

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI SCIENZE STATISTICHE

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ECONOMICHE, FINANZIARIE E AZIENDALI

TESI DI LAUREA

L'EFFICIENZA DEI FONDI COMUNI BILANCIATI

Relatore: Ch.mo Prof. MINIACI RAFFAELE

Laureanda: SILVIA MONTANARI

ANNO ACCADEMICO 2004-2005

INDICE

INTRODUZIONE.....	5
CAPITOLO 1: Scelte d'investimento in condizioni d'incertezza.....	7
1.1 La teoria dell'utilità attesa.....	8
1.1.1 Impostazione cardinalista e ordinalista.....	9
1.1.2 Impostazione assiomatica.....	11
CAPITOLO 2: La frontiera efficiente.....	17
2.1 Il problema.....	18
2.2 Efficienza in assenza di restrizioni.....	25
2.2.1 Il test sulle performance di Sharpe.....	28
2.3 Efficienza con vincoli di disuguaglianza.....	31
2.3.1 Il test di Basak, Jagannathan e Sun.....	33
L'Efficienza di un fondo comune d'investimento.....	33
Efficienza di un benchmark di riferimento per un fondo.....	39
Appendice A: Il test di Wang.....	43
CAPITOLO 3: Principali prodotti finanziari e fondi comuni d'investimento.....	49
3.1 I principali prodotti finanziari.....	49
3.2 I fondi comuni d'investimento.....	52
3.3 Il benchmark.....	57
3.4 Portafogli con versamenti o prelevamenti.....	58

CAPITOLO 4: I rendimenti delle attività.....	63
4.1 Le serie storiche.....	63
AAA Master Bilanciato Acc.....	64
AAA Master Bilanciato Obbligazionario Acc.....	67
Arca TE Acc.....	71
Arca BB Acc.....	75
4.2 La normalità dei rendimenti.....	79
CAPITOLO 5: L'efficienza dei fondi comuni bilanciati.....	83
5.1 AAA Master Bilanciato Acc.....	83
5.1.1 Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi degli asset.....	83
5.1.2 Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi degli asset.....	85
5.2 Arca BB Acc.....	86
5.2.1 Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi degli asset.....	86
5.2.2 Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi degli asset.....	87
5.3 Arca TE Acc.....	88
5.3.1 Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi degli asset.....	88
5.3.2 Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi degli asset.....	90
5.4 AAA Master Bilanciato Obbligazionario Acc.....	91
5.4.1 Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi degli asset.....	91
5.4.2 Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi degli asset.....	92
CAPITOLO 6: L'efficienza del benchmark dei fondi.....	95
I rendimenti giornalieri.....	95
6.1 Benchmark di AAA Master Bilanciato Acc.....	95
6.1.1 Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	95
6.1.2 Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	97
6.2 Benchmark di Arca BB Acc.....	98
6.2.1 Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	98
6.2.2 Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	99
6.3 Benchmark di Arca TE Acc.....	100
6.3.1 Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	100

6.3.2	Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	101
6.4	Benchmark di AAA Master Bilanciato Obbligazionario.....	102
6.4.1	Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	102
6.4.2	Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	103
	I rendimenti settimanali.....	104
6.5	Benchmark di AAA Master Bilanciato.....	104
6.5.1	Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	104
6.5.2	Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	105
6.6	Benchmark di Arca BB Acc.....	106
6.6.1	Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	106
6.6.2	Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	107
6.7	Benchmark di Arca TE Acc.....	108
6.7.1	Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	108
6.7.2	Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	109
6.8	Benchmark di AAA Master Bilanciato Obbligazionario.....	110
6.8.1	Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	110
6.8.2	Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi delle attività.....	111
	 CONCLUSIONI.....	 115
	RINGRAZIAMENTI.....	117
	BIBLIOGRAFIA.....	119

INTRODUZIONE

Nel 1952 Harry M. Markowitz introdusse la teoria della scelta di portafoglio, basata sul concetto di efficienza dello stesso.

Questo è ritenuto uno dei campi di ricerca di maggiore interesse nella letteratura finanziaria ed è caratterizzato da una continua e vivace espansione.

Il problema consiste nel determinare il portafoglio migliore fra tutti quelli che possono essere composti da un insieme dato di attività, combinando quest'ultime in maniera ottimale e senza alcuna restrizione nei loro pesi. L'analisi ruota attorno al concetto di frontiera efficiente, che costituisce il luogo dei punti costruito in base alle coppie di rendimento atteso μ e rischio σ , che possono essere ottenute combinando in maniera efficiente le attività finanziarie. Lo scopo è quello di determinare analiticamente l'efficienza di un portafoglio qualsiasi, calcolandone la distanza dalla frontiera efficiente.

A tal fine Markowitz, utilizzò il famoso test delle *Performance* di Sharpe, dove l'efficienza viene raggiunta da pochi portafogli soprattutto da quelli costituiti prevalentemente da titoli non rischiosi, che per definizione si trovano esattamente lungo la frontiera efficiente.

La possibilità di accedere facilmente alle innumerevoli banche dati esistenti, il significativo incremento di volatilità dei principali fattori di rischio (tassi d'interesse, tassi di cambio, corsi azionari) e l'instabilità degli asset finanziari hanno indotto, negli ultimi anni, gli investitori a rivolgersi principalmente verso le attività di diversificazione offerte dalle società di gestione del risparmio.

Esse gestiscono portafogli di titoli, ottimizzati nei rispettivi rendimenti in funzione di livelli di rischio diversi.

In questa tesi analizzeremo infatti l'efficienza dei fondi comuni d'investimento bilanciati, e dei relativi benchmark, composti sia da titoli azionari che da titoli obbligazionari, tenendo in considerazione ulteriori aspetti.

Assumeremo che i portafogli situati lungo la frontiera efficiente rispettino determinati vincoli circa l'ammontare degli investimenti tenuti nelle attività che lo compongono.

In particolare ipotizzeremo che il gestore non possa assumere posizioni corte sia nelle obbligazioni che nelle azioni, ponendo che i rispettivi pesi si mantengano non negativi. Imporremo anche ulteriori vincoli che rispettino la percentuale di obbligazionario ed azionario definiti in ciascun fondo.

La presenza di tali vincoli, sebbene conferisca al problema maggiore attinenza con la realtà, rende però difficoltoso l'ottenimento di una espressione analitica della frontiera efficiente utilizzando il metodo tradizionale proposto da Markowitz. Perciò adatteremo al nostro problema, il test ottenuto da Basak, Jagannathan e Sun, che attraverso un'approssimazione con il metodo Delta, valuta l'efficienza di un benchmark in presenza di vincoli di non negatività. Sebbene il nostro test terrà conto di alcune restrizioni presenti nella realtà, tali da indurre le frontiere efficienti a differire da quanto solitamente considerato in letteratura, esso sarà più propenso ad accettare l'ipotesi nulla a causa di una potenza inferiore e ci spingerà così verso conclusioni a volte non coerenti con i grafici delle relative frontiere efficienti.

Nella nostra analisi, valuteremo l'efficienza di quattro fondi comuni bilanciati e dei relativi benchmark. Utilizzeremo, per il periodo compreso tra il 01/01/2002 e il 10/10/2004, le rispettive serie, giornaliere e settimanali dei rendimenti. Non riuscendo a reperire l'intero ventaglio di titoli di cui è composto ciascun fondo, al fine di valutarne l'efficienza, prenderemo in considerazione, come asset primitivi, i relativi indici che costituiscono il benchmark. Infatti quest'ultimo è composto da indici di titoli in cui il fondo investe o da un'indice della categoria a cui il fondo appartiene. Per questi motivi i risultati e le relative frontiere efficienti che otterremo non rappresenteranno quelli reali ma una loro approssimazione. Tale discorso, non risulterà ovviamente valido, nel momento in cui valuteremo l'efficienza di un benchmark. In quest'ultimo caso utilizzeremo infatti, come asset primitivi, proprio i relativi indici di cui si compone ciascun benchmark.

Capitolo 1

SCELTE D'INVESTIMENTO IN CONDIZIONI D'INCERTEZZA

L'investitore ha la possibilità di allocare le proprie risorse tra diversi prodotti finanziari, tra periodi e stati di natura diversi.

I criteri di scelta, in contesti d'incertezza, si basano su una funzione d'utilità attesa che ogni individuo trae da una determinata scelta.

La comprensione del criterio di tale scelta consente agli intermediari finanziari di offrire prodotti che rispondano alle caratteristiche della clientela, e di gestire il relativo rischio.

In tal senso si è notevolmente sviluppata l'offerta di società di gestione del risparmio, presso le quali si è registrato un progressivo aumento della domanda di fondi comuni d'investimento e servizi di gestione patrimoniale.

1.1 La teoria dell'utilità attesa

Come già accennato sopra, la scelta di un determinato prodotto finanziario dipende dalla funzione di utilità che un investitore ne trae. L'idea di base è che se c'è incertezza nel futuro, l'utilità che un investitore può ottenere da una determinata scelta dipende, oltre che dall'alternativa prescelta, anche dalla probabilità con cui diversi eventi possono verificarsi.

La funzione d' utilità introdotta da Von Neuman e Morgensten rappresenta tutt'ora uno dei migliori strumenti per valutare le scelte possibili in condizioni d'incertezza. Tale funzione permette di orientare l'investitore verso quella scelta che ne massimizza il valore atteso di utilità.

Ponendo come ipotesi che l'i-esimo individuo abbia a disposizione due alternative rischiose $s_1, s_2 \in S$, e supponendo che una sola delle seguenti relazioni possa verificarsi:

- s_1 è preferito a s_2
- s_1 è indifferente a s_2
- s_2 è preferito a s_1

la teoria dell'utilità attesa consente di affermare che

$s_1 \succ s_2 \Leftrightarrow E[U(s_1)] < E[U(s_2)]$ s_2 è preferito ad s_1

$s_2 \succ s_1 \Leftrightarrow E[U(s_2)] < E[U(s_1)]$ s_1 è preferito ad s_2

Essendo S un insieme completamente preordinato in base alle preferenze, è possibile associare ad esso una funzione reale crescente. Questa funzione che prende il nome di *funzione di utilità*, ed è indicata con $U(\bullet)$ o con $u(\bullet)$, viene considerata l'indicatore che permette di salvaguardare un certo ordinamento di preferenze tra gli investimenti disponibili

Uno dei principali limiti della teoria dell'utilità attesa viene evidenziato nel paradosso di Ellsberg. Tale limite, legato alla quantità e alla qualità d'informazioni di cui disponiamo, rispetto alle alternative rischiose, pone il problema di capire se tali informazioni possano influenzare in qualche modo le

nostre scelte; in questo senso la teoria dell'utilità attesa così semplice ed intuitiva, può condurci a risultati paradossali (Paradosso di Ellsberg 1961).

Per questi motivi viene ripresa la distinzione, avanzata da Knight 1920, tra il concetto di rischio ed incertezza. Se la situazione di rischio è quella nella quale siamo in grado di assegnare una probabilità a ciascun stato di natura, in caso d'incertezza l'assegnazione di precise probabilità non può essere fatta, ragion per cui la teoria dell'utilità attesa risulta efficace unicamente in un contesto rischioso.

1.1.1 Impostazione cardinalista e ordinalista

Una delle prime trattazioni della teoria dell'utilità è l'impostazione cardinalista. Questa teoria si basa sul concetto di utilità marginale dei beni, ossia la misura della capacità di un bene d'incrementare la soddisfazione degli agenti.

Indicando con $U'_i(x_i)$ l'utilità marginale del bene i -esimo, disponibile in quantità x_i , l'utilità marginale viene calcolata come rapporto tra le due variazioni:

$$U'_i(x_i) = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad i: 1, \dots, n$$

Secondo la legge enunciata da Gossen 1854, l'aumento della variazione dell'utilità è via via decrescente. In tale trattato la funzione d'utilità è ipotizzata concava, poichè oltre un certo limite un'ulteriore unità del bene provoca una diminuzione di utilità.

