ovvero il valore corrente dell'opzione è pari all'aspettativa del suo futuro valore attualizzato al tasso privo di rischio

Generalizzazione degli alberi binomiali a 2 stadi:



Il prezzo S sale ad un livello pari a u volte il valore iniziale o scende ad un livello pari a d volte il valore iniziale.

Se:

r è il tasso risk-free

Δ è l'intervallo considerato allora

$$f_u = e^{-r\Delta t}\left[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}\right]$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}\left[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}\right]$$

$$f = e^{-2r\Delta t}\left[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}\right]$$

La formula è coerente col principio di valutazione neutrale verso il rischio[20].

[20] Assumere che il tasso di rendimento dell'azione sia uguale al tasso privo di rischio cioè che il mondo sia neutrale verso il rischio : gli individui sono neutrali al rischio, gli investitori non chiedono di essere ricompensati per il rischio e il tasso di rendimento atteso di tutti i titoli è il tasso risk-free.

Modello Black-Scholes:

Questo modello vale per le opzioni europee scritte su titoli che non pagano dividendi.

Assunzioni sulla dinamica dei prezzi delle azioni:

- I prezzi delle azioni si distribuiscono come un random walk[21]
- Il tasso di variazione del prezzo di un'azione nel breve periodo è distribuito come una normale
- μ è il tasso di variazione atteso del prezzo dell'azione
- σ è la volatilità del prezzo dell'azione
- $\mu\Delta t$ è la media dei tassi di variazione relativi ad un breve periodo di tempo Δt
- $\sigma\sqrt{\Delta t}$ la deviazione standard

Allora

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \Phi\ (\mu\Delta t,\ \sigma\sqrt{\Delta t}\ )$$

Una distribuzione log-normale può assumere solo valori positivi, è una distribuzione asimmetrica con media, mediana e modo diversi l'una dall'altra. Il logaritmo è distribuito in modo normale :

$$\ln (St) \sim N$$

dove St è il prezzo ad un futuro istante di tempo t.

$$E (\ln (St)) = \text{media} \ln (St) = \ln (S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})$$

$$Ln (St) \sim [\ln (S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) T, \sigma\sqrt{\Delta t}]$$

$$E (St) = S_0\ e^{(\mu t)}$$

$$Var(St) = S_0^2 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma 2t} - 1\right)$$

$$Ln (\frac{St}{S_0}) \sim N[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{\Delta t}]$$

Quando T=1 allora Ln $(\frac{St}{S_0})$ è il tasso di rendimento fornito dal titolo in 1 anno.

[21] Hull (2002), Fondamenti di mercati di futures e opzioni,Ontario,Canada pg 252-270 Il modello random walk è un modello statistico ed economico che ben si adatta ad una serie di prezzi
Burton (1996) A random Walk Down Wall Street pg 24

Assunzioni sottostanti il modello Black-Scholes:

Le assunzioni che stanno alla base del modello analizzato sono:

- il comportamento del prezzo dell'azione corrisponde al modello log-normale con μ e σ costante.
- Non esistono costi di transazione o tasse. Tutti i titoli sono divisibili.
- L'azione non paga dividendi durante la vita dell'opzione.
- Non esiste l'opportunità di arbitraggio
- I titoli vengono negoziati continuamente
- Gli investitori possono prendere e dare in prestito denaro allo stesso tasso di interesse privo di rischio
- Il tasso di interesse privo di rischio a breve, r è costante

Tasso di rendimento atteso:

Il tasso di rendimento atteso μ di un titolo dipende dalla rischiosità del titolo stesso e dal livello dei tassi di interesse dell'economia. Maggiore è il rischio maggiore è il tasso di rendimento richiesto dagli investitori. Maggiore è il tasso d'interesse privo di rischio maggiore è il tasso di rendimento atteso da un investimento azionario. Il valore di un'opzione non dipende affatto da μ.

Si consideri l'equazione

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \Phi\ (\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}\ )$$

Questa mostra che $\mu\Delta t$ è il tasso di variazione atteso di S in un breve periodo di tempo Δt. In altri termini, μ è il tasso di variazione atteso di S nel periodo Δt espresso su base annua con una frequenza di composizione pari a m $= \frac{1}{\Delta t}$ volte all'anno.

Dato che Δt è molto piccolo è naturale assumere che μ sia uguale al tasso di rendimento atteso annuo composto continuamente. Quindi il valore atteso di questo tasso è pari a $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$.

Volatilità

σ misura l'incertezza circa i futuri tassi di rendimento del titolo. La volatilità del prezzo di un'azione è la deviazione standard del tasso di rendimento composto continuamente fornito dal titolo in un periodo di un anno. Quando T è piccolo $\sigma\sqrt{\Delta t}$ è approssimativamente uguale alla deviazione standard dei tassi di variazione dei prezzi dell'azione in un periodo di T anni.

Stima della volatilità in base ai dati storici:

Per stimare la volatilità del prezzo di un'azione si può usare la serie storica dei suoi tassi di variazione, ossia il prezzo di un'azione viene rilevato ad intervalli di tempi fissi.

Assumiamo quindi:

- n+1 = numero di osservazioni
- S_i è il prezzo dell'azione alla fine dell'i-simo intervallo
- Z è la lunghezza dell'intervallo in anni
- $u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_i - 1}\right)$
- $\bar{u}$ = media u_i
- S è la stima della deviazione standard delle u_i

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u_i - \bar{u})^2$$

$$S^{2}\text{[22]} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2}$$

- s è una stima di $\sigma\sqrt{t}$
- la stima di σ è $\frac{s}{\sqrt{2n}}$ l'errore standard di questa stima è approssimativamente pari a $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$
- σ cambia nel tempo e i dati troppo vecchi possono non essere rilevanti per prevedere il futuro, si usano in genere i prezzi di chiusura giornalieri degli ultimi 90-180 giorni

Formule di valutazione di Black and Scholes

Le formule di valutazione di calls e puts su titoli che non pagano dividendi sono:

$$C = S_0 N(d_1) - X e^{-rt} N(d_2)$$

$$P = X e^{-rt} N(d_2) - S_0 N(-d_1)$$

[22] Deviazione standard campionaria

N(X) è una cumulata di una normale standardizzata è la probabilità che una variabile con distribuzione normale standardizzata $\varphi \sim N(0,1)$ assuma valori inferiori ad X.

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

- T è la vita residua dell'opzione
- σ è la volatilità del prezzo dell'azione
- C è la call americana scritta su un titolo che non paga dividendi uguale a quello di una call europea, c.

La formula è corretta, in teoria solo se r è costante.

Proprietà delle formule di Black-Scholes:

Quando il prezzo dell'azione S_0 è molto alto la call viene quasi certamente esercitata e diventa quindi simile ad un contratto *forward* con un prezzo di consegna X.

Pertanto il prezzo della call dovrebbe essere:

$$S_0 - Xe^{-rt}$$

Quando S_0 è molto alto, d_1 e d_2 assumono valori molto elevati e i termini $N(d_1)$ e $N(d_2)$ sono prossimi ad uno, il prezzo di una put europea, p, tende a zero dato che i termini $N(-d_1)$ e $N(-d_2)$ sono entrambi prossimi a zero.

Quando il prezzo dell'azione diventa molto basso d_1 e d_2 assumono valori negativi molto grandi e $N(d_1)$ e $N(d_2)$ sono prossimi a zero.

Se il prezzo della call è prossimo a zero $N(-d_1)$ e $N(-d_2)$sono prossimi ad uno perché il prezzo di una put europea si avvicina a $Xe^{-rt} - S_0$

Valutazione neutrale verso il rischio:

Si riconsideri il principio della valutazione neutrale verso il rischio:

" Ogni titolo che dipende da altri titoli negoziati sul mercato può essere valutato assumendo che gli investitori siano neutrali al rischio" .

Questo principio afferma che i derivati come le opzioni possono essere valutati assumendo che gli investitori siano neutrali verso il rischio. Le attitudini degli investitori non influenzano il valore di un'opzione quando esso viene espresso in funzione del prezzo del titolo sottostante.

In un mondo di operatori neutrali al rischio valgono due risultati semplici:

- Il tasso di rendimento atteso di tutti i titoli è il tasso di interesse risk-free.
- Il risk-free è il tasso appropriato per attualizzare ogni futuro flusso di cassa atteso.

Le opzioni europee e gli altri derivati che offrono un payoff ad un particolare istante di tempo possono essere valutati facendo ricorso al principio della valutazione neutrale verso il rischio.

Si procede nel seguente modo:

- $\mu = r$
- Calcolo il valore atteso del derivato al tempo T
- Attualizzo il valore atteso in base al risk-free

Il valore atteso del contratto in un mondo di operatori neutrali verso il rischio è pari a:

$$S_0 e^{rT} - K$$

Volatilità Implicite:

L'unico parametro della formula Black-Scholes che non è osservabile direttamente è la volatilità del prezzo dell'azione. La volatilità implicita è la volatilità nel prezzo delle opzioni osservato sul mercato, è usata per misurare l'opinione del mercato circa la futura volatilità di un certo titolo. Il prezzo delle opzioni deep-out of the money e deep in the money è relativamente insensibile alla volatilità, pertanto la volatilità implicita calcolata sulla base di queste, tende ad essere poco affidabile.

Dividendi:

Finora si è assunto che l'azione sulla quale l'azione è scritta non paghi dividendi, ciò però non si verifica quasi mai. Supponiamo ora che l'azione paghi dividendi durante la vita dell'opzione e che questi siano previsti con esattezza[23]. La data critica per la valutazione delle opzioni è la data di stacco dei dividendi in questa data il prezzo dell'azione subisce una decurtazione pari all'importo del dividendo unitario. Se l'effetto di stacco è quello di diminuire il valore delle calls, il valore delle put aumenterà.

[23] Questa assunzione non è irragionevole se la vita dell'opzione è breve.

Opzioni europee: il prezzo dell'azione è dato dalla componente priva di rischio[24] e dalla componente rischiosa[25].La formula Black and Scholes può essere usata ammesso che, dal prezzo dell'azione venga detratta la somma dei dividendi che verranno distribuiti durante la vita dell'opzione, attualizzata in base al risk-free. Nei calcoli vengono inclusi solo i dividendi il cui stacco stesso avviene durante la vita dell'opzione.
La volatilità presente nella formula di Black and Scholes dovrebbe essere pari alla volatilità della componente rischiosa del prezzo del sottostante e non alla volatilità dell'intero prezzo dell'azione. Spesso si esclude che le due volatilità coincidono, in teoria la volatilità della componente rischiosa è circa pari alla volatilità dell'intero titolo moltiplicata per il rapporto tra il prezzo dell'azione e il prezzo dell'azione decurtato dei dividendi.

Lettere Greche:

Ogni lettera greca misura una diversa dimensione del rischio di una posizione su opzioni, l'obbiettivo degli operatori è quello di gestire le greche in modo che tutti i rischi siano accettabili.

Delta Hedging

Il delta, Δ, di un'opzione è definito come derivata del prezzo dell'opzione rispetto al prezzo dell'attività sottostante ed è uguale alla pendenza della curva che lega questi due prezzi.

[24] Viene usata per pagare i dividendi distribuiti durante la vita dell'opzione.
[25] E' la somma dei dividendi che verranno pagati durante la vita dell'opzione attualizzata dalla data di stacco in base al tasso d'interesse privo di rischio.

Quando il prezzo dell'azione corrisponde al punto A, il prezzo dell'opzione corrisponde al punto B, e il Δ è la pendenza della retta tangente.

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$

Il delta della posizione sulle azioni compensa il delta della posizione sulle opzioni. La posizione dell'investitore resta coperta rispetto al delta per un periodo di tempo relativamente breve, quindi se si usa il delta hedging in un portafoglio questo dovrà essere aggiustato periodicamente.

Il delta è strettamente connesso con l'analisi Black-scholes, questi infatti hanno dimostrato che è possibile formare portafogli privi di rischio composti da derivati e azioni sottostanti.

In termini di delta ciò è esprimibile così:

-1 derivato

+ Δ azioni

Black e Scholes hanno valutato le opzioni formando un portafoglio neutrale rispetto al delta e sostenendo che il tasso di rendimento a breve del portafoglio è uguale al tasso privo di rischio.

Il delta delle opzioni europee su azioni:

Nel caso di una call europea scritta su un titolo che non paga dividendi e il delta della formula Black e Scholes è :

$$\Delta = N(d_1)$$

dove

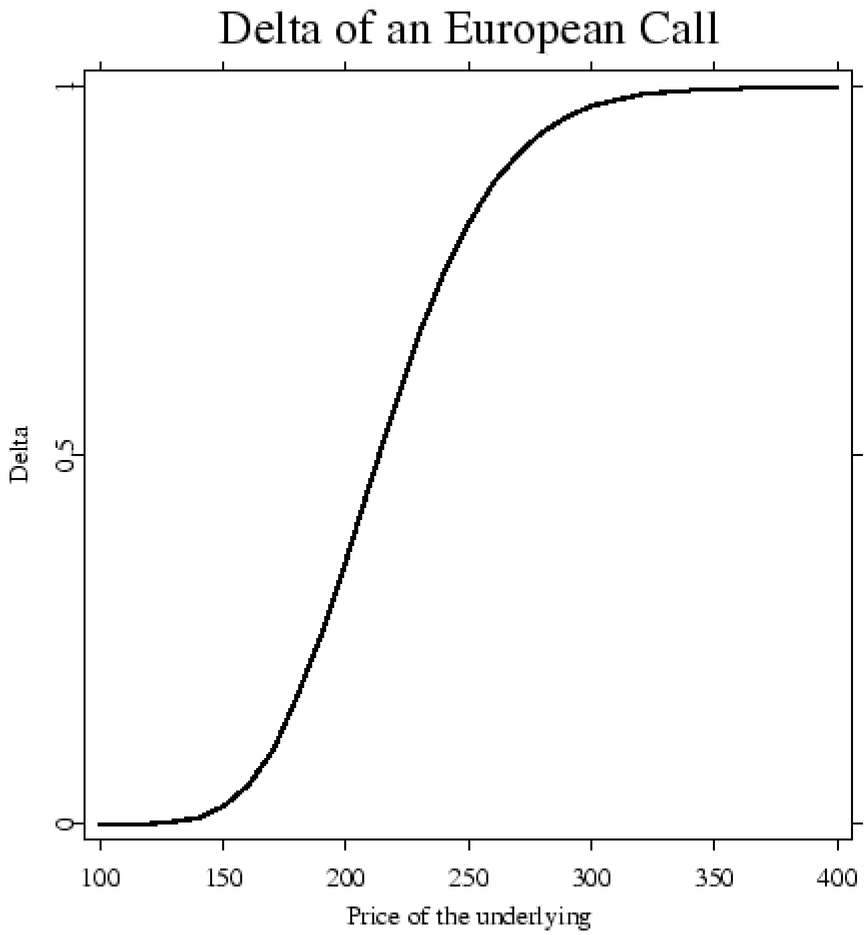
$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Per coprire quindi una posizione corta su una Call europea occorre avere, in ogni momento, una posizione lunga su $N(d_1)$ azioni.

Nel caso di una put europea scritta su un titolo che non paga dividendi, il delta della formula Black e Scholes è :

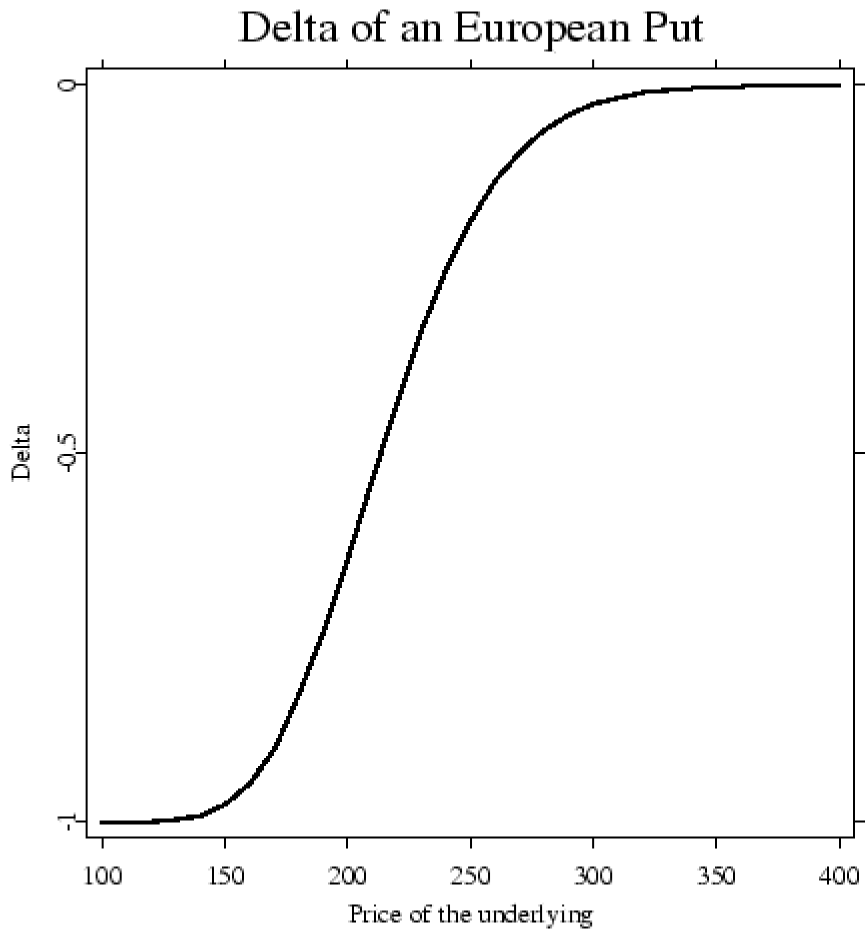
$$\Delta = N(d_1) - 1$$

Per coprire quindi una posizione lunga su una put europea si deve assumere una posizione lunga sull'azione sottostante, e per coprire una posizione corta su una put si deve assumere una posizione corta sull'azione sottostante.



Δ_C as a function of the stock price.

Questo grafico ci mostra come varia il delta di una call al variare del prezzo del sottostante.



Δ_P as a function of the stock price.

Questo grafico invece mostra come varia il delta, sempre negativo, di un’opzione put al variare del prezzo del sottostante.

Il delta di altre opzioni europee:

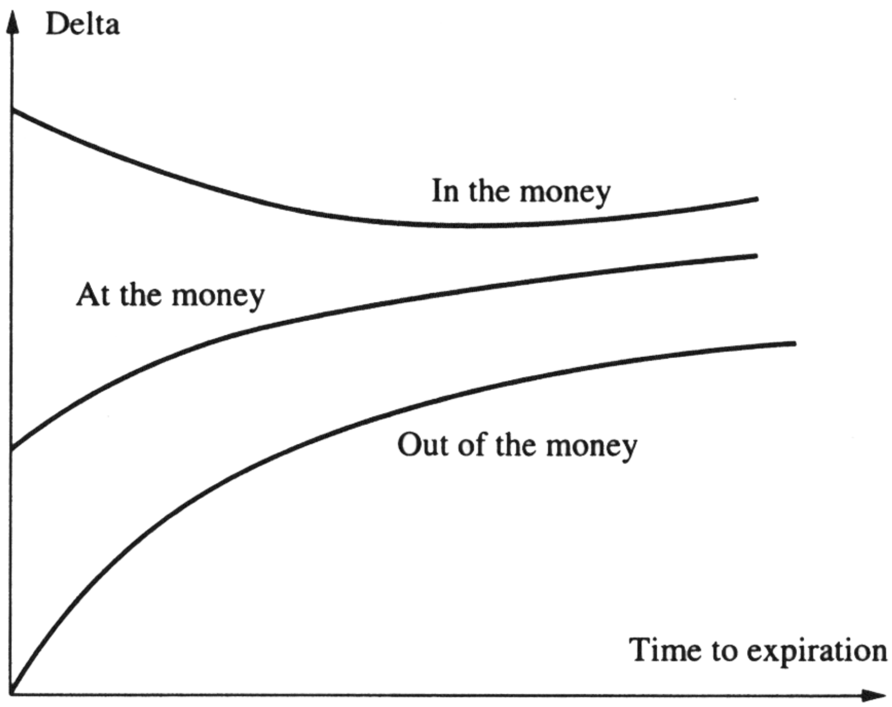
Per le Call scritte su un’attività che paga un *dividend yield* q si ha:

$$\Delta = e^{-qt} N(d_1)$$

per una put invece si ha

$$\Delta = e^{-qt} N(d_1 - 1)$$

Quando l’attività è rappresentata da un indice azionario queste formule sono valide se q è uguale al tasso di interesse estero r_f, quando invece il sottostante è rappresentato da un contratto futures le formule sono valide se q è uguale al tasso di interesse interno r.



Il grafico mostra come il delta di una call at the money, in the money e out of the money varia in funzione della vita residua dell'opzione.

Il delta di un portafoglio:

Il delta di un portafoglio può essere calcolato in base ai delta delle singole opzioni presenti nel portafoglio:

$$\Delta = \frac{\partial \pi}{\partial S}$$

Se il portafoglio è composto da una quantità w_i della i-sima opzione $(1 \leq i \leq n)$ il delta diventa:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i$$

dove Δ_i è il delta della i-sima opzione.

Nel caso di un portafoglio se l'opzione considerata è deep-out of the money presenterà un delta piccolo e nel calcolo del VaR di una posizione in opzioni questo si tradurrà in una sovrastima del rischio.

Theta:

Il theta Θ di un portafoglio di derivati è la derivata del valore del portafoglio rispetto al tempo, misura la variazione di un valore del portafoglio in conseguenza del passaggio di un istante di tempo ovvero del ridursi della vita residua dei derivati.

Per una call europea scritta su un titolo che non paga dividendi la formula del theta è:

$$\Theta = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rXe^{-rt}N(d_2)$$

dove:

$$N'(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-X^2}{2}}$$

Per una put europea scritta su un titolo che non paga dividendi il theta è :

$$\Theta = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rXe^{-rt}N(-d_2)$$

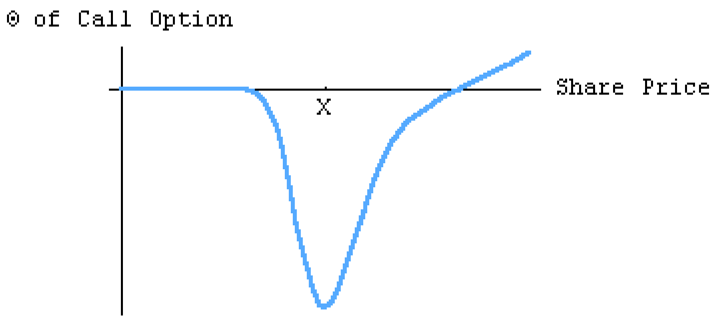
Per una call europea scritta su un titolo che paga un *dividend yield* q il theta è :

$$\Theta = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma * e^{-qt}}{2\sqrt{T}} + qS_0 N(d_1)e^{-qt} - rXe^{-rt}N(d_2)$$

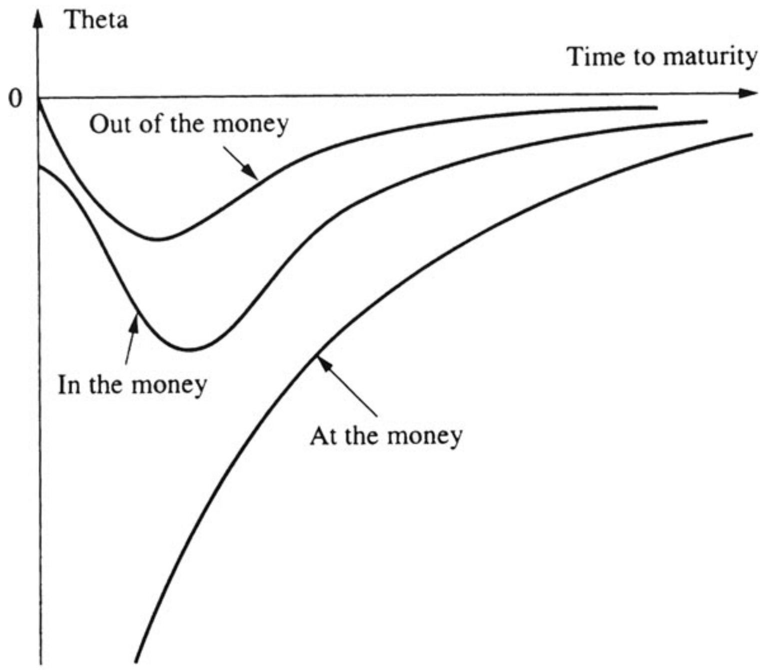
Per una put europea scritta su un titolo che paga un *dividend yield* q il theta diventa :

$$\Theta = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma * e^{-qt}}{2\sqrt{T}} - qS_0 N(d_1)e^{-qt} + rXe^{-rt}N(d_2)$$

Il theta delle opzioni è quasi sempre negativo: al diminuire della vita residua l'opzione tende a valere meno.



Il grafico rappresenta la relazione che intercorre tra il theta di una call e il prezzo del sottostante: quando il prezzo dell'azione è basso il theta è prossimo a zero, quando invece l'opzione è at-the-money theta diventa grande e negativo infine per livelli molto elevati del prezzo del sottostante il theta tende a -rXe^{-rt}



Il grafico mostra come cambia il theta di una call at the money, in the money e out of the money in funzione della vita residua dell'opzione.

Il Gamma:

Il gamma è la derivata del delta del portafoglio rispetto al prezzo dell'attività sottostante:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \pi}{\partial S}$$

Se il Γ è piccolo, il delta cambia molto lentamente e gli aggiustamenti per mantenere il portafoglio neutrale rispetto al delta non vanno fatti di frequente, mentre se il Γ è grande in termini assoluti, il delta è molto sensibile alle variazioni del prezzo dell'attività sottostante.

Quando il prezzo dell'azione passa da S a S', il delta hedging assume che il prezzo dell'opzione passi da C a C' mentre in realtà passa da C a C''. La differenza che intercorre tra C' e C'' comporta, nella strategia di copertura, un errore che è tanto maggiore quanto maggiore è la curvatura della relazione tra il prezzo dell'opzione e il prezzo dell'azione. Il gamma misura appunto questa curvatura.

Sia ΔS la variazione del prezzo del sottostante in un piccolo periodo di tempo ΔT e Δπ la corrispondente variazione del valore del portafoglio. Si può dimostrare che, nel caso di un portafoglio neutrale rispetto al delta, si ha:

$$\Delta = \Theta \Delta T + \frac{1}{2} \Gamma \Delta S^2$$

Se $\Gamma > 0$ allora $\Theta < 0$ e il valore del portafoglio si riduce se non ci sono variazioni si S, ma aumenta se si verifica una forte variazione, positiva o negativa di S.
Se $\Gamma < 0$ invece, il valore del portafoglio aumenta se non ci sono variazione di S, ma diminuisce se si verifica una forte variazione, positiva o negativa, di S.
All'aumentare del valore assoluto del gamma aumenta la sensibilità del valore del portafoglio rispetto ad S.

Annullamento del gamma di un portafoglio:

Una posizione sull'attività sottostante o su un contratto forward scritto sull'attività sottostante, ha un gamma nullo pertanto questa non può essere usata per cambiare il Γ del portafoglio. Per aggiustare il Γ bisogna assumere una posizione su strumenti che non dipendono linearmente dall'attività sottostante. Si consideri un portafogli neutrale al delta con un gamma pari a Γ e un opzione con gamma pari a Γ_t, se il numero delle opzioni aggiunte al portafoglio è di w_t allora il gamma del portafogli diventa:

$$w_t \, \Gamma_t + \Gamma$$

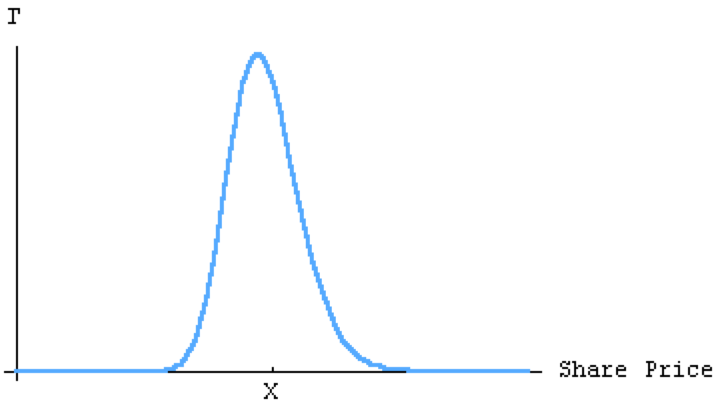
La posizione sull'opzione negoziabile necessaria per rendere il portafoglio neutrale rispetto al gamma è pari a $-\frac{\Gamma}{\Gamma_t}$.

Il portafoglio è neutrale rispetto al gamma solo istantaneamente, col passare del tempo la neutralità può essere mantenuta solo se la posizione sull'opzione viene aggiustata in modo da essere sempre pari a $-\frac{\Gamma}{\Gamma_t}$.

Calcolo del Gamma:

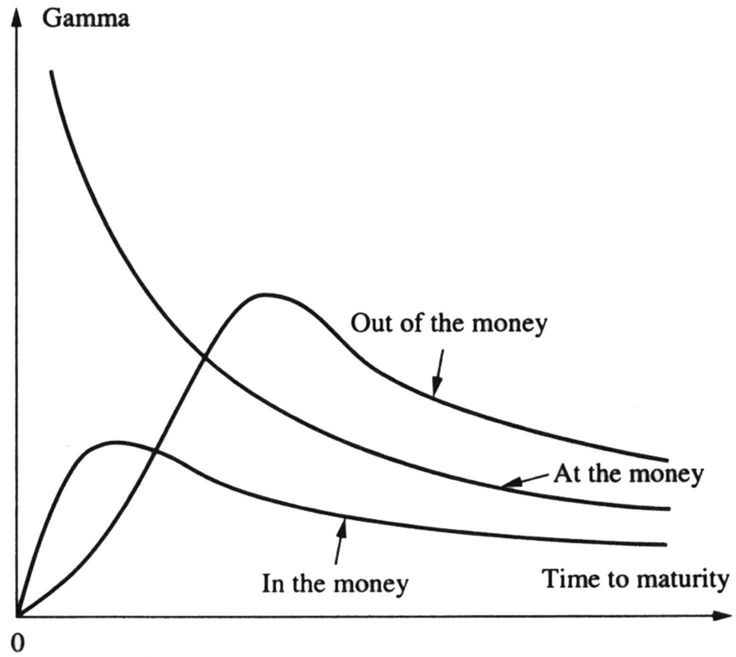
Nel caso di una call europea o di una put europea scritta su un titolo che non paga dividendi il gamma risulta:

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$



Il grafico mostra la relazione tra il valore del gamma e il prezzo dell'azione. Il gamma presenta un valore sempre positivo che varia al variare del prezzo del sottostante.

Se l'opzione è scritta su un indice che paga un dividendo continuo al tasso q il gamma diventa $\Gamma = \dfrac{N'(d_1) - e^{-qt}}{S_0\sigma\sqrt{T}}$



Il grafico rappresenta la relazione tra il gamma e la vita residua delle opzioni, nel caso di un'opzione at-the-money il gamma aumenta col diminuire della vita mentre se l'opzione è in-the-money o out-of-the money il gamma diminuisce col diminuire della vita residua dell'azione. Il valore del gamma su queste opzioni è molto sensibile ai salti del prezzi dell'azione.

Relazione tra Delta, Theta, Gamma:

Le greche di un portafoglio di call, put ed altri derivati che dipendono da un titolo che paga un dividend yield q devono soddisfare la seguente equazione:

$$\Theta + (r-q)S_0\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S_0^2\Gamma = r\Pi$$

dove

S_0 è il prezzo del titolo

r è il tasso d'interesse

Π è il valore del portafoglio

In un portafoglio neutrale rispetto al delta ovvero quando Δ=0 abbiamo:

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S_0^2\Gamma = r\Pi$$

Se Θ è grande e positivo allora Γ sarà grande e negativo, viceversa se Θ è grande e negativo allora Γ sarà grande e positivo.

Vega:

Fino a questo momento la volatilità del sottostante il derivato è stata considerata sempre costante, in realtà la volatilità cambia nel tempo, il valore del derivato può cambiare. Il Vega, V, di un portafoglio di derivati è la derivata del valore del portafoglio rispetto alla volatilità dell'attività sottostante. Se il Vega è elevato, in termini assoluti, il valore del portafoglio è molto sensibile a piccole variazioni della volatilità, se invece è basso le variazioni della volatilità hanno poca influenza sul valore del portafoglio. Se V è il vega del portafoglio e V_t è il vega di un'opzione negoziabile, una posizione di $-\frac{V}{V_t}$ sull'opzione rende il portafoglio neutrale rispetto al vega ovvero il portafogli viene protetto da variazioni di volatilità. Se si vuole un portafoglio neutrale sia rispetto al gamma sia rispetto al vega occorre usare almeno 2 opzioni negoziabili che dipendono dalla stessa attività sottostante visto che gamma e vega non sono tra loro neutrali. Una call e una put scritte su un titolo che non paga dividendi il vega è :

$$V = S_0\sqrt{T}N'(d_1)$$

se invece il titolo paga un dividendo continuo pari al tasso q

$$V = S_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-qt}$$

Il vega di una posizione lunga sull'opzione è sempre positivo

Rho:

Il rho, ultima lettera greca analizzata, è la derivata del valore del portafoglio rispetto al tasso d'interesse e misura la sensibilità del valore del portafoglio rispetto ai tassi di interesse.

Una call scritta su un titolo che non paga dividendi ha un rho pari a

$$rho = \rho = XTe^{-rT} N(d_2)$$

mentre per una put europea il rho diventa:

$$rho = \rho = -XTe^{-rT} N(-d_2)$$

La teoria del portafoglio:

Lo studio di Markowitz si basa sull'analisi del processo che genera la domanda e l'offerta di attività finanziarie in funzione del rapporto rischio/rendimento da esse espresse. Il principio base che governa la teoria di Markowitz è che al fine di costruire un portafoglio efficiente occorre individuare una combinazione di titoli tale da minimizzare il rischio e massimizzare il rendimento complessivo compensandogli andamenti asincroni dei singoli titoli. Per far sì che ciò accada, i titoli che compongono il portafoglio dovranno essere incorrelati, o meglio, non perfettamente correlati. Gli assunti fondamentali della teoria di portafoglio secondo Markowitz sono i seguenti:

- Gli investitori intendono massimizzare la ricchezza finale e sono avversi al rischio.
- Il periodo di investimento è unico
- I costi di transazione e le imposte sono nulli, le attività sono perfettamente divisibili
- Il valore atteso e la deviazione standard sono gli unici parametri che guidano la scelta
- Il mercato è perfettamente concorrenziale

Il rendimento di un'attività finanziaria viene definito come il rapporto tra il capitale iniziale e gli utili prodotti da operazioni di investimento o di compravendita in un periodo di tempo specificato. Il rischio può essere definito come il grado di incertezza che il mercato esprime sulla effettiva realizzazione dei rendimenti attesi. Tanto il rendimento, quanto il rischio, non possono essere oggetto di misurazione ex-ante[26] quindi sono oggetto di misurazione ex-post. Se consideriamo N attività rischiose, ognuna con rendimento atteso pari a $E(r_i)$ dove i è l'attività i-sima, R è il vettore colonna dei rendimenti di queste attività.

$$R=\begin{bmatrix} E(r_1)=\overline{r}_1 \\ E(r_2)=\overline{r_2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ E(r_i)=\overline{r_i} \end{bmatrix}$$

S è la matrice quadrata di varianze-covarianze di dimensione N*N

[26] E' il rendimento stimato all'inizio del periodo di investimento T .

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\sigma_{12}.........\sigma_{1n} \\ \sigma_{21}\sigma_{22}.........\sigma_{2n} \\ .... \\ .... \\ \sigma_{n1}\sigma_{n2}.........\sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

Un portafoglio di attività rischiose è un vettore colonna P la somma dei cui elementi è pari ad uno.

$$W = \begin{bmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \\ ..... \\ ..... \\ \overline{w_n} \end{bmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

Ogni elemento ω_i rappresenta la proporzione del portafoglio investita nell'attività rischiosa "i".

Il rendimento atteso di un portafoglio P, E(r_i) è dato da :

$$\mathrm{E}(r_i) = W^T * R = \sum_{i=1}^{i} \omega_i E(r_i)$$

La varianza dei rendimenti del portafoglio P, $\sigma_X^2 = \sigma_{XX}$ è data dal prodotto

$$W^T S W = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$$

La covarianza dei rendimenti di 2 portafogli P e Y è definita come:

$$\sigma_{xy} = W^T S Y = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_i Y_i \sigma_{ij}$$

si noti che:

$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$

Un portafoglio efficiente è quel portafoglio di attività rischiose che fornisce la più bassa varianza tra tutti i portafogli aventi lo stesso rendimento medio . Alternativamente, si può affermare che un portafoglio efficiente ha il più alto rendimento arreso tra tutti i portafogli aventi la stessa varianza. Matematicamente, potremmo definire un portafoglio efficiente nel seguente modo:

Per un dato rendimento m, il portafoglio efficiente p è quello che risolve

$$\min \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{ij} = Var(r_p)$$

soggetto a

$$\sum_i w_i r_i = E(r_p)$$

$$\sum_i w_i = 1$$

Il criterio Media-varianza non determina il portafoglio ottimale, ma un insieme di tutti i portafogli efficienti che costituiscono la **Frontiera Efficiente**.

L'insieme delle medie e delle deviazioni standard generate dai portafogli efficienti costituiscono l'area interna alla linea curva. Un portafoglio P è un portafoglio efficiente se massimizza il rendimento data una certa deviazione standard ovvero P è efficiente se non esiste nessun altro portafoglio Y tale che

$E(r_y) > E(r_p)$ e $\sigma_y \leq \sigma_p$

Calcolo della frontiera efficiente:

Supponiamo P sia un portafoglio con una proporzione α investita nel portafoglio X e con una proporzione (1 - α) investita nel portafoglio Y.

$$E(r_p) = \alpha E(r_p) + (1-\alpha)E(r_y)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\alpha^2 \sigma_p^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_y^2 + 2\alpha(1-\alpha)Cov(P,Y)}$$

Ogni portafoglio efficiente è una combinazione convessa di una qualsiasi coppia di portafogli efficienti, mentre non è altrettanto vero che ogni combinazione convessa di qualsiasi coppia di portafogli efficienti sia efficiente.

Individuazione del Portafoglio di mercato:

Si supponga che esista un'attività priva di rischio e, inoltre che questa attività abbia un rendimento atteso pari a r_f. Si assuma infine che M sia il portafoglio efficiente che risolve il seguente sistema di equazioni:

$$R - r_f = S_z$$

$$M_i = \frac{z_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i}$$

Si consideri ora una combinazione convessa del portafoglio M e dell'attività priva di rischio dove il peso dell'attività priva di rischio in tale portafoglio sia pari ad α. Dalle equazioni del rendimento e della volatilità del portafoglio deriva che:

$$E(r_p) = \alpha r_f + (1-\alpha)E(r_m)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\alpha^2 \sigma_{r_f}^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_m^2 + 2(1-\alpha)Cov(r_f, Y)} = (1-\alpha)\sigma_m$$

Il luogo di tutte queste combinazioni per α ≥ 0, è noto come la RETTA del Mercato dei capitali (RMC)[27].

Il portafoglio M è chiamato portafoglio di mercato per diverse ragioni:

- Se gli investitori considerano affidabili le statistiche di portafoglio [28]e sono interessati solamente alla massimizzazione del rendimento atteso di un portafoglio, data una deviazione standard di portafoglio σ, allora tutti i portafogli ottimali giaceranno sulla retta del mercato dei capitali.
- Il portafoglio M è l'unico portafoglio composto da attività rischiose incluse in qualsiasi portafoglio ottimale. M, pertanto deve includere tutte le attività rischiose pesate in proporzione al loro valore di mercato.

Quando si conosce il risk-free (r_f) non è difficile trovare M si deve infatti risolvere il sistema del portafoglio efficiente per una costante c $= r_f$.

Quando r_f cambia infatti si ottiene un diverso portafoglio di mercato.

La linea di mercato Azionario in presenza di un'attività priva di rischio:

Il teorema 4, presente in appendice garantisce che quando esiste un'attività priva di rischio la relazione lineare che segue[29] è sempre valida:

$$E(r_p) = r_f + \beta_p [E(r_M) - r_f]$$

dove

$$B_p = \frac{Cov(p, M)}{\sigma_M^2}$$

[27] Nota anche come Capital Market Line (CML)

[28] Ossia il vettore di rendimenti attesi R e la matrice di varianza-covarianza S

[29] Nota anche come LINEA DEL MERCATO AZIONARIO

APPENDICE:

Alcuni teoremi sui portafogli efficienti e sul C.A.P.M.:

TEOREMA 1:

Sia c una costante, viene indicato con R-c il seguente vettore colonna :

$$\text{R-c} = \begin{bmatrix} E(r_1) - c \\ E(r_2) - c \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ E(r_n) - c \end{bmatrix}$$

Si pone che il vettore z risolva il sistema di equazioni lineari simultanee R-c=Sz

Pertanto, questa soluzione produce un portafoglio X sulla envelope della frontiera efficiente nel modo seguente:

$$z = S^{-1}\{R - c\}$$

$$X = \{X_1, X_{2,} \ldots\ldots\ldots X_N\}$$

Dove

$$X_i = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^{N} z_j}$$

Tutti i portafogli situati sulla envelope sono di questa forma.

Se X è un qualsiasi portafoglio sulla envelope allora esiste una costante c ed un vettore z tale che

$$S^*z = R - c$$

e

$$X = \frac{z}{\sum_{j=1}^{N} z_j}$$

TEOREMA 2

In base al teorema dimostrato per la prima volta da Black nel 1972, qualsiasi coppia di portafogli sulla envelope è sufficiente per determinare l'intera envelope. Per qualsiasi coppia di portafogli sulla envelope $X = (x_1, x_2 \ldots x_N)$ e $Y = (y_1, y_2 \ldots y_N)$ tutti i portafoglisulla envelope sono una combinazione convessa di X e Y. Data quindi una qualsiasi costante a_i il portafoglio

$$\text{aX + (1-a)Y} = \begin{bmatrix} aX_1 + (1-a)Y_1 \\ aX_2 + (1-a)Y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ aX_N + (1-a)Y_N \end{bmatrix}$$

è sulla envelope della frontiera efficiente.

TEOREMA 3

Se Y è un qualsiasi portafoglio sulla envelope, allora per qualsiasi altro portafoglio X abbiamo la seguente relazione:

$$E(r_x) = c + B_X \left[E(r_Y) - c\right]$$

dove

$$B_x = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_y^2}$$

dove c è il rendimento atteso di un portafoglio Z la cui covarianza con Y è zero

$$\text{C}= E(r_z)$$

Con

$$\text{cov}(Y, X) = 0$$

Se Y è sull'envelope la regressione di ogni e qualsiasi portafoglio X e Y fornisce una relazione lineare. In questa versione del C.A.P.M. la linea del mercato azionario di Sharpe-Lintner- Massin è sostituita da una LMA nel quale il ruolo dell'attività priva di rischio è svolto da un portafoglio nel quale il beta, β, è pari a zero relativamente al particolare portafoglio Y situato sulla envelope. Se il portafoglio di mercato M è efficiente, il risultato di Black è valido anche per il portafoglio di mercato, cioè la LMA è valida anche con i rendimenti attesi al posto di c.

$$E(r_x) = E(r_z) + B[E(r_m) - E(r_z)]$$

dove

$$B_X = \frac{Cov(X, M)}{\sigma_m^2}$$

precisiamo che Cov(Z,M)=0

TEOREMA 4:

Se esiste un'attività priva di rischio con rendimento r_f allora esiste un portafoglio M sulla envelope tale che:

$$E(r_x) = r_f + B_x[E(r_m) - r_f]$$

Se tutti gli investitori scegliessero i loro portafogli sulla base della media e della deviazione standard del portafoglio, allora M sarebbe un portafoglio composto da tutte le attività rischiose presenti nell'economia dove ogni attività riceverebbe un peso in proporzione al suo valore. Supponiamo vi siano N attività rischiose e che il valore di mercato dell'attività i sia V_i. I pesi del portafoglio di mercato saranno :

$$\text{Proporzione di i in M} = \frac{V_i}{\sum_{n=1}^{n} V_n}$$

TEOREMA 5

Supponiamo che esista un portafoglio Y tale che per qualsiasi portafoglio X sia valida la seguente relazione:

$$E(r_x) = c + B_x[E(r_y) - c]$$

dove

$$B_X = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_y^2}$$

Il portafoglio Y quindi è un portafoglio sulla envelope.

Introduzione al VaR:

Il Value at risk (VaR)[30] è un recente metodo statistico per la misura del rischio di un'asset, di un'opzione, di un portafoglio in genere inteso in senso lato e ne rappresenta la massima perdita attesa, su un dato orizzonte temporale e nei limiti di un predefinito livello di confidenza. Più precisamente considerando una probabilità pari a c%(ovvero il livello di confidenza) e un periodo di t giorni, il VaR è la perdita che ci si aspetta venga ecceduta solo con la probabilità di (1-c)% nel prossimo periodo di t giorni.

La scelta di c e t è soggettiva:

1. Il livello di confidenza c definisce il grado di protezione dal rischio di movimenti avversi dei fattori di mercato. I valori che in genere vengono assunti per c sono 99%, 97.5% o 95%: la scelta può essere rilevante o meno a seconda dell'uso che si intende fare del VaR, cioè a seconda che il VaR venga usato come misura assoluta del rischio sostenuto o come unità di confronto(ad esempio confronto di rischiosità tra portafogli diversi), nel quale c rappresenta solo un fattore scalare. Naturalmente, più ampio è il livello di confidenza c adottato (nel mio caso c =95%), maggiore è la capacità del VaR di contenere le perdite (nel senso che risulta meno probabile eccedere la perdita massima stimata), ma minore è il contributo del VaR in termini informativi, dato che viene esclusa una gamma più ristretta di valore.
2. I periodi normalmente adottati sono di 1, 2 o 10 giorni, oppure un mese. Ipotesi sottostante è che la composizione del portafoglio o comunque dell'asset rimanga costante durante il periodo considerato; quindi la scelta dell'orizzonte temporale deve dipendere dalla frequenza con cui il portafoglio viene sottoposto a movimentazione e dal periodo necessario per la liquidazione del portafoglio o dell'asset considerati.

I tipi di rischio che è possibile misurare con tale indice monetario, o percentuale sono molteplici così come molteplici sono gli ambiti di applicazione. Il VaR può fornire una misura complessiva del rischio a cui un soggetto è sottoposto: di fatto il VaR, nato come strumento per la valutazione del rischio di mercato, viene tuttora utilizzato prevalentemente a questo scopo. Il VaR è un metodo relativamente nuovo, ma è rapidamente diventato lo strumento più famoso per la gestione del rischio. La ragione di tale successo è fondamentalmente riconducibile a tre fenomeni. In un primo luogo, disastri finanziari come quello della Barings nel febbraio 1995 hanno messo in luce la necessità di disporre di uno standard per il monitoraggio delle esposizione al rischio finanziario di portafogli complessi.

---

[30] L'idea del VaR nasce attorno agli anni 90 si veda comunque per maggiori informazioni Chrouhy,Galai,Mark (2001) Risk Management pg 177

In secondo luogo, la decisione della J.P. Morgan di rendere pubblici e gratuitamente disponibili nel 1994 la metodologia Riskmetrics e il relativo database ha accelerato il processo di standardizzazione. Infine le indicazioni del comitato di Basilea[31] sulla supervisione bancaria che consentono l'adozione da parte delle banche- a partire da1998- di modelli interni di stima del VaR per definire i requisiti minimi di capitale. Oltre all'essere un indice monetario del rischio di un portafoglio, il VaR presenta un altro grande vantaggio rispetto alle misure tradizionali (quali ad esempio il delta o le cosiddette "Greeks") poiché tali misure catturano l'esposizione ad un solo tipo di rischio (quali per esempio il rischio del sottostante), mentre il VaR è in grado di quantificare l'esposizione globale di un soggetto a varie fonti di rischio. A fronte di una definizione concettuale semplice, l'implementazione del VaR non è affatto banale e può essere realizzato con diversi metodi, che tuttavia condividono un approccio procedurale comune.

[31] Crouhy,Galai,Mark(2001), ibidem pg 62-66

Calcolo del Value at Risk per un singolo titolo:

Ci sono diversi metodi per il calcolo del VaR: il metodo parametrico, il metodo storico e il metodo Montecarlo. In questo capitolo verranno analizzati tutti e tre.

L'APPROCCIO PARAMETRICO:

In questo capitolo si andrà ad analizzare l'approccio parametrico noto anche come approccio delle varianze-covarianze. Con il metodo varianza-covarianza si ipotizza che la distribuzione del titolo considerato sia governata dalla funzione di densità normale. Si consideri ad esempio una serie di rendimenti giornalieri con N osservazioni. Il problema della conoscenza della distribuzione della serie, con questo metodo, si riduce alla stima dei due parametri media (μ) e varianza (σ^2) della stessa. Noti tali valori calcolati secondo le formule:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(r_i - \mu)^2$$

se si vuole calcolare la massima perdita potenziale ad un livello di confidenza del 95% (il ché significa che solo in un 5% dei casi potrà verificarsi una perdita superiore al valore individuato) questa sarà data da:

$$\text{VaR}(\alpha\%) = \int_{-\infty}^{1-\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

$$\text{VaR }(5\%) = \int_{-\infty}^{1-0.05} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} = -1.645 * \sigma + \mu$$

Dove il valore –1.645 corrisponde al valore teorico della variabile casuale normale standardizzata che lascia alla sua destra un'area pari a 0.95.

Nella pratica, per orizzonti temporali brevi (per lo più un giorno) la media viene posta pari a zero, per cui il valore cercato si riduce a

VaR=-1.645*σ

Il VaR viene calcolato ad livello di confidenza pari ad 1-α % il valore che moltiplicherà la deviazione standard della serie sarà:

$$\int_{-\infty}^{1-\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x)^2\right\} = \alpha\ \%$$

e per cui la formula diventa:

$$VaR = \alpha * \sigma$$

Per questo metodo, come in seguito per quello storico, un problema rilevante viene dato dalla numerosità del campione e dal peso attribuito ad ogni singola osservazione. Nel primo caso un campione composto da un numero relativamente ridotto di dati può portare a sovrastimare o a sottostimare la varianza e di conseguenza dà risultati distorti al valore del VaR, nel secondo caso invece attribuendo lo stesso peso a dati di periodi diversi i dati lontani hanno la stessa importanza dei dati più vicini al periodo di calcolo. Può accadere che l'eliminazione di un dato lontano, dove era presente un sensibile calo o ad una crescita dei corsi, comporti una modifica altrettanto sensibile del VaR

Due sono le critiche principali rivolte a questo tipo di approccio:

- L'ipotesi di normalità nella distribuzione dei rendimenti della serie che non è sempre vera,
- gli strumenti finanziari non lineari, quali le opzioni, non vengono adeguatamente trattati dal modello per la difficoltà di catturare tale profilo in coefficienti di stabilità ma di questo se ne parlerà in seguito

L'APPROCCIO STORICO:

Sia il metodo storico, che quello montecarlo fanno parte dell'approccio "Full Valuation". In questo tipo di approccio è necessario costruire una serie di ipotetici valori futuri del rendimento del titolo, o comunque del portafoglio, che, combinati con le relative frequenze, formino la distribuzione di probabilità dei futuri profitti e perdite del titolo o del portafoglio: sulla distribuzione ottenuta si potrà poi leggere il VaR relativo al livello di confidenza scelto. Al livello di confidenza del 95% il VaR sarà la perdita che viene uguagliata o ecceduta il 5% delle volte. La "Full Valuation" prevede che le variazioni ipotetiche del titolo, o del portafoglio, vengano ottenute come differenza tra i valori ipotetici corrispondenti a diversi livelli dei fattori di rischio: mentre nella local valuation si considerano solo le variazioni dei fattori di rischio, e le variazioni del valore del portafoglio vengono definite in modo proporzionale alle prime, nella full valuation si considerano i livelli dei fattori di rischio. Esistono due tipi di procedure che possono essere utilizzate per creare la distribuzione di probabilità ipotetica, l'una basata sui dati storici, l'altra che prevede una generazione casuale dei dati.

L’APPROCCIO STORICO PER UN SOLO ASSET:

L’approccio storico più semplice, che non richiede alcuna simulazione, consiste nel raccogliere i dati storici, relativi al valore del titolo, da utilizzare come valori di una distribuzione di probabilità stimata, sulla quale viene letto il VaR. Questa procedura incorpora però una distribuzione di stima dovuta all’ipotesi di stabilità del titolo nel corso del tempo: la simulazione storica raccoglie dati storici relativi ai fattori di mercato e li inserisce nel valore attuale, cioè utilizza i pesi correnti al momento della valutazione.

Il primo passo è quello di raccogliere i valori storici dei fattori di mercato per gli ultimi N periodi[32]. Il numero N può essere scelto più o meno grande : il trade-off nasce dal fatto che intervalli più lunghi accrescono l'accuratezza delle stime, ma rischiano di utilizzare dati irrilevanti, smussando i cambiamenti del processo storico considerato e riducendo l’importanza dei dati più recenti. Una volta trasformati i valori della serie storica, in genere presentata sotto forma di serie di prezzi, in serie dei rendimenti applicando la formula $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$, si ordinano in modo crescente ottenendo così una distribuzione probabilistica. Il quinto percentile della distribuzione è rappresentato dal valore che rappresenta il 5% dei rendimenti totali della serie considerata. E’ questa la stima del VaR giornaliero al 95%. Se si assume che gli ultimi N giorni siano una buona guida per quel che potrebbe succedere domani siamo certi al 95% che il valore del asset preso in riferimento non subirà una perdita maggiore della stima del VaR. Il VaR a N giorni è pari al prodotto tra il VaR giornaliero e $\sqrt{N}$.

L’approccio della simulazione storica risulta il più semplice ,almeno nella versione di calcolo direttamente dai prezzi, inoltre non viene fissato a priori nessun modello distributivo- è un modello di stima non parametrico – perché si utilizzano direttamente la frequenze dei dati delle variazione del titolo. Ha il problema però della forte dipendenza dei risultati dall’intervallo temporale prescelto che può modificare in maniera sensibile la stima del VaR e dall’intervallo di confidenza prescelto che se scelto molto alto e avendo pochi dati per l’analisi può portare ad una stima non corretta del VaR. In ogni caso per il metodo di stima del VaR mediante la simulazione storica, rimane il problema, come per il metodo analitico, del peso uniforme dei dati utilizzati, che con serie storiche relativamente lunghe può avere un impatto sensibile. Anche in questo caso si può procedere alla ponderazione dei

[32] Nel mio caso considero i giorni come unità di riferimento quindi la serie che considererò sarà una serie di osservazioni giornaliere.

rendimenti dando un peso più basso a quelli più lontani nel tempo. Un'altra possibile risposta a questi problemi può essere data dai metodi iterativi che illustrerò di seguito.

Metodi iterativi:

Per metodi iterativi si intendono tutti quei metodi che a partire da un campione di osservazione vengono costruiti, a partire da una serie, valori ipotetici futuri per ogni fattore di mercato usati poi per creare una distribuzione di probabilità della variazione del valore del titolo considerato sulla quale si va a leggere il VaR. La differenza fondamentale rispetto alla simulazione storica, sta nel modo in cui tali valori ipotetici vengono prodotti: mentre nella simulazione storica derivano dalla osservazione dei valori storici degli stessi fattori di mercato, nella simulazione di tipo stocastico (quale montecarlo, bootstrap) essi vengono generati in modo casuale, con il vincolo di una distribuzione di probabilità che viene a priori imposta.

Metodo Montecarlo:

La stima del VaR con il metodo montecarlo comporta la simulazione mediante processi stocastici dei rendimenti- o dei prezzi nel caso di full valuation- delle attività o dei fattori di rischio sulla base delle caratteristiche statistiche della serie. In questo modo si cerca di stimare i possibili andamenti dei prezzi o dei rendimenti tenendo conto di tali legami statistici. Il primo passo di questa procedura, per quanto riguarda il VaR di un singolo asset, come nella simulazione storica, è la scelta di una distribuzione di probabilità e dei relativi parametri che derivano in genere dalla serie storica del titolo di riferimento; mentre nella simulazione storica veniva implicitamente assunta la distribuzione di probabilità dei valori precedenti, qui il processo stocastico diventa una libera scelta dell'analista, che comunque terrà verosimilmente conto delle osservazioni passate: si sceglierà infatti la distribuzione che si pensa approssimare meglio tali osservazioni, in genere una normale. In seguito si utilizza un generatore di numeri casuali per generare N, nel mio caso due milioni, ipotetici valori dei rendimenti, o prezzi, della serie, che vengono trasformati in N ipotetici valori del portafoglio. Questa volta N è dell'ordine dei 10000 e oltre; al crescere di N la stima converge al valore vero, ma la procedura si complica e richiede sempre tempi maggiori di implementazione[33]. Nel mio caso gli N valori casuali calcolati sono valori derivati da estrazioni casuali della serie storica del titolo: per ogni valore estratto ne viene generato un altro che si distribuisce come una normale con media il valore stesso estratto e varianza pari alla varianza stessa del campione ovvero:

[33] Di questi problemi parlerò di seguito

$r_i^S \sim N(r_i^S, \sigma^2)$

dove

r_i^S è il valore del rendimento simulato

σ^2 è la varianza della serie storica dei rendimenti del titolo considerato

La fase finale è di nuovo identica a quella della simulazione storica: dai valori della nuova serie generata, ordinati dalla maggiore perdita al maggior guadagno, viene letto il VaR . Il punto cruciale della procedura di simulazione è la scelta di un particolare modello stocastico per il comportamento dei rendimenti del titolo: questa è di fondamentale importanza, in quanto se il processo stocastico scelto non è realistico la misura del VaR stesso perde di significato. Nonostante uno degli scopi del metodo di simulazione Montecarlo sia anche quello di considerare distribuzioni diverse da quella normale per i rendimenti, di fatto le difficoltà legate alla scelta e alla generazione di tale distribuzioni ne hanno finora scoraggiato un utilizzo operativo. Ipotesi classica sottostante al metodo MC è ancora la normalità dei rendimenti, dei fattori di rischio, è da notare però una differenza fondamentale tra metodi analitici e metodo montecarlo ossia che non viene fatta alcuna ipotesi sulla relazione tra rendimenti e valore del titolo, quindi implicitamente sulla distribuzione della serie storica di questo ultimo. Il metodo montecarlo presenta degli indubbi vantaggi , tra questi, come già anticipato, l'indipendenza dalla vera funzione di distribuzione della serie presa in considerazione, esiste però il problema dell'elevato numero di simulazioni che potrebbe portare a difficili implementazioni. Questo problema però può essere risolto con i metodi quasi-montecarlo che, a differenza degli algoritmi standard di generazione di numeri casuali generano in maniera più rapida la distribuzione che viene simulata. I metodi quasi-montecarlo riescono, con un numero minore di simulazioni, ad ottenere una stima del VaR più rapida.