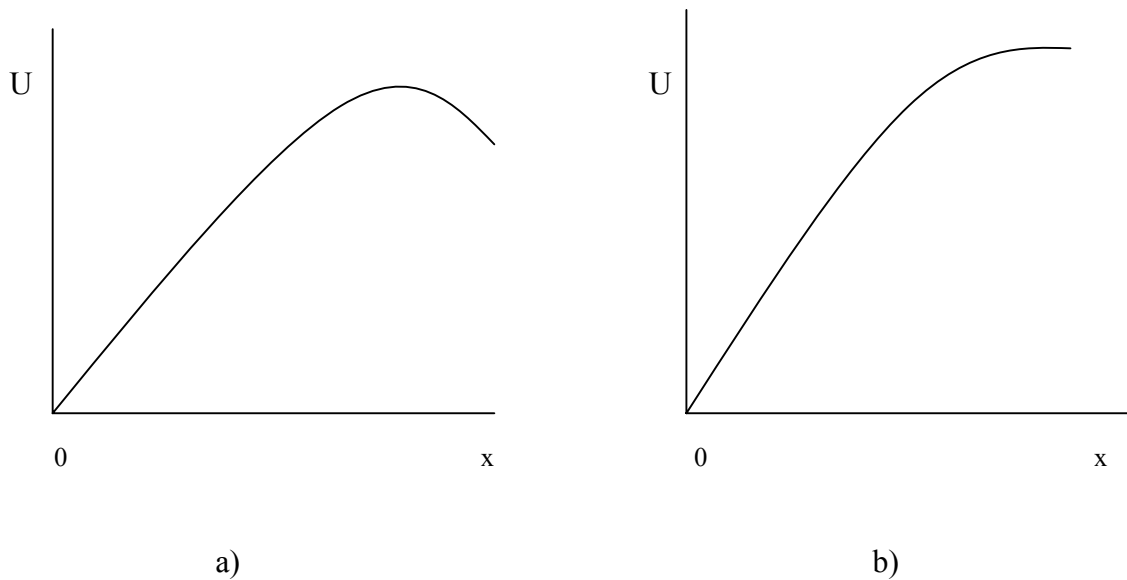


Figura 1.1: Esempi di utilità cardinale. Caso a): Oltre una certa quantità x_i , un' ulteriore unità del bene provoca una diminuzione dell'utilità U_i (Legge di Gossen). Caso b): Funzione di utilità crescente e concava come tradizionalmente considerata.

Questa teoria tuttavia sembra più adatta a spiegare l'utilità dei beni di consumo piuttosto che d'investimento. Gli stessi risultati teorici che caratterizzano l'impostazione cardinalista possono anche essere ottenuti tralasciando l'ipotesi che ogni individuo sia in grado di misurare gli effetti, sul proprio benessere, della disponibilità di dosi successive di ciascun bene. Si ha così il passaggio dall'impostazione cardinalista a quella ordinalista, nella quale si suppone che l'individuo sia in grado di confrontare situazioni diverse, e di esprimersi a seconda dei propri bisogni verso il soddisfacimento dell'una o dell'altra. Nella teoria ordinalista vengono imposti, agli investitori che devono allocare un capitale tra diverse attività finanziarie, dei vincoli decisionali, il più importante dei quali sicuramente è quello sulla ricchezza disponibile.

1.1.2 Impostazione assiomatica

L'impostazione assiomatica si distingue dalle precedenti perché impone che le preferenze espresse dagli individui si fondino su ipotesi più complesse.

Essa si basa su proprietà che rappresentano i principi di razionalità del comportamento degli individui. Tratteremo qui di seguito alcuni degli aspetti più rilevanti di questa applicazione.

Considerando S un insieme di alternative convesso, possiamo combinare tra loro tutti gli elementi interni ad esso, ottenendo così tutte le combinazioni di alternative possibili.

$$\forall s_i, s_j \in S, \quad \forall \alpha \in [0,1] \Rightarrow \alpha s_i + (1-\alpha)s_j \in S$$

Rappresenta un esempio di costruzione di portafoglio sulla base d'investimenti puri ($s_i, s_j \in S$).

Assiomi di scelta razionale dell'investitore:

Assioma1: Completezza

Per ogni coppia di elementi di S è possibile stabilire se l'uno è preferito all'altro oppure se essi sono indifferenti

Assioma2: Transitività

Se l'investimento s_1 è preferito all'investimento s_2 e questo a s_3 , l'investitore preferirà s_1 ad s_3 .

Assioma3: Sostituibilità

Se s_1 e s_2 sono indifferenti ed s_3 è un altro investimento qualsiasi, allora l'investitore sarà anche indifferente tra $\alpha s_1 + (1-\alpha)s_3$ e $\alpha s_2 + (1-\alpha)s_3$, $\forall \alpha$

Assioma4: Continuità

Se s_1 è preferito a s_2 e questo ad s_3 , esiste un numero reale $q \in (0,1)$ tale che l'investitore è indifferente tra s_2 e $q s_1 + (1-q) s_3$.

Se valgono gli assiomi sopra enunciati allora esiste una funzione detta appunto funzione d'utilità.

In un contesto finanziario è possibile descrivere le alternative attraverso la distribuzione di probabilità del rendimento che, in riferimento al contesto uniperiodale in cui ci troviamo, coincide con il concetto di ricchezza e di valore finale dell'alternativa stessa. Definiamo dunque la variabile W che rappresenta la ricchezza con media μ e varianza σ^2 . Poiché l'utilità di un individuo è crescente rispetto al profitto possiamo scrivere: $U'(\bullet) > 0$.

Se l'individuo è avverso al rischio, rispetto ad una ricchezza aleatoria W , preferirà l'aspettativa di ricchezza $E(W)$ ottenuta con certezza. Di conseguenza la sua funzione di utilità soddisferà la seguente relazione:

$$U(E(W)) \geq E(U(W)) \quad (1.1)$$

che equivale ad assumere che la funzione d'utilità sia concava ($U'' < 0$)

Tale requisito segue dalla relazione (1.1) nota *come disuguaglianza di Jensen*.

La propensione al rischio manifestata dall'investitore si determina in base al segno della derivata seconda della funzione di utilità:

- avversione al rischio se $U''(W) < 0$
- neutralità al rischio se $U''(W) = 0$
- propensione al rischio se $U''(W) > 0$

Il grado di avversione al rischio può essere rappresentato da un indice che misura la concavità della funzione di utilità: **indice di avversione assoluta al rischio (ARA)** di *Arrow-Pratt*

$$ARA = - \frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Esso misura l'avversione al rischio per un dato livello di ricchezza.

Più gli individui sono avversi al rischio, tanto più presentano un indice di avversione assoluta al rischio decrescente. Un rischio costante sarà invece tanto più tollerato quanto maggiore sarà la ricchezza dell'investitore.

L'indice di avversione relativa al rischio viene definito come:

$$RRA = W * ARA$$

Un coefficiente di avversione relativa al rischio costante, implica che un investitore abbia un'avversione al rischio costante rispetto ad una perdita proporzionale di ricchezza, anche se la perdita, in valore assoluto, aumenta con il livello di ricchezza considerato.

L'indice di tolleranza al rischio è invece definito come:

1/ARA

Principali funzioni di utilità sono:

$$A) U(W) = W - \frac{b}{2} W^2$$

$$B) U(W) = a \log W + b$$

$$C) U(W) = aW - bW^2$$

$$D) U(W) = a - \exp(-bW)$$

$$E) U(W) = \left(\frac{W^\gamma - 1}{\gamma} \right)$$

$$F) U(W) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left[\frac{\beta W}{1-\gamma} + \eta \right]^\eta$$

La A) e la C) sono esempi di funzioni di utilità quadratica. Semplici da utilizzare, le funzioni manifestano due svantaggi: il primo è che presentano un punto di massimo oltre il quale l'aumento della ricchezza provoca una diminuzione di utilità, mentre il secondo risiede nell'avversione al rischio crescente al crescere della ricchezza, caratteristica pressoché irrealistica. Per questi motivi vengono utilizzate le altre funzioni d' utilità che rappresentano comportamenti più realistici.

La funzione di utilità D), per esempio, garantisce che l'avversione al rischio assoluta sia indipendente dalla ricchezza. Funzioni di questo tipo sono conosciute in letteratura come funzioni CARA (Constant Absolut Risk Aversion).

La funzione di utilità E) invece si fonda sull'ipotesi che l'avversione al rischio diminuisca, in maniera proporzionale, al crescere della ricchezza . Essa

descrive il comportamento di individui con avversione relativa al rischio costante (CRRA). Secondo tale funzione $RRA=1-\gamma$. Ponendo $\gamma=1$ la funzione di utilità risulta lineare e l'individuo è neutrale al rischio, mentre per γ che tende a zero otteniamo la funzione di utilità logaritmica.

La funzione di utilità F), che ipotizza un andamento iperbolico dell'avversione al rischio, è nota come funzione di utilità HARA(Hyperbolic Absolute Risk Aversion) ed è in grado di rappresentare diversi atteggiamenti dell'individuo rispetto al rischio. L'indice di tolleranza in questo caso risulta essere:

$$\frac{1}{ARA} = \frac{W}{1-\gamma} + \frac{\eta}{\beta}$$

Posto ad esempio $\eta=0$ otteniamo una funzione di utilità di tipo CRRA, mentre per γ tendente a zero generiamo una funzione CARA.

Tramite la formula di espansione in serie di Taylor, centrata in zero, è possibile approssimare le funzioni di utilità quadratica evidenziandone il comportamento:

$$U(W)=U(0)+U'(0)W+\frac{1}{2!}U''(W^2)+\frac{1}{3!}U'''(W^3)+\dots \quad (1.2)$$

Il cui valore atteso è:

$$E[U(W)]=U(0)+U'(0)E(W)+\frac{1}{2!}U''(0)E(W^2)+\frac{1}{3!}U'''(0)E(W^3)+\dots$$

E ricordando che $E(W^2)=\mu^2 + \sigma^2$ si perviene alla seguente espressione che mette in evidenza come la distribuzione di probabilità della funzione di utilità dipenda in maniera approssimativa solamente dai suoi primi due momenti:

$$E[U(W)]=a+b\mu+c(\mu^2 + \sigma^2) = U(\mu, \sigma)$$

$$a=U(0)$$

$$b=U'(0)$$

$$c=\frac{1}{2!}U''(0)$$

La massimizzazione della funzione di utilità nella precedente approssimazione, conduce quindi alla scelta di quell'alternativa dove, la variabile profitto atteso μ e deviazione standard σ , massimizzano tale funzione.

Nella pratica tale approssimazione viene largamente utilizzata. In questo approccio l'ordinamento delle alternative rischiose è effettuato considerando esclusivamente i primi due momenti della distribuzione di probabilità.

Verifichiamo per quali valori dei parametri a , b , c , la funzione $U(\mu, \sigma)$ rappresenta un'utilità attesa dotata di avversione al rischio:

$$\begin{cases} \frac{\partial E[U(W)]}{\partial \mu} = b + 2c\mu \\ \frac{\partial^2 [U(W)]}{\partial \mu^2} = 2c < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b > -2c\mu \quad c < 0$$

Possiamo rappresentare nel piano cartesiano (σ, μ) le curve d'indifferenza generate dalla funzione d'utilità come il luogo dei punti per i quali $E[U(W)]$ è costante, ottenendo delle curve d'indifferenza dell'utilità attesa.

Se un individuo è avverso al rischio allora $\frac{\partial U}{\partial \sigma} < 0$ e $\frac{\partial U}{\partial \mu} > 0$. In tal caso il

tasso marginale di sostituzione $\frac{\partial \mu}{\partial \sigma}$ che rappresenta la variazione di

rendimento atteso a seguito di una variazione infinitesima del rischio, mantenuto inalterato il livello di utilità, risulta positivo. Ciò indica che le curve d'indifferenza sono crescenti.

Consideriamo ora la derivata del tasso marginale di sostituzione tra rischio e rendimento:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial \sigma^2} = -\frac{2c}{b + 2c\mu}$$

Per un investitore avverso al rischio tale quantità è positiva. Questo comportamento, tra l'altro tipico delle funzioni di utilità quadratiche, porta a concludere che le relative curve d'indifferenza siano crescenti e convesse.

Di conseguenza possiamo adattare ad ogni individuo avverso al rischio una qualsiasi funzione di utilità che presenti derivata seconda negativa.

L'investitore sceglierà, tra tutte le alternative possibili, quella giacente su di una curva d'indifferenza che esprime un livello di utilità superiore rispetto a tutte le altre disponibili. Nel caso in cui l'investitore sia a conoscenza solo del

valor medio e della sua varianza, le sue preferenze si baseranno esclusivamente su questi due momenti. In questo caso diremo che esse soddisfano il criterio media-varianza, tale per cui l'individuo sceglierà quel portafoglio che gli garantisce il maggiore valore atteso a cui è associato il minore rischio.