Bootstrap:

L'approccio *bootstrap* prevede un utilizzo dei dati simile a quello del metodo montecarlo: a partire dalla serie storica dei rendimenti giornalieri il processo prevede l'estrazione e la trasformazione degli elementi estratti. Su questo viene poi calcolato il percentile corrispondente secondo il procedimento usato per il metodo storico prima e MC dopo. A differenza del metodo montecarlo il metodo bootstrap tenta di mantenere la distribuzione della serie iniziale. Può considerare un campione derivante dalla serie storica del titolo considerato e creare per ognuno un altro valore derivante da una trasformazione lineare del valore iniziale considerato.

L'approccio bootstrap ha numerose attrattive:

- Come succede col metodo storico, il metodo bootstrap incorpora implicitamente la volatilità storica giacché questa è già riflessa nella serie storica dei prezzi o dei rendimenti del asset considerato
- Ha il vantaggio, a differenza della distribuzione normale, di incorporare le code grosse o gli eventi estremi nei dati storici che non sono permessi sotto le ipotesi di normalità.
- L'approccio bootstrap ha il vantaggio, a differenza del metodo storico che la grandezza del campione può essere soggettiva . L'abilità di lavorare con un campione di una numerosità elevata permette di stimare il VaR in maniera molto più accurata che non con un campione di numerosità relativamente piccola.

VaR di un opzione:

Le tecniche del VaR sono ben adatte alla misurazione del rischio di attività e derivati di tipo lineare però per quantificare il rischio alle opzioni presenta alcune difficoltà. Queste ultime scaturiscono da una serie di cause diverse:

- I movimenti del prezzo dell'opzione non sono lineari, cioè per un dato cambiamento del prezzo del sottostante, il cambiamento di prezzo dell'opzione non è costante. Questa potenziale accelerazione o decelerazione del rischio di mercato (che è equivalente al gamma risk di un opzione) crea delle difficoltà nel modellare precisamente l'esposizione di un opzione.
- L'impatto delle variazioni della volatilità nel prezzo dell'opzione (il vega risk)
- L'impatto del trascorrere del tempo sul prezzo dell'opzione (theta risk)

Nella pratica, la non linearità della funzione del prezzo di un'opzione implica che uno dei parametri richiesti nel calcolo del VaR, cioè la sensibilità della posizione a cambiamenti del fattore di rischio rilevante, non è costante. Questo significa che la stima del Var può soprastimare o sottostimare il rischio di mercato, il quale assume che tale parametro sia costante. L'effetto dei cambiamenti nella volatilità e nel tempo influisce nella stima del VaR, in quanto sono termini aggiuntivi che incidono sul prezzo dell'opzione e perciò andranno inclusi nell'analisi, per poter ottenere una misura più accurata del rischio. Le difficoltà si manifestano in due particolari contesti: primo, quando le opzioni sono inserite in un portafoglio; secondo, quando il portafoglio è costituito da opzioni che sono dinamicamente coperte con specifiche condizioni nell'asset (delta hedging). Il secondo scenario ipotizzato aggrava ancora di più il problema della misurazione dell'esposizione, in quanto gli effetti dei cambiamenti del prezzo dell'opzione richiede un opportuno riadattamento di copertura. I requisiti di copertura dinamica introducono quindi rischi aggiuntivi come ad esempio quello di soggezione ai cash flow e problemi di liquidità. Le difficoltà nel calcolo del VaR che sorgono nel primo contesto sono più marcate per le opzioni che presentano minor tempo a scadenza, quando sono trattate vicino allo stike-price (at-the money o vicino). Questo è particolarmente vero quando si calcola il VaR ad un giorno. Nei casi in cui viene utilizzato un orizzonte temporale più ampio, la caratteristica di non linearità del prezzo dell'opzione ha una potenzialità di distorsione più marcata, senza riguardo alla tipologia dello strumento. I problemi che si identificano nel secondo scenario, sono presenti intutti i portafogli dove le opzioni sono soggette a copertura dinamica.

Quelli che seguono sono alcuni degli approcci che si possono adottare per il calcolo del VaR:

1. L'approccio Delta-Normal
2. L'approccio Delta-Gamma
3. Simulazione

Considererò principalmente i primi 2 approcci.

Delta-Normal approach:

Il principale fattore di rischio nelle opzioni è il prezzo spot del sottostante, e l'opzione si può vedere come frazione di una posizione spot su tale bene, che viene considerata come posizione standardizzata, quantificata dal "delta" dell'opzione (si parla infatti di "delta-eqivalent" con riferimento ad una tale posizione spot che replica l'opzione). Il problema nasce dal fatto che il metodo Delta-Normal prevede l'ipotesi che il delta sia costante sull'orizzonte temporale considerato, mentre il delta di un'opzione varia al variare del prezzo spot del sottostante. Immaginiamo di avere un'opzione call su un'azione di valore c. Il valore di questa opzione dipende da una varietà di fattori (il prezzo del sottostante, il prezzo d'esercizio dell'opzione…) ma in questo approccio si ignorano tutti i fattori tranne il prezzo del sottostante e si maneggia prendendo l'approssimazione del primo ordine della serie di Taylor dei cambiamenti nel valore dell'opzione:

$$\Delta c \cong \delta \Delta S$$

dove

$\Delta c = c - \bar{c}$

$\Delta S = S - \bar{S}$

e S è il valore del sottostante

Se si considera un periodo relativamente breve allora il VaR dell'opzione sarà:

$$VaR^{optione} \cong \delta VaR^{sottos\tan te}$$

se l'opzione è short questa formula diventerà:

$$VaR^{optione} \cong -\delta VaR^{sottos\tan te}$$

Il VaR misura così il tempo dei cambiamenti del sottostante. Se S è distribuito normalmente e il periodo considerato è sufficientemente corto allora si possono ignorare i rendimenti attesi del sottostante così il VaR delle opzioni diventerà:

$VaR^{optione} \cong \delta VaR^{sottos\tan te} = -\delta * \alpha * cl * \sigma * S$

Dove σ è la volatilità di S.

Questo approccio presenta il vantaggio di essere abbastanza semplice e facile nel calcolo allo stesso tempo però si possono individuare alcuni difetti:

- Non si tiene conto della non linearità del prezzo dell'opzione, e una grossa variazione nel prezzo del sottostante implicherà una variazione del premio dell'opzione, che varierà rispetto a quanto stimato dal VaR
- L'assunzione che la volatilità dell'asset rimane costante, in quanto il delta dipende da essa. Cambiamenti della volatilità comportano dei cambiamenti del valore di mercato dell'opzione che non sono catturati dal VaR.

Comunque tale metodo riproduce una stima accurata del VaR quando il portafoglio, il titolo si distribuisce il più vicino possibile ad una normale mentre diventa inefficiente quando sono presenti molti limiti di non-linearità.

Il delta method può essere modificato in modo da includere anche il rischio gamma, vega e theta.

Delta-Gamma approach:

Tale metodo si basa su una approssimazione del secondo ordine, ovvero abbandona l'ipotesi di linearità sostituendola con quella quadratica, cioè tiene conto della convessità del valore degli strumenti rispetto ai fattori di mercato parabolico anziché lineare. Gamma misura la variazione di secondo grado, cioè la variazione di Delta al variare del valore dei fattori mercato:

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial f_i}$$

Considerando sempre l'approssimazione di secondo ordine della serie di Taylor il VaR di una opzione diventa, a partire da

$$\Delta c \cong \delta \Delta S + \left(\frac{\gamma}{2}\right)(\Delta S)^2$$

$$VaR^{opzione} \cong \delta VaR^{sott} + \left(\frac{\gamma}{2}\right)\left(VaR^{sott}\right)^2$$

Il miglioramento di questo approccio è particolarmente marcato quando il gamma dell'opzione è molto alto, sia questo positivo o negativo. Il costo di tale miglioramento però è una notevole complicazione del metodo, in termini di parametri da stimare: esso è proporzionale al numero delle fonti di rischio a cui un titolo è esposto. Il vantaggio apportato da tale correzione è molto significativo se il periodo considerato è abbastanza lungo; per periodi brevi, invece, il termine aggiunto diventa irrilevante. L'approssimazione lineare effettuata attraverso il delta produce una distorsione del valore dell'opzione tanto maggiore quanto maggiore è la variazione del prezzo spot considerata. Anche il metodo

Delta-Gamma comunque non fornisce un'approssimazione del tutto precisa: esso tende infatti a soprastimare il valore delle opzioni (posizione long), al contrario del metodo semplice (utilizzando solo il delta) che invece lo sottostima.

VaR di un portafoglio:

Per quanto riguarda il VaR di un portafoglio esistono fondamentalmente il VaR diversificato (diversified VaR) e il VaR non diversificato (undiversified VaR). Il primo considera la volatilità più bassa che i rendimenti presentano se si comportano diversamente e suppone che la correlazione tra gli asset sia diversa da uno, mentre il secondo assume che non ci siano benefici derivanti dalla diversificazione e calcola le perdite nel caso in cui entrambe le parti cadono di valore nello stesso istante ovvero presuppone che la correlazione tra gli asset sia uguale ad uno. Proprio a partire da questa differenza andrò ad elencare i diversi metodi che si possono usare per stimare il VaR di un portafoglio.

Si consideri in un primo momento l'undiversified VaR: in questo contesto il VaR del portafoglio sarà pari alla somma dei VaR dei diversi asset che lo compongono.

Si consideri un portafoglio P composto da n titoli ognuno con peso pari ad w_i tale che la somma dei pesi sia pari ad uno,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

e che ogni asset abbia varianza pari ad σ_i^2, la varianza del portafoglio diventa:

$$\sigma_p^2 = \left[w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + \ldots + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2} + 2w_1w_3\sigma_1\sigma_3\rho_{1,3} + \ldots\right]$$

dove

$\rho_{i,j}$ è il coefficiente di correlazione tra i rendimenti dei 2 asset.

Il VaR del portafoglio diventa così:

$$VaR_{portafoglio} = -\alpha\sigma_p W = -\alpha\left[w_1^2\sigma_1^2 + w_1^2\sigma_2^2 + \ldots + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2} + \ldots.\right]^{1/2} W$$

e quindi

$$VaR_{portafoglio} = [VaR_1^2 + VaR_2^2 + \ldots. + 2VaR_1 VaR_2\rho_{1,2} + ..]^{1/2}$$

dove

VaR_i è l'undiversified VaR per l'asset i.

Il punto chiave per il VaR del portafoglio è il coefficiente di correlazione $\rho_{i,j}$. Esistono 3 importanti casi che riguardano il valore che tale coefficiente può assumere e in particolare se assume valore pari ad 1, 0 o –1:

1. Se $\rho_{i,j}$ è pari ad uno il VaR del portafoglio sarà la somma dei VaR dei singoli asset ovvero non c'è diversificazione del rischio. Ovvero:

$$\sum_{i=1}^{n} VaR_i \ .$$

2. Se $\rho_{i,j}$ è pari a zero il VaR del portafoglio sarà:

$$\left[\sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} VaR_1^2} \right]$$

che risulta inferiore alla somma dei VaR dei singoli asset. Questo risultato rispecchia semplicemente l'idea che i rendimenti dei titoli siano indipendenti e quindi un portafoglio con N asset risulta meno rischioso di un investimento su un singolo asset.

3. Se $\rho_{i,j}$ assume valore pari a meno uno il valore del VaR del portafoglio sarà pari a

$$[\ VaR_i - VaR_j]$$

Se i rendimenti sono perfettamente correlati negativamente il VaR del portafoglio sarà la differenza tra questi 2 asset perfettamente incorrelati ma se questi 2 asset si muovono anche della stessa ampiezza il VaR sarà pari a zero.

Decomponendo il portafoglio nei suoi elementi costitutivi, vengono evidenziate le stime che è necessario effettuare per il calcolo del VaR. Infatti nella stima della deviazione standard σ del portafoglio è necessario tenere conto dei benefici della diversificazione: in un portafoglio costituito da due titoli, il VaR complessivo è inferiore della somma dei VaR dei singoli titoli, ad eccezione del caso in cui i rendimenti dei due titoli siano perfettamente correlati. Il calcolo del VaR di un portafoglio dipende dunque dalle stime sulle volatilità dalle correlazioni raccolte nella matrice varianza-covarianza e dall'ammontare relativo investito nei diversi titoli. L'assunzione di normalità della distribuzione dei rendimenti presenta alcuni evidenti vantaggi:

- In primo luogo semplifica il calcolo del VaR favorendo la rapidità dell'operazione
- Secondariamente aumenta il valore informativo del VaR consentendo di traslare i risultati in base al livello di confidenza o all'intervallo temporale considerato. Infatti sotto l'assunzione di normalità e partendo dalla conoscenza del VaR per un determinato livello di confidenza, è possibile calcolare il VaR per ogni altro ipotetico livello di confidenza; la stessa osservazione è valida per l'orizzonte temporale.

Il calcolo del VaR attraverso l'assunzione di normalità e la matrice di varianza-covarianza presenta però spesso alcuni svantaggi:

- La stima del VaR sulla base di una distribuzione normale dei rendimenti porta a sottostimare il vero valore a rischio per elevati livelli di confidenza più contenuti, e a sovrastimarlo per livelli di confidenza più contenuti; il motivo è da ricercare nella leptocurtosi della distribuzione dei rendimenti. Ovviamente questo problema causa errori in eccesso o in difetto nella determinazione di tale misura di rischio.

- Il secondo problema è che l'approccio in questione è valido solo nel caso in cui la variazione del valore del portafoglio dipenda in modo lineare dalle variazioni delle variabili di mercato sottostanti. In questo caso infatti la deviazione standard del portafoglio è una semplice trasformazione lineare dei singoli fattori di rischio. Tuttavia nel portafoglio possono essere presenti strumenti finanziari come le opzioni, che non sono caratterizzati da linearità nei confronti delle variabili sottostanti. In questi casi si possono sostituire le posizioni in questione con delle approssimazioni lineari (approccio delta-normale) o quadratiche (approccio delta-gamma); tuttavia una stima molto accurata del VaR per portafogli non lineari non è comunque possibile, e si tratta di modelli che hanno il difetto di ridurre la semplicità e la rapidità del calcolo.

Un'alternativa all'approccio parametrico è data dai metodi delle simulazioni, in particolare l'approccio delle simulazioni storiche e quello delle simulazioni montecarlo. Nei modelli delle simulazioni si ottiene il VaR come il corrispondente percentile nella distribuzione dei rendimenti, laddove negli approcci parametrici si procede sulla base degli intervalli di confidenza e l'assunzione di normalità. Le simulazioni storiche[34] si basano sulla effettiva distribuzione passata dei rendimenti, mentre con le simulazioni montecarlo si fanno delle ipotesi sulla forma della distribuzione stessa, ma non è richiesta l'assunzione di normalità come nell'approccio parametrico.

[34] Per le simulazioni storiche e montecarlo si veda quanto detto nel paragrafo riguardante il VaR del singolo asset con questi 2 metodi.

Strategie di copertura con opzioni

Le posizioni su opzioni, strutture non lineari producono rendimenti la cui distribuzione, nella maggior parte dei casi, non è approssimabile con una distribuzione normale. In questi casi, la conoscenza di media e varianza non è più sufficiente per caratterizzarne la distribuzione ma occorre ampliare la ricerca anche ai momenti di ordine superiore (come per esempio il momento quarto, per il noto problema delle code grosse[35]). Ciò aumenta la complessità nella stima del percentile di distribuzione dei rendimenti al livello di confidenza scelto. Nel caso delle opzioni non esiste, in generale, un modello rappresentativo, ossia un'espressione di forma chiusa della distribuzione dei rendimenti e, in letteratura solitamente, si fa ricorso agli approcci DELTA-GAMMA[36] o DELTA-NORMAL[37] o alla simulazione Montecarlo per ovviare al problema di non linearità della struttura dei *payoff* dell'opzione.

In particolare, la presenza di opzioni in un portafoglio può essere dovuta o a motivi di copertura o a motivi speculativi. Nel primo caso un investitore possiede un determinato asset e decide di coprirsi mettendo in atto una strategia di *hedging*, il suo obiettivo è quello di diminuire il rischio dell'investimento.

Egli può:

- sia comprare una opzione Put (assicurandosi un prezzo minimo di vendita),
- sia vendere una opzione Call (diminuendo il possibile *Draw-Down*),
- sia comperare l'una e vendere l'altra,

così facendo, se il prezzo dell'asset dovesse salire il prezzo pagato per l'opzione diminuirebbe il rendimento mentre l'incasso relativo alla vendita della call lo aumenterebbe, mentre se il prezzo dell'asset dovesse diminuire l'investitore sarebbe coperto dal prezzo dell'opzione put e aumenterebbe comunque il rendimento di quanto incassato con la vendita della call .

---

[35] Campbell, Lo, Mackilay, (1997) ,*The econometrics of financial markets,* Princeton, Princeton University Press pg . 480

[36] Dowd (2002), *Measuring market risk,* Chichester, England pg . 105-112

[37] Wilson T.C.(1996) ' Calculating risk capital.' Pg 193-196 in C. Alexander (ed.) *The Handbook of Risk Analisysis and Management.* Chichester,England

Nel secondo caso invece un investitore decide di aprire una posizione speculativa in opzioni non possedendo necessariamente il sottostante, perché ha previsto, a seconda dell'opzione che decide di acquistare o vendere, che il prezzo del sottostante possa aumentare o diminuire.

In ogni caso il problema cruciale, dovuto alla non linearità delle opzioni siano esse Americane o Europee è che se si considera, per esempio, il VaR di una combinazione di un'opzione put e del suo sottostante in un momento *t*, diverso dal momento di scadenza, nonostante l'investitore sia coperto e conosca la massima perdita che potrà subire[38], il VaR potrebbe avere un valore diverso da quello percepito e reale per l'investitore.

In letteratura il calcolo del Value–at-Risk di un portafoglio contenente opzioni è:

1) La somma pesata dei VaR dei diversi asset[39] che lo compongono moltiplicati a loro volta per la correlazione ovvero[40]:

Sia ω il vettore dei pesi del portafoglio,

Sia Ω la matrice di varianza – covarianza del portafoglio

Sia P la matrice di correlazione tra gli asset del portafoglio (ro) di generico elemento $\rho_{i,j}$.

Sia v_i il Value at Risk del asset i-esimo

Allora:

$$\text{VaR(portafoglio)} = \omega'\Omega\omega$$

Dove:

$$\Omega = v' \mathrm{P} v$$

ossia

[38] ovvero il costo del premio aumentato della differenza tra il prezzo d'entrata e lo strike-price.
[39] Butler , (1999),*Mastering value at risk*, Great Britain pg. 16-26
[40] Campbell, Lo, Mackilay, (1997) ,*The econometrics of financial markets*, Princeton, Princeton University Press pg. 181-188

$$VaR = \omega' \nu' \mathrm{P} \nu \omega$$

Se il VaR calcolato è un VaR non-diversificato[41] allora P diventa una costante pari ad 1 e quindi

$$\Omega = \nu' \mathrm{P} \nu$$

diventerà

$$\Omega = \nu' \nu$$

ossia

$$VaR = \omega' \nu' \nu \omega$$

2) Nello specifico se all'interno del portafoglio è presente una posizione su un opzione e il suo sottostante, possiamo sostituire nel calcolo del VaR del portafoglio, al posto dei due asset un unico valore determinato dalla composizione dei due titoli:

riprendendo la formula precedente

$$VaR^2_{Portafoglio} = \omega_1^2 VaR_1^2 + \omega_2^2 VaR_2^2 + 2 * \omega_1 \omega_2 \rho_{i,j} VaR_1 VaR_2$$

dove:

ω_1 = il peso dell'asset nel portafoglio (titolo sottostante)

ω_2 = il peso dell'opzione nel portafoglio (titolo sottostante)

e $\omega_1 = \omega_2$ detenendo l'opzione per *hedging*

$\rho_{i,j}$ =-1 poiché il valore di una opzione put con il suo sottostante sono negativamente e perfettamente correlati dal momento che

$$\text{VaR(opzione)} = \delta VaR_1$$

[41] Butler , (1999), ibidem pg. 24

$$\text{VaR(composizione)} = (1-\delta)VaR_i$$

Un valore minore del VaR del solo asset ma comunque maggiore di zero se l'opzione è *in the money*.

Il problema dei pesi e della formula utilizzata:

Si consideri un investitore che sia in posizione su di un titolo e ne acquisti la relativa opzione put. In letteratura [42] per calcolare il VaR di questa posizione si utilizza la seguente formula:

$$\text{VaR(Composizione)} = (1-\delta)VaR \text{ (Asset)}$$

Dove:

- δ è il delta dell'opzione put al momento del calcolo del VaR
- Il VaR(asset) è il VaR del sottostante calcolato .

La formula in questione si ottiene, dopo una serie di passaggi, dalla formula generale per il calcolo del rischio di un portafoglio della teoria di Markowitz[43] ovvero:

$$\sigma_{portafoglio} = \sqrt{\omega_i^2\sigma_i^2 + \omega_j^2\sigma_j^2 + \ldots. + 2\rho_{i,j}\omega_i\omega_j\sigma_i\sigma_j}$$

ovvero

$$\sigma^2_{portafoglio} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\sigma_i\sigma_j\rho_{i,j}$$

dove

- w_i Peso
- σ_p Deviazione standard
- $\rho_{i,j}$ Correlazione

Per il calcolo del VaR col metodo parametrico si moltiplica la deviazione standard del titolo considerato, per il valore del percentile di interesse[44]. Ossia

$$\text{VaR(asset)} = \sigma_{asset}\alpha_{\%}$$ [45]

Dove

$\alpha_{\%}$ è uno scalare.

Ne consegue che moltiplicando per uno scalare ambo i membri dell'equazione ottengo

$$\alpha_{\%}\sigma_{portafoglio} = \alpha_{\%}\sqrt{\omega_i^2\sigma_i^2 + \omega_j^2\sigma_j^2 + \ldots. + 2\rho_{i,j}\omega_i\omega_j\sigma_i\sigma_j}$$

e quindi

[42] Dowd, (2002) ibidem pg 113-142
[43] Campbell, Lo, Mackinlay,(1997), The econometrics of financial markets, pg 181-188
[44] vedi capitolo 4
[45] Dove $\alpha\%$ è il percentile di interesse per il calcolo del VaR

$$VaR_{composizione} = \sqrt{\omega_i^2\sigma_i^2\alpha_{\%}^2 + \omega_j^2\sigma_j^2\alpha_{\%}^2 + ...+ 2\rho_{ij}\omega_i\omega_j\sigma_i\sigma_j\alpha_{\%}^2}$$

ovvero

$$VaR_{composizione} = \sqrt{\omega_i^2 VaR_i^2 + \omega_j^2 VaR_j^2 + ...+ 2\rho_{ij}\omega_i\omega_j VaR_i VaR_j}$$

A questo punto considero la posizione long asset, long put e quindi la formula diventa:

$$VaR_{composizione} = \sqrt{\omega_1^2 VaR_{asset}^2 + \omega_2^2 VaR_{opzione}^2 + 2\rho_{asset-sottos\tan e}\omega_1\omega_2 VaR_{asset} VaR_{opzione}}$$

visto che

$$VaR_{opzione} = \delta VaR_{asset}$$

sostituendo nella formula, questa diventa:

$$VaR_{composizione} = \sqrt{\omega_1^2 VaR_{asset}^2 + \omega_2^2\delta^2 VaR_{asset}^2 - 2\delta\omega_1\omega_2 VaR_{asset}^2}$$

Il segno davanti al doppio prodotto è negativo perché $\rho_{asset-opzione}$ è uguale a meno uno dato che asset e opzione sono perfettamente correlate negativamente.

Raccogliendo nella formula il VaR dell'asset otteniamo:

$$VaR_{composizione} = \sqrt{VaR_{asset}^2(\omega_1^2 + \omega_2^2\delta^2 - 2\delta\omega_1\omega_2)}$$

quindi

$$VaR_{composizione} = \sqrt{VaR_{asset}^2(\omega_1 - \omega_2\delta)^2}$$

ed infine

$$VaR_{composizione} = VaR_{asset}(\omega_1 - \omega_2\delta)$$

Se ω_1 e ω_2 =1 allora

$$VaR_{composizione} = VaR_{asset}(1-\delta)$$

e questo è spiegabile introducendo il concetto di leva finanziaria ovvero utilizzando la stessa quantità di denaro usata per l'acquisto dell'azione, per l'acquisto della put. Nel caso specifico la somma dei pesi della composizione è 2, ossia si utilizza una leva finanziaria pari a 2.

Algoritmo e complessità computazionale:

Prima di affrontare il problema della stima del VaR con metodi iterativi, come il metodo montecarlo, è necessario porre in essere alcune considerazioni sulla complessità computazionale. Una delle principali critiche che viene posta al metodo montecarlo è quello di essere "*time consuming*"[46], e ciò indipendentemente dalla velocità degli elaboratori moderni. L'unico fattore che ne fa la differenza è la complessità dell'algoritmo utilizzato.

Complessità computazionale:

La teoria della complessità computazionale ha lo scopo di fornire una misura della risolubilità concreta dei problemi di ottimizzazione combinatoria. Si tratta di stabilire se le procedure, che in linea teorica portano alla soluzione di un problema, siano valide dal punto di vista pratico, nel senso che permettono di individuare la politica ottima in tempi accettabili. L'efficacia nella determinazione della soluzione del problema non può essere perseguita a tutti i costi: i mezzi di elaborazione devono essere usati in maniera efficiente[47], in modo da mettere a disposizione del decisore le informazioni necessarie in tempi opportunamente contenuti.

Nel nostro caso, per individuare il percentile di interesse riferito al VaR sarebbe necessario effettuare un ordinamento del intero database generato, un insieme che può comprendere più di 10^7 elementi.

Un processo semplice come quello di ordinare la serie in ordine crescente, risulta essere un'operazione molto dispendiosa in termini di tempo per il calcolatore, se dovesse confrontare di volta in volta un elemento della serie con tutti gli altri. Per tale motivo ho elaborato un metodo, che in seguito descrivo, che mi permette di giungere all' obiettivo prefissato con un numero di operazioni pari a $2n\log_2 n$ anziché con $n(n-1)/2$ operazioni, diminuendo così i tempi di operatività della macchina.

Nel caso in cui infatti avessi un insieme di n elementi

$$Z = (a_1 , a_2 , a_3 , \ldots .. a_n)$$

e dovessi ordinarlo in ordine crescente se dovessi confrontare un elemento con i restanti elementi dell'insieme per individuare il minimo assoluto della serie lo troverei dopo n confronti eseguendo (n-1) operazioni, passo poi a considerare un altro valore per confrontarlo con gli altri valori della serie, se questo è il secondo minimo verrà inserito nel nuovo vettore assieme al minimo assoluto, altrimenti se durante i vari confronti trova un numero inferiore questo considerato verrà tralasciato e verrà considerato questo valore che

[46] Crouhy, Galay, Mark (2000), Risk Management, New York. Pg 218
[47] Andreatta, Mason, Romanin Jacur (1990), Appunti di ottimizzazione su reti, Padova. Pg 10.

continuerà ad essere confrontato con gli altri fino a trovare il secondo minimo e così via, quindi con n(n-1)/2 operazioni sarò riuscita ad ordinare la serie, e ciò per tutti gli elementi e quindi:

$$N_{op} = 2n + 2(n-1) + 2(n-2) + \ldots + 2\left[n-(n-1)\right]$$

ossia

$$N_{op} = 2\sum_{i=0}^{n-1}(n-i) = 2n^2$$

Quindi il numero delle operazioni è un polinomio di grado secondo in n e si parlerà di una complessità,nel caso peggiore, $O(N^2)$.

Ordinamento per sottoinsiemi[48]:

Passiamo ora al nostro problema concreto ovvero la gestione della massa di risultati ottenuti tramite la simulazione montecarlo.

Inserisco l'insieme delle osservazioni in un vettore di n elementi a_i formato da coppie di elementi consecutivi che sono ordinate ad una ad una. Questi elementi generano una matrice dinamica di k colonne, con k = n/2 di generico elemento $a_{i,j}$. In ciascuna colonna quindi avrò 2 elementi ordinati in modo crescente.

$Z = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots a_n)$,

suddiviso per sottoinsiemi:

$Z = (A , B , C , D , \ldots\ldots K)$.

Conto i sottoinsiemi e con una Macro di VBA genero un primo ordinamento delle colonne.

Considero ora i primi due A, B sottoinsiemi dove

$A = (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_h)$ e $B = (b_1 ,b_2 ,b_3, \ldots b_l)$ metto a confronto i primi due valori dei sottoinsiemi considerati: a_1 , b_1 . Se a_1 è maggiore di b_1 allora inserisco b_1 in un nuovo vettore chiamato A^1,e questo verrà identificato con una nuova sigla a_1^1 poi confronto, in questo caso, a_1 con b_2 e se a_1 è maggiore di b_2 allora inserisco b_2 in A^1 altrimenti inserisco il valore di a_1, questo secondo valore diverrà a_2^1 dell'insieme A1. Passo quindi ad un nuovo raffronto tra a_2 e b_2 seguendo il procedimento appena spiegato. Nel peggiore dei casi, vengono eseguiti n confronti (nel caso in cui, invece un elemento sia maggiore di tutti i restanti elementi dell'altra colonna, i valori restanti già ordinati non necessitano di alcun confronto e verranno pertanto inseriti direttamente in A^1)e aver creato così un nuovo

[48] Mason (2000) Dispense di Ricerca Operativa

vettore composto dall'insieme ordinato di tutti gli elementi di A e di B passo a confrontare altri 2 sottoinsiemi e così via.

Una volta confrontati tutti i sottoinsiemi iniziali continuo il lavoro estendendo queste operazioni ai nuovi vettori continuando così fino a quando non giungo ad avere un unico insieme, ordinato in maniera crescente, composto da tutti gli n numeri iniziali.