Nei capitoli successivi svilupperemo il criterio media-varianza, che coincide nei seguenti aspetti, con quello dell'utilità attesa precedentemente esaminato:

- quando il rendimento aleatorio delle alternative si distribuisce normalmente, ossia è interamente descritto dal suo valore medio e dalla sua varianza
- nel caso di funzioni di utilità quadratiche

Il criterio media-varianza, sebbene si presti efficacemente all'utilizzo pratico, ignora il terzo e tutti i termini successivi dell'espressione 1.2. Esso prende in considerazione soltanto i primi due momenti della distribuzione di probabilità della funzione d'utilità, motivo per cui tale approccio può essere visto come un'approssimazione della realtà e della teoria dell'utilità attesa. Nell'indecisione tra due scelte alternative, sarebbe quindi molto utile considerare anche il terzo termine dell'espressione 1.2, che rappresenta l'indice di asimmetria della distribuzione. Recenti ricerche (Li Calzi, 2004) hanno infatti dimostrato che la maggior parte di giochi e lotterie godono di un indice di asimmetria positivo.

Anche se tali casi possono ricondurci a descrivere una sfera ristretta della realtà, la teoria dell'utilità attesa rimane un ottimo punto di partenza per la costruzione di modelli decisionali in contesti rischiosi.

Capitolo 2

LA FRONTIERA EFFICIENTE

In questo capitolo tratteremo diversi approcci al calcolo della frontiera efficiente ed i test statistici d'efficienza ad essi associati sottolineandone le peculiarità e i problemi operativi.

Oltre al classico test basato sulle *Performance* di Sharpe, che non prevede la presenza di vincoli nei pesi degli asset che costituiscono il portafoglio, prenderemo in considerazione il recente test di Basak, Jagannathan e Sun (2002), che introduce vincoli di disuguaglianza per i pesi garantendo una maggiore flessibilità d'utilizzo, sebbene a scapito della potenza.

Il test infatti, a differenza dei precedenti, partendo da una frontiera efficiente per la quale non si è in grado di ricavare un'espressione analitica, è stato ottenuto ricorrendo ad una approssimazione con il metodo Delta. In seguito adatteremo tale test al nostro caso, al fine di valutare l'efficienza di fondi comuni d'investimento bilanciati e dei relativi benchmark, in presenza di vincoli di disuguaglianza.

2.1 Il problema

Una delle teorie tutt'ora più utilizzate e diffuse nella scelta di portafogli efficienti si basa sulla ricerca delle possibili composizioni ottimali di rischio e rendimento considerando il grado di avversione al rischio dell'investitore e quindi la sua funzione d'utilità (vedi capitolo 1). I portafogli efficienti rappresentano pertanto le possibili soluzioni ottimali, non solo perché si trovano esattamente nella frontiera efficiente, ma anche perché rappresentano panieri in grado di massimizzare la funzione d'utilità degli investitori. Tale approccio, chiamato criterio media-varianza, fu sviluppato da Markowitz nel 1959.

I rendimenti risultano utili in quanto, misurando la variazione percentuale dei prezzi in un certo intervallo di tempo, determinano la redditività dell'attività finanziaria, e godono di proprietà, quali la stazionarietà ed ergodicità, che ne migliorano i calcoli.

In caso di osservazioni provenienti da processi stocastici come lo sono i prezzi, queste proprietà diventano necessarie per condurre una valida inferenza.

E' necessario quindi imporre le seguenti restrizioni alle caratteristiche del processo, in modo da rendere possibile l'applicazione dei metodi d'inferenza statistica:

- A) restrizioni sull'eterogeneità del processo, in modo da evitare un'eccessiva variabilità delle osservazioni. (Stazionarietà)
- B) restrizioni sulla memoria del processo, tali da rendere, in qualche modo, non fortemente dipendenti in senso stocastico eventi lontani nel tempo. (Ergodicità)

In questo modo possiamo trattare le osservazioni provenienti da un processo aleatorio come una successione di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite

- A) Un processo Y_t è **stazionario in senso forte** se: $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n})$ e $(Y_{t_1+k}, Y_{t_2+k}, \dots, Y_{t_n+k})$ hanno la stessa distribuzione di probabilità congiunta per ogni n e k interi. (k rappresenta il periodo temporale)

Significa che sotto la condizione di stazionarietà in senso forte la distribuzione del processo non varia se ci si sposta nel tempo di k periodi.

Un processo Y_t è **stazionario in senso debole** se, per ogni t e k interi,

$$E(Y_t) = \mu$$

$$Var(Y_t) = \sigma^2$$

$$Cov(Y_t, Y_{t+k}) = \gamma(K)$$

$$Corr(Y_t, Y_{t+k}) = \frac{\gamma(K)}{\sigma^2} = \frac{\gamma(K)}{\gamma(0)} = \rho(K)$$

Quindi un processo è stazionario in senso debole se, al variare di t , la media e la varianza non variano, e le autocovarianze dipendono da k , ossia dal numero di periodi intercorrenti tra t e $t+k$.

E' utile sottolineare alcuni aspetti riguardanti i legami tra questi due concetti di stazionarietà:

- La stazionarietà in senso stretto non implica quella in senso debole, infatti la prima non prevede l'esistenza dei momenti di secondo ordine.
- La stazionarietà forte congiuntamente all'ipotesi di esistenza di $E(X_t^2)$ implica la debole.
- La stazionarietà debole non implica quella forte, dato che essa non prevede l'invarianza delle distribuzioni rispetto a traslazioni sull'asse del tempo.
- Un caso importante in cui la stazionarietà debole implica la forte è quello di distribuzione normale per gli elementi del processo.

Ricordando che:

Varianza: $\sigma_t^2 = E(Y_t - \mu_t)^2$

Autocovarianza: $\gamma(t, s) = E(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)$

Autocorrelazione: $\rho(t, s) = \frac{\gamma(t, s)}{\sigma_t \sigma_s}$

$\rho(k)$ è la funzione di autocorrelazione (ACF) di un processo stazionario, e presenta le seguenti caratteristiche:

- è lo strumento principale per analizzare la struttura di dipendenza (lineare) di un processo stazionario

- fornisce indicazioni sulla lunghezza e sulla forza della memoria del processo
- il suo grafico viene chiamato correlogramma

B) L'ergodicità verrà qui di seguito definita, in maniera non rigorosa, come l'insieme delle condizioni grazie alle quali la media, la varianza e le autocovarianze di un processo stazionario in senso debole possono essere indotte a partire da una singola traiettoria. In altri termini al tendere di T all'infinito i momenti empirici temporali delle variabili aleatorie tendono in probabilità ai momenti teorici.

Un processo (stazionario) è ergodico

- Per la media se :
$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t = \mu$$
- Per la varianza se:
$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X_t - \mu)^2 = \sigma^2$$
- Per la covarianza se:
$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^T (X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) = \gamma_k$$

I principali metodi per calcolare il rendimento di un titolo sono due: la capitalizzazione semplice e la capitalizzazione continua.

Nella **capitalizzazione semplice** il rendimento di un titolo tra le date t e $(t+1)$ è definito da :

$$r_{t+1} = \frac{p_{t+1} + d_{t+1} - p_t}{p_t} = \frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t} - 1$$

dove p_t e p_{t+1} sono i prezzi del titolo alle date t e $t+1$ e d_{t+1} è il cash flow (dividendo, interesse, ecc..) generato dal titolo tra le due date.

La somma $1 + r_{t+1}$ viene chiamata anche fattore di capitalizzazione.

Il **rendimento a k periodi**, per un generico k è dato da:

$$1 + r_t(k) = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j})$$

L'intervallo di tempo è importante per valutare e confrontare i rendimenti (si parla di rendimenti giornalieri, mensili, annuali, ecc..). Se l'intervallo di tempo non'è dato, si assume implicitamente che sia di un anno.

Se si considerano rendimenti (annuali) pluriennali è utile far riferimento al **rendimento (medio) annualizzato**:

$$R_A = \left[\prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}) \right]^{\frac{1}{k}} - 1$$

Un'approssimazione basata su uno sviluppo di Taylor del primo ordine (intorno allo zero) è data da:

$$R_A = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} R_{t-j}$$

Nella **capitalizzazione continua** i rendimenti sono definiti come:

$$r_{t+1} = \log(p_{t+1} + d_{t+1}) - \log(p_t)$$

Nel metodo **della capitalizzazione semplice** la variazione di prezzo ed il flusso di cassa si verificano solo al periodo $t+1$, mentre nella **capitalizzazione continua** si considera che il cambiamento avvenga in ogni intervallo temporale di ampiezza infinitesima compreso tra t e $(t+1)$.

Poichè il rendimento dell'investimento al tempo $t+1$ non'è noto a priori, si assume che abbiamo a che fare con una variabile aleatoria descritta da una funzione di densità. Si ipotizza che la distribuzione congiunta del vettore aleatorio dei rendimenti (r_1, r_2, \dots, r_N) sia caratterizzata, come accade per una normale, solo dai primi due momenti. Infatti si assume che i tassi di rendimento seguono approssimativamente un distribuzione normale.

Si ricordi infatti che il concetto di frontiera efficiente, che sotto l'ipotesi di normalità della distribuzione dei rendimenti assume un significato rigoroso, rappresenterebbe altrimenti in modo approssimativo il possibile trade-off tra rischio e rendimento.

Se consideriamo un mercato in cui ci sia la possibilità d'investire in N attività, possiamo allora adottare la seguente notazione:

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} : \left(\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & L & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & L & \sigma_{2N} \\ M & M & O & M \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & L & \sigma_{NN} \end{pmatrix} \right)$$

Consideriamo poi:

$$\mu_j = E[r_j]$$

$$\sigma_{ij} = E[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)]$$

$$\sigma_j^2 = E[(r_j - \mu_j)(r_j - \mu_j)]$$

$$\sigma_i^2 = E[(r_i - \mu_i)(r_i - \mu_i)]$$

r_i rappresenta i rendimenti del titolo i -esimo

r_j rappresenta i rendimenti del titolo j -esimo

μ_j rappresenta il rendimento atteso del j -esimo titolo

σ_j^2 rappresenta la varianza del titolo j -esimo

σ_i^2 rappresenta la varianza del titolo i -esimo

σ_{ij} rappresenta la covarianza tra il titolo i e il titolo j

Secondo tale ipotesi prendiamo in considerazione i due aspetti fondamentali del criterio *media-varianza*: il rendimento ed il rischio.

μ_j e σ_{ij} possono essere stimati in maniera consistente utilizzando i relativi momenti campionari.

Sia r_t la serie storica dei rendimenti con $t = 1, 2, \dots, T$ allora:

$$\hat{\mu}_j = \bar{r}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{jt}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = s_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it}r_{jt} - \bar{r}_i\bar{r}_j$$

dove

$$\underline{\mu} = \bar{r} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_N \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\Sigma} = S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & L & s_{1N} \\ s_{21} & s_{22} & L & s_{2N} \\ M & M & O & M \\ s_{31} & s_{32} & L & s_{NN} \end{pmatrix}$$

Le preferenze dell'investitore vengono determinate secondo la sua funzione di utilità $U(W)$ (vedi capitolo 1). Markowitz (1959), nella ricerca della scelta ottimale, ha fornito all'investitore una soluzione esplicita. Questa è in grado di tener conto dell'incertezza dei risultati e si basa sull'ipotesi che la funzione di utilità attesa sia una funzione dei primi due momenti della distribuzione di W .

Definendo con $r^*_{t+1} = \frac{W^*_{t+1} - W^*_t}{W^*_t}$ il rendimento dato dalla variazione relativa

della ricchezza al tempo $t+1$ rispetto al tempo t si ha

$$E[U(r^*_{t+1})] = E[r^*_{t+1}] - kVar(r^*_{t+1}) \quad (2.1)$$

La costante $k > 0$ riflette il grado di avversione al rischio, cioè la perdita massima che l'investitore è disposto ad accettare a fronte di rendimenti potenziali più elevati (risk tolerance).

L'espressione (2.1) viene chiamata funzione di utilità attesa media-varianza, dove si suppone che l'utilità del rendimento sia crescente in relazione al suo valore atteso e dipenda negativamente, in caso di avversione al rischio, dalla sua varianza.

Nel precedente capitolo abbiamo evidenziato che il criterio media-varianza è applicabile nel caso in cui la funzione d'utilità sia quadratica, cioè quando $U(W) = W - k(W^2)$. Chamberlain (1983) ha dimostrato che tale criterio può essere applicato a qualsiasi funzione di utilità in casi di distribuzione dei rendimenti di tipo ellittico, distribuzione della quale la normale multivariata è un caso particolare. E' dunque possibile concludere che tale criterio è applicabile in un contesto generale, poiché rappresenta un'approssimazione della vera funzione di utilità attesa, qualunque sia la sua forma, attraverso l'utilizzo di una espansione in serie di Taylor del secondo ordine rispetto a r^*_{t+1} .

Il comportamento dell'investitore si basa dunque essenzialmente sui primi due momenti dei rendimenti. Egli preferirà quindi, a parità di rischio, un rendimento medio più alto rispetto ad uno più basso, mentre, a parità di rendimento atteso, preferirà un rischio più basso rispetto ad uno più alto

$$\left. \begin{array}{l} i) E(r_{pA}) \geq E(r_{pB}) \\ ii) \sigma_{pA} \leq \sigma_{pB} \end{array} \right\} \text{Criterio media-varianza (CMV)}$$

con

r_{pA} : rendimenti del portafoglio A

r_{pB} : rendimenti del portafoglio B

σ_{pA} : rischio del portafoglio A

σ_{pB} : rischio del portafoglio B

Attraverso il criterio media varianza si è in grado di riportare in un grafico la media, la varianza o la deviazione standard, e le curve d'indifferenza della funzione d'utilità (2.1), ossia un insieme di punti che rappresentano gli investimenti con la caratteristica comune di generare la stessa utilità attesa

Il CMV non determina un unico portafoglio ottimale, ma un insieme di portafogli efficienti che costituiscono la frontiera efficiente.

Il portafoglio ottimale è diverso per ciascun investitore poichè dipende dal suo grado di avversione al rischio. Esso è determinato dal punto d'intersezione tra la frontiera efficiente e la sua curva d'indifferenza.

Nella realtà l'investitore è in genere portato alla scelta non di un singolo titolo, ma di una combinazione di titoli.

In questo caso il rendimento di un portafoglio sarà dato dalla media dei rendimenti delle attività che lo compongono, ponderata con la dimensione degli investimenti.

Rendimento di un portafoglio:

$$r_p = \sum_{j=1}^N w_j r_j = \underline{w}'r \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^N w_j = 1$$

dove r_j è il rendimento del titolo j e w_j è il peso (la proporzione) dell'asset j nel portafoglio p .

Da cui i momenti diventano:

$$E[r_p] = \sum_{j=1}^N w_j \mu_j = \underline{w}' \underline{\mu}$$

$$Var(r_p) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_j w_k \sigma_{jk} = \sum_{j=1}^N w_j^2 \sigma^2 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N w_j w_k \sigma_{jk} = \underline{w}' \underline{\Sigma} \underline{w}$$

Queste grandezze possono essere stimate in maniera consistente inserendo i momenti campionari al posto di quelli teorici.

È interessante notare che la varianza del portafoglio può essere più piccola della varianza delle singole attività che lo compongono, e ciò è dovuto alle correlazioni delle attività.

Il rischio infatti potrebbe essere completamente eliminato disponendo di correlazioni tra le attività negative.

In genere la correlazione è quasi sempre positiva, ma un'opportuna combinazione delle attività permette di ridurre notevolmente il rischio tramite l'effetto della diversificazione.

Nei paragrafi successivi svilupperemo le formule per il calcolo delle principali tipologie di frontiere efficienti

2.2 Efficienza in assenza di restrizioni

L'analisi media-varianza proposta da Markowitz non prevede alcun tipo di restrizione sui pesi delle attività. Significa che tali pesi sono liberi di variare sull'intero asse dei numeri reali.

La determinazione del portafoglio efficiente può essere ottenuta in due modi equivalenti: nel primo si massimizza il valore atteso del rendimento del portafoglio sotto il vincolo di un dato livello di varianza, mentre nel secondo si minimizza la varianza del rendimento del portafoglio sotto il vincolo di un dato livello di valore atteso.

Utilizzando il secondo problema di ottimizzazione, fissiamo quindi un livello per il rendimento atteso del portafoglio:

$$\begin{aligned} & \min_{\underline{w}} \{ \underline{w}' S \underline{w} \} \\ & \text{s.v.} \begin{cases} \underline{w}' \bar{r} = \mu_{p^*} \\ \underline{w}' \underline{i} = 1 \end{cases} \\ & \underline{i} : [1, 1, 1L \quad L \quad 1]' \end{aligned}$$

Risolvendo il problema di ottimizzazione vincolata con il metodo di Lagrange, si ottiene la soluzione:

$$\sigma_{p^*} = \sqrt{\underline{w}'_* S \underline{w}_*} = \sqrt{\frac{(\underline{i}' S^{-1} \underline{i}) \mu_{p^*}^2 - 2(\bar{r}' S^{-1} \underline{i}) \mu_{p^*} + (\bar{r}' S^{-1} \bar{r})}{(\bar{r}' S^{-1} \bar{r})(\underline{i}' S^{-1} \underline{i}) - (\bar{r}' S^{-1} \underline{i})^2}} \quad (2.2)$$

La frontiera efficiente così ottenuta assume la forma di un'iperbole con vertice in

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\underline{i}' S^{-1} \underline{i}}}, \frac{\bar{r}' S^{-1} \underline{i}}{\underline{i}' S^{-1} \underline{i}} \right)$$

ed asintoti

$$\mu_{p^*} = \frac{\bar{r}' S^{-1} \underline{i}}{\underline{i}' S^{-1} \underline{i}} \pm \sigma_{p^*} \sqrt{\frac{(\bar{r}' S^{-1} \bar{r})(\underline{i}' S^{-1} \underline{i}) - (\bar{r}' S^{-1} \underline{i})^2}{\underline{i}' S^{-1} \underline{i}}}$$

Tra le attività che compongono il portafoglio è ragionevole introdurne una che fornisca un rendimento privo di rischio. In questo modo si presentano delle difficoltà computazionali poiché la matrice S delle covarianze tra le attività, che ora contiene una riga ed una colonna di zeri, non è più invertibile e non permette di calcolare la funzione (2.2). Il problema può essere risolto modificando leggermente i vincoli:

$$\begin{aligned} & \min_{\underline{w}} \{ \underline{w}' S \underline{w} \} \\ & \text{s.v.} \quad \underline{w}' (\bar{r} - r_0 \underline{i}) = \mu_{p^*} - r_0 \end{aligned}$$

Dove r_0 rappresenta il rendimento dell'attività non rischiosa.

Minimizzando quindi una funzione che dipende dalle attività rischiose si ottiene il peso dell'investimento dell'attività priva di rischio, come complemento ad uno della somma dei pesi destinati alle attività rischiose. Il

vincolo uguaglia il rendimento del portafoglio ottimale al rendimento fissato meno il rendimento dell'attività non rischiosa.

Essendo il peso associato all'attività *risk free* $w_0 = 1 - \sum_{j=1}^N w_{ij}$ allora:

$$\mu_p^* - r_0 = \underline{w}' \bar{r} + (1 - \underline{w}' \underline{i}) r_0 - r_0 = \underline{w}' \bar{r} - r_0 (1 - 1 + \underline{w}' \underline{i}) = \underline{w}' (\bar{r} - r_0 \underline{i})$$

La soluzione che si ottiene ora è:

$$\sigma_{p^*} = \frac{(\mu_{p^*} - r_0)}{\sqrt{(\bar{r} - r_0 \underline{i})' S^{-1} (\bar{r} - r_0 \underline{i})}}$$

che rappresenta la frontiera efficiente con titolo non rischioso. Nell'introdurre il titolo non rischioso un qualunque portafoglio efficiente avrà il rendimento medio ed il rischio legati da una relazione lineare:

$$\mu_{p^*} = r_0 + \sigma_{p^*} \sqrt{(\bar{r} - r_0 \underline{i})' S^{-1} (\bar{r} - r_0 \underline{i})} \quad (2.3)$$

Questa relazione lineare viene chiamata *capital market line* (CML), mentre il termine entro la radice quadrata, ossia la pendenza della retta, è conosciuto come *performance* di Sharpe.

Il punto di tangenza tra le due frontiere efficienti rappresenta il cosiddetto portafoglio di mercato, composto solo da attività rischiose.

Il vettore dei pesi del portafoglio di mercato è:

$$w_M = \frac{S^{-1} (\bar{r} - r_0 \underline{i})}{\bar{r}' S^{-1} \underline{i} - r_0 \underline{i}' S^{-1} \underline{i}}$$

ed i momenti sono:

$$\mu_M = \frac{\bar{r}' S^{-1} \bar{r} - r_0 \bar{r}' S^{-1} \underline{i}}{\bar{r}' S^{-1} \underline{i} - r_0 \underline{i}' S^{-1} \underline{i}} \quad \sigma_M = \frac{\sqrt{(\bar{r} - r_0 \underline{i})' S^{-1} (\bar{r} - r_0 \underline{i})}}{\bar{r}' S^{-1} \underline{i} - r_0 \underline{i}' S^{-1} \underline{i}}$$

I portafogli ottimali che si trovano lungo la CML, si possono ricavare dalla combinazione lineare tra il portafoglio di mercato e l'attività priva di rischio.

Infatti il teorema di separazione dei fondi dice che un qualunque portafoglio efficiente può essere scritto come combinazione lineare convessa di due portafogli ottimali; quelli che, nella frontiera efficiente presentano rispettivamente il miglior trade-off rischio e rendimento, e la varianza più piccola.

In r_0 tutta la ricchezza è investita nel titolo non rischioso, analogamente in M tutta la ricchezza è investita solo in titoli rischiosi.

Un investitore sceglierà dunque un punto lungo la CML, dove muovendosi da r_0 ad M diminuisce la quota di titolo non rischioso e si acquistano quote via via maggiori di titoli rischiosi, mentre oltre M si investe solo in titoli rischiosi, impegnando una quantità di ricchezza più grande di quanto posseduta. In quest'ultimo caso si prenderà a prestito al tasso r_0 .

Ovviamente un individuo avverso al rischio sarà portato ad investire in misura minore nel portafoglio di mercato e maggiormente nell'attività senza rischio.

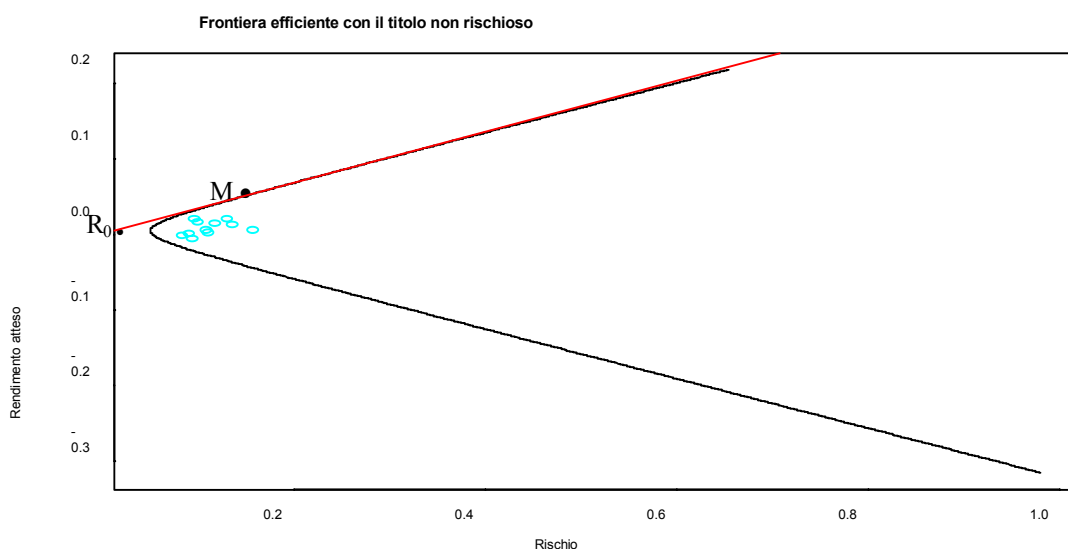


Figura 2.1: esempio di frontiera efficiente con titolo non rischioso

2.2.1 Il test sulle performance di Sharpe

Per verificare l'efficienza di un portafoglio si possono utilizzare diversi test tra i quali il più usato si basa sulle *performance* di Sharpe. La misura della performance di un portafoglio viene misurata tramite l'indice di Sharpe che per un generico portafoglio viene così definito:

$$S_p = \frac{\mu_p - r_0}{\sigma_p} = \frac{w'(\bar{r} - r_0 \underline{1})}{\sqrt{w_p' S w_p}}$$

Questa grandezza misura il rapporto tra il rendimento netto medio e lo scarto quadratico medio del portafoglio e rappresenta la pendenza della retta che nel piano cartesiano (σ, μ) passa per i punti di coordinate $(0, r_0)$ e $(\sigma_p, E[r_p])$.

Dal punto di vista finanziario il suo significato è quello di fornire, all'aumentare unitario del rischio, una misura dell'incremento del rendimento del portafoglio al netto dell'attività non rischiosa (extrarendimento).