E' evidente che se l'insieme iniziale di numeri, chiamato Z, contiene 2^k elementi si dovranno costruire k sottoinsiemi sino a Z^k e l'ultimo di questi contiene i numeri nell'ordine desiderato, pertanto con $n=2^k$ componenti si costruiscono $k=\log_2 n$ sottoinsiemi.

Poiché dopo ogni confronto viene trascritto nel nuovo vettore almeno un elemento è noto che Z^{k+1} si ottiene a partire da Z^k dopo non più di n confronti. Quindi l'algoritmo richiede al più $n\log_2 n$ operazioni.

Prendendo spunto dall'ordinamento per sottogruppi è stato creato l'algoritmo utilizzato per calcolare i valori di interesse dello studio. Quanto richiesto per il calcolo del VaR col metodo storico o parametrico, non è una serie ordinata di dati, ma di individuare il singolo valore della serie considerata che rappresenta il quinto percentile, nel nostro caso, o comunque α percentile della serie ordinata in modo crescente. Il problema quindi si trasforma dall'ordinare l'intera serie in ordine crescente ad individuare un determinato elemento-valore tra le peggiori osservazioni del titolo considerato. Per risolvere questo problema in maniera efficiente e limitare i tempi di calcolo si è pensato di utilizzare un metodo di *bounding*[49].

Qui a seguito ripeto l'algoritmo utilizzato[50] schematicamente per passi.

Si consideri un insieme di N osservazioni, dove N è un numero elevato dell'ordine di 10^6 e si operi come segue:

- PASSO 1. Calcolo la media della serie;
- PASSO 2. Divido il campione in 2 sottoinsiemi composti dai valori maggiori e minori della media; insieme A e insieme B
- PASSO 3. Eliminiamo il sottoinsieme che non comprende i valore desiderato
- PASSO 4. Se la numerosità del sottoinsieme rimasto è uguale ad 1 stop. Altrimenti torno al PASSO 1.

Al Passo 1 per calcolare la media devo sommare l'intero campione ossia eseguire tante operazioni quante sono le osservazioni del campione, divido poi il valore della somma ottenuto per il numero totale delle osservazioni. In un secondo luogo, confronto ogni osservazione della serie con la media eseguendo così N confronti e creando 2 sottoinsiemi

[49] In cui il bound (confine o inferiore o superiore) è fornito dalla media del campione, Andreatta, Mason, Romanin Jacur (1990)ibidem pg 123
[50] Vedi Appendice modulo 5

costituiti l'uno dai valori inferiori o uguali alla media l'altro con i valori maggiori della media. Ottengo così due sottoinsiemi ciascuno con la metà degli elementi dell'insieme appena esaminato. Per ogni ciclo eseguito quindi avrò 2n operazioni dove n è la numerosità via via decrescente dei campioni. La complessità del mio algoritmo sarà data quindi dalla sommatoria:

$$N_{operazioni} = 2N + 2\frac{N}{2} + 2\frac{N}{4} + \ldots + 2\frac{N}{2^{\log_2 N}}$$

ossia

$$N_{operazioni} = 2N \sum_{i=0}^{\log_2 N} \frac{1}{2^i}$$

E quindi con un numero certamente inferiore a quello dell'ordinamento dell'intera serie che è pari a n(n-1)/2 ossia $O(N^2)$

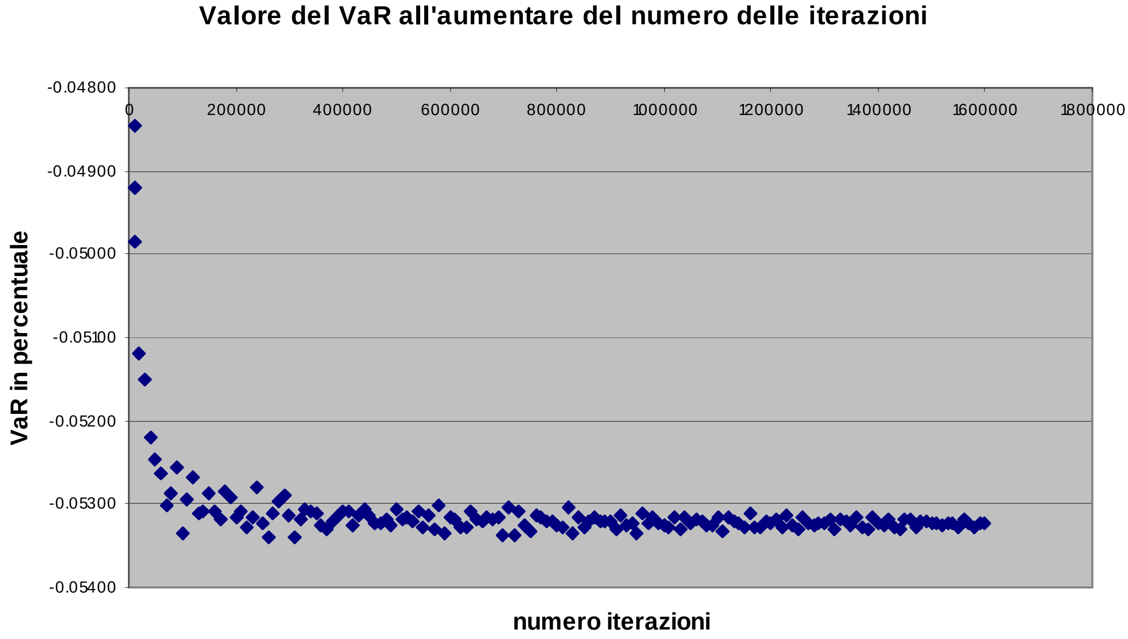
$$N_{operazioni} = 2N \sum_{i=0}^{\log_2 N} \frac{1}{2^i} = 2N \log_2 N < 2N^2$$

Convergenza dei risultati:

Consideriamo la serie Walt-Disney e calcoliamo il VaR mediante l'algoritmo sopraccitato col metodo montecarlo. Si eseguono un numero N di iterazioni e per ogni valore estratto della serie se ne genera un altro distribuito come una normale di media pari al valore estratto stesso e deviazione standard pari a quella della serie iniziale.

Un elemento interessante da considerare è la convergenza al valore finale del VaR calcolato col metodo Montecarlo in funzione del numero di iterazioni eseguito.

Come si può notare dal grafico qui sotto il valore finale del VaR, prossimo al -5.3% viene raggiunto già dopo un numero di iterazioni pari a 70000. I valori ottenuti da iterazioni inferiori a 70000, pur convergendo verso il valore finale con una certa rapidità si discostano dal valore in seguito utilizzato per le analisi. In particolare i VaR ottenuti da iterazioni superiori a 70000 oscillano attorno al -5.3% con una dispersione via via decrescente e continuano a farlo fino a che il numero di iterazioni arriva a 1600000. Ciò sta ad indicare che sia l'algoritmo, sia le regole alla base del metodo montecarlo da me imposte hanno prodotto un sistema in cui i risultati convergono all'aumentare delle iterazioni. E quindi maggiore è il numero delle iterazioni più accurata risulta la stima del VaR.



Per costruire questo grafico sono stati utilizzati i valori presenti nella tabella sotto riportata considerando in particolare il valore del VaR individuato dall'algoritmo e il numero di iterazioni al quale si riferisce.

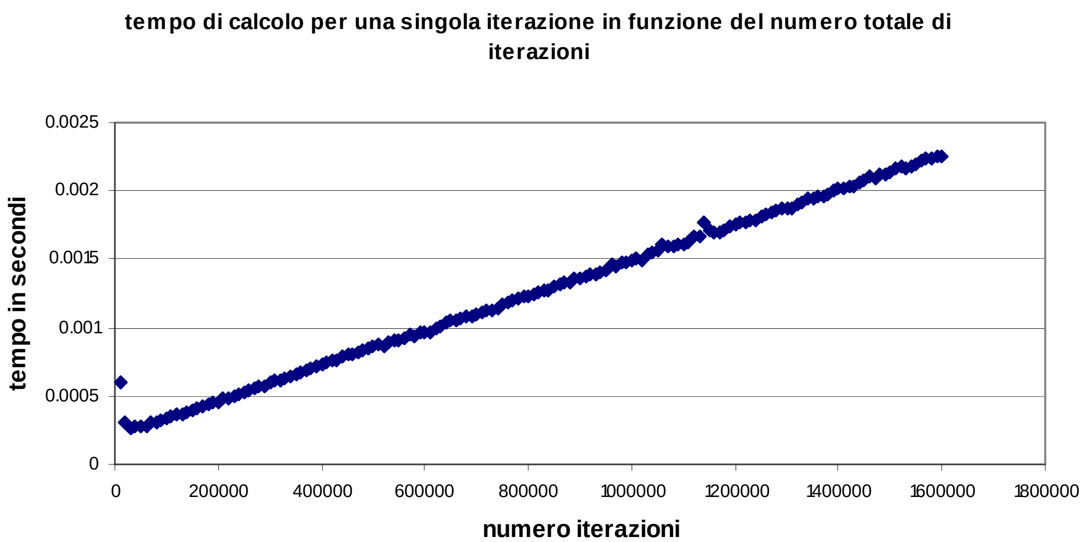
Tempi di calcolo:

Un altro elemento interessante da considerare per essere certi di aver utilizzato un algoritmo efficiente è quello di analizzare la relazione che intercorre, sempre considerando il VaR del titolo Disney calcolato con il metodo montecarlo, tra l'aumentare del numero delle iterazioni e il tempo impiegato dal calcolatore per eseguirle e individuare il valore del VaR interessato.

Come si può notare il tempo impiegato per il calcolo del VaR a seconda del numero di iterazioni eseguite cresce nell'ordine di $2N\log_2 N$ dove N è il numero delle iterazioni eseguite. L'andamento di questo grafico è simile a quello di un'esponenziale anche se all'aumentare del numero delle iterazioni il tempo impiegato per tale calcolo cresce più lentamente di quello che crescerebbe se il suo andamento fosse quello di un'esponenziale vera e propria, questo è un risultato che si può ritenere efficiente poiché l'algoritmo di ordinamento dell'intera serie, presenterebbe un andamento del grafico esponenziale dato che il numero di operazioni che il calcolatore esegue è dell'ordine di $O(N^2)$ mentre, come già detto prima, l'algoritmo da noi usato ha un ordine di operazioni pari a $2N\log_2 N$.

Si consideri ora la relazione presente tra il tempo necessario per calcolare una singola iterazione in seguito all'aumentare del numero totale di iterazioni.

Come si può notare il grafico ha un andamento rettilineo, ovvero all'aumentare del numero delle iterazioni aumenta anche il tempo impiegato per calcolare una singola simulazione. Significa che se per 20000 iterazioni il tempo in secondi per calcolare una singola iterazione è di 0.0005 per il numero totale è pari a 20000*0.0005 ovvero 10 secondi, per un numero di iterazioni pari a 1400000 invece il tempo si allunga fino a 280 secondi e per la singola iterazione aumenta fino a 0.002.



Si presenta di seguito la tabella con tutti i valori interessanti per giungere al risultato di quanto detto sopra. La prima colonna indica il numero di test che vengono effettuati dal calcolatore considerando che all'aumentare di questi aumenta anche il numero delle iterazioni del ordine di 10000, la seconda colonna mostra il numero di iterazioni che si eseguono per calcolare il VaR con il metodo MonteCarlo, la terza indica il tempo iniziale al quale il calcolatore inizia i calcoli, la quarta il tempo finale al quale il calcolatore ha finito di eseguire tutti i suoi calcoli, la quinta presenta il valore del VaR individuato. Nella sesta colonna sono stati calcolati i tempi impiegati per eseguire le operazioni in secondi.

giro	simulazioni	ora inizio	ora fine	var stimato	tempo in secondi
1	10000	10.03.53 AM	10.03.59 AM	-0.04921	6
2	20000	10.03.59 AM	10.04.07 AM	-0.05118	6
3	30000	10.04.07 AM	10.04.18 AM	-0.05151	8
4	40000	10.04.18 AM	10.04.32 AM	-0.05219	11
5	50000	10.04.32 AM	10.04.49 AM	-0.05247	14
6	60000	10.04.49 AM	10.05.10 AM	-0.05263	17
7	70000	10.05.10 AM	10.05.35 AM	-0.05301	21
8	80000	10.05.35 AM	10.06.04 AM	-0.05287	25
9	90000	10.06.04 AM	10.06.38 AM	-0.05256	29
10	100000	10.06.38 AM	10.07.16 AM	-0.05334	34
11	110000	10.07.16 AM	10.08.00 AM	-0.05295	38
12	120000	10.08.00 AM	10.08.48 AM	-0.05267	44
13	130000	10.08.48 AM	10.09.42 AM	-0.05311	48
14	140000	10.09.42 AM	10.10.42 AM	-0.05310	54
15	150000	10.10.42 AM	10.11.48 AM	-0.05288	60
16	160000	10.11.48 AM	10.13.00 AM	-0.05308	66
17	170000	10.13.00 AM	10.14.19 AM	-0.05319	72
18	180000	10.14.19 AM	10.15.46 AM	-0.05286	79
19	190000	10.15.46 AM	10.17.18 AM	-0.05292	87
20	200000	10.17.18 AM	10.18.59 AM	-0.05316	92
21	210000	10.18.59 AM	10.20.46 AM	-0.05309	101
22	220000	10.20.46 AM	10.22.41 AM	-0.05328	107
23	230000	10.22.41 AM	10.24.44 AM	-0.05315	115
24	240000	10.24.44 AM	10.26.56 AM	-0.05280	123
25	250000	10.26.56 AM	10.29.17 AM	-0.05324	132
26	260000	10.29.17 AM	10.31.47 AM	-0.05339	141
27	270000	10.31.47 AM	10.34.26 AM	-0.05312	150
28	280000	10.34.26 AM	10.37.13 AM	-0.05297	159
29	290000	10.37.13 AM	10.40.13 AM	-0.05289	167
30	300000	10.40.13 AM	10.43.23 AM	-0.05315	180
31	310000	10.43.23 AM	10.46.41 AM	-0.05340	190
32	320000	10.46.41 AM	10.50.10 AM	-0.05318	198
33	330000	10.50.10 AM	10.53.48 AM	-0.05305	209
34	340000	10.53.48 AM	10.57.36 AM	-0.05310	218
35	350000	10.57.36 AM	11.01.40 AM	-0.05312	228
36	360000	11.01.40 AM	11.05.55 AM	-0.05326	244
37	370000	11.05.55 AM	11.10.20 AM	-0.05330	255
38	380000	11.10.20 AM	11.15.02 AM	-0.05321	265
39	390000	11.15.02 AM	11.19.52 AM	-0.05315	282
40	400000	11.19.52 AM	11.25.00 AM	-0.05310	290
41	410000	11.25.00 AM	11.30.17 AM	-0.05308	308
42	420000	11.30.17 AM	11.35.47 AM	-0.05326	317
43	430000	11.35.47 AM	11.41.32 AM	-0.05314	330
44	440000	11.41.32 AM	11.47.34 AM	-0.05306	345
45	450000	11.47.34 AM	11.53.46 AM	-0.05313	362
46	460000	11.53.46 AM	12.00.12 PM	-0.05324	372
47	470000	12.00.12 PM	12.06.51 PM	-0.05323	386
48	480000	12.06.51 PM	12.13.47 PM	-0.05318	399

giro	Simulazioni	ora inizio	ora fine	var stimato	tempo in secondi
49	490000	12.13.47 PM	12.20.55 PM	-0.05325	416
50	500000	12.20.55 PM	12.47.26 PM	-0.05306	428
51	510000	12.39.58 PM	12.54.58 PM	-0.05318	448
52	520000	12.54.58 PM	1.02.50 PM	-0.05316	452
53	530000	1.02.50 PM	1.10.56 PM	-0.05320	472
54	540000	1.10.56 PM	1.19.14 PM	-0.05308	486
55	550000	1.19.14 PM	1.27.47 PM	-0.05329	498
56	560000	1.27.47 PM	1.36.46 PM	-0.05312	513
57	570000	1.36.46 PM	1.45.50 PM	-0.05330	539
58	580000	1.45.50 PM	1.55.20 PM	-0.05300	544
59	590000	1.55.20 PM	2.05.03 PM	-0.05335	570
60	600000	2.05.03 PM	4.18.43 PM	-0.05315	583
61	610000	4.08.54 PM	4.29.02 PM	-0.05319	589
62	620000	4.29.02 PM	4.39.41 PM	-0.05328	619
63	630000	4.39.41 PM	4.50.43 PM	-0.05329	639
64	640000	4.50.43 PM	5.02.03 PM	-0.05308	662
65	650000	5.02.03 PM	5.13.37 PM	-0.05319	680
66	660000	5.13.37 PM	5.25.34 PM	-0.05322	694
67	670000	5.25.34 PM	5.37.47 PM	-0.05315	717
68	680000	5.37.47 PM	5.50.14 PM	-0.05318	733
69	690000	5.50.14 PM	6.03.04 PM	-0.05317	747
70	700000	6.03.04 PM	6.16.12 PM	-0.05337	770
71	710000	6.16.12 PM	6.29.47 PM	-0.05303	788
72	720000	6.29.47 PM	6.43.32 PM	-0.05338	815
73	730000	6.43.32 PM	6.57.41 PM	-0.05309	825
74	740000	6.57.41 PM	7.12.14 PM	-0.05326	849
75	750000	7.12.14 PM	7.27.11 PM	-0.05332	873
76	760000	7.27.11 PM	7.42.35 PM	-0.05313	897
77	770000	7.42.35 PM	7.58.19 PM	-0.05316	924
78	780000	7.58.19 PM	8.14.26 PM	-0.05322	944
79	790000	8.14.26 PM	8.30.49 PM	-0.05320	967
80	800000	8.30.49 PM	12.12.50 AM	-0.05326	983
81	810000	11.55.58 PM	12.29.58 AM	-0.05327	1012
82	820000	12.29.58 AM	12.47.39 AM	-0.05305	1028
83	830000	12.47.39 AM	1.05.27 AM	-0.05334	1061
84	840000	1.05.27 AM	1.23.52 AM	-0.05317	1068
85	850000	1.23.52 AM	1.42.41 AM	-0.05328	1105
86	860000	1.42.41 AM	2.01.55 AM	-0.05321	1129
87	870000	2.01.55 AM	2.21.31 AM	-0.05316	1154
88	880000	2.21.31 AM	2.41.38 AM	-0.05320	1176
89	890000	2.41.38 AM	3.01.58 AM	-0.05320	1207
90	900000	3.01.58 AM	3.22.47 AM	-0.05320	1220
91	910000	3.22.47 AM	3.44.01 AM	-0.05329	1249
92	920000	3.44.01 AM	4.05.38 AM	-0.05314	1274
93	930000	4.05.38 AM	4.27.39 AM	-0.05325	1297
94	940000	4.27.39 AM	4.50.11 AM	-0.05322	1321
95	950000	4.50.11 AM	5.13.31 AM	-0.05336	1352

giro	simulazioni	ora inizio	ora fine	var stimato	tempo in secondi
96	960000	5.13.31 AM	5.37.00 AM	-0.05310	1400
97	970000	5.37.00 AM	6.01.02 AM	-0.05322	1409
98	980000	6.01.02 AM	6.25.19 AM	-0.05317	1442
99	990000	6.25.19 AM	6.50.06 AM	-0.05323	1457
100	1000000	6.50.06 AM	7.15.26 AM	-0.05325	1487
101	1010000	7.15.26 AM	7.40.54 AM	-0.05328	1520
102	1020000	7.40.54 AM	8.07.13 AM	-0.05316	1528
103	1030000	8.07.13 AM	8.33.58 AM	-0.05330	1579
104	1040000	8.33.58 AM	9.01.17 AM	-0.05316	1605
105	1050000	9.01.17 AM	9.29.48 AM	-0.05322	1639
106	1060000	9.29.48 AM	9.58.13 AM	-0.05318	1711
107	1070000	9.58.13 AM	10.26.51 AM	-0.05321	1705
108	1080000	10.26.51 AM	10.56.04 AM	-0.05327	1718
109	1090000	10.56.04 AM	11.25.27 AM	-0.05325	1753
110	1100000	11.25.27 AM	11.55.35 AM	-0.05316	1763
111	1110000	11.55.35 AM	12.26.35 PM	-0.05332	1808
112	1120000	12.26.35 PM	12.57.51 PM	-0.05317	1860
113	1130000	12.57.51 PM	1.31.27 PM	-0.05321	1876
114	1140000	1.31.27 PM	2.04.09 PM	-0.05323	2016
115	1150000	2.04.09 PM	2.36.59 PM	-0.05328	1962
116	1160000	2.36.59 PM	3.10.04 PM	-0.05312	1970
117	1170000	3.10.04 PM	3.43.48 PM	-0.05327	1985
118	1180000	3.43.48 PM	4.18.17 PM	-0.05328	2024
119	1190000	4.18.17 PM	4.53.24 PM	-0.05320	2069
120	1200000	4.53.24 PM	5.29.09 PM	-0.05324	2107
121	1210000	5.29.09 PM	6.05.12 PM	-0.05317	2145
122	1220000	6.05.12 PM	6.41.49 PM	-0.05329	2163
123	1230000	6.41.49 PM	7.18.49 PM	-0.05313	2197
124	1240000	7.18.49 PM	7.56.39 PM	-0.05326	2220
125	1250000	7.56.39 PM	8.35.10 PM	-0.05330	2270
126	1260000	8.35.10 PM	9.14.09 PM	-0.05317	2311
127	1270000	9.14.09 PM	9.53.47 PM	-0.05322	2339
128	1280000	9.53.47 PM	10.33.55 PM	-0.05326	2378
129	1290000	10.33.55 PM	11.14.36 PM	-0.05324	2408
130	1300000	11.14.36 PM	11.55.30 PM	-0.05323	2441
131	1310000	11.55.30 PM	12.37.27 AM	-0.05318	2454
132	1320000	12.37.27 AM	1.20.00 AM	-0.05330	2517
133	1330000	1.20.00 AM	2.03.23 AM	-0.05319	2553
134	1340000	2.03.23 AM	2.47.07 AM	-0.05321	2603
135	1350000	2.47.07 AM	3.31.25 AM	-0.05326	2624
136	1360000	3.31.25 AM	4.16.01 AM	-0.05317	2658
137	1370000	4.16.01 AM	5.01.33 AM	-0.05327	2676
138	1380000	5.01.33 AM	5.48.00 AM	-0.05330	2732
139	1390000	5.48.00 AM	6.35.09 AM	-0.05315	2787
140	1400000	6.35.09 AM	7.22.33 AM	-0.05323	2829
141	1410000	7.22.33 AM	8.10.39 AM	-0.05325	2844
142	1420000	8.10.39 AM	8.59.01 AM	-0.05319	2886
143	1430000	8.59.01 AM	9.48.27 AM	-0.05327	2902
144	1440000	9.48.27 AM	10.38.47 AM	-0.05330	2966

giro	Simulazioni	ora inizio	ora fine	var stimato	tempo in secondi
145	1450000	10.38.47 AM	11.29.54 AM	-0.05319	3020
146	1460000	11.29.54 AM	12.21.06 PM	-0.05319	3067
147	1470000	12.21.06 PM	1.13.14 PM	-0.05328	3072
148	1480000	1.13.14 PM	2.05.45 PM	-0.05321	3128
149	1490000	2.05.45 PM	2.59.12 PM	-0.05321	3151
150	1500000	2.59.12 PM	6.40.39 PM	-0.05324	3207
151	1510000	5.46.12 PM	7.35.47 PM	-0.05323	3267
152	1520000	7.35.47 PM	8.30.57 PM	-0.05325	3308
153	1530000	8.30.57 PM	9.26.57 PM	-0.05323	3310
154	1540000	9.26.57 PM	10.23.28 PM	-0.05322	3360
155	1550000	10.23.28 PM	11.21.21 PM	-0.05329	3391
156	1560000	11.21.21 PM	12.19.58 AM	-0.05317	3473
157	1570000	12.19.58 AM	1.18.43 AM	-0.05323	3517
158	1580000	1.18.43 AM	2.18.25 AM	-0.05327	3525
159	1590000	2.18.25 AM	3.18.20 AM	-0.05323	3582
160	1600000	3.18.20 AM	3.18.20 AM	-0.05323	3595

Risk Management:

In questo capitolo si analizzeranno i rischi che un investitore, un manager, potrà incontrare nella sua attività, questi sono conosciuti come rischi finanziari. Quelli che andrò a considerare sono rischi strettamente connessi alle transazioni che si effettuano su mercati regolamentati di strumenti finanziari standardizzati, non verranno quindi prese in considerazione tutte quelle attività finanziarie che prevedono un rapporto diretto tra le controparti[51].

I Rischi finanziari, considerati in questo lavoro sul VaR, sono strettamente legati alle politiche di investimento[52] ed alle scelte relative alla struttura[53] propria degli strumenti finanziari utilizzati. La misura dei rischi finanziari si riferisce essenzialmente alle probabilità di scostamenti, solitamente misurati ex-post, dei risultati conseguiti rispetto a quelli attesi, a causa dei cambiamenti dei prezzi degli strumenti finanziari scelti dall'investitore. Tra i rischi finanziari, che trovano una rappresentazione sintetica nel VaR, è possibile distinguere il rischio di mercato, il rischio di liquidità, il rischio operativo, il rischio di base ed il rischio legale[54].

Il rischio di Mercato:

Il **rischio di mercato** è il rischio relativo ai possibili cambiamenti di valore delle attività finanziarie contenute nel portafoglio considerato, causati da movimenti dei fattori economici ai quali le attività stesse sono sensibili. Si tratta, pertanto, di un rischio sia legato alle caratteristiche delle singole attività che compongono il portafoglio, sia alle caratteristiche specifiche del mercato.

I principali fattori di rischio che le istituzioni o comunque i soggetti che operano nei mercati finanziari, affrontano, sono i movimenti indesiderati nei tassi di interesse, nel cambio tra le valute, nel livello e sulla volatilità dei corsi azionari., nel prezzo delle materie prime o sconvolgimenti ed eventi politici, economici e sociali. Inoltre, in letteratura [55]si è soliti pure distinguere tra **rischio di mercato assoluto e relativo**, dove il primo si riferisce alla perdita

[51] Con particolare riferimento a tutti i contratti derivati così detti OTC (over the counter) siano essi opzioni, forward, swaps etc.

[52] Intese come strategie operative adottate dall'investitore

[53] Struttura intesa come payoff lineare o non lineare dello strumento finanziario.

[54] In questo lavoro non considereremo il rischio di credito che fa riferimento all'incapacità anche se solo potenziale di una controparte nel soddisfare gli impegni contrattualmente assunti. I titoli saranno oggetto del nostro studio sono azioni, obbligazioni e derivati che prevedono come controparte una cassa di compensazione e garanzia , *clearing house,* che ne garantisce in ogni caso l'esecuzione.

[55] Emilio Barucci (2000), *Teoria dei mercati finanziari,* Bologna, Il mulino pag 107
Campbell, Lo, Mackinlay (1997) ibidem pag 181

potenziale del portafoglio in termini assoluti, in gergo finanziario si parla di rischio legato al *total return*,[56] mentre il secondo si riferisce a deviazioni del rendimento del portafoglio rispetto ai risultati di un indice di riferimento (*benchmark)*[57]. E' pure possibile scomporre il rischio di mercato di un portafoglio in due parti : diversificabile e non diversificabile. Il rischio non diversificabile è relativo all'intero mercato ed è influenzato da eventi che riguardano tutti i titoli[58]; il rischio diversificabile è attinente alla singola posizione finanziaria e dipende da fattori che influenzano l'andamento del singolo asset[59]. Il rischio diversificabile può essere ridotto attraverso la diversificazione, cioè frazionando il capitale investito in un numero rilevante di titoli azionari in modo da diminuire il rischio dell'intero portafoglio, infatti, se i titoli che compongono il portafoglio hanno una correlazione negativa o prossima allo zero all'aumentare del numero degli asset diminuisce in fatto che:

se consideriamo per esempio una matrice di correlazione 3x3 e se calcoliamo la varianza di un portafoglio si giungere alla seguente conclusione:

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \rho_{11}, \rho_{1,2}, \rho_{1,3} \\ \rho_{2,1}, \rho_{2,2}, \rho_{2,3} \\ \rho_{3,1}, \rho_{3,2}, \rho_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0,0 \\ 0,1,0 \\ 0,0,1 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \left[\omega_{1,} \omega_2 \omega_3 \right] = \left[0.25, 0.35, 0.40 \right]$$

$$\sigma = \left[\sigma_{1,} \sigma_2 \sigma_3 \right] = \left[0.175, 0.12, 0.22 \right]$$

Se il portafoglio fosse composto da 3 asset perfettamente non correlati tra loro, il rischio sarebbe dato da :

$$\sigma^2_{Portafoglio} = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + \ldots + 2 * \omega_1 \omega_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 + \ldots + 2 \omega_1 \omega_3 \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3$$

Quindi:

---

[56] Si riferisce alle performance in assoluto senza il paragone ad un determinato *benchmark."In performance measurement, the actual rate of return realized some evaluation period. In fixed incombe analysis, the potentialreturn that considers all three sources of return (coupon interest, interest on coupon interest) over some investment horizon"* Campbell R. Harbey (2000), H*yperextual final glossary,* Duke.

[57] Si parla quindi di scostamento dall'indice di riferimento *(tracking error*)

[58] Per esempio: l'andamento dell'economia, la liquidità disponibile, il livello dei tassi di interesse ed altri fattori macroeconomici.