Ad un alto indice di Sharpe corrisponde un'elevata performance del portafoglio e tale risultato garantisce un rendimento elevato associato a basso rischio. Dato un insieme di titoli, il valore massimo che l'indice di Sharpe può realizzare combinando i rendimenti di tali titoli viene chiamato *performance potenziale*; essa si ottiene per tutti i portafogli situati lungo la frontiera efficiente e coincide con la pendenza della *capital market line*.

$$S_p = \frac{\mu_M - r_0}{\sigma_M} = \sqrt{(\bar{r} - r_0 \bar{i})' S^{-1} (\bar{r} - r_0 \bar{i})}$$

Finora abbiamo considerato stime campionarie dei veri indici di Sharpe S_p e S_{p^*} , e abbiamo preso in considerazione i momenti campionari anziché quelli teorici.

Per un generico portafoglio si può ricavare la seguente distribuzione asintotica che per valori di $T \rightarrow \infty$ risulta essere:

$$\sqrt{T} (S_p - S_p) \xrightarrow{d} N\left(0, 1 + \frac{S_p^2}{2}\right)$$

Analogamente per un portafoglio sulla *capital market line*, si ricava la seguente distribuzione asintotica, valida per valori di $T \rightarrow \infty$

$$\sqrt{T} (S_p - S_{p^*}) \xrightarrow{d} N\left(0, 1 + \frac{S_{p^*}^2}{2}\right)$$

Per verificare se un portafoglio è efficiente, ossia se la sua performance di Sharpe è la massima raggiungibile, è sufficiente valutare la distanza, in termini probabilistici, tra l'indice di Sharpe di un qualunque portafoglio efficiente (quindi appartenente alla frontiera efficiente) e l'indice del portafoglio che vogliamo valutare.

Il test che ne consegue è molto utile per valutare la bontà di una strategia

$$\begin{cases} H_0 = S_p = S_p^* \\ H_1 = S_p \neq S_p^* \end{cases}$$

$$S = T \frac{\mathbb{S}_p - S_p^*}{1 + S_p^*} = T \frac{\left((\bar{r} - r_0 \underline{i}) S^{-1} (\bar{r} - r_0 \underline{i}) - \frac{\left(\underline{w}'_p (\bar{r} - r_0 \underline{i}) \right)^2}{\underline{w}'_p S \underline{w}_p} \right)}{1 + \frac{\left(\underline{w}'_p (\bar{r} - r_0 \underline{i}) \right)^2}{\underline{w}'_p S \underline{w}_p}} \xrightarrow{d} \chi^2_{N-1} \quad \text{sotto } H_0$$

T rappresenta il numero delle osservazioni, e N il numero degli asset che compongono il portafoglio considerato.

Analogamente è possibile testare l'uguaglianza dell'indice di Sharpe per due portafogli. Ricordando che l'indice di Sharpe per un generico portafoglio i è:

$$\mathbb{S}_{p_i} = \frac{\bar{r}_{p_i} - r_0}{\sigma_{p_i}} = \frac{\underline{w}'_{p_i} (\bar{r}_{p_i} - r_0 \underline{i})}{\sqrt{\underline{w}'_{p_i} S \underline{w}_{p_i}}} \quad i=1,2$$

è possibile costruire un sistema d'ipotesi tale che:

$$\begin{cases} H_0 : S_{p_1} = S_{p_2} \\ H_1 : S_{p_1} \neq S_{p_2} \end{cases}$$

$$S_1 = \sqrt{T} \frac{(\mathbb{S}_{p_1} - \mathbb{S}_{p_2})}{\sqrt{a}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{sotto } H_0$$

Dove:

$$\sqrt{T} \begin{pmatrix} \mathbb{S}_{p_1} - S_{p_1} \\ \mathbb{S}_{p_2} - S_{p_2} \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N(0, V)$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 + \frac{S_{p_1}^2}{2} & \rho_{12} + \frac{S_{p_1} S_{p_2} \rho_{12}^2}{2} \\ \rho_{21} + \frac{S_{p_2} S_{p_1} \rho_{21}^2}{2} & 1 + \frac{S_{p_2}^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{T} (\mathbb{S}_{p_1} - \mathbb{S}_{p_2}) \xrightarrow{d} N(0, a)$$

$$a = 2(1 - \rho_{12}) + \frac{S_{p_1}^2}{2} + \frac{S_{p_2}^2}{2} - S_{p_1} S_{p_2} \rho_{12}$$

ρ_{12} rappresenta il coefficiente di correlazione tra gli extrarendimenti del portafoglio 1 e il portafoglio 2.

2.3 Efficienza con vincoli di disuguaglianza

Il test sulle Performance di Sharpe sviluppato in precedenza non prevede alcuna restrizione sui pesi delle attività che compongono il portafoglio. I pesi di tali attività sono lasciati liberi di variare nell'intero asse dei numeri reali sotto la condizione che la loro somma sia pari ad uno.

In realtà la maggior parte dei portafogli devono sottostare ad alcuni vincoli che spesso non vengono esplicitamente dichiarati.

I pesi delle varie attività finanziarie, ottenuti risolvendo il problema in maniera classica, evidenziano in genere posizioni molto elevate in valore assoluto. In particolare un portafoglio efficiente senza vincoli tende ad assumere posizioni negative, perciò i pesi delle attività possono assumere anche valori negativi.

Questa situazione non risulta però coerente con la realtà.

Il gestore del fondo comune ha il compito di combinare in maniera ottimale le attività che compongono il fondo, e a tal fine non'è ipotizzabile che i pesi di alcune attività possano assumere valori negativi, perché significherebbe vendere allo scoperto, cosa che per motivi di regolamentazione non'è possibile. Per la nostra analisi imporrò in seguito ulteriori vincoli di disuguaglianza con lo scopo di rispettare la percentuale di obbligazionario e azionario definiti in ciascun fondo comune bilanciato. Questo nuovo metodo di valutazione dell'efficienza di un portafoglio deve far fronte però a complessità di calcolo, che per questo motivo verranno approssimate tramite il metodo Delta che illustreremo nel prossimo paragrafo.

Il problema, in presenza di vincoli di disuguaglianza risulta ora essere

$$\min_w \{ \underline{w}' S \underline{w} \}$$

$$s.v. \begin{cases} \underline{w}' \bar{r} = \mu^* \\ \underline{w}' \underline{i} = 1 \\ \underline{w} \geq \underline{a} \\ \underline{w} \leq \underline{b} \end{cases}$$

dove μ^* rappresenta il valore atteso del portafoglio di cui valutiamo l'efficienza

$\underline{w}' \bar{r}$ rappresenta il valore atteso delle attività.

$\underline{w} \geq \underline{a}$ rappresenta il limite inferiore dei pesi assegnati alle attività

$\underline{w} \leq \underline{b}$ rappresenta il limite superiore dei pesi assegnati alle attività

$\underline{w}' \underline{i} = 1$ significa che i pesi assegnati alle attività sommano ad uno

Nel caso si consideri la presenza di un'attività non rischiosa:

$$\min_w \{ \underline{w}' S \underline{w} \}$$

$$s.v. \begin{cases} \underline{w}' (\bar{r} - r_0 \underline{i}) = \mu^* - r_0 \\ \underline{w} \geq \underline{a} \\ \underline{w} \leq \underline{b} \end{cases}$$

In presenza di vincoli di disuguaglianza ci si riconduce al problema di Kuhn-Tucker che ammette una soluzione numerica, ma mantiene difficoltoso l'ottenimento di una espressione analitica della frontiera efficiente. In tal senso Basak, Jagannathan e Sun hanno ricavato un test che, attraverso un'approssimazione con il metodo Delta, valuta l'efficienza di un benchmark in presenza di vincoli di non negatività; tuttavia rimane la difficoltà di ottenere una statistica test, un'efficace distribuzione di probabilità allo scopo di valutare l'efficienza dei portafogli, ed il ricondursi al CAPM.

Il nostro lavoro estende l'analisi di Wang (1998). Questi, esaminando l'efficienza di un benchmark, sviluppa il lavoro di Kandel et al.(1995), che a loro volta, tramite un'ottica bayesiana, considerano la presenza di vincoli di non negatività. La nostra misura dell'efficienza del benchmark può essere vista come una misura di mancata specificazione del CAPM standard, nel caso in cui

il benchmark rappresenta un'approssimazione del portafoglio di mercato. Il portafoglio di mercato non'è in genere efficiente in assenza di vincoli di non negatività (Ross 1977). Sharpe (1991) sostiene invece che il grado d'inefficienza, includendo tali vincoli, potrebbe essere abbastanza piccolo. Sarebbe in tal caso interessante valutare quanto sia piccola tale inefficienza e come cambia il grado d'inefficienza del portafoglio di mercato quando s'includono restrizioni di non negatività a livello dei pesi.

2.3.1 Il test di Basak, Jagannathan e Sun

Basak, Jagannathan e Sun (2002) sono riusciti a determinare la distribuzione asintotica del loro test attraverso un'approssimazione con il metodo Delta e mediante l'utilizzo del teorema del limite centrale e di alcune assunzioni a priori. E' stato necessario però modificare leggermente la formulazione originaria per consentirne l'adattamento al nostro problema.

L'efficienza di un fondo comune d'investimento

Consideriamo un insieme di N attività rischiose, dove l'investimento in ciascuna attività è sottoposto a dei vincoli. Vogliamo valutare l'efficienza di un fondo comune d'investimento, ovvero di un portafoglio la cui composizione non c'interessa, assumendo che non derivi dall'insieme delle attività che determinano la frontiera efficiente oppure ipotizzando che i pesi varino nel tempo.

Disponiamo di T osservazioni dei rendimenti del fondo: $r_t : (\beta, \sigma^2)$ e delle

$$N \text{ attività rischiose : } \underline{R}_t = \begin{bmatrix} R_{1t} \\ \text{M} \\ R_{Nt} \end{bmatrix} : (\underline{\mu}, \underline{\Sigma});$$

I momenti del fondo vengono poi stimati in maniera consistente da:

$$\bar{r}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t, \quad s_T^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r}_T)^2;$$

mentre i momenti delle N attività rischiose sono anch'esse stimate in maniera consistente da: $\bar{R}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$,

$$S_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t R_t' - \bar{R}_T - \bar{R}_T'$$

La nostra misura dell'efficienza valuta la differenza tra la varianza di un portafoglio efficiente e la varianza dei rendimenti del fondo.

Tale portafoglio è caratterizzato dallo stesso rendimento atteso del fondo e, tra tutti i portafogli possibili, ha la varianza più bassa.

Si dirà che il fondo è efficiente quando tale differenza è statisticamente uguale a zero.

Dato il vettore dei pesi delle singole attività che compongono i portafogli della frontiera efficiente:

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}$$

La misura dell'efficienza campionaria del fondo λ_T , è data dalla soluzione del seguente problema:

$$\lambda_T = \min \{ \underline{w}' S_T \underline{w} - s_T^2 \}$$

$$s.v. \begin{cases} \underline{w}' \bar{R}_T = \bar{r}_T \\ \underline{w}' \underline{1} = 1 \\ \underline{w} \geq \underline{a} \\ \underline{w} \leq \underline{b} \\ A \underline{w} \leq c \end{cases}$$

$A \underline{w} \leq c$ rappresenta il vincolo di disuguaglianza che, caratterizzando il limite inferiore o superiore della somma dei pesi delle attività azionarie ed obbligazionarie, deve essere rispettato all'interno del fondo.

Tenendo presente anche l'attività non rischiosa (che non prenderemo in considerazione nella nostra analisi) il problema diventa:

$$\lambda_T = \min \left\{ \underline{w}' S_T \underline{w} - s_T^2 \right\}$$

$$s.v. \left\{ \begin{array}{l} \underline{w}' (\bar{R}_T - r_0 \underline{1}) = \bar{r}_T - r_0 \\ \underline{w} \geq \underline{a} \\ \underline{w} \leq \underline{b} \\ A \underline{w} \leq \underline{c} \end{array} \right.$$

Il portafoglio ottimale si troverà quindi lungo la frontiera efficiente, ma non essendo possibile ricavare per quest'ultima una soluzione esplicita a causa della presenza dei vincoli di disuguaglianza, la potremo ottenere attraverso la programmazione quadratica.

λ_T è, per $T \rightarrow \infty$, uno stimatore consistente del vero valore λ , e l'intervallo di confidenza per λ utilizzando una stima di σ^2 è:

$$\sqrt{T} (\lambda_T - \lambda) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \quad \text{per } T \rightarrow \infty$$

Per ricavare la distribuzione della misura dell'efficienza campionaria del fondo λ_T , faremo delle opportune assunzioni a priori e approssimeremo la funzione $\lambda_T(\bullet)$ come una funzione lineare dei dati attraverso il metodo Delta.

$\lambda_T(\bullet)$ infatti è una funzione non lineare della media e delle covarianze campionarie dei rendimenti delle singole attività e del fondo. Tramite il teorema del limite centrale ricaviamo la distribuzione congiunta del vettore composto da queste variabili e, utilizzando il metodo Delta, possiamo dunque ricavare la distribuzione asintotica della statistica test.

Il punto di partenza per applicare il metodo Delta è l'identificazione della distribuzione campionaria di \bar{V}_T , vettore composto dai momenti primi e secondi campionari di R_t e r_t :

$$\bar{V}_T = \begin{pmatrix} \bar{R}_T \\ \text{vech}(S_T) \\ \bar{r}_T \\ s_T^2 \end{pmatrix}$$

Per semplificare i calcoli definiamo una trasformazione del vettore \bar{V}_T , che ponga al posto delle covarianze i momenti secondi non centrati:

$$\underline{U}_t = \begin{pmatrix} R_t \\ \text{vech}(R_t R_t') \\ r_t \\ r_t^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} R_t \\ Y_t \\ r_t \\ \omega_t \end{pmatrix}$$

Allora

$$\bar{\underline{U}}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \underline{U}_t = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \begin{bmatrix} R_t \\ Y_t' \\ r_t \\ \omega_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}_T \\ \bar{Y}_T \\ \bar{r}_T \\ \bar{\omega}_T \end{bmatrix}$$

Definiamo $g(\cdot)$ come la funzione che trasforma il vettore $\bar{\underline{U}}_T$ nel vettore $\bar{\underline{V}}_T$:

$$g(\bar{\underline{U}}_T) = g \begin{pmatrix} \bar{R}_T \\ \bar{Y}_T \\ \bar{r}_T \\ \bar{\omega}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R}_T \\ \bar{Y}_T - \text{vec}(\bar{R}_T \bar{R}_T') \\ \bar{r}_T \\ \bar{\omega}_T - \bar{r}_T^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R}_T \\ \text{vec}(S_T) \\ \bar{r}_T \\ s_T^2 \end{pmatrix}$$

Applicando il teorema del limite centrale ad $\bar{\underline{U}}_T$ si verifica che, se $\{\underline{U}_t\}_{t \geq 1}$ segue un processo stazionario ed ergodico di media $\underline{\alpha}$ e matrice di varianze-covarianze Λ_0 non singolare ed esistono e sono finiti i momenti quarti, allora:

$$\sqrt{T}(\bar{\underline{U}}_T - \underline{\alpha}) \xrightarrow{d} N(0, \Lambda_{LP})$$

dove Λ_{LP} è la matrice di varianze-covarianze di lungo periodo. Λ_{LP} è non singolare se e solo se non'è possibile esprimere il fondo come combinazione lineare delle singole attività. In questo caso anche $\sum = \text{Cov}(R_t)$ risulta non singolare.

$$\Lambda_{LP} = \Lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (\Lambda_j + \Lambda_j') = \Lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (\text{cov}(\underline{U}_t, \underline{U}_{t-j}) + \text{cov}(\underline{U}_t, \underline{U}_{t-j})')$$

Ricaviamo ora la distribuzione di $\bar{\underline{V}}_T$, dove \underline{V} è il suo valore atteso

$$\sqrt{T}(\bar{\underline{V}}_T - \underline{V}) = \sqrt{T}(g(\bar{\underline{U}}_T) - g(\underline{\alpha})) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\partial g}{\partial \underline{\alpha}} \Lambda_{LP} \frac{\partial g'}{\partial \underline{\alpha}}\right)$$

si ottiene,

$$\sqrt{T}(\lambda_T - \lambda) = \sqrt{T}(h(\bar{V}_T) - h(\underline{V})) \xrightarrow{d} N\left(\underline{0}, \frac{\partial h}{\partial(\underline{V})}' \frac{\partial g}{\partial \underline{\alpha}} \Lambda_{LP} \frac{\partial g}{\partial \underline{\alpha}}' \frac{\partial h}{\partial(\underline{V})}\right)$$

Il problema ora è di determinare la varianza della distribuzione ottenuta, calcolandone tre matrici.

Λ_{LP} può essere stimata attraverso il metodo di Newey e West che tiene in considerazione l'eteroschedasticità e l'autocorrelazione, allo scopo di ottenere una matrice definita positiva.

$$\Lambda_T = \mathbf{A}_0 + \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{j}{m+1}\right) (\mathbf{A}_j + \mathbf{A}_j')$$

$$\mathbf{A}_j = \text{cov}(\underline{U}_t, \underline{U}_{t-j}) = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T (\underline{U}_t - \bar{\underline{U}}_T)(\underline{U}_{t-j} - \bar{\underline{U}}_T)'$$

con m definito in modo da catturare interamente l'autocorrelazione.

Le altre due matrici sono ottenute dalle derivate delle funzioni $g(\cdot)$ ed $h(\cdot)$ rispetto ai momenti campionari.

$$\frac{\partial g}{\partial \underline{U}_T} = \begin{pmatrix} I_N & \mathbf{0}_{N \times \frac{N(N+1)}{2}} & \mathbf{0}_{N \times 2} \\ \begin{bmatrix} K_1 \\ \mathbf{M} \\ K_N \end{bmatrix} & I_{\frac{N(N+1)}{2}} & \mathbf{0}_{\frac{N(N+1)}{2} \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times N} & \mathbf{0}_{2 \times \frac{N(N+1)}{2}} & \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -2\bar{r}_T & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

con K_i :

$$K_i = - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N-i+1) \times (i-1)} & \begin{bmatrix} \bar{R}_{iT} \\ \mathbf{M} \\ \bar{R}_{NT} \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{(N-i+1) \times (N-i)} \end{bmatrix} - \bar{R}_{iT} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N-i+1) \times (i-1)} & I_{N-i+1} \end{bmatrix}$$

\bar{R}_{iT} è l' i -esimo elemento di \bar{R}_T ;

$$\frac{\partial h}{\partial(\underline{V}_T)} = \begin{bmatrix} 0 \\ w_1^2 \\ 2w_1w_2 \\ M \\ 2w_1w_N \\ w_2^2 \\ 2w_2w_3 \\ M \\ w_N^2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} \underline{w} \\ 0 \\ \frac{N(N+1)}{2} \times 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

δ è il valore assunto dal moltiplicatore di Lagrange associato al vincolo sull'uguaglianza tra i rendimenti attesi delle attività e del fondo, e \underline{w} rappresenta il vettore contenente i pesi ottimali.

Ricordiamo che, per verificare l'efficienza del fondo, valutiamo la differenza tra la varianza di un portafoglio efficiente che è caratterizzato dallo stesso rendimento atteso del fondo e che tra tutti i portafogli possibili ha la varianza più bassa, e la varianza dei rendimenti del fondo.

Definiremo il fondo efficiente quando tale differenza è statisticamente uguale a zero.

Quindi per verificare $\begin{cases} H_0 : \lambda = 0 \\ H_1 : \lambda \neq 0 \end{cases}$ si considera la statistica test:

$$BJS = \sqrt{T} \frac{\lambda_T}{\sqrt{\frac{\partial h}{\partial(\underline{V}_T)} \frac{\partial g}{\partial \underline{U}_T} \Lambda_T \frac{\partial g}{\partial \underline{U}_T} \frac{\partial h}{\partial(\underline{V}_T)}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{per } T \rightarrow \infty$$

Il test così ottenuto è adattabile a qualsiasi tipo di vincolo, determinando ovviamente valori differenti dei pesi ottimali delle attività e del moltiplicatore di Lagrange.

Tuttavia il test rischia di soffrire di bassa potenza poiché, maggiori sono i vincoli imposti, tanto più la misura dell'efficienza risulterà una funzione non lineare dei dati. Il metodo Delta, utilizzato per approssimare la funzione λ_T come lineare, potrebbe quindi introdurre notevoli errori di approssimazione.

Efficienza del benchmark di riferimento per il fondo

Nel caso in cui volessimo valutare l'efficienza del benchmark di riferimento del fondo, dovremo modificare la statistica test precedentemente considerata. Questa modifica è necessaria quando il portafoglio, di cui si desidera valutare l'efficienza, è composto da una combinazione delle attività che appartengono alla frontiera efficiente. Nel nostro caso il benchmark deriva appunto da una combinazione lineare delle attività che appartengono alla frontiera efficiente, quindi la matrice Λ_{LP} diverrebbe singolare e di conseguenza il test degenererebbe verso il valore 0. Anche $\frac{\partial g}{\partial \underline{U}_T}$ e $\frac{\partial h}{\partial (\underline{V}_T)}$ andranno modificate,

poiché dovremo prendere in considerazione anche le derivate del rendimento atteso e della varianza del benchmark, che a loro volta derivano dai momenti delle attività.

Il problema ora diventa:

$$\lambda_T = \min_w \left\{ \underline{w}' S_T \underline{w} - \underline{\omega}' S_T \underline{\omega} \right\}$$

$$s.v. \begin{cases} \underline{w}' \bar{R}_T = \underline{\omega}' \bar{R}_T \\ \underline{w}' \underline{i} = 1 \\ \underline{w} \geq \underline{a} \\ \underline{w} \leq \underline{b} \\ A \underline{w} \leq c \end{cases}$$

Dove $\underline{\omega}$ è il vettore dei pesi del benchmark di cui vogliamo verificare l'efficienza. Ora λ_T è funzione dei momenti delle singole attività, poiché i momenti del benchmark sono una loro trasformazione.

La distribuzione della statistica test è la stessa, varia l'espressione della varianza:

$$\sqrt{T} (\lambda_T - \lambda) \xrightarrow{d} N \left(0, \frac{\partial h}{\partial (\underline{V})} \frac{\partial g}{\partial \underline{\alpha}} \Lambda_{LP} \frac{\partial g}{\partial \underline{\alpha}} \frac{\partial h}{\partial (\underline{V})} \right)$$

$$\underline{V}_T = \begin{bmatrix} \underline{R}_t \\ \text{vech}\left(\left(\underline{R}_t - \bar{\underline{R}}_T\right)\left(\underline{R}_t - \bar{\underline{R}}_T\right)'\right) \end{bmatrix}$$

che è una funzione di:

$$\underline{U}_T = \begin{bmatrix} \underline{R}_t \\ \text{vech}\left(\underline{R}_t \underline{R}_t'\right) \end{bmatrix}$$

Λ_{LP} si calcola come in precedenza, ma ora non prendiamo in considerazione i momenti del benchmark nel vettore \underline{V}_T dalla quale è ottenuta.

La seconda matrice diventa quindi

$$\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{U}_T} = \begin{pmatrix} I_N & \mathbf{0}_{N \times \frac{N(N+1)}{2}} \\ \begin{bmatrix} K_1 \\ \mathbf{M} \\ K_N \end{bmatrix} & I_{\frac{N(N+1)}{2}} \end{pmatrix}$$

La terza matrice è data dal calcolo della seguente derivata $\frac{\partial h}{\partial (\bar{\underline{V}}_T)}$

Partendo dal lagrangiano, per cui

$$l_T = \underline{w}' S \underline{w} - \underline{\omega} S \underline{\omega} + \delta (\underline{w}' \bar{\underline{R}}_T - \underline{\omega}' \bar{\underline{R}}_T) + \underline{\zeta} (\underline{a} - \underline{w}) + \underline{\xi} (\underline{w} - \underline{b}) + \underline{\varrho} (A \underline{w} - c) + \underline{\phi} (\underline{w}' \underline{i} - 1)$$

e considerando $\underline{w}, \delta, \underline{\zeta}, \underline{\xi}, \underline{\varrho}$, e $\underline{\phi}$ come valori ottimali, allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial (\bar{\underline{V}}_T)} &= \frac{\partial l_T}{\partial (\bar{\underline{V}}_T)} = \frac{\partial}{\partial (\bar{\underline{V}}_T)} (\underline{w}' S \underline{w} - \underline{\omega}' S \underline{\omega}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial (\bar{\underline{V}}_T)} \delta (\underline{w}' \bar{\underline{R}}_T - \underline{\omega}' \bar{\underline{R}}_T) + \frac{\partial}{\partial (\bar{\underline{V}}_T)} (\underline{\zeta} (\underline{a} - \underline{w}) + \underline{\xi} (\underline{w} - \underline{b}) + \underline{\varrho} (A \underline{w} - c) + \underline{\phi} (\underline{w}' \underline{i} - 1)) \end{aligned}$$

Calcolando le derivate e raccogliendo i termini si ottiene:

$$\frac{\partial h}{\partial(\underline{V}_T)} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ w_1^2 - \omega_1^2 \\ \text{M} \\ 2w_1w_N - 2\omega_1\omega_N \\ w_2^2 - \omega_2^2 \\ 2w_2w_3 - 2\omega_2\omega_3 \\ \text{M} \\ w_N^2 - \omega_N^2 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} \underline{w} - \underline{\omega} \\ \underline{0} \\ \frac{N(N+1)}{2} \times 1 \end{bmatrix} + \left(2\underline{w}'S - \underline{\zeta} + \underline{\xi} + A\underline{g} + \underline{\phi}i' + \delta\underline{R}_T \right) \frac{\partial \underline{w}}{\partial(\underline{V}_T)}$$

Essendo l'ultimo addendo

$$\frac{\partial h}{\partial(\underline{w})} = \left(2S\underline{w} - \underline{\zeta} + \underline{\xi} + A\underline{g} + \underline{\phi}i' + \delta\underline{R}_T \right) = 0$$

allora può essere eliminato. Quindi possiamo scrivere

$$\frac{\partial h}{\partial(\underline{V}_T)} = \begin{bmatrix} \delta(\underline{w} - \underline{\omega}) \\ w_1^2 - \omega_1^2 \\ \text{M} \\ 2w_1w_N - 2\omega_1\omega_N \\ w_2^2 - \omega_2^2 \\ 2w_2w_3 - 2\omega_2\omega_3 \\ \text{M} \\ w_N^2 - \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

Notiamo ora che, a differenza della precedente versione, compaiono anche i pesi del benchmark da valutare.