[59] Per esempio la qualità del management, le politiche commerciali, eventi che riguardano la singola azienda oppure che riguardano il settore di appartenenza come ad esempio l'utilizzo di nuove tecnologie, le variazioni di prezzo delle materie prime o l'acuirsi della concorrenza in uno specifico segmento produttivo.

$$\sigma_{portafoglio} = 10.68$$

e

$$VaR^2_{Portafoglio} = \omega_1^2 VaR_1^2 + \omega_2^2 VaR_2^2 + ... + 2 * \omega_1\omega_2\rho_{1,2}VaR_1VaR_2 + ... + 2\omega_1\omega_3\rho_{1,3}VaR_1VaR_3$$

$$VaR_{portafoglio} = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx = -17.58\% \ \%$$

che è nettamente inferiore al valore di un qualsiasi altro portafoglio composto da titoli correlati positivamente poiché, essendo uguale a zero la correlazione tra gli asset, viene a mancare nella formula il doppio prodotto tra i termini.

Se invece la correlazione dei miei asset fosse negativa o comunque negativa e prossima allo zero il rischio diminuirebbe sempre di più fino ad un valore soglia che identifica il cosiddetto rischio non diversificabile o di mercato..

Per esempio se P diventa:

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \rho_{11},...,\rho_{1j} \\ .... \\ \rho_{i1},...,\rho_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,-1,0 \\ -1,1,0 \\ 0,0,1 \end{bmatrix}$$

allora il rischio del portafoglio diventa:

$$\sigma_{portafoglio} = 8.80\ \%$$

e

$$VaR_{portafoglio} = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx = -14.48\%$$

La formula per il calcolo della $\sigma_{\text{non diversificato}}$ diventa:

$$\sigma_{nondiversificato} = \sum_i \omega_i \sigma_i$$

e la diversificazione è data da:

$$diversificazione = 1 - \frac{\sigma_{div}}{\sigma_{nondiv}}$$

dove σ_{div} è la volatilità del portafoglio.

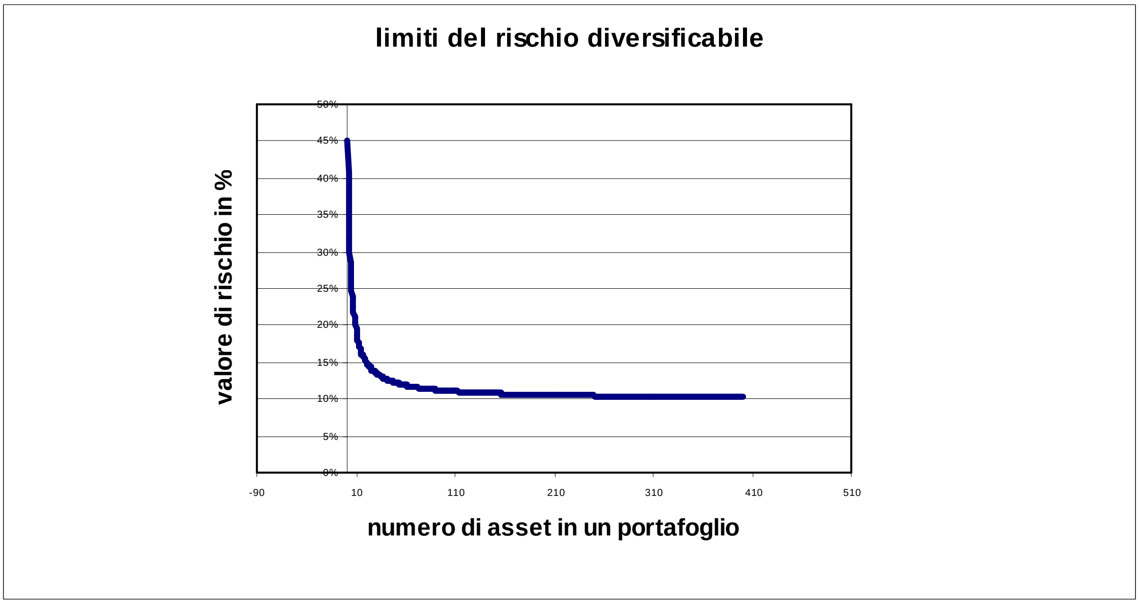
Come è noto il rischio non diversificato sarà sempre maggiore o uguale al rischio diversificato poiché il primo è pari a

$$\sigma_{nondiversificato} = \sum_i \omega_i \sigma_i$$

mentre il secondo è pari a

$$\sigma_{Portafoglio} = \sqrt{\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + ... + 2 * \omega_1 \omega_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 + ... + 2 \omega_1 \omega_3 \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3}$$

Il rischio diversificabile aumenta all'aumentare del numero di asset presenti nel portafoglio e tende, in linea di massima, dopo un certo numero di asset inseriti, non a zero, bensì al rischio non diversificabile, nonché detto semplicemente rischio di mercato.



Nel grafico la linea che traccia l'esponenziale rappresenta il rischio diversificabile ,come possiamo notare, oltre un certo valore questa esponenziale non scende, infatti non si avvicina mai allo zero. L'area al di sotto della curva rappresenta il rischio non diversificabile, il rischio di mercato.

Gamma risk:

Per **gamma risk** si intende il rischio associato a cambiamenti di valore di attività con pay-off non lineare, è la sensibilità di secondo ordine del valore dello strumento finanziario considerato al variare dei fattori di mercato cui questo è sottoposto.

Rischio di Liquidità:

La liquidità di uno strumento finanziario consiste nella sua attitudine a trasformarsi prontamente in moneta senza perdita di valore. Essa dipende in primo luogo dalle caratteristiche del mercato in cui il titolo è trattato. In generale, a parità di altre condizioni i titoli trattati su mercati organizzati sono più liquidi dei titoli non trattati su detti mercati. Questo in quanto la domanda e l'offerta di titoli viene convogliata in gran parte su tali mercati e quindi i prezzi ivi rilevati sono più affidabili quali indicatori dell'effettivo valore degli strumenti finanziari. Quindi nell'analisi di tale rischio mi concerterò prettamente su questi mercati nei quali le commissioni sono fisse. Il **rischio di liquidità** è quindi il rischio connesso alla perdita risultante dalla liquidazione di una posizione. Si presenta soprattutto sui mercati meno liquidi che manifestano questa caratteristica in significativi bid-ask spreads[60]. Ciò significa che gli investitori che desiderano liquidare la loro posizione possono essere costretti a sopportare costi significativi per far questo: o devono pagare costi molto alti di transazione o potrebbero dover vendere ad un prezzo svantaggioso, in particolar modo se necessitano di uscire velocemente dalla posizione[61]. Nei momenti di crisi possono esserci difficoltà ad eseguire la transazione e questo poi si riflette nel dover pagare un prezzo molto distante da quello desiderato.

Ci sono 2 tipi di rischio di liquidità:

- Il normale **rischio di liquidità** che si presenta trattando con i mercati che sono meno liquidi. Questo tipo di rischio si incontra in molti mercati tranne nei principali mercati finanziari, quali ad esempio il CBOT, CME, NYSE, NYBOT, EUREXCHANGE, MIBTEL; il grado di liquidità varia molto da mercato a

[60] Dowd K. , (1998) ,*Beyond Value at Risk,* Chichester, England pg 187
[61] Questo accade soprattutto in mercati OTC o per strumenti derivati direttamente contrattati con la contro parte.

mercato:si passa da una quasi non liquidità[62] ad una grande liquidità ma non perfetta.

- L'altro tipo di rischio di liquidità è molto insidioso e in taluni casi anche molto dannoso poiché è il rischio di costi di liquidità presenti nei mercati di fronte a una crisi dove il mercato perde il suo normale livello di liquidità e gli investitori possono liquidare le loro posizioni solo subendo gravi perdite rispetto a quelle che subirebbero in circostanze normali. In queste situazioni può accadere che il prezzo scende al di sotto di una certa soglia che è diversa a seconda del mercato preso in considerazione e delle diverse fasi di contrattazione, la conseguenza di questo eccesso di ribasso è la temporanea sospensione del titolo dalla contrattazione. In questa situazione l'investitore se non riesce a vendere prima della chiusura temporanea della contrattazione non riesce proprio a vendere il suo titolo finché la contrattazione non viene riaperta.

Lo Slippage:

Con il termine "slippage" ci si riferisce a quella differenza che si registra praticamente sempre, tra prezzo di mercato (come riportato dai circuiti informatici o dalla stampa) e prezzo effettivo di esecuzione. Tale differenza, è quasi sempre sfavorevole all'operatore, non rappresenta sempre una cattiva esecuzione dell'ordine da parte del broker, quanto un prezzo che si paga per il bid-ask spreads.. Anche sui mercati telematici, dove i circuiti riportano in tempo reale i prezzi a cui vengono concluse le transazioni, non è sempre detto che il prezzo che si ottiene per effettuare un'operazione sia esattamente pari a quello quotato giusto un secondo prima: l'ordine potrebbe essere troppo grosso oppure troppo piccolo; potrebbe darsi che alcune controparti siano uscite (od entrate) dal mercato proprio in quel momento. In teoria lo "slippage" potrebbe essere sia negativo che positivo per l'investitore e talvolta è proprio così. Nonostante vi siano condizioni favorevoli alle transazioni in certe occasioni è comunque più realistico considerare lo slippage come un rischio legato alla liquidità.

[62] Ad esempio le posizioni poco liquide alle quali si può riferire l'autore possono essere: le opzioni OTC o gli strumenti derivati direttamente contrattati con la controparte.

Relazione tra costi di Liquidazione e VaR:

Le posizioni in strumenti finanziari poco liquidi presentano un VaR più alto rispetto a posizioni in strumenti finanziari più liquidi perché tiene conto dei costi di liquidazione che dipendono dai costi di transazione e ricerca. Più è grande la disponibilità ad aspettare, inferiori sono i costi, infatti il VaR dipende strettamente dal periodo interessato:maggiore è il periodo di tenuta degli strumenti finanziari minore sarà il VaR .

Crisi di rischio di liquidità:

Il rischio di liquidità può presentarsi anche in contesti ben più dannosi: un mercato molto liquido, come già anticipato sopra, in momenti di crisi maggiore può perdere la sua liquidità
Nei mercati talvolta ci sono degli shocks legati per esempio ad una notizia in attesa che aumentano improvvisamente la volatilità del titolo, questo diventa un problema quando il prezzo dell'asset inizia a scendere precipitosamente e innesca un meccanismo di vendita e d'altro canto, un atteggiamento riluttante da parte dei compratori[63]. Così il bid-ask spread aumenta drammaticamente, l'aumento degli ordini di vendita può sopraffare il mercato e causare dei rallentamenti nell'esecuzione degli ordini dovuto sempre ai limiti dei mercati: ordini di vendita che per esempio in condizioni normali necessitavano di un paio di minuti per essere eseguiti ora possono necessitare anche di ore e il prezzo ottenuto dallo scambio è visibilmente più basso di quello che i venditori prevedevano.

Rischio di base:

Il rischio di cambiamento della base è un rischio specifico delle operazioni di copertura perché nella realtà un *hedger* non è in grado di identificare la data precisa in cui l'attività verrà venduta o comperata e quindi non è capace attraverso i derivati di rimuovere quasi tutto il rischio relativo alle variazioni che il prezzo dell'attività potrebbe subire prima della data di offset della copertura., cosa che è invece possibile in situazioni irreali. I motivi di tale incapacità sono:

- L'hedger può non conoscere con esattezza la data esatta in cui l'attività verrà comperata e venduta

[63] E' il mercato dove, data la mancanza di domanda, il prezzo di vendita di un bene è determinato solo da pochi compratori esistenti che sono quindi in grado di determinare il prezzo di scambio. Questo "fenomeno" è anche chiamato "buyer market".

- L'operazione di copertura può richiedere che il contratto a termine venga chiuso ben prima della sua scadenza

Questi problemi danno luogo a quello che è noto come "rischio di base". In un operazione di copertura la base viene definita come la differenza tra il prezzo spot[64] dell'attività da proteggere e il prezzo del derivato del contratto usato per la copertura. Se l'attività da coprire e quella sottostante il contratto di derivati sono uguali, la base dovrebbe essere nulla a scadenza della copertura anche se potrà essere positiva o negativa prima della sua scadenza. Quando il prezzo spot aumenta più del prezzo del derivato la base aumenta e si parla in tal caso di "rafforzamento della base", quando invece il prezzo del contratto a termine aumenta più del prezzo spot, la base diminuisce, in tal caso si parla di "indebolimento della base". Per esaminare tale rischio consideriamo innanzitutto la seguente simbologia:

S_1:prezzo spot al tempo 1

S_2:prezzo spot al tempo 2

F_1:prezzo derivato al tempo 1

F_2:prezzo derivato al tempo 2

b_1: base al tempo 1

b_2: base al tempo 2

Si assuma che l'operazione di copertura sia posta in essere al tempo t_1 e venga chiusa al tempo t_2.

Per definizione si ha che:

$$b_1=S_1 - F_1 \text{ e } b_2=S_2 - F_2$$

Si consideri innanzitutto il caso in cui l'*hedger* sa che l'attività verrà venduta al tempo t_2 ed assuma una posizione corta su F_1. Il prezzo di vendita dell'attività è S_2 ed il profitto risultante dalla posizione F è

F_1-F_2; pertanto il prezzo effettivamente incassato sarà:

$$S_2+ F_1- F_2= F_1+ b_2$$

Il valore di F_1 è noto al tempo 1 e se fosse noto anche b_2 allora la copertura sarebbe perfetta. Il rischio dell'operazione è dato dall'incertezza associata con b_2 ed è appunto noto come Rischio di Base.

Il rischio di base di beni di investimento tende ad essere minore di quello delle commodity: nel primo caso il rischio è dovuto principalmente all'incertezza circa il futuro livello del tasso di interesse, nel secondo invece , gli squilibri tra domanda e offerta e le difficoltà associate con l'immagazzinamento della merce possono portare a grandi variazioni del tasso di convenienza e quindi ad un forte aumento del rischio base. Se l'attività che dà origine all'esposizione dell'hedger è diversa da quella sottostante la copertura il rischio di base in genere aumenta: si indichi con S^*_2 il tempo al tempo 2 del sottostante il derivato. Come prima S_2 è il prezzo al tempo 2 dell'attività da coprire. Con tale operazione l'investitore si assicura che il prezzo da pagare (o da ricevere) in cambio dell'attività sarà pari a :

$$S_2+F_1-F_2$$

Oppure

$$F_1 + (S^*_2 - F_2) + (S_2 - S^*_2)$$

Il primo termine tra le parentesi rappresenta la base che si avrebbe se l'attività da coprire fosse uguale a quella del sottostante il derivato, il secondo invece è la base che deriva dalla differenza tra le 2 attività. Il rischio di base in tal caso può portare ad un miglioramento o ad un peggioramento della situazione dell'*hedger*. Si consideri una copertura corta se la base si rafforza in modo inatteso, la posizione dell'hedger migliora, mentre se la base si indebolisce in modo inatteso la posiziona peggiora;viceversa se la copertura è lunga.

Rischio operativo:

I **Rischi operativi** sono rischi associati alla probabilità di subire perdite a causa di una varietà enorme di rischi specifici quali rischi derivanti da inefficienza nei controlli procedurali interni, da errori umani, da carenze di tipo tecnologico quali, ad esempio, guasti o inefficienze dei sistemi informativi interni, da comunicazioni sbagliate. In particolare il rischio di *execution* si riferisce a situazioni in cui guasti nei sistemi operativi interni o errori procedurali hanno come effetto mancate transazioni o ritardi che possono trasformarsi in elevati costi per l'investitore; il rischio di frode si riferisce a situazioni in cui soggetti interni o esterni ai gestori finanziari adottino comportamenti illeciti quali, ad esempio, manipolazione di informazioni, occultamento di posizioni in essere o di perdite ecc..; il rischio tecnologico si riferisce alla necessità di proteggere i sistemi interni da accessi non autorizzati e problemi analoghi[65].

Per la loro natura i rischi operativi sono spesso poco visibili rispetto ad altri e proprio per questo sono difficilmente prevedibili.

[65] Quali per esempio un black-out, la necessità di possedere due distinte linee telefoniche nel caso una di queste, a causa per esempio della mancata corrente, non sia utilizzabile, la necessità di possedere un generatore di corrente,ecc..ecc..

Il Rischio Legale[66]:

Il **rischio legale** è il rischio di perdita che si presenta a causa di incertezze circa l'applicazione dei contratti, questo rischio include altri rischi dovuti ad una insufficiente documentazione, legalità incerta ecc.

Questo rischio si può presentare anche per incertezze circa legali giurisdizioni e cambi prospettici in sistemi legali e regolati.

Le istituzioni possono ridurlo usando accordi di massima standardizzati che incoraggiano le istituzioni ad apprezzare, onorare i loro contratti[67].

Tutti questi fattori concorrono, come già detto, alla valutazione del VaR . Quanto valutato nel caso specifico delle strategie con opzioni dà una misura che potremmo definire di liquidazione del portafoglio e che si presenta solo nel caso in cui si è costretti a disinvestire (liquidare)completamente il portafoglio prima della scadenza dei derivati presenti in tale combinazione. Questa è una eventualità che può essere considerata, nella maggior parte dei casi, come un rischio del tutto marginale. A supporto della nostra idea lo IAS 39[68] *Financial Instrument: Recognition and Measurement,* in vigore dal 1/1/2001[69], stabilisce che "le attività finanziarie (comprensive di titoli e partecipazioni con esclusione delle partecipazioni in società controllate e collegate), originariamente valutate al costo, vengano successivamente esposte nel nostro investimento al valore corrente (definito come il corrispettivo al quale un bene può essere scambiato tra parti consapevoli e indipendenti).

Sono esclusi da questo criterio :

1. Gli investimenti conservati fino alla scadenza ;
2. Le attività finanziarie che non hanno un prezzo regolarmente quotato e che risulta di incerta determinazione.

Per queste attività, escluse dalla regola generale del valore corrente, va adottato il criterio del "COSTO AMMORTIZZATO" che corrisponde al valore iniziale (cioè al valore corrente della contropartita ceduta) più o meno le quote di ammortamento della differenza tra il valore iniziale e il valore di scadenza.

Tutte le attività finanziarie vanno svalutate se il loro valore contabile non è recuperabile."

---

[66] In realtà il rischio legale, se si considerano solo i mercati regolamentati, non è un rischio che ci coinvolge particolarmente.

[67] Vedi nota numero 1

[68] Lo IAS 39 o International Accounting Standard riguarda le modalità di contabilizzazione dei prodotti derivati e delle operazioni di copertura; se viene adottato lo IAS 39 costringe gli utilizzatori dei prodotti derivati a calcolarne il valore effettivo oltre che misurarne l'efficacia in termini di copertura del rischio.

[69] Santesso E., Sostero U.,(2001), *Principi contabili per il bilancio d'esercizio,* Milano, Italia pg. 438

Da qui la necessità di individuare una nuova misura di rischio o meglio a dare una nuova interpretazione al Value at Risk.
Inizio quindi a studiare per ogni singolo caso la differente valutazione del VaR.

La serie della Disney:

Il titolo che utilizzerò per calcolare il VaR per le diverse situazioni in cui un investitore si potrà trovare è il titolo della Disney. La serie storica del titolo, tratta dal sito www.yahoo/finance.com , contiene osservazioni che coprono un periodo compreso tra il gennaio del 1962 ai giorni correnti. Le osservazioni sono giornaliere e la serie è back adjusted ovvero i prezzi passati vengono aggiustati sui prezzi presenti, proprio per questo ho dovuto considerare i prezzi di chiusura e non quelli aggiustati nella mia analisi.

Visto che la serie comprende un periodo di osservazioni abbastanza lungo, e visto che, come ho già detto è una serie back-adjusted, quindi i valori potrebbero essere molto diversi tra loro, ho considerato solo l'ultimo decennio di rilevazioni ossia dal gennaio del 1995 al maggio del 2005.

Al momento in cui presumo di aver comperato il titolo, il prezzo era di \$27.66, mentre quando ho iniziato il mio studio il prezzo era di \$27.88. Il premio pagato per la put era di \$0.6 mentre il premio incassato per la call di \$ 0.10.

Presi i prezzi di chiusura della serie li ho trasformati in rendimenti applicando la seguente formula che mi permette di iniziare l'analisi a partire da una serie giornaliera di rendimenti:

$$\text{Rendimenti} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

La media del campione, 0.000199144, è prossima a zero e la deviazione standard giornaliera delle 2619 osservazioni è del 2.536%. La deviazione standard, che non è altro che la radice della varianza, è una misura della dispersione di una distribuzione di probabilità intorno alla media μ essendo definita come speranza matematica degli scarti $(X-\mu)$ al quadrato. La simmetria uguale a -6.55877489, valore che deriva dall'applicazione della formula $\mu_3 = E(X-\mu)^3$, ci permette di affermare che la distribuzione è asimmetrica a sinistra; cioè ha la coda di sinistra allungata. La curtosi della distribuzione è pari 174.15 valore ottenuto dalla formula $\mu_4 = E(X-\mu)^4$ ciò significa che la mia serie è leptocurtica ovvero risulta essere più appuntita di una normale (che presenta una curtosi pari a 3) e con code più pesanti.

Da questa breve premessa passerò ad analizzare i singoli casi che mi interessano ovvero il VaR dell'asset, il VaR della put, il VaR di una posizione short call e long Call, il VaR della situazione long asset, short call il VaR di una composizione long asset, long put per poi occuparmi dell'ultimo caso long asset, long put e short call. In questa analisi ho considerato un titolo americano e opzioni americane poiché essendo queste ultime esercitabili in qualsiasi istante della loro vita se diventassero in the money si potrebbero esercitate non facendo così subire così alcun rischio all'investitore. Nel caso di opzioni europee invece, visto che queste sono esercitabili solo a scadenza, se l'operatore fosse costretto a liquidare la posizione e quindi a vendere asset e opzione verrebbe coperto solo per un valore pari al valore del premio dell'opzione.

Primo caso : il var dell'asset.

Calcolo del VaR			
Percentile	**0.95**		
Metodi			
	Parametrico	**Storico**	**Simulato**
Media Campione	0.000199144	0.000199144	0.000224882
Dev. St Campione	0.025363248	0.025363248	0.035950626
Simmetria		-6.55877489	-2.400735792
Curtosi		174.1582297	44.787064
Numerosità		2619	2000000
Minimo		-0.656486486	-0.741451179
Massimo		0.152956298	0.246107305
VaR	-0.04151968	-0.032326072	-0.053242869

Considero per questo primo caso solo il titolo da me scelto, il titolo Walt Disney, il numero delle osservazioni è relativo all'ultimo decennio cioè da gennaio 1995 a maggio 2005[70]. Sono stati calcolati, per questo campione, tre tipi di VaR quello con metodo analitico, quello con metodo storico e quello con metodo Montecarlo. Il VaR di questo ultimo metodo è stato ottenuto con due milioni di iterazioni[71]. I tre VaR presentano valori differenti: il più piccolo in assoluto risulta quello calcolato con il metodo storico, seguito da quello parametrico superiore al primo del 24%, nettamente più elevato invece è il valore del VaR con la simulazione Montecarlo. La differenza tra il VaR parametrico e quello Storico può essere spiegata notando come i rendimenti della serie storica di Disney non si distribuiscano come una normale di media μ e varianza σ^2 e che l'estremo della coda sinistra di tale distribuzione è più fine di quella di una normale N ~(μ ,σ^2) questo è un fatto che particolare visto che in

[70] Per quanto detto nel paragrafo introduttivo a questo capitolo.
[71] Si guardi il capitolo sull'algoritmo e la complessità computazionale

letteratura in genere le serie storiche dei rendimenti finanziari presentano code molto grosse[72].

Per il metodo parametrico, il VaR è stato calcolato utilizzando la seguente formula e risulta – 4.152% ad un giorno.

$$\text{VaR (asset)} = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right] dx$$

Dove:

$\alpha = 0.05$

σ è la deviazione standard del campione

μ è la media del campione

$$\text{VaR (asset)} = \int_{-\infty}^{0.05} \frac{1}{0.02536\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-0.0001992}{0.02536}\right)^2 \right] dx = -0.04152$$

Per il metodo storico, il VaR risulta del -3.232% che non è altro che il quinto percentile partendo dal minimo delle osservazioni della serie iniziale[73], infine, per quanto riguarda il metodo Montecarlo[74] con 2000000 di iterazioni[75], mio VaR risulterà – 5.322% pari al quinto

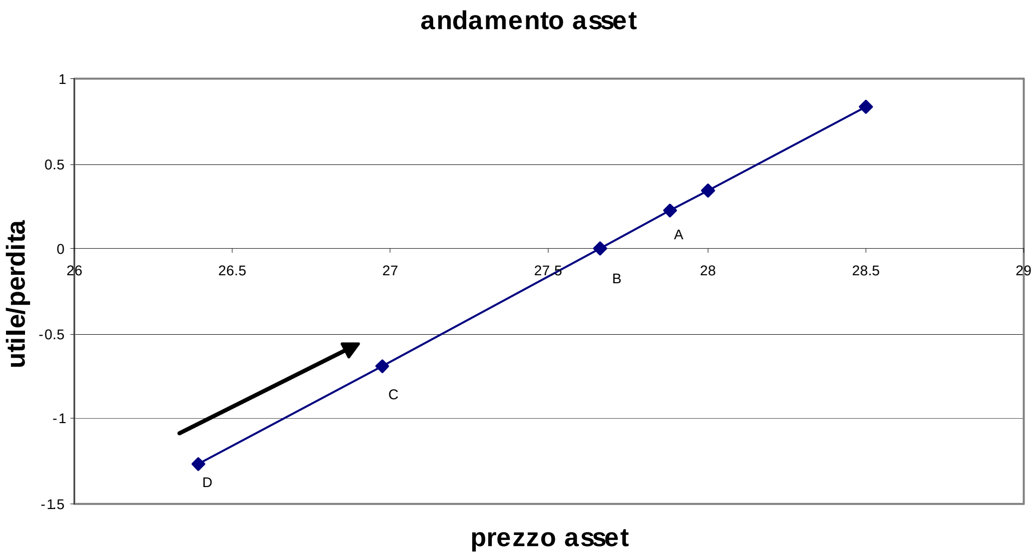
percentile a partire dalle osservazioni più piccole della serie, ovvero sovrastimo il mio VaR del 64% rispetto al metodo storico.

[72] Campbell,Lo, Mackinlay ,(1997) ibidem pg. 16-17-18, Dowd,(2002) ibidem pg 82, 100-102

[73] Si veda l'appendice dove è inserito il listato di ordinamento

[74] Si veda per illustrazioni sulle assunzioni riguardo tal metodo il capitolo

[75] Con questo metodo, si hanno n campionamenti casuali dei valori storici con i quali ne vengono simulati altri distribuiti secondo una normale con deviazione standard pari a quella della serie iniziale e con media pari ai valori stessi estratti.



Tornando al caso specifico che ho preso in considerazione, nel grafico è illustrata la funzione dei payoff dell'investimento in Disney, in ascissa ci sono i prezzi dell'asset, in ordinata c'è l'utile o la perdita dell'operazione calcolata come la differenza tra il prezzo del titolo e il prezzo a cui l'ho comperato.

Sono stati evidenziati 4 punti: A, B, C, D.

1. il primo, 27.88, sta ad indicare il prezzo corrente del titolo in questo momento[76];
2. il punto B, 27.66, è il prezzo di esecuzione del mio ordine d'acquisto ossia il prezzo d'entrata,
3. il punto C è il prezzo al quale potrebbe scendere il prezzo del titolo entro domani, cioè il VaR calcolato con il metodo storico,
4. il punto D è il prezzo che potrebbe raggiungere il titolo entro domani calcolato con il metodo Montecarlo.

La freccia con le doppie punte sottolinea la differenza tra i due valori stimati a seconda del metodo considerato per trovare il valore del VaR del mio asset ad un giorno.

[76] Prezzo corrente il giorno 31 Maggio ore 19,20

VaR di una posizione long put :

Calcolo del Var del sottostante			
Percentile	0.95		
Metodi			
	Parametrico	**Storico**	**Montecarlo**
Media Campione	0.000199144	0.000199144	0.000234588
Dev. St. Campione	0.025363248	0.025363248	0.03599824
Simmetria		-6.55877489	-2.423648826
Curtosi		174.1582297	45.14345326
Numerosità		2619	2000000
Minimo		-0.656486486	-0.741451179
Massimo		0.152956298	0.246107305
VaR	-0.041519682	-0.032326072	-0.053242869
Calcolo VaR Opzione con i metodi			
Delta Normal Approach	-0.016553897	-0.01402	-0.0218
Delta Gamma Approach	-0.016499164	-0.01362	-0.02085
Delta	-0.3987		
Gamma	0.0635		

La put è uno strumento derivato che acquista valore al diminuire del prezzo del sottostante[77] e perde valore all'aumentare del prezzo dell'azione. Il rischio per l' asset e il rischio per la put guardano quindi due situazioni opposte: per l'asset il rischio è quello che il suo prezzo scenda di valore, mentre per la put è quello che l'asset aumenti il suo valore. Nell'analizzare questa posizione è stato interessante scoprire come, a differenza dei tre metodi di stima usati per il calcolo del VaR dell'asset, i metodi di calcolo del VaR dell'opzione sono diversi: infatti, considerando solo la posizione long-put ciò che ci interesserà non saranno più i rendimenti negativi ma quelli positivi, per quanto riguarda il metodo montecarlo e storico, resta lo

[77] Si veda capitolo 2 per altre caratteristiche sulla put.

stesso per il caso parametrico visto la simmetria della distribuzione normale. Se li analizziamo uno per uno scopriamo alcune differenze interessanti:

- Se utilizziamo il metodo Parametrico si sta supponendo che la distribuzione dei rendimenti del titolo prescelto è quella di una normale, quindi la coda di destra e la coda di sinistra sono simmetriche ed eventi estremi positivi e negativi hanno esattamente la stessa probabilità di avvenire ovvero

  [P(X \ K) = 0.95] = [P(X \ K)=0.05]

  In questo caso quindi consideriamo la coda sinistra e il VaR dell'opzione sarà[78]:

  $$VaR_{option} = \delta VaR_{sottostante}$$

  se si usa il metodo Delta-Normal altrimenti sarà[79]:

  $$VaR_{option} = \delta VaR_{Sottostante} + \frac{\gamma}{2} VaR^{2}{}_{Sottostante}$$

  se si usa il metodo Delta-Gamma
- Se invece usiamo il metodo storico o montecarlo, il VaR del sottostante presenterà valori positivi se ci troviamo in una posizione long put, poiché, le code della distribuzione dei rendimenti non sono simmetriche[80] e visto che la put perde valore all'aumentare del prezzo del sottostante, ciò che interesserà ora il nostro studio non saranno più eventi negativi ma eventi positivi.