La distribuzione risulta essere anche in questo caso la stessa per qualunque tipo di vincolo che noi imponiamo, dato che nei termini della distribuzione compaiono solo quelli appartenenti al vincolo di uguaglianza tra le medie.

Nel caso in cui prendessimo in considerazione le deviazioni standard al posto delle varianze, il problema diventerebbe:

$$\lambda_T = \min_w \left\{ \sqrt{\underline{w}'S_T\underline{w}} - \sqrt{\underline{\omega}'S_T\underline{\omega}} \right\}$$

$$s.v. \begin{cases} \underline{w}' \bar{R}_T = \underline{\omega}' \bar{R}_T \\ \underline{w}' \underline{i} = 1 \\ \underline{w} \geq \underline{a} \\ \underline{w} \leq \underline{b} \\ A\underline{w} \leq c \end{cases}$$

e cambierebbe leggermente soltanto la derivata $\frac{\partial h}{\partial(\underline{V})}$

$$\frac{\partial h}{\partial(\underline{V}_T)} = \frac{1}{2\sqrt{\underline{w}' S \underline{w}}} \begin{bmatrix} \delta \underline{w} \\ w_1^2 \\ 2w_1 w_2 \\ M \\ 2w_1 w_N \\ w_2^2 \\ 2w_2 w_3 \\ M \\ w_N^2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{\underline{\omega}' S \underline{\omega}}} \begin{bmatrix} \delta \underline{\omega} \\ \omega_1^2 \\ 2\omega_1 \omega_2 \\ M \\ 2\omega_1 \omega_N \\ \omega_2^2 \\ 2\omega_2 \omega_3 \\ M \\ \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

In questo modo avremo considerato il rischio e il rendimento nella stessa unità di misura.

Appendice A: Il test di Wang

Il test basato sulle *Performance* di Sharpe ed il test di Basak Jagannathan e Sun si basano sull'ipotesi che i rendimenti siano stazionari nel tempo e che, caratterizzati solo dai primi due momenti, si distribuiscano come una normale.

In questo caso invece si ipotizza che i rendimenti non siano stazionari nel tempo, motivo per cui non avrebbe senso calcolare le stime della media e della varianza delle osservazioni dato che sarebbero le stesse per ogni istante temporale. Wang utilizza una regressione non parametrica, di tipo Kernel, per spiegare la distribuzione dei rendimenti, ricorrendo ad un'informazione di tipo esogena. Nella realtà è ragionevole pensare che rischio e rendimento varino nel tempo, perciò l'approccio proposto da Wang risulta assai utile in quanto ricorre ad una regressione kernel per stimare l'effetto che ha l'informazione condizionante nei momenti dei rendimenti.

Per spiegare i rendimenti ed i loro momenti dobbiamo introdurre ulteriori K variabili definite come \underline{x}_t , che siano in relazione con gli stessi. Alcuni esempi possono riguardare i rendimenti dei buoni del Tesoro ad un mese, il rendimento delle obbligazioni al netto del rendimento dei buoni del Tesoro o il rapporto tra dividendi e prezzi nell'arco di un anno. Definiamo poi un vettore \underline{z}_t di dimensione $q > k$ che contenga tutte le variabili condizionanti o una loro trasformazione,

$$\underline{r}_{t+1} = \begin{bmatrix} r_{1,t+1} \\ r_{2,t+1} \\ \mathbf{M} \\ r_{N,t+1} \end{bmatrix} \otimes \underline{z}_t \quad \underline{y}_{t+1} = \begin{bmatrix} \underline{x}_t \\ \underline{z}_t \\ r_{p,t+1} \\ \underline{r}_{t+1} \end{bmatrix}$$

di dimensioni nq e $(k+q+1+nq)$, con \otimes il prodotto di Kronecker e $r_{p,t+1}$ l'extrarendimento del portafoglio che s'intende studiare.

Per valutare se il portafoglio p è efficiente, introduciamo ora la relazione fondamentale del CAPM (*Capital asset pricing model*). Tale relazione, ricavata dalla *security market line*, determina che il rendimento atteso di ogni attività è una funzione lineare della covarianza tra i rendimenti dell'attività stessa e del portafoglio efficiente

$$E[r_{i,t+1} | \underline{x}_t] = E[r_{p,t+1} | \underline{x}_t] \frac{\text{Cov}(r_{i,t+1}, r_{p,t+1} | \underline{x}_t)}{\text{Var}(r_{p,t+1} | \underline{x}_t)} \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

In altri termini si può scrivere:

$$E[r_{i,t+1} | \underline{x}_t] = E[r_{p,t+1} | \underline{x}_t] \frac{E[r_{i,t+1}, r_{p,t+1} | \underline{x}_t]}{E[r_{p,t+1}^2 | \underline{x}_t]} \quad (\text{A.1})$$

Introdurremo il primo dei tre test proposti da Wang, che tra l'altro è quello che gode di maggiore potenza.

Nell'equazione A.1 sottraiamo ad ambo i membri la quantità a destra dell'uguale:

$$E[r_{i,t+1} | \underline{x}_t] - E[r_{p,t+1} | \underline{x}_t] \frac{E[r_{i,t+1}, r_{p,t+1} | \underline{x}_t]}{E[r_{p,t+1}^2 | \underline{x}_t]} = E[m_{t+1} r_{i,t+1} | \underline{x}_t] = E[e_{i,t+1} | \underline{x}_t] = 0$$

$$\text{con } m_{t+1} = 1 - \frac{E[r_{p,t+1} | \underline{x}_t]}{E[r_{p,t+1}^2 | \underline{x}_t]} r_{p,t+1} = 1 - \frac{g_p(\underline{x}_t)}{g_{pp}(\underline{x}_t)} r_{p,t+1} = 1 - b(\underline{x}_t) r_{p,t+1}$$

Se il portafoglio è efficiente:

$$E[\underline{e}_{t+1} | \underline{x}_t] = \begin{bmatrix} E[e_{1,t+1} | \underline{x}_t] \\ E[e_{2,t+1} | \underline{x}_t] \\ \text{M} \\ E[e_{N,t+1} | \underline{x}_t] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{M} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il test valuta se tale relazione viene rispettata.

Consideriamo dunque le N regressioni

$$e_{i,t+1} = \underline{z}_t' \underline{\delta}_i + u_{i,t+1}, \quad E[u_{i,t+1}] = 0 \quad \forall t = 1, \dots, T; \quad \forall i = 1, \dots, N$$

e verifichiamo l'ipotesi

$$H_0 : \underline{\delta} = \begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 \\ \underline{\delta}_2 \\ \text{M} \\ \underline{\delta}_N \end{bmatrix} = 0$$

Non conoscendo m_{t+1} dobbiamo ricorrere ad una sua stima, in questo caso non parametrica, dal momento che una sua qualche forma funzionale potrebbe compromettere in qualche modo i risultati.

Si assume che le covarianze tra gli $u_{i,t+1}$ siano nulle:

$$V(u_{i,t+1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 & L & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & L & M \\ M & L & O & 0 \\ 0 & L & 0 & \frac{1}{w_T} \end{pmatrix}$$

Ricorrendo ad una stima WLS (Wighted Least Squares) risulta:

$$\underline{\mathcal{S}} = \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{W}_t \underline{z}_t \underline{z}_t' \right)^{-1} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{W}_t \underline{z}_t \mathcal{E}_{i,t+1} \right)$$

$$\mathcal{E}_{i,t+1} = \mathbf{W}_{t+1} r_{i,t+1}$$

$$\mathbf{W}_{t+1} = 1 - \mathcal{G}(\underline{x}_t) = 1 - \frac{\underline{\mathcal{G}}_p(\underline{x}_t)}{\underline{\mathcal{G}}_{pp}(\underline{x}_t)} r_{p,t+1}$$

$$\mathbf{W}_t = \mathcal{J}(\underline{x}_t) \underline{\mathcal{G}}_{pp}(\underline{x}_t)$$

e

$$\mathcal{J}(\underline{x}_t) = \frac{1}{Th^k} \sum_{s=1}^T K\left(\frac{\underline{x}_t - \underline{x}_s}{h}\right) \quad 1.2$$

$$\underline{\mathcal{G}}_p(\underline{x}_t) = \frac{\sum_{s=1}^T K\left(\frac{\underline{x}_t - \underline{x}_s}{h}\right) r_{p,s+1}}{\sum_{s=1}^T K\left(\frac{\underline{x}_t - \underline{x}_s}{h}\right)} \quad 1.3$$

$$\underline{\mathcal{G}}_{pp}(\underline{x}_t) = \frac{\sum_{s=1}^T K\left(\frac{\underline{x}_t - \underline{x}_s}{h}\right) r_{p,s+1}^2}{\sum_{s=1}^T K\left(\frac{\underline{x}_t - \underline{x}_s}{h}\right)} \quad 1.4$$

sono stime di $f(\underline{x}_t)$, $E[r_{p,t+1}|\underline{x}_t]$ e $E[r_{p,t+1}^2|\underline{x}_t]$.

Le stime sono ottenute mediante il metodo del nucleo per la stima della densità ed il metodo della regressione Kernel per la stima dei momenti. Quest'ultimo non'è nient'altro che una media ponderata, con i pesi che decrescono all'aumentare della distanza tra i punti. Definiamo $K(\cdot)$ come la funzione kernel ed h come il parametro di lisciamiento.

Si consiglia di utilizzare come funzione Kernel:

$$K(\underline{u}) = \prod_{i=1}^k \varphi_i(u_i)$$

dove $\varphi_i(u_i)$ rappresenta la densità della distribuzione normale di media 0 e σ_i^2 la varianza della i-esima variabile condizionante.

Si consiglia di porre $h = T^{-\frac{1}{2k+1}}$, così da ottenere nello stesso tempo una buona stima e una non eccessiva perdita d'informazione.