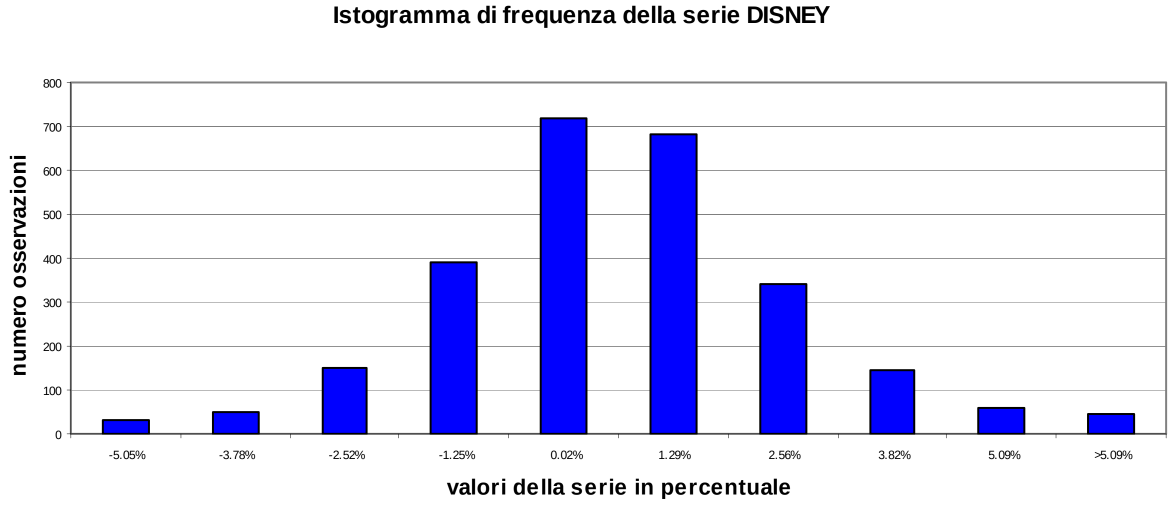
  Il VaR dell'opzione non sarà più

  $$VaR_{option} = \delta VaR_{sottostante}$$

Dove per VaR del sottostante consideravo il quinto percentile a partire dalla serie ordinata in modo crescente ma considereremo ora il quinto percentile della serie ordinata in modo decrescente, quindi la coda destra della mia distribuzione.

---

78 Dowd (2002), ibidem pg 105-107
79 Dowd (2002), ibidem pg 107
80 E quindi [P(X\K) = 0.95%]≠ [P (X\K)=0.05]



Come si può notare dal grafico, la serie Disney, presenta una distribuzione abbastanza simile a quella di una normale anche se le code sono asimmetriche: la coda di sinistra, quella dei valori negativi non presenta valori al di sotto del -5% mentre la coda destra presenta dei valori anche superiori a 5% ciò significa che la coda di sinistra, come già detto è più fine di quella di destra e la distribuzione della serie considerata è asimmetrica.

	Storico	Montecarlo
VaR al 5%	0.03515625	0.054670744

Per poter calcolare il valore del VaR di un'opzione, visti i metodi che abbiamo deciso di usare, "Delta-Gamma","Delta-Normal", necessito di conoscere il valore del delta e del gamma dell'opzione. La formula analitica mediante albero binomiale per calcolare il Delta di un'opzione americana è [81]:

$$\Delta = \frac{\Delta f}{\Delta s}$$

Dove:

ΔS è la variazione del prezzo dell'azione

Δf è la corrispondente variazione di prezzo dell'opzione.

[81] Hull (2002), ibidem pg. 393

Ho utilizzato per trovare questo valore un software applicativo disponibile presso il sito del Chicago Board Option Exchange[82] che permetteva, con l'inserimento del codice del titolo interessato, dello strike price dell'opzione, del prezzo dell'azione, della data di scadenza dell'opzione e delle specificazioni dei dividendi dell'azione, di trovare facilmente i valori di tutte le greche.

Per il metodo Delta-Normal, per trovare il valore del VaR ho applicato la seguente formula[83]:

$$VaR_{option} = \delta VaR_{sottostante}$$

Anche in questo caso,visto che il valore dell'opzione dipende strettamente dal valore del VaR del sottostante, il valore che risulta nettamente inferiore agli altri è quello dato dalla simulazione storica, -1.402% , seguito dal valore che deriva dall'uso del VaR determinato con il metodo parametrico, -1.6554%, e infine quello Montecarlo -2.18% . La differenza tra i tre riflette circa le differenze già citate nel paragrafo precedente, ossia dal VaR dell'opzione con metodo storico, il VaR Parametrico è sovrastimato del 18.07% e il VaR ottenuto dalla simulazione Montecarlo del 55.49%.

Per quanto riguarda il secondo metodo, questo utilizza nel suo calcolo anche la lettera greca Gamma che è la derivata del delta rispetto al prezzo dell'attività sottostante ovvero:

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$$

La formula analitica applicata per il calcolo del VaR dell'opzione con questo metodo è:

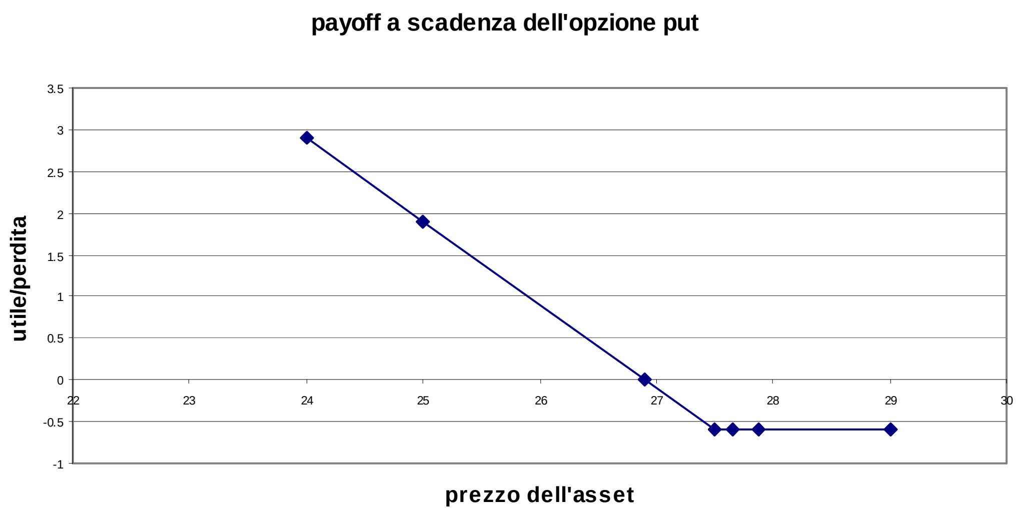
$$VaR_{option} = \delta VaR_{Sottostante} + \frac{\gamma}{2} VaR^2{}_{Sottostante}$$

Anche con questo metodo si notano delle differenze tra i VaR dell'opzione calcolati considerando i 3 diversi VaR dell'asset. Solo che in questo caso, per quanto riguarda il metodo di stima Montecarlo e storico ciò che mi interessa non sono più i rendimenti negativi della serie Disney bensì quelli positivi perché è con l'aumentare del prezzo del sottostante che la put perde valore mentre è con il diminuire del prezzo del sottostante al di sotto dello strike price della put che questa aumenta di valore. Le differenze tra i tre sono pressappoco simili a quelle individuate col metodo Delta-Normal, ossia il VaR dell'opzione considerando il VaR del sottostante calcolato con il metodo storico è il più

[82] www.cboe.com ; www.ivolatility.com
[83] Dowd,(2002), ibidem pg. 105-106

piccolo, -1.362% seguito da quello calcolato con il metodo parametrico, -1.6499%, sempre maggiore dei tre risulta il valore del VaR Montecarlo che risulta -2.085%.

Si notano leggere differenze anche tra i due metodi di stima considerati, in tutti i casi i VaR dell'opzione calcolati col delta-normal sono superiori al VaR calcolati col metodo Delta-Gamma. La differenza che risulta tra il VaR parametrico del metodo delta-normal è superiore a quello calcolato con l'altro metodo del 0.33%, quella tra i VaR storici del 2.88% e quello del metodo montecarlo del 4.55%.



Sono stati evidenziati due punti nel grafico, il punto A, che indica il prezzo battuto ora dall'azione e il punto B che indica il prezzo al quale io l' ho comprata. La put con strike price 27.50, è costata 0.60 $ e i valori che si trovano in ordinata sono il risultato della differenza tra il prezzo corrente dell'azione, lo strike price dell'opzione e il premio pagato per il derivato in questione, come già citato la put acquista valore quando il prezzo dell'azione scende sotto lo strike price. Il punto di break-even per questa posizione è Se in questo momento fossimo a scadenza l'investitore avrebbe perso il premio speso per comperare la put, comunque prima della scadenza la put può avere un valore residuo anche se è out-of-the money.

VaR di una call :

Calcolo del Var del sottostante			
Percentile	0.95		
Metodi			
	Parametrico	**Storico**	**Montecarlo**
Media Campione	0.000199144	0.000199144	0.000234588
Dev. St. Campione	0.025363248	0.025363248	0.03599824
Simmetria		-6.55877489	-2.423648826
Curtosi		174.1582297	45.14345326
Numerosità		2619	2000000
Minimo		-0.656486486	-0.741451179
Massimo		0.152956298	0.246107305
VaR	-0.041519682	-0.032326072	-0.053242869
Calcolo VaR di una posizione long Call con i metodi			
Delta Normal Approach	-0.01980904	-0.01542276	-0.025407972
Delta Gamma Approach	-0.0197531	-0.015388859	-0.025315941
Delta	0.4771	Gamma	0.0649
Gamma	0.0649		
Calcolo VaR di una posizione short Call con i metodi			
Delta Normal Approach	-0.01980904	-0.016773047	-0.026083412
Delta Gamma Approach	-0.0197531	-0.016692833	-0.025889433

I metodi usati per la stima del VaR di una call sono quelli sopraccitati Delta-Normal e Delta-Gamma, per quanto riguarda il primo metodo abbiamo:

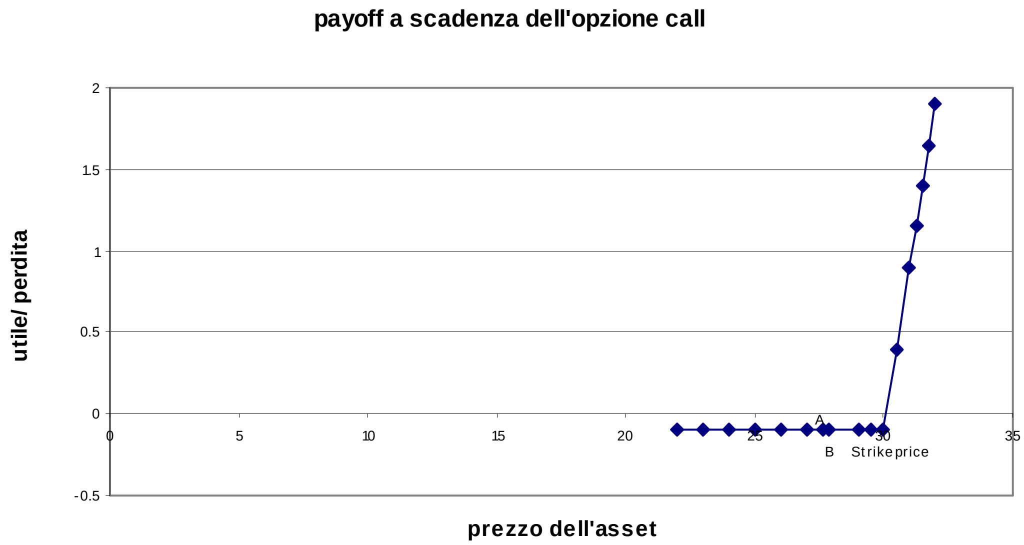
$$VaR_{option} = \delta VaR_{sottostante}$$

dove il delta dell'opzione call è positivo. Anche in questo caso si riscontrano delle anomalie già riscontrate nel caso precedente, ovvero essendo il VaR dell'opzione strettamente dipendente dal VaR dell'azione, il VaR più piccolo è sempre quello calcolato con il metodo storico -1.98%, seguito da quello parametrico -1.54% ed infine da quello montecarlo -2.54% . Le differenze tra i tre risultano, a partire dal più piccolo, come nel caso della put, del 22.11% e del 39.90%.

Per quanto riguarda il secondo metodo invece la costante gamma è positiva e la formula per il calcolo del VaR con il metodo Delta- Gamma è

$$VaR_{option} = \delta VaR_{Sottostante} + \frac{\gamma}{2} VaR^2{}_{Sottostante}$$

Si notano, nei risultati di tale calcolo, le stesse differenze riscontrate col metodo delta-normal e le differenze tra i tre diversi valori del Value at Risk sono, del -22.09% tra il VaR calcolato col metodo storico e il metodo parametrico e del -39.21% tra il VaR storico e quello Montecarlo. Le disuguaglianze tra i due metodi confermano quanto osservato precedentemente ovvero che il metodo delta-gamma offre risultati più piccoli rispetto a quello delta-normal.



Il grafico rappresenta una posizione long di una call, come si può notare, per valori inferiori allo strike price l'investitore subirà una perdita pari al prezzo dell'opzione cioè, nel nostro caso di 0.10$, se invece il prezzo dell'azione sale oltre i 30$ che è il nostro strike price l'investitore inizierà a guadagnare la somma data dalla differenza tra prezzo dell'azione,strike price e premio dell'opzione. Il punto A rappresenta il prezzo al quale sono entrata short del mio asset, il punto B rappresenta il prezzo del sottostante in questo momento. In una situazione come questa l'investitore non eserciterebbe la sua opzione e perderebbe, al massimo, il premio pagato.

Questo grafico rappresenta una posizione short su una Call ossia il caso in cui un investitore va a scrivere una call: come nel caso della put, anche per questa posizione, ciò che mi interessa non sono tanto i rendimenti negativi quanti quelli positivi poiché la call, in questo caso perde valore all'aumentare del prezzo del sottostante al di sopra dello strike-price. Quindi per quanto riguarda i metodi di stima Montecarlo e storico per il calcolo del VaR non ho usato gli stessi valori del vaR dell'asset per una posizione long asset ma ho utilizzato il quinto percentile dei rendimenti ordinati positivamente. Ovvero:

	Storico	Montecarlo
VaR al 5%	0.03515625	0.054670744

L'investitore guadagnerà finché il prezzo del sottostante sarà inferiore allo strike price della call,nel nostro caso 30$, inseguito se questo aumenterà il venditore della call inizierà a perdere una somma pari alla differenza tra lo strike price, il prezzo corrente dell'azione con l' aggiunta però della somma del premio dell'opzione. Nella situazione in cui ci troviamo in questo momento l'investitore guadagnerà invece una somma pari a 0.10$ poiché la call non verrebbe esercitata.

Si possono notare leggere differenze tra i VaR delle 2 posizioni short-call e long-put dovute fondamentalmente ai diversi valori a cui bisogna fare riferimento a seconda che si sia short o long dell'opzione call.

Long asset e long put:

Calcolo del Var			
Percentile	0.95		
Metodi			
	Parametrico	Storico	Montecarlo
Media Campione	0.000199144	0.000199144	0.000234588
Dev. St. Campione	0.025363248	0.025363248	0.03599824
Simmetria		-6.55877489	-2.423648826
Curtosi		174.1582297	45.14345326
Numerosità		2619	2000000
Minimo		-0.656486486	-0.741451179
Massimo		0.152956298	0.246107305
VaR	-0.041519682	-0.032326072	-0.053255025
Calcolo del VaR della strategia			
Delta- normal	-0.024965785	-0.019437667	-0.0320223
Delta- gamma	-0.024911051	-0.019404489	-0.0319322
Delta	-0.3987		
Gamma	0.0635		
Calcolo del VaR pesato considerando il VaR della strategia			
	Parametrico	Storico	Montecarlo
Probabilità(x<0.0136)	0.292795	0.213822069	0.330276
Delta- normal	-0.021696497	-0.018232209	-0.025988977
Delta- gamma	-0.021657755	-0.018206126	-0.025942521
Calcolo del VaR pesato considerando il VaR della strategia			
	-0.03340349	-0.028364789	-0.040215836

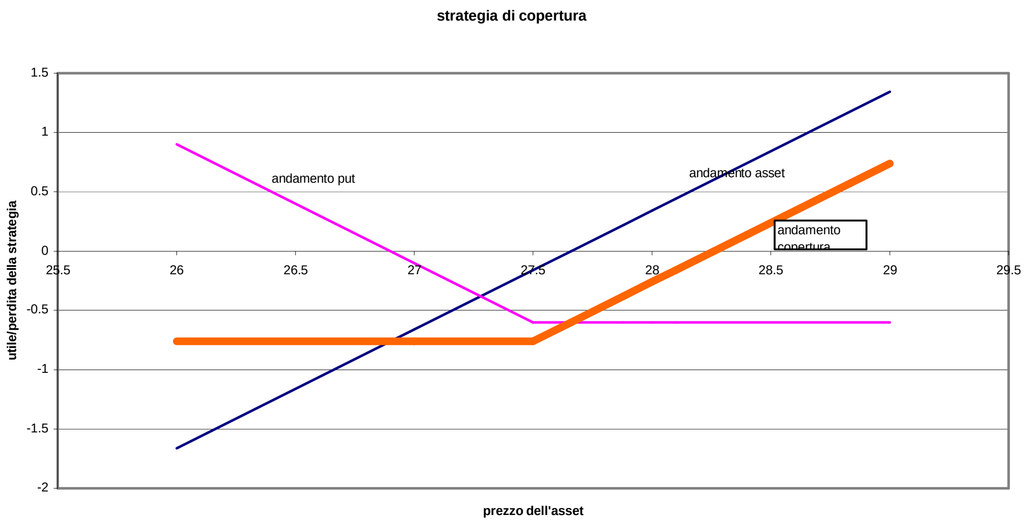
In questa situazione quanto detto a riguardo del Value at Risk per la posizione long put non è più valevole ovvero per il calcolo del VaR della copertura continuerò a guardare i rendimenti negativi della serie del titolo considerato e non, per quanto riguarda il VaR dell'opzione i rendimenti positivi, perché ciò che interessa a me è quanto l'opzione riesce a diminuire il VaR dell'asset.

Il metodo usato per la stima del VaR della posizione long put, long asset è determinato innanzitutto dai tre diversi VaR calcolati per l'asset, ossia con il metodo parametrico, con il metodo storico e con il metodo montecarlo; in seguito è determinato anche dai due metodi usati per stimare il VaR dell'opzione presa in considerazione. La formula che abbiamo applicato per questa composizione è :

$$VaR_{composizione} = VaR_{sottostante} - \delta VaR_{Sottostante}$$

Che risulta, da come si può apprendere dalla tabella, usando il metodo Delta- Normal, pari al -2.496% per il metodo Parametrico, -1.943% per il metodo Storico e -3.2% per quello Montecarlo. Come nei casi precedenti il metodo storico risulta più piccolo del 22.14% rispetto a quello parametrico e del 39.29% di quello montecarlo. Se il metodo che ora considero per analizzare i diversi VaR della composizione è quello Delta- Gamma posso riscontrare risultati pressoché analoghi che differiscono tra loro di una minima percentuale: infatti il VaR più piccolo risulta quello dato dalla simulazione storica,seguito da quello parametrico e da quello montecarlo. Le dissonanze che si presentano a seconda che il metodo usato per la stima del VaR delle opzioni sia delta-normal o delta-gamma è del +0.22% confrontando il VaR della composizione parametrica col metodo D-N rispetto al metodo D-G, del 0.19% per i VaR storici e del 0.2812% per i Var ottenuti con la simulazione montecarlo.

Grafico della copertura:



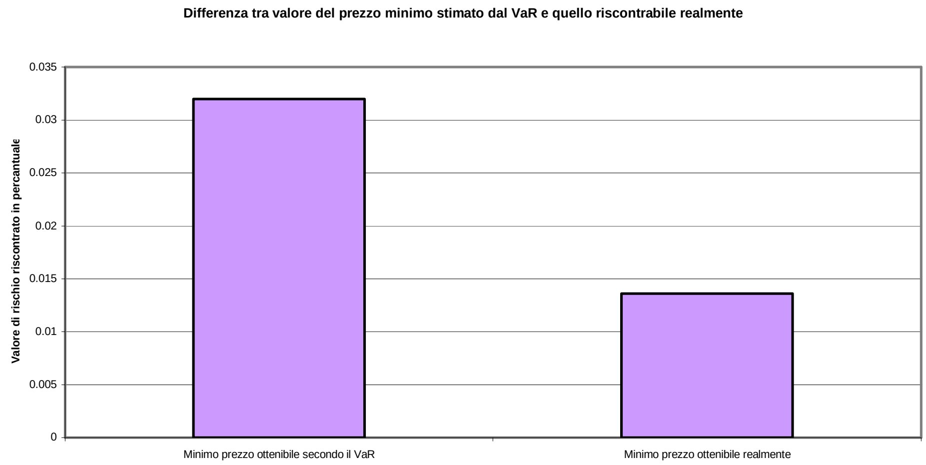
Il grafico rappresenta perfettamente la situazione a cui l'investitore può andare incontro al variare del prezzo del sottostante alla scadenza dell'opzione. Secondo i calcoli fatti, il VaR ad un giorno della strategia di copertura, calcolato col metodo montecarlo risulta del 3.2 % in realtà, se il prezzo dovesse scendere al di sotto di 27.50$ la massima perdita a cui l'investitore può andare incontro è di 0.38 $ pari a 1.36%, questo valore è il risultato dell'applicazione della seguente formula:

$$\frac{P_t - P_{t+1}}{P_t}$$

dove:

P_t è il prezzo corrente dell'azione

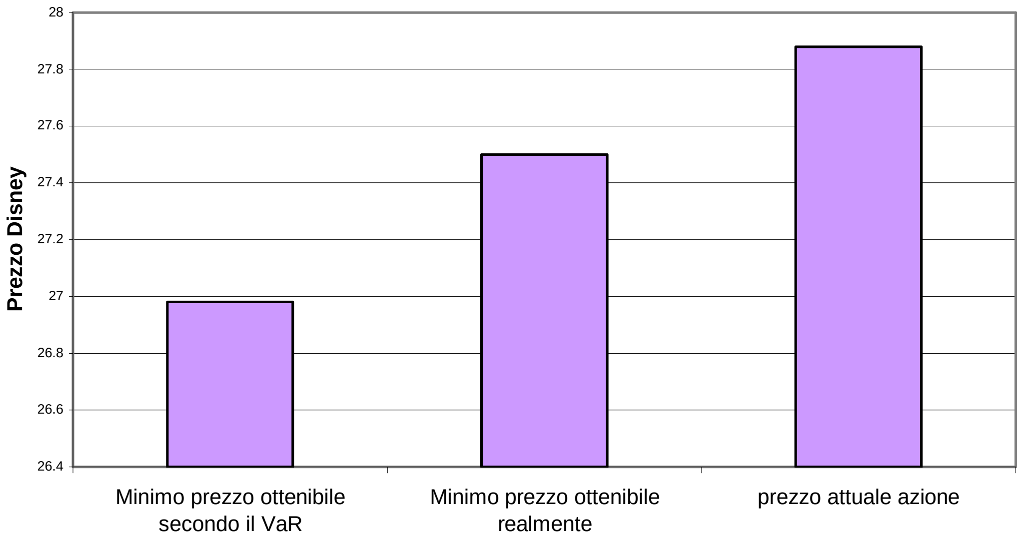
P_{t+1} è lo strike price dell'opzione



La differenza del 184 % tra il valore stimato dal VaR e il valore che realmente può perdere l'investitore si può notare molto bene nel grafico, quindi il VaR mi offre un valore molto più grande della perdita che si potrebbe subire realmente. Infatti se consideriamo la situazione attuale, ovvero che il prezzo corrente dell'azione è 27.88$, il VaR ad un giorno prospetta la possibilità che il prezzo del titolo Disney scenda sino a

26.98 \$[84] ben al di sotto della situazione peggiore al quale posso andare incontro che è data dallo strike price dell'opzione, 27.50\$.

Differenze tra valore attuale del titolo, prezzo minimo stimato secondo il VaR e quello realmente riscontrabile:



Questo grafico illustra le differenze riscontrate tra il valore attuale dell'asset, il prezzo minimo al quale l'investitore può andare incontro realmente e a quello stimato dal VaR, .
Per risolvere il problema delle differenze riscontrate tra il VaR calcolato e il VaR reale abbiamo pensato in prima battuta di modificare l'applicazione del VaR in questa situazione pesandolo per la probabilità che il prezzo del sottostante scenda al di sotto dello strike price della put e per la probabilità che il prezzo del sottostante sia maggiore dello strike price dell'opzione. Ovvero:

$$VaR_{composizione} = P(x \le r^*) * C + [1 - P(x \le r^*)] * (1 - \delta) VaR_{sottos\tan te}$$

dove:

- x è il rendimento giornaliero corrente dell'azione
- C è una costante data da $\dfrac{27.50 - 27.88}{27.50}$

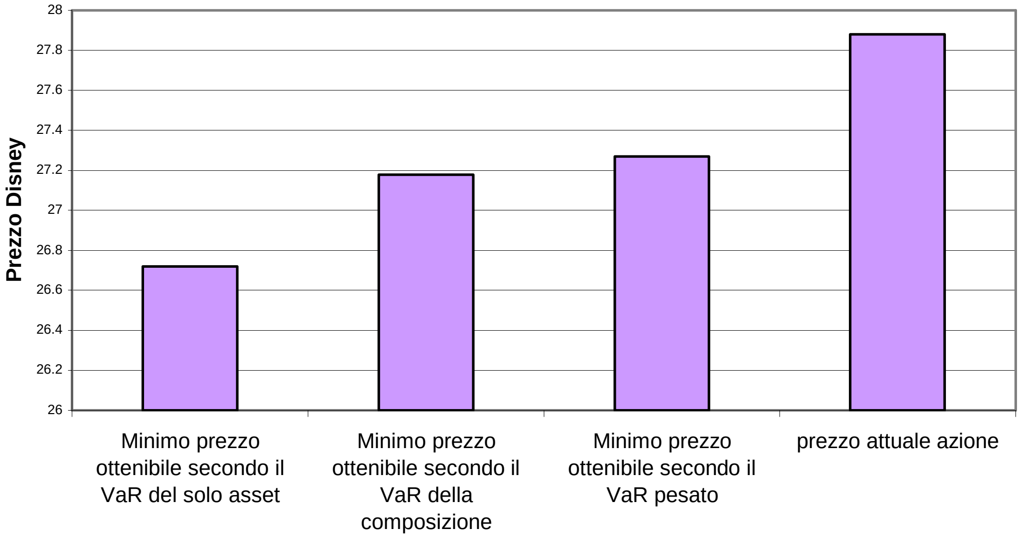
[84] Dato dal risultato del calcolo 27.88*(1-0.032), ovvero, in generale $P_{\text{attuale del sottostante}}$* (1- VaR)

- Dove r^* è 0.0136 valore dato da $\frac{27.88-27.50}{27.88}$
- La probabilità per il metodo di stima del modello parametrico è stata calcolata come:
  1. se $x \sim N(\mu,\sigma^2)$ allora $\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$
  2. allora P(A)= P(x $\leq$ 0.0136)=P($N(0,1) < \frac{0.0136-x}{\sigma}$)
- La probabilità per il metodo storico e montecarlo è stata calcolata come:
  1. $\frac{(R_x \leq 0.0136)}{N}$

  dove:
    - R_x sono i rendimenti della serie
    - N è il numero totale di osservazioni della mia serie

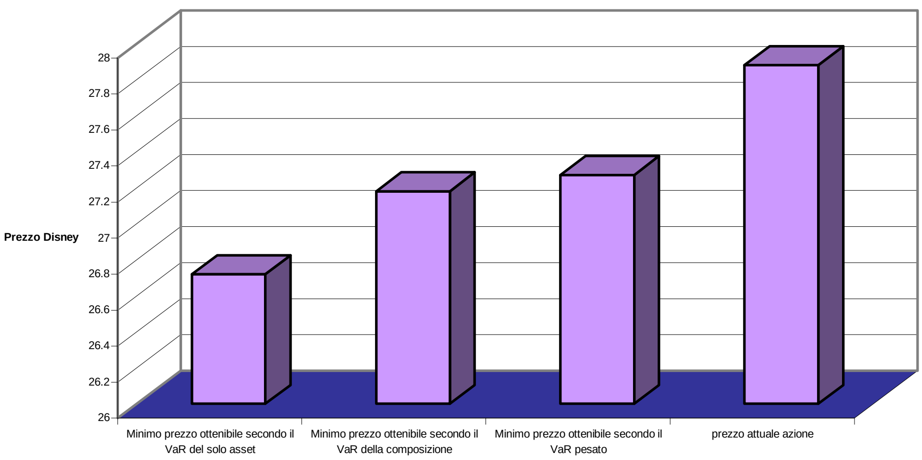
Quindi, fatte queste premesse, il valore finale del VaR diventa in tutti e tre i metodi di stima del VaR e anche per l'approccio Delta-Normal e Delta-Gamma decisamente più piccolo del VaR del solo asset e leggermente più piccolo del VaR della strategia non pesata per la probabilità. Infatti, per quanto riguarda l'approccio Delta-Normal abbiamo valori pari a – 2.17% per il metodo parametrico, - 1,823% per il metodo storico e -2.6% per il metodo Montecarlo. Valori leggermente inferiori per l'approccio Delta-Gamma:
-2.16% , -1.820% ed infine – 2.59%. Il valore del VaR è diminuito rispetto ai casi precedenti perché moltiplicando il VaR per la sua probabilità il valore diminuisce complessivamente poiché questa non è uguale ad uno in nessun caso. A questo punto il prezzo dell'asset diventerà, considerando il metodo parametrico e delta-normal, 27.27$ visto che il prezzo attuale è di 27.88$.

Differenze tra i valori che il prezzo del titolo può assumere:



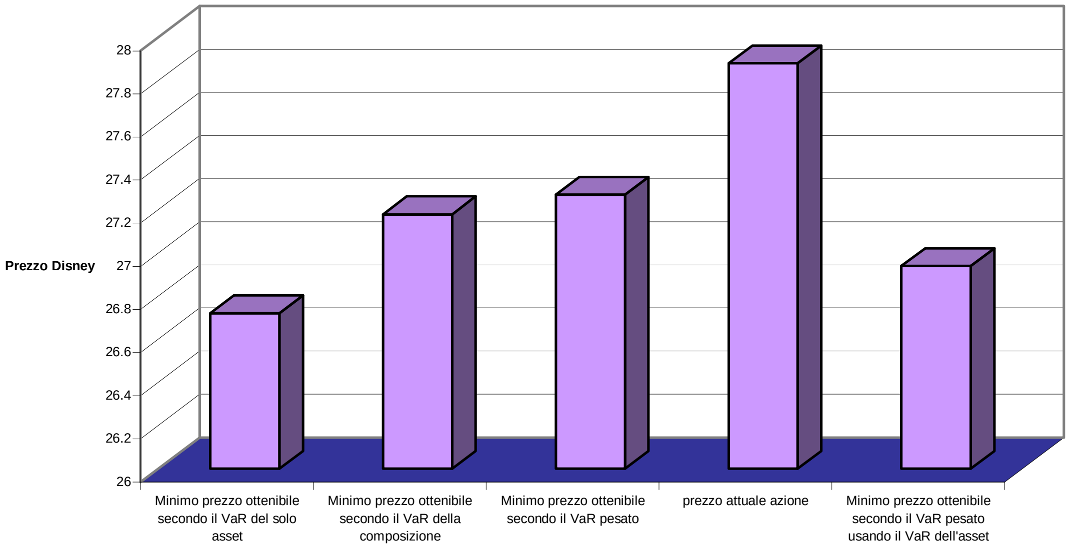
Da questo grafico è facile comprendere come i diversi VaR calcolati diano risultati diversi. Nettamente il VaR del solo asset prevede che al massimo il prezzo che avrà domani la mia azione sarà molto più basso di quello della strategia long-asset, long-put. Ciò significa che il rischio si è ridotto con l’acquisto della Put dando così un nuovo valore al VaR (VaR composizione) se poi questo valore viene pesato per le diverse probabilità il valore del prezzo dell’azione diminuirà ancora, ciò significa che la probabilità che il rendimento dell’azione scenda al di sotto di 1.36% è diverso da zero.

Differenze tra i valori che il prezzo del titolo può assumere:



In un secondo istante abbiamo considerato solo il VaR dell’asset e non solo il VaR dell’intera strategia i valori che troviamo risultano compresi tra il VaR del solo asset e il VaR della strategia pesata per la probabilità che il prezzo sia maggiore o minore dello strike-price della put. Infatti la probabilità che il prezzo dell’asset sia inferiore a 27.50$ è del 29.27% quindi il valore complessivo verrà diminuito in modo proporzionale di questa quantità.

Guardando il grafico considerando il VaR del solo asset, il VaR della strategia pesata per la probabilità, il VaR dell’asset pesato e il VaR della sola strategia queste differenze sono riscontrabili.

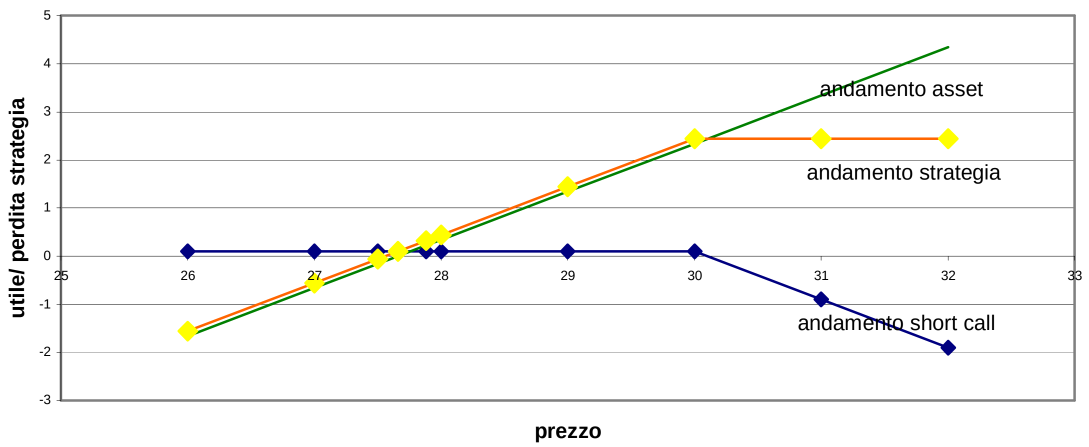


Long asset, short call:

Calcolo del Var			
Percentile	0.95		
Metodi			
	Parametrico	Storico	Montecarlo
Media Campione	0.000199144	0.000199144	0.000234588
Dev. St. Campione	0.025363248	0.025363248	0.03599824
Simmetria		-6.55877489	-2.423648826
Curtosi		174.1582297	45.14345326
Numerosità		2619	2000000
Minimo		-0.656486486	-0.741451179
Massimo		0.152956298	0.246107305
VaR	-0.041519682	-0.032326072	-0.053255025
Calcolo del VaR della strategia			
Delta- normal	-0.021710641	-0.015553024	-0.027159457
Delta- gamma	-0.021766582	-0.015633239	-0.027353437
Delta	0.4771	Gamma	0.0649
Calcolo del VaR pesato considerando il VaR della strategia			
	Parametrico	Storico	Montecarlo
Probabilità(x<0.0136)	0.001394	0.004200076	0.013796
Delta- normal	-0.02167973	-0.015487676	-0.026784765
Delta- gamma	-0.02173624	-0.015407824	-0.026593463
Calcolo del VaR pesato considerando il VaR dell'asset			
	-0.0414618	-0.0321903	-0.052508331

Se dovessimo trovarci in una situazione long asset, short call verremmo a trovarci in una situazione simile alla precedente, ciò che ci interessa è la differenza tra il VaR del sottostante e il var dell'opzione. In questo contesto l'investitore guadagna il premio della call fino a che il prezzo del sottostante non supera lo strike price, al raggiungimento di tale prezzo la situazione dell'investitore si stabilizza ad un valore pari alla differenza tra strike-price e prezzo del sottostante. Come nel caso precedente ciò che ci interessa, per quanto riguarda la stima del VaR dell'opzione con i metodi montecarlo e storico, sono i rendimenti negativi della serie. Si notano delle differenze tra i risultati ottenuti: il VaR della composizione usando il metodo storico è, come sempre nei nostri casi, il più piccolo -1.555 %, seguito da quello parametrico -2.171 % ed infine quello montecarlo, questo per quanto riguarda il delta normal approach, i risultati sono simili anche con l'altro metodo, il delta gamma approach solo che i valori, seppur di poco si discostano da quelli precedenti. Abbiamo il VaR storico a -1.563 % , il parametrico a -2.176 % e quello montecarlo – 2.735%.

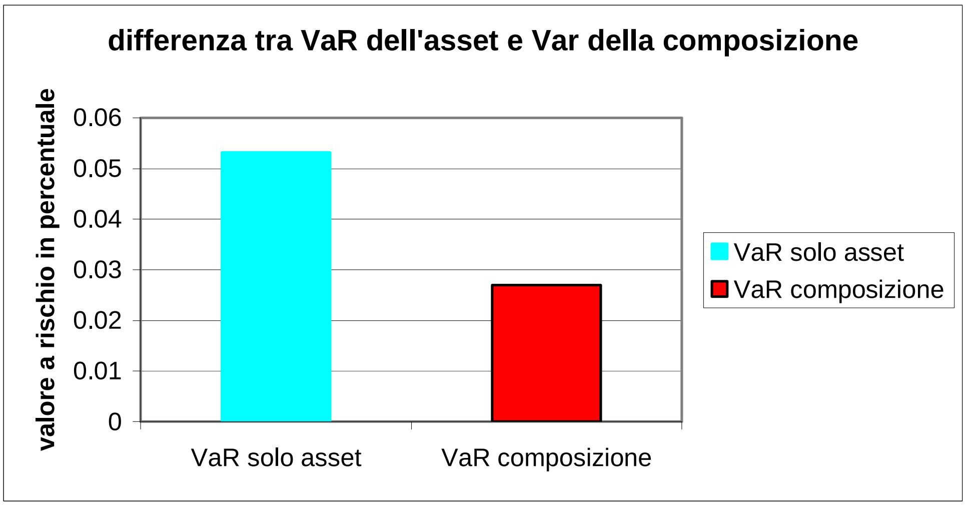
grafico posizione short call long asset



Premettendo che la linea verde rappresenta una situazione long asset, la linea blu una short call e la linea arancione la risultante della posizione, come si può notare, la situazione complessiva, rappresentata dalla linea arancione mostra come i profitti dell'investitore seguano in modo parallelo l'andamento dell'asset fino a che il suo prezzo non raggiunge lo strike-price della Call, in seguito l'utile si stabilizza al valore 2.44$ dato dalla differenza tra l'utile del sottostante e la perdita dell'opzione. In questo contesto, il Value at Risk della strategia è molto inferiore al VaR del solo asset poichè la formula per ottenere tale operazione è data dalla differenza tra il VaR dell'asset e il VaR dell'opzione:

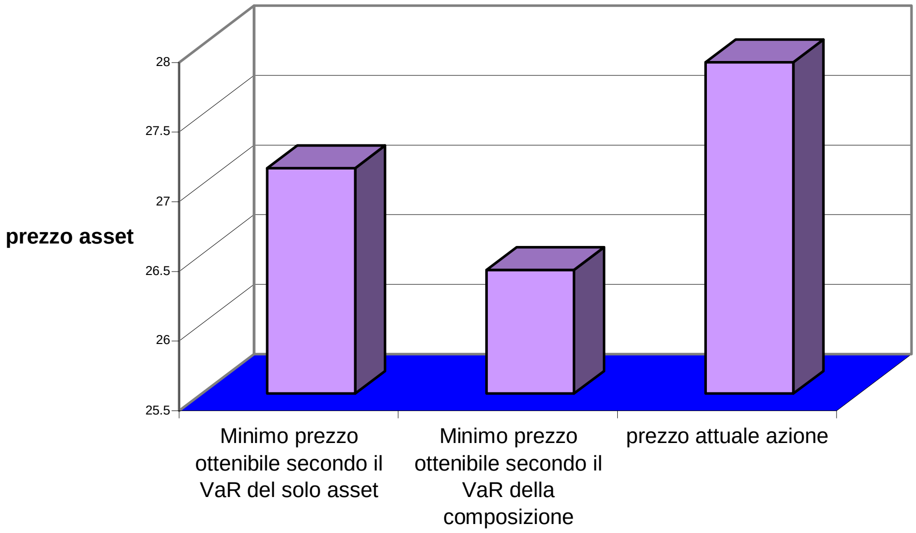
$$VaR_{composizione} = VaR_{sottostante} - \delta VaR_{Sottostante}$$

Se quindi confrontiamo i VaR col metodo montecarlo tra il VaR del solo Asset e il VaR della strategia si può notare che i valori, -0.05321 e -0.027, sono estremamente diversi, sembra che in una tale situazione il mio rischio sia quasi dimezzato mentre in realtà se il prezzo dell'azione scende, scende anche il profitto dell'investitore di una quantità inferiore di 0.1$ rispetto al valore che l'asset assume. Questa minima differenza è data dallo strike-price che l'operatore incassa dalla vendita della call.



Visto che il prezzo attuale dell'azione è di $27.88, il VaR del solo asset mi permette di affermare che nel 95% dei casi, se la situazione peggiora il prezzo dell'azione può scendere al più a $26.39 mentre il VaR dell'intera strategia mi fa affermare che il prezzo che può assumere domani il sottostante sarà nel 95% dei casi pari a $27.12.La differenza tra i due prezzi è notevole, in questo caso il VaR della strategia sottostima il vero rischio al quale si va incontro.

Differenza tra il valore che il prezzo dell'asset potrebbe assumere a seconda dei VaR, stimati col metodo montecarlo, che si considerano:



Come si può notare dal grafico le differenze tra i prezzi che l'azione può assumere a seconda dei 2 tipi di VaR considerato, è molto evidente. Si calcola ora il VaR pesato per la probabilità, seguendo lo stesso procedimento eseguito nel caso precedente, con rendimento di riferimento pari, in questo caso, a 0.076[85], nel caso in cui però il prezzo dell'asset superi 30$ la probabilità verrà moltiplicata per zero perché in quel caso la posizione dell'investitore è flat[86] . I risultati ottenuti sono inferiori a quelli precedenti, sia intesi confrontandoli con il solo VaR dell'asset, sia con quelli dell'intera strategia, come nel caso precedente. Ciò sta a significare che la probabilità che il rendimento del mio asset superi il valore di riferimento, ovvero 0.076, sia diversa da zero. Se inoltre si calcola il VaR pesato della strategia long asset, short call considerando solo il VaR dell'asset e non quello dell'intera composizione le differenze che si riscontrano sono molto visibili perché il valore del VaR utilizzato per il calcolo è maggiore di quello dell'intera composizione. Le differenze riscontrabili tra il VaR del solo asset e quello pesato per le probabilità invece sono minime perché la probabilità che il prezzo dell'asset superi 30$ è piccola. Rappresentando la situazione tramite un grafico questa risulta molto più chiara, come sono evidenti le differenze riscontrate tra i diversi tipi di VaR. Si riscontrano anche leggere differenze tra i 2 tipi di approccio, quello delta normal e

---

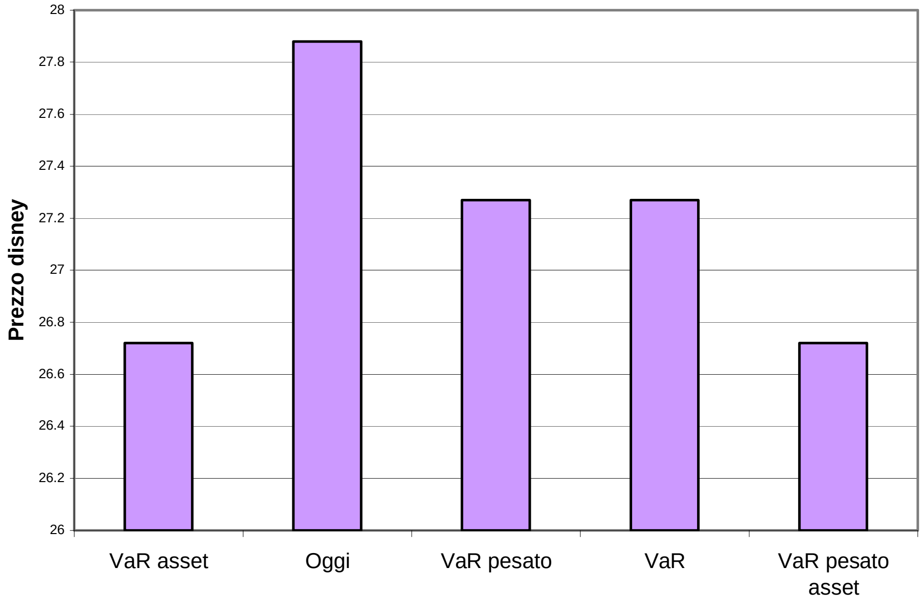
[85] 0.076=(30/27.88)-1 che è il rendimento che l'azione avrebbe passando oggi da un valore di 27.88$ a 30$

[86] Per flat si intende una posizione neutrale, quando l'investitore ha fatto i profitti.

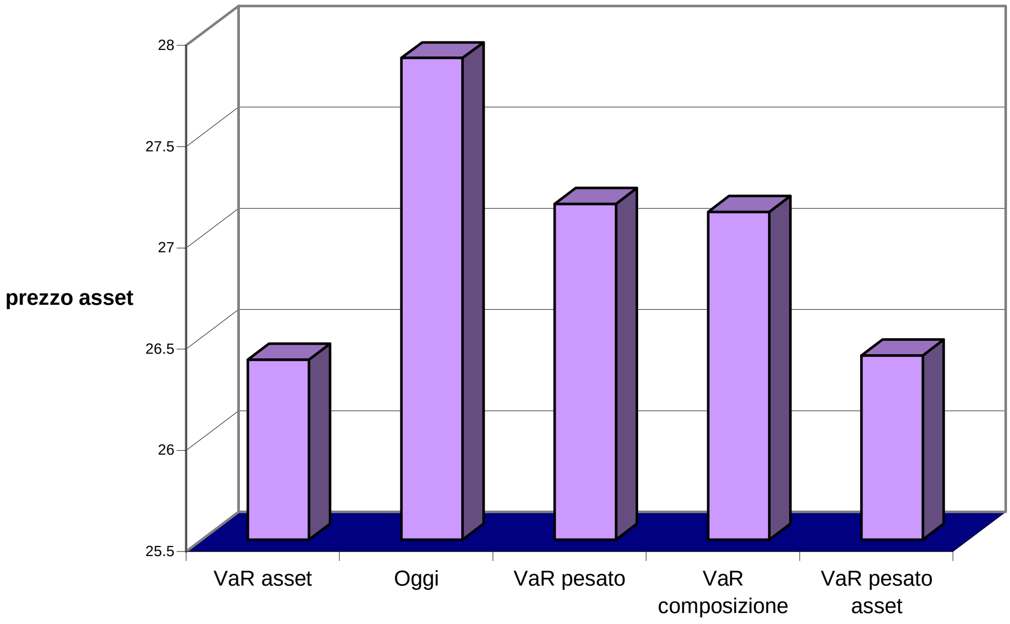
delta gamma, persistono le differenze presenti tra in tre tipi di VaR, parametrico, storico, montecarlo.

Considero per il grafico il valore parametrico del VaR e l'applicazione dell'approccio Delta-normal.

Differenza che il prezzo dell'azione può assumere a seconda del VaR che considero:



La differenza tra il VaR pesato e il VaR della strategia non pesato è praticamente inesistente, ciò significa che la probabilità che il rendimento del titolo sia superiore al 7.6% dalla data di riferimento è piccola significa che, secondo i calcoli eseguiti, è difficile che il prezzo dell'asset superi i 30$, c'è una probabilità prossima allo zero che questo evento si verifichi. La situazione è analoga per quanto riguarda il VaR del solo asset e il VaR dell'asset pesato, questo considerando i valori derivati dall'uso del metodo parametrico per la stima del VaR dell'asset e l'approccio delta-normal per stimare il VaR dell'opzione. Se consideriamo invece il metodo montecarlo, sempre con l'approccio delta-normal allora il grafico diventerà:



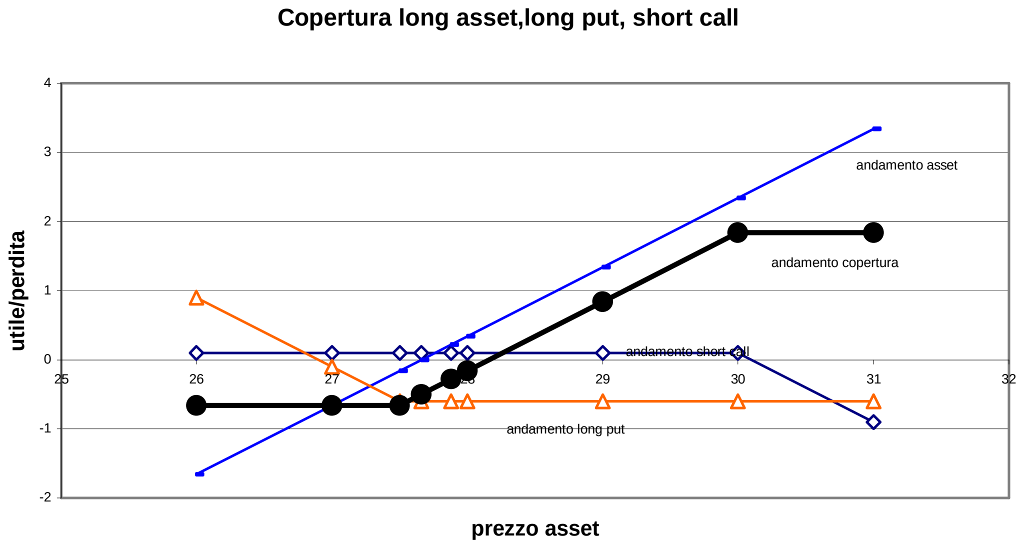
La differenza tra il VaR della composizione e il VaR pesato seppur minima, in questo caso è riscontrabile e lo stesso vale per il VaR del solo asset e il VaR dell'asset pesato per la probabilità.

Long Asset, Long Put, Short Call

Calcolo del Var			
Percentile	0.95		
Metodi			
	Parametrico	**Storico**	**Montecarlo**
Media Campione	0.000199144	0.000199144	0.000234588
Dev. St. Campione	0.025363248	0.025363248	0.03599824
Simmetria		-6.55877489	-2.423648826
Curtosi		174.1582297	45.14345326
Numerosità		2619	2000000
Minimo		-0.656486486	-0.741451179
Massimo		0.152956298	0.246107305
VaR	-0.041519682	-0.032326072	-0.053255025
Calcolo del VaR della strategia			
Delta- normal	-0.001536227930	-0.005362232013	-0.005156744707
Delta- gamma	-0.00200886	-0.006505184	-0.005266942
Delta della call	0.4771	**Gamma della call**	0.0649
Delta della put	-0.3987	**Gamma della put**	0.0635
Calcolo pesato del VaR della strategia			
Probabilità che P_{azione}< 27.50$	0.292795	0.213822069	0.330276
Probabilità che P_{azione}>30$	0.001394	0.004200076	0.013796
Delta-Normal	-0.00507504	-0.007107483	-0.007884034
Delta-Gamma	-0.00540863	-0.008001127	-0.007956344
Calcolo ponderato del VaR della strategia considerando il VaR dell'asset			
	-0.03329579	-0.028192633	-0.039425099

Consideriamo ora una situazione long asset, short call e long put dove la vendita della Call aumenta la redditività della strategia e in un certo qual modo aiuta nel contenimento

del draw-down, l'acquisto della put per evitare che si abbiano grosse perdite se il prezzo dell'azione scende al di sotto dello strike-price del derivato acquistato.
Con questa strategia si ottenere un VaR che è molto più piccolo del VaR del solo asset, ciò significa che la copertura riduce il rischio della posizione dell'investitore. Questa strategia infatti limita i profitti nel caso di apprezzamento del sottostante, poiché se il prezzo del titolo superasse lo strike price della call l'investitore non potrebbe fruire dell'utile derivante dalla differenza tra prezzo corrente dell'azione e strike price dell'opzione; nel caso invece di deprezzamento del sottostante questa situazione è protetta dalla put: al diminuire del prezzo del sottostante al di sotto dello strike price la put mi garantisce di poter vendere l'asset allo strike price. Il VaR più piccolo tra i tre calcolati resta quello della simulazione storica seguito questa volta da quello montecarlo. Il più grande tra i tre è quindi quello parametrico.



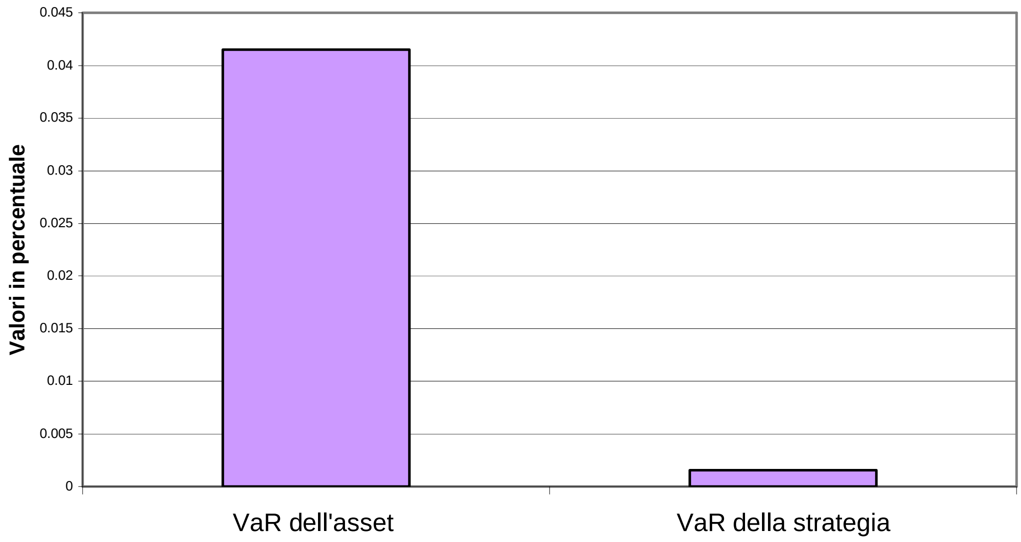
In questo grafico è illustrata la situazione long asset, long put, short call. La linea blu rappresenta la posizione long asset, quella azzurra la posizione short call, quella viola la posizione long put ed infine la linea rossa rappresenta la risultante della strategia. Come si può notare, al di sotto di 27.50$ il payoff della strategia resta costante a – 0.66$[87] valore dato dalla somma della perdita del valore dell'asset, dal valore della call e di quello della put a quel determinato prezzo, al di sopra dello strike price della call la situazione è analoga, ovvero i profitti dell'investitore restano costanti a 1.84$[88] per ogni prezzo del sottostante che supera i 30$. Nella situazione compresa tra $27.50 e $30 il

[87] Se ci troviamo ad un prezzo corrente pari a $25 allora abbiamo: (25-27.66)+(27.5-25)-0.6+0.1= 0.66
[88] Valore dato da se il prezzo corrente è per esempio 32$: (32-27.66)-0.6+(30-32)+0.1

valore della strategia segue in modo parallelo l’andamento dell’asset, quindi sale fino a 30$ poi si stabilizza come già detto prima. In questo intervallo la put è out of the money[89], la call mi permette di incassare il premio e il guadagno che deriva è dato dalla differenza tra il prezzo attuale dell’asset e quello al quale io l’ho comperato.

Se nel corso del calcolo del VaR considero come peso dello strumento derivato il corrispondente sottostante[90], il peso attribuito all’opzione è uguale a quello attribuito al sottostante, il valore che trovo è estremamente piccolo. Se applico il metodo Delta-Normal abbiamo per il metodo parametrico un VaR del -0.1536%, per quello storico - 0.5362% e per quello montecarlo -0.5156% ; se invece applico il metodo Delta-Gamma abbiamo rispettivamente -0.20%, -0.65% e -0.526%.

Differenza tra Var dell’asset e Var della strategia:

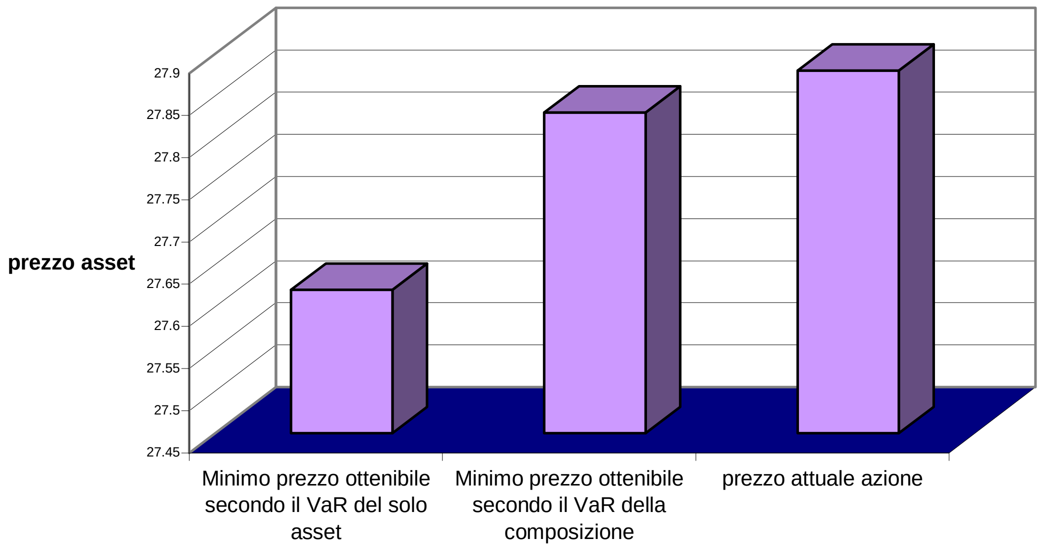


La differenza tra il VaR dell’asset e il VaR della composizione è nettamente evidente, sembra che con questa strategia il rischio complessivo sia ridotto al minimo.

Se ora consideriamo il prezzo attuale e il prezzo che potrei raggiungere domani nel 95% dei casi se le l’asset si deprezza allora otteniamo il seguente grafico che illustra chiaramente la nostra situazione:

[89] Si estingue senza valore
[90] Si veda dimostrazione nel calcolo del VaR delle opzioni

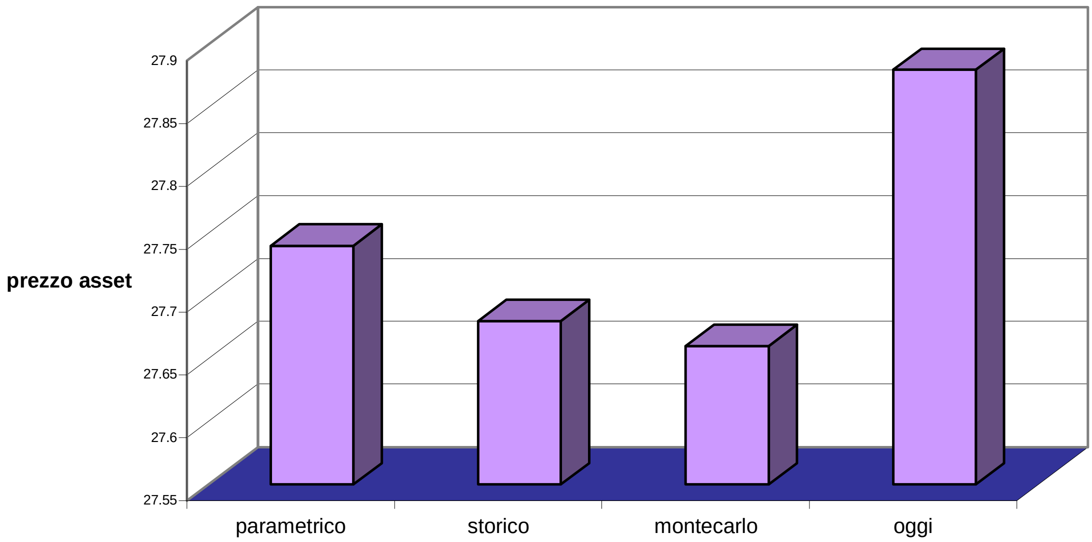
La differenza tra il valore che il prezzo può assumere:



Il prezzo minimo del titolo, secondo il VaR della composizione, che potrei ottenere domani, a partire dal prezzo attuale di $ 27.88$, è 27.83$, mentre quello ottenibile considerando solo il VaR dell'asset è 27.62$. Questi dati sono stati ottenuti utilizzando i valori del Value at Risk ottenuto col metodo parametrico.

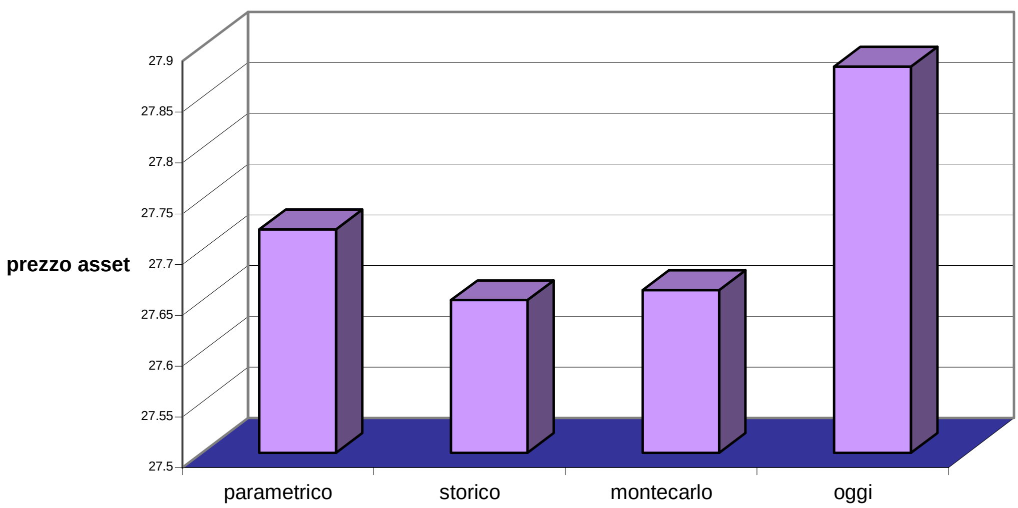
Si calcola il VaR pesato della strategia. Si possono notare delle differenze tra il VaR della sola strategia e il VaR pesato della strategia infatti questo ultimo risulta essere più grande probabilmente perché la probabilità che il prezzo dell'asset scenda al di sotto di 27.50$ è maggiore di zero e diversa da zero è pure la probabilità che il prezzo salga al di sopra di 30$. Le differenze tra i diversi valori che il VaR assume a seconda che di consideri il metodo parametrico, storico o montecarlo e che si utilizzi l'approccio delta-normal o delta-gamma risultano leggermente diverse dai casi precedenti, ovvero il valore più piccolo tra i metodi considerati è quello storico parametrico sia nell'approccio delta normal -0.5075% e delta gamma -0.5408% , seguito nell'approccio delta normal dal metodo storico -0.7107% e infine dal metodo montecarlo -0.7884% viceversa se si considera l'approccio delta gamma: il valore in assoluto più grande è quello storico -0.8011% seguito da quello montecarlo -0.7956%. Se calcoliamo invece il VaR pesato considerando solo il VaR dell'asset, nonostante questo risulti più piccolo del VaR del solo asset risulta essere molto più grande rispetto all'altro valore calcolato e qui, le differenze tra i diversi valori risultano rispecchiare quasi perfettamente le differenze riscontrate nei casi precedenti. Rappresento queste differenze mediante grafici così si notano di più.

Grafico del VaR pesato considerando il VaR dell'intera strategia e utilizzando l'approccio delta normal per il calcolo del VaR dell'opzione:



Il VaR montecarlo prevede che domani il valore del prezzo del titolo Disney scenderà al massimo a 27.66$ ed è quello che evidenzia un rischio maggiore rispetto agli altri tre il parametrico invece prevede per questo tipo di strategia un rischio molto inferiore.

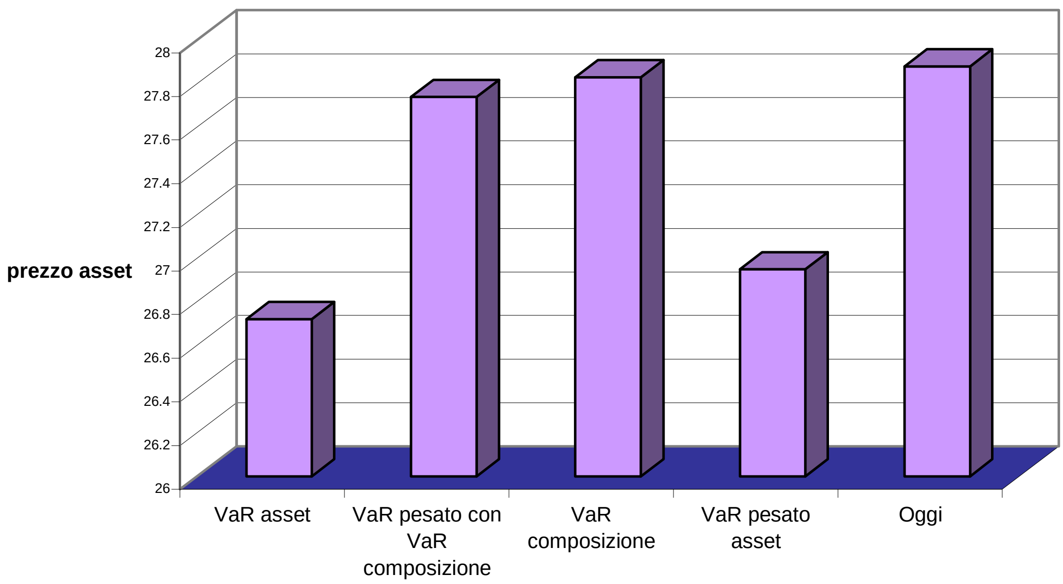
Grafico del VaR pesato considerando il VaR dell'intera strategia utilizzando l'approccio delta gamma per il calcolo del VaR dell'opzione:



In questo caso il VaR più grande che evidenzia una maggior discesa del prezzo del titolo è quello storico che prevede che il prezzo scenderà al più a 27.65$ seguito da quello montecarlo 27.66$, sempre inferiore risulta quello parametrico 27.74$.

L'ultimo grafico rappresenta invece i 4 diversi VaR a seconda di cosa si considera: il VaR della composizione, inteso come il VaR della sola strategia senza pesarlo per la probabilità, risulta essere il più piccolo infatti prevede che il prezzo dell'azione scenderà al massimo fino ad un valore pari al 27.83$, seguito dal VaR pesato della composizione che prevede che il prezzo della Disney sarà leggermente più piccolo di quello previsto dal solo VaR della composizione 27.74$, il VaR più grande in assoluto è il VaR del solo asset seguito infine dal VaR dell'asset pesato per la probabilità che il prezzo del titolo salga al di sopra di 30$ e quindi abbia un rischio pari a zero e che scenda al di sotto di 27.50$ avendo quindi un rendimento negativo del 1.38% con i valori considerati fino a qui.

I diversi valori dell'azione secondo i diversi valori del Var considerato:



Conclusioni:

Al termine di questo lavoro, la sensazione e le conclusioni che traggo è che l'applicare il VaR ad una strategia di copertura con opzioni sia, prendendo a prestito dalla linguistica il termine, un "falso amico". E' difficile non farsi allettare dalle accattivanti lusinghe del VaR, un metodo che permette di quantificare con esattezza probabilistica il rischio a cui si va incontro, anche se, come ho evidenziato, a volte si tratta esclusivamente di un "falso amico" che nasconde la vera entità della perdita possibile. Infatti il calcolo della probabilità discende dalla scienza statistica mentre le sensazioni attengono all'esperienza umana, che è diversa per ciascun individuo e risente della propensione al rischio che caratterizza ogni soggetto. Non intendo certo abbandonare per la valutazione del rischio il rigore quantitativo per una valutazione di tipo qualitativo, ma utilizzare delle barriere fisiche nella valutazione dei rischi a cui si va incontro applicando determinate strategie. Ora, se la statistica è un potente strumento per il calcolo di dati di probabilità oggettiva, va tenuto presente che l'applicazione delle scienze matematico-statistiche ad alcuni contesti presenta dei limiti. La formulazione di scenari e previsioni per il futuro si baserà sempre su serie storiche passate, ma non potrà mai prescindere da sensibilità che consentono di percepire ed interpretare i segnali deboli di evoluzione (ed involuzione) del flusso storico. Tale attività è solo squisitamente umana in quanto coniuga la sfera logica con quella emotiva. E' scienza, ma soprattutto arte. Il VaR non va rifiutato come metodo di calcolo ma deve essere, a mio parere, integrato con altre procedure, altri calcoli, per ogni particolare situazione a cui si va incontro andando oltre, a volte, a quanto di esteticamente elegante risiede in un modello matematico chiuso.

APPENDICE

MODULO 1

Il modulo 1 calcola le principali grandezze statistiche della serie storica dei dati in esame e con i primi 2 metodi di stima del VaR

```
Option Explicit
Public NrColonne As Single
Public i As Single
Public j As Single
Public n As Single
Public numero As Single
Public Uscita As Boolean
```

Definisce le variabili

```
Sub simu1()
Dim Media As Double
Dim DevSt As Double
Dim casu As Double
Dim Eli As Double
Dim z As Single
Dim y As Single
Dim k As Single
Dim mc As Double
Dim st As Double
Dim Minimo As Double
Dim Massimo As Double
Dim Asim, Kurt As Double
```

Definisce le stringhe

```
Dim R() As Double
Dim A() As Double
Dim B() As Double
Dim Percentile As Double
Dim Quanti As Single
Dim Var As Double
Dim Prob As Double
```

Scrivo l'ora di inizio

```
Worksheets("Parametri").Cells(16, 1).Value = Time
'devo inserire nel foglio DTB tutti rendimenti
Worksheets("DTB").Activate

For i = 1 To 65000
   If Cells(i, 1).Value = "" Then
      n = i - 1
      Exit For
```

```
    End If
Next i

ReDim R(n) As Double
```

'carico i dati all'interno del vettore R

```
For i = 1 To n
    R(i) = Cells(i, 1).Value
Next i


Call CalcoloMD(R, Media, DevSt, n)
Call Asi_kurtosi(n, Media, Asim, Kurt, DevSt, R)
```

'storica e parametrica hanno la stessa media e deviazione standard

```
For i = 2 To 3
    Worksheets("Parametri").Cells(5, i).Value = Media
    Worksheets("Parametri").Cells(6, i).Value = DevSt
    Worksheets("Parametri").Cells(7, i).Value = Asim
    Worksheets("Parametri").Cells(8, i).Value = Kurt
    Worksheets("Parametri").Cells(9, i).Value = n
Next i

Percentile = Worksheets("Parametri").Cells(2, 2).Value
```

'var parametrico

```
casu = 1 - Percentile

Var = Application.NormInv(casu, Media, DevSt)
```

'calcolo la probabilità di un rendimento tale

```
'Prob = Worksheets("Parametri").Cells(20, 2).Value / Worksheets("Parametri").Cells(19,
2).Value
'Prob = Prob - 1
'Prob = Application.Norm(Prob, Media, DevSt)

Worksheets("Parametri").Cells(15, 2) = Var
Worksheets("Parametri").Cells(16, 2) = Time
'Worksheets("Parametri").Cells(22, 2) = Prob
'var storico

Quanti = Int(casu * n)

ReDim A(n) As Double

For i = 1 To n
    A(i) = R(i)
Next i
```

```
Call MinimoDopo(n, Quanti, A, Var)
Call Opzione(n, Prob, R)

Worksheets("Parametri").Cells(15, 3).Value = Var
Worksheets("Parametri").Cells(16, 3).Value = Time
Worksheets("Parametri").Cells(22, 3).Value = Prob

'calcolo il percentile dal massimo
Call PercentileSuperiore(n, Quanti, A, Var)
Worksheets("Parametri").Cells(30, 3).Value = -Var

Call OpzioneCall(n, Prob, R)

Worksheets("Parametri").Cells(26, 3).Value = Prob

'calcolo il minimo e il massimo del campione

Call Min_Max1(n, Minimo, Massimo, R)

For i = 2 To 3
   Worksheets("Parametri").Cells(12, i).Value = Minimo
   Worksheets("Parametri").Cells(13, i).Value = Massimo
Next i

'ora stimo il var con il sistema montecarlo

Call simu2(n, R)

Minimo = Massimo

End Sub

Sub CalcoloMD(R, Media, DevSt, n)
Dim Qmed As Double
Dim ele As Double
Media = 0
DevSt = 0
Qmed = 0
For i = 1 To n
   ele = R(i)
   Media = Media + ele
   Qmed = Qmed + ele * ele
Next i

     DevSt = Sqr((n * Qmed - Media * Media) / (n * (n - 1)))

     Media = Media / n

End Sub
Sub puliscipagina()
```

```
    Cells.Select
    Selection.ClearContents
End Sub

Sub colonne(i, y, z)
Dim dummy As Double

    dummy = Int((i - 1) / 65536)
    y = i - dummy * 65536
    z = dummy + 1

End Sub

Sub Min_Max1(n, Minimo, Massimo, R)
Dim Candidato As Double

    Minimo = R(1)
    Massimo = Minimo

    For i = 1 To n
        Candidato = R(i)
        If Candidato < Minimo Then
            Minimo = Candidato
        End If
        If Candidato > Massimo Then
            Massimo = Candidato
        End If
    Next i

End Sub

 Sub Asi_kurtosi(n, mc, Asim, Kurt, st, R)
 Dim Vari As Double            '
 Dim Ske As Single             'grado di asimmetria
 Dim Krt As Single             'grado di curtosi
 Dim Dato As Double
 Dim Pino As Double
 Dim Gino As Double


    Dato = 0
    Ske = 0
    Krt = 0

    For i = 1 To n
            Vari = R(i)
            Vari = (Vari - mc) / st
            Dato = Vari * Vari * Vari
            Ske = Ske + Dato
            Dato = Dato * Vari
            Krt = Krt + Dato
```

```
    Next i

    Pino = n / ((n - 1) * (n - 2))
    Asim = Pino * Ske
    Pino = n * (n + 1) / ((n - 1) * (n - 2) * (n - 3))
    Gino = 3 * (n - 1) * (n - 1) / ((n - 2) * (n - 3))
    Kurt = (Pino * Krt) - Gino

 End Sub

Sub Numero_Colonne(NrColonne)
    For i = 1 To 256
        If Cells(1, i).Value = "" Then
            NrColonne = i - 1
            Exit For
        End If
    Next i
End Sub
Sub PercentileSuperiore(n, Quanti, A, Var)
Dim Eli As Double

For i = 1 To n
    Eli = A(i)
    A(i) = -Eli
Next i

Call MinimoDopo(n, Quanti, A, Var)

For i = 1 To n
    Eli = A(i)
    A(i) = -Eli
Next i

End Sub
```

MODULO 2

Il modulo 2 calcola il VaR con i tre diversi metodi e quindi le grandezze statistiche relative alla serie generata con il metodo montecarlo

```
Sub simu2(n, R)
Dim i As Single
Dim j As Single
Dim numero As Single
Dim Media As Double
Dim standev As Double
Dim casu As Double
Dim Eli As Double
Dim z As Single
Dim y As Single
Dim nrele As Single
```

```
Dim Riga As Single
Dim mc As Double
Dim st As Double
Dim Minimo As Double
Dim Massimo As Double
Dim A(1 To 20000000) As Double

numero = Worksheets("parametri").Cells(9, 4).Value

standev = Worksheets("parametri").Cells(6, 2).Value

For i = 1 To n
   A(i) = R(i)
Next i

For i = n To numero

   casu = Rnd()
   Riga = Int(casu * n) + 1
   Media = R(Riga)

   casu = Rnd()

   Eli = Application.NormInv(casu, Media, standev)

   A(i) = Eli

Next i

Call Min_Max2(numero, Minimo, Massimo, A)

Worksheets("parametri").Cells(12, 4).Value = Minimo
Worksheets("parametri").Cells(13, 4).Value = Massimo

Call Med_Var2(numero, mc, st, A)
Call Asi_kurtosi(numero, mc, Asim, Kurt, st, A)

Worksheets("parametri").Cells(5, 4).Value = mc
Worksheets("parametri").Cells(6, 4).Value = st
Worksheets("Parametri").Cells(7, 4).Value = Asim
Worksheets("Parametri").Cells(8, 4).Value = Kurt

'calcolo la probabilità del rendimento i esimo
Call Opzione(numero, Prob, A)

Worksheets("Parametri").Cells(22, 4).Value = Prob


'calcolo la probabilità del rendimento i esimo
Call OpzioneCall(numero, Prob, A)
Worksheets("Parametri").Cells(26, 4).Value = Prob
```

'Calcolo il Var

```
Call Percentile(numero, A)

End Sub

Sub Min_Max2(n, Minimo, Massimo, A)
Dim Candidato As Double

   Minimo = 0
   Massimo = 0
   Minimo = A(1)
   Massimo = Minimo

   For i = 1 To n
      Candidato = A(i)
      If Candidato < Minimo Then
         Minimo = Candidato
      End If
      If Candidato > Massimo Then
         Massimo = Candidato
      End If
   Next i

End Sub
Sub Med_Var2(n, mc, st, A)
Dim ics As Double

   mc = 0
   st = 0

   For i = 1 To n
      ics = A(i)
      mc = mc + ics
      st = st + ics * ics
   Next i


   st = (n * st - mc * mc) / (n * (n - 1))
   mc = mc / n
   st = Sqr(st)

End Sub
```

MODULO 3

Il modulo 3 calcola la probabilità che il prezzo, rendimento dell'azione preso in considerazione sia al di sotto dello strike della put e al di sopra dello strike price della call

```
Sub Opzione(n, Prob, A)
Dim Valore As Double
```

'calcolo probabilità di un evento inferiore allo strike price

```
Valore = Worksheets("Parametri").Cells(20, 2).Value / Worksheets("Parametri").Cells(19,
2).Value
Valore = Valore - 1

Prob = 0
For i = 1 To n
   If Valore >= A(i) Then
      Prob = Prob + 1
   End If
Next i

Prob = Prob / n

End Sub
Sub OpzioneCall(n, Prob, A)
Dim Valore As Double
'calcolo probabilità di un evento superiore allo strike price
Valore = Worksheets("Parametri").Cells(24, 2).Value / Worksheets("Parametri").Cells(19,
2).Value
Valore = Valore - 1

Prob = 0
For i = 1 To n
   If Valore > A(i) Then
      Prob = Prob + 1
   End If
Next i

Prob = Prob / n

Prob = 1 - Prob

End Sub
```

'calcolo probabilità di un evento inferiore allo strike price

MODULO 4

Il modulo 4 ordina la serie storica considerata mediante l'algoritmo illustrato.

```
Public A(1 To 20000000) As Double
Public B(1 To 20000000) As Double
Public C(1 To 20000000) As Double
Sub Percentile(numero, A)
Dim i As Single
Dim j As Single
Dim w As Single
Dim z As Long
Dim k As Long
Dim Giro As Single
```

```
Dim NrColonne As Single
Dim TotDati As Long
Dim NrPercentile As Double
Dim MatrA As Boolean
Dim Ciccio As Single
Dim h As Single
Dim l As Single
```

'raccolgo i dati
'conto le colonne piene

```
TotDati = numero



For i = 1 To numero
   C(i) = -A(i)
Next i

For Giro = 1 To 2
   If Giro = 2 Then
      For i = 1 To numero
         A(i) = C(i)
      Next i
   End If

   TotDati = numero

   NrPercentile = Worksheets("Parametri").Cells(2, 2).Value
   NrPercentile = Int((1 - NrPercentile) * TotDati)

   For w = 1 To 100
        If Int(TotDati / 2) >= NrPercentile Then

         If (w - 2 * Int(w / 2)) = 1 Then
            Call Dispari(TotDati, A, B)
            MatrA = False 'la mia matr di output è b
         Else
            Call Pari(TotDati, A, B)
            MatrA = True 'la mia matr di output è a
         End If

      Else
         Exit For
      End If
   Next w

   If MatrA = False Then
      For z = 1 To TotDati
```

```
        A(z) = B(z)
      Next z
      Erase B
   End If

   Call OrdinaFinale(A, TotDati, NrPercentile, Var)

   If Giro = 1 Then
      Worksheets("Parametri").Cells(15, 4).Value = Var
      Worksheets("Parametri").Cells(16, 4).Value = Time
   Else
      'calcolo la coda di destra
      Worksheets("Parametri").Cells(30, 4).Value = -Var
   End If

Next Giro




End Sub
Sub OrdinaFinale(A, TotDati, NrPercentile, Var)
Somma = 0

For i = 1 To TotDati
   Somma = Somma + A(i)
Next i

Somma = Somma / TotDati

Erase B

k = 0
For i = 1 To TotDati
   If A(i) > Somma Then
        k = k + 1
        B(k) = A(i)
   End If
Next i
```

'k sono gli elementi nell'insieme ridotto
' totDati - k sono gli elementi nell'insieme minore della media

```
NrPercentile = NrPercentile - TotDati + k

If (TotDati - NrPercentile) > NrPercentile Then

   Call MinimoDopo(TotDati, NrPercentile, B, Var)

Else
```

```
    Call MassimoDopo(TotDati, (TotDati - NrPercentile), B, Var)

End If

End Sub
Sub Dispari(TotDati, A, B)
Dim z As Long
Dim k As Long
Dim Somma As Double
Dim Media As Double


Somma = 0
Media = 0
For z = 1 To TotDati
    Somma = Somma + A(z)
Next z
Media = Somma / TotDati

k = 0
For z = 1 To TotDati
    If A(z) < Media Then
        k = k + 1
        B(k) = A(z)
    End If
   ' a(z) = ""
Next z

Erase A

TotDati = k

End Sub

Sub Pari(TotDati, A, B)
Dim z As Long
Dim k As Long
Dim Somma As Double
Dim Media As Double


Somma = 0
Media = 0
For z = 1 To TotDati
    Somma = Somma + B(z)
Next z
Media = Somma / TotDati

k = 0
For z = 1 To TotDati
    If B(z) < Media Then
```

```
        k = k + 1
        A(k) = B(z)
    End If
    'b(z) = ""
Next z

Erase B

TotDati = k
End Sub

Sub MinimoDopo(n, Quanti, A, Var)
'n tot dati
'quanti percentile

Dim k As Single
Dim Eli As Double

    k = 0
    For z = 0 To Quanti - 1
        If k = 0 Then
            Eli = A(1)
            For i = 1 To n - z
                If Eli > A(i) Then
                    Eli = A(i)
                End If
            Next i

            For i = 1 To n - z
                If k = 0 Then
                    If Eli = A(i) Then
                        k = 1
                    Else
                    B(i) = A(i)
                    End If

                Else
                    B(i - k) = A(i)
                End If
            Next i
            k = 1
        Else
            Eli = B(1)
            For i = 1 To n - z
                If Eli > B(i) Then
                    Eli = B(i)
                End If
            Next i
            k = 0
            For i = 1 To n - z
                If k = 0 Then
```

```
                If Eli = B(i) Then
                    k = 1
                Else
                A(i) = B(i)
                End If

            Else
                A(i - k) = B(i)
            End If
        Next i
        k = 0
    End If

    Var = Eli

  Next z
End Sub
Sub MassimoDopo(n, Quanti, A, Var)
Dim k As Single
Dim Eli As Double

  k = 0
  For z = 0 To Quanti - 1
    If k = 0 Then
        Eli = A(1)
        For i = 1 To n - z
            If Eli < A(i) Then
                Eli = A(i)
            End If
        Next i

        For i = 1 To n - z
            If k = 0 Then
                If Eli = A(i) Then
                    k = 1
                Else
                B(i) = A(i)
                End If

            Else
                B(i - k) = A(i)
            End If
        Next i
        k = 1
    Else
        Eli = B(1)
        For i = 1 To n - z
            If Eli < B(i) Then
                Eli = B(i)
            End If
        Next i
```

```
            k = 0
            For i = 1 To n - z
                If k = 0 Then
                    If Eli = B(i) Then
                        k = 1
                    Else
                    A(i) = B(i)
                    End If

                Else
                    A(i - k) = B(i)
                End If
            Next i
            k = 0
        End If

        Var = Eli

    Next z
End Sub
```

Bibliografia:

Andreatta, Mason, Romanin Jacur (1990), *Appunti di ottimizzazione su reti*, Edizioni Libreria Padova

Archetti,Fagioli, Sciomachen,(1989),*Metodi della ricerca operativa*, Giappichelli Editore, Torino

Baseggio L.,(2004) *Finanza d'impresa al bivio*, FrancoAngeli

Barucci E. (2000),*Teoria dei Mercati finanziari,* Bologna Il mulino

Bazzana F.,(2001) "*I modelli interni per la valutazione del rischio di mercato secondo del VaR*", Università di Trento (**www.aleaweb.org**)

Benninga,(2001), *Modelli finanziari*, McGraw-Hill Milano

Bradley J, Millspaugh A, *Visual Basic 6.0*, McGraw-Hill, Milano

Britten-Jones Schaefer M,(1999) " *Non-linear Value at risk*", London business Scholl

Burton (1996) *A random Walk Down Wall Street* , Norton&Company New York

Burton (2003), *The random Walk Guide to investing* , Norton&Company New York

Butler, (1999), *Mastering value at risk*, Prentice Hall Great Britain

Campbell , Lo , Mackilay , (1997) ,*The econometrics of financial markets*, Princeton University press, Princeton New Jersey

Capparrelli F.(2201), *I derivati,* McGraw-Hill Milano

Cherubini, Della Lunga, (2001), *Il rischio finanziario*, McGraw-Hill Milano

Cicchitelli, *Probabilità e statistica*, Maggioli Editore, Perugia

Crouhy, Dan, Mark, (2001), *Risk Management* , McGraw-Hill ,Harvard Business School

Dowd (2002), *Beyond Value at risk,* Wiley finance,Chichester, England

Dowd (2002), *Measuring market risk,* Wiley finance, England

Enders W,(1995),*Applied Econometric Time Series*; Wiley & Sons,Canada

Garbade K,(1982), *Teoria dei mercati finanziari*, Il mulino Bologna

Hull C. John,(2002), *Fondamenti dei mercati di futures e opzioni* , Il sole 24 ore, Milano

Lawrence G. McMillan,(2002), *Profit with options*, Wiley & sons, New York

Lo, Mackinlay (1999), *A Non-Random WalkDown Wall Street*, Princeton University press, Princeton New Jersey

Manly (1997) *Randomization, Bootstrap and Montecarlo Methods in biology*, Chapman& Hall/CRC, Canada

Mason (2000) *Dispense di Ricerca Operativa*, Dipartimento di matematica, Venezia

Mills T.(1999), *The econometric modelling of financial time series*, Cambridge, University press

Olivotto L, *Valore e Sistemi di controllo*, McGraw-Hill, Milano

Orsi,(1985), *Probabilità e inferenza statistica*, Il mulino,Bologna

Pederzoli C.,Torricelli C., (1999), "*Una rassegna sui metodi di stima del value at risk*", Università degli studi di Modena e Reggio Emilia (**www.gloriamundi.org**)

Rossi N., "*Il problema della distribuzione dei rendimenti nell'analisi del VaR: una valutazione empirica di modelli alternativi*" Università degli studi di Parma (**www.gloriamundi.org**)

Santesso E, Sostero U,(2001), *Principi contabili per il bilancio d'esercizio,* Il sole 24 ore Milano

Sortino F.,Satchell S.,(2001*), Managing downside risk in financial markets*, Butterworth- Heiemann finance, Oxford

Taylor F,(2003), *Mastering foreign exchange & currency option*, Prentice Hall Great Britain

Wilson T.C.(1996) ' Calculating risk capital.' in **C. Alexander** (ed.) *The Handbook of Risk Analisysis and Management.* Chichester,England