E' necessario conoscere la distribuzione di:

$$\underline{\delta}_T = \begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 \\ \underline{\delta}_2 \\ \vdots \\ \underline{\delta}_N \end{bmatrix}$$

utile al fine di costruire il test

Sotto determinate ipotesi si verifica che:

$$\sqrt{T}(\underline{\delta}_T - \underline{\delta}) \xrightarrow{d} N_{Nq}(0, \Omega),$$

nella quale la matrice di covarianze asintotica viene stimata come

$$\underline{\Omega}_T = \underline{H}_T^{-1} \underline{\Gamma}_0 \underline{H}_T^{-1}$$

dove

$$\underline{H}_T^{-1} = I_N \otimes \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \underline{W}_t \underline{z}_t \underline{z}_t'$$

$$\underline{\Gamma}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \underline{\gamma}_T(\underline{y}_{t+1}) \underline{\gamma}_T(\underline{y}_{t+1})'$$

con:

$$\underline{\gamma}_T(\underline{y}_{t+1}) = \underline{\eta}_T(\underline{y}_{t+1}) - (I \otimes \underline{a}_T(\underline{y}_{t+1})) \underline{\delta}$$

$$\underline{\eta}_T(\underline{y}_{t+1}) = \underline{h}(\underline{x}_t) \left[\underline{g}_{pp}(\underline{x}_t) \underline{r}_{t+1} - \underline{g}_p(\underline{x}_t) r_{p,t+1} \underline{r}_{t+1} + \underline{g}_r(\underline{x}_t) r_{p,t+1}^2 - \underline{g}_{pr}(\underline{x}_t) r_{p,t+1} \right]$$

$$\underline{a}_T(\underline{y}_{t+1}) = \underline{h}(\underline{x}_t) \left[\underline{g}_{pp}(\underline{x}_t) \underline{z}_t \underline{z}_t' + r_{p,t+1}^2 \underline{g}_{zz}(\underline{x}_t) \right]$$

e

$$\underline{g}_{zz}(\underline{x}_t) = \underline{E} \left[\underline{z}_t \underline{z}_t' | \underline{x}_t \right]$$

$$\underline{g}_r(\underline{x}_t) = \underline{E} \left[r_{t+1} | \underline{x}_t \right]$$

$$\underline{g}_{pr}(\underline{x}_t) = \underline{E} \left[r_{p,t+1} r_{t+1} | \underline{x}_t \right]$$

Le ultime tre espressioni vanno nuovamente stimate con la regressione kernel.

La statistica utilizzata per condurre il test risulterà quindi essere la seguente:

$$W = T \underline{\hat{\delta}}_T' \underline{\hat{\Sigma}}_T^{-1} \underline{\hat{\delta}}_T \xrightarrow{d} \chi_{Nq}^2$$

Capitolo 3

PRINCIPALI PRODOTTI FINANZIARI E FONDI COMUNI D'INVESTIMENTO

Di seguito faremo una sintesi dei principali prodotti finanziari, soffermandoci in particolare sui fondi comuni d'investimento.

3.1 I principali prodotti finanziari

A) Titoli a breve termine: questa categoria comprende tutti i valori mobiliari trattati in mercati variamente organizzati ed emessi dal settore pubblico e privato. Il diritto del titolare riguarda ovviamente il rimborso del capitale e il pagamento degli interessi.

A1) Buoni ordinari del tesoro (*Treasury Bills*): rappresentano la componente a breve termine del debito pubblico (il nome inglese *Treasury Bills* o “cambiali del tesoro” richiama immediatamente il paragone con il debito commerciale delle imprese). Mentre nel mercato italiano si sono sviluppati per favorire il collocamento presso il pubblico in altri casi, in cui il finanziamento del deficit era meno drammatico, sono stati utilizzati con lo scopo di aumentare

la quantità di strumenti disponibili per lo svolgimento della politica monetaria. Le loro caratteristiche fondamentali sono:

- Liquidità elevata. Data la breve durata e la mancanza di un rischio d'inadempienza da parte dell'emittente, rappresentano il titolo *risk-free* per eccellenza.
- Brevità della scadenza. Gli interessi sono calcolati in via anticipata.
- Emissione ad intervalli regolari e scadenze fisse. La sottoscrizione è riservata agli intermediari (banche e società di intermediazione mobiliare).
- Collocamento mediante asta. Permette di assicurare la piena rispondenza fra il tasso di aggiudicazione e le condizioni di liquidità del sistema e dei singoli operatori.

A2) Operazioni pronti contro termine: si tratta di operazioni di vendita di titoli per contanti e contestuale riacquisto alla scadenza in data prefissata. Il significato economico è quello di offrire ad una parte una forma d'impiego e all'altra la raccolta di fondi per un periodo di tempo generalmente breve.

B) Titoli a medio e lungo termine: come per i titoli a breve, rientrano in questa categoria i titoli emessi dal settore pubblico, banche, imprese e organizzazioni internazionali. Lo strumento fondamentale è quello dell'obbligazione. Per obbligazione s'intende un titolo di credito rappresentativo, contratto da una persona giuridica (Stato, ente pubblico, società per azioni...) nei confronti dei sottoscrittori. Un'obbligazione incorpora il diritto al pagamento periodico degli interessi sull'importo prestato (cedola) e di una somma nominale che risulta dai titoli ad una determinata scadenza. Il rendimento di un'obbligazione può essere a tasso fisso o variabile: nel primo caso l'interesse viene definito al momento dell'emissione, mentre nel secondo è indicizzato in base alla variazione di un tasso di riferimento per tutta la durata del prestito.

B1) Titoli senza cedola (“zero coupon bond”): titoli privi di cedola.

B2) Obbligazioni indicizzate. Titoli in cui la cedola dipende da variabili finanziarie (tassi, cambi, ecc..) o dall'inflazione. Rientrano in questa categoria i Certificati di credito del Tesoro (Cct ad indicizzazione finanziaria, Ctr a indicizzazione reale).

B3) Obbligazioni convertibili o con warrant: sono titoli obbligazionari che prevedono la possibilità, per il titolare, di trasformare, entro un termine prefissato e a condizioni prefissate, la sua posizione (e i suoi diritti) da quella di obbligazionista a quella di azionista. Economicamente questo titolo ingloba un'opzione ad acquistare azioni.

B4) Obbligazioni strutturate: rappresentano titoli il cui rimborso e/o la remunerazione dipendono, in tutto o in parte, dal valore di determinati titoli o altre attività, dall'andamento dei tassi d'interesse, da valute, indici o altri parametri o dal verificarsi di determinati eventi.

C) Quote di fondi comuni: è lo strumento che certifica la partecipazione di un investitore ad un fondo comune. Nei fondi più diffusi le quote vengono emesse in continuazione e il valore di ciascuna quota viene calcolata in riferimento al valore netto del fondo e al numero delle quote in circolazione.

D) Azioni: Valori mobiliari che rappresentano una quota del patrimonio di una società per azioni. Acquistando anche una sola azione si diventa soci della società, con i diritti e i doveri che ne seguono. Il principale diritto di un'azionista è la partecipazione agli utili della società che vengono incassati sotto forma di dividendi, cioè flussi di cassa periodici (solitamente a scadenza annuale). Altri diritti sono:

- Diritto al rimborso del titolo in caso di scioglimento della società.
- Diritto di voto che consente d'intervenire direttamente nelle decisioni fondamentali dell'impresa, a cominciare dall'approvazione del bilancio

E) Derivati: vengono così chiamati perché il loro valore dipende da altri beni o attività finanziarie che vengono definiti "sottostanti". I derivati possono essere trattati in mercati regolamentati oppure in mercati liberamente organizzati dagli operatori (over the counter). I principali prodotti derivati sono:

E1) Financial futures: contratto in base al quale due parti convengono di acquistare o vendere una determinata quantità di uno specifico strumento finanziario, con consegna ad una data prestabilita e ad un prezzo predeterminato. I contratti vengono trattati nei mercati organizzati (*clearing house*) che definiscono i margini di garanzia ed eliminano il rischio di controparte per i partecipanti al mercato stesso.

E2) Opzioni: contratti che prevedono il diritto, ma non l'obbligo, di comprare o vendere un dato strumento finanziario ad un prezzo fissato, entro un

determinato periodo di tempo (opzione americana) o ad una data prefissata (opzione europea). L'opzione è caratterizzata da un profilo di rischio asimmetrico fra compratore e venditore. Chi esercita un'opzione ad acquistare (*call option*) potrebbe avere un guadagno teoricamente illimitato, pari alla differenza fra il prezzo del titolo a scadenza (che può andare in teoria all'infinito) e quello di esercizio, mentre la sua perdita massima è pari al prezzo pagato per acquistare l'opzione.

E3) Altri contratti derivati: gli *interest rate swap* sono contratti aventi gestione dei rischi simili a quelli dei *futures*, in cui due parti si accordano per scambiarsi, per un certo periodo di tempo, flussi di pagamento riferiti a tassi d'interesse differenti. In un contratto tipico, una parte paga ad un tasso variabile e l'altra ad un tasso fisso. Questo contratto può essere visto come una serie di contratti a termine stipulati inizialmente fra le due parti.

3.2 I fondi comuni d'investimento

I fondi comuni d'investimento sono stati introdotti in Italia nel 1985, e rappresentano un ruolo assai rilevante nell'investimento familiare. Essi sono categorizzati principalmente in tre gruppi distinti a seconda della natura dell'investimento: azionari, obbligazionari e bilanciati. I fondi comuni d'investimento azionari investono esclusivamente in attività azionarie, mentre gli obbligazionari in attività obbligazionarie, i bilanciati operano invece in entrambi i settori. Con la progressiva apertura ai mercati europei ed esteri sono state necessarie ulteriori diversificazioni per rappresentare il mercato in cui il fondo principalmente investe; sono quindi nati fondi di tipo "azionario Italia", "obbligazionario America", ecc. Altre suddivisioni derivano da comparti azionari specifici come, ad esempio, i titoli tecnologici. Le categorie dei fondi vengono definite dalla CONSOB al fine di offrire precise garanzie agli investitori e descrivono sia i titoli in cui il fondo può investire che le percentuali delle diverse categorie di investimento. Il fondo comune d'investimento permette d'investire, anche capitali modesti, in un portafoglio diversificato di attività che opera in particolari mercati o settori. Il capitale del

fondo, separato da quello del gestore, è suddiviso in quote sottoscritte dagli investitori. Le quote vengono rivalutate giornalmente. La possibilità di diversificare il portafoglio attraverso l'acquisto di un'ampia gamma di titoli, riduce la percentuale di rischio. I fondi comuni si caratterizzano per un'attività di intermediazione finanziaria finalizzata alla gestione, per conto di terzi, del risparmio ed in particolare per la combinazione rischio-rendimento secondo le preferenze della clientela. Le caratteristiche economiche essenziali della gestione collettiva possono essere così riassunte:

- La gestione avviene su base collettiva per conto dell'investitore
- Il patrimonio è privo di personalità giuridica ed è suddiviso in quote
- Il patrimonio è autonomo rispetto a quello della società di gestione e a quello dei partecipanti
- La gestione è affidata ad una società specializzata (S.G.R.) che può svolgere solo gestione individuale e collettiva
- Il rapporto fra risparmiatori e società di gestione è regolato dalle norme di legge e dal regolamento del fondo
- Le informazioni disponibili all'investitore sono garantite sia durante la fase che precede l'investimento (prospetto informativo che contiene tutte le informazioni relative al fondo, al benchmark di riferimento ed ai risultati ottenuti in passato) sia nel corso dell'attività di gestione

Vi sono tre tipi di fondi comuni: fondi di tipo aperto, fondi di tipo chiuso e *unit trusts*.

Fondi di tipo aperto (o *mutual funds*): emettono, ogni qual volta vi sia domanda, quote, che sono pronti a riacquistare. Il patrimonio quindi varia in corrispondenza delle adesioni e dei recessi. Il prezzo di emissione o di riacquisto, basato sul valore netto di ciascuna quota, rappresenta una parte del loro patrimonio ed è valutato giornalmente alla chiusura del mercato. Tali fondi possono richiedere delle commissioni d'entrata (*load*), o d'uscita.

Fondi di tipo chiuso: in questo caso i fondi emettono quote sulla base di una loro decisione, non lasciando ai sottoscrittori alcun diritto di riscatto. Il prezzo è determinato dall'incrocio tra domanda e offerta, e può in tal caso anche divergere dalla valutazione del patrimonio corrispondente.

Unit trust: il numero delle quote, come per i fondi di tipo chiuso, è fisso. Non svolgono attività di *trading* sul proprio portafoglio, perciò l'investitore è consapevole del fatto che il portafoglio originario non verrà modificato.

Per questi due motivi i costi di gestione sono minori rispetto a quelli di un fondo aperto o chiuso. I fondi *unit trust* hanno inoltre una data di scadenza prefissata.

L'investimento in quote di fondi comporta dei costi, che possono essere classificati come:

- costi di gestione del fondo, conseguenti all'attività di studio e di analisi dei mercati a prescindere dall'andamento del fondo.
- costi di performance, che possono essere assenti se l'andamento del fondo non'è migliore dell' elemento di paragone (benchmark) che vedremo in dettaglio poi.
- costi di sottoscrizione
- costi di uscita
- costi di deposito titoli, dovuti alla banca che custodisce i titoli del fondo e vigila sul rispetto dei vincoli d'investimento

I costi di sottoscrizione in genere sono a totale beneficio di chi ha venduto la quota del fondo(promotore finanziario). Essi sono espressi in percentuale rispetto all'entità dell'investimento e sono più elevati se questo è di tipo azionario.

Le spese di uscita pensate allo scopo di mantenere la stabilità del patrimonio gestito a vantaggio di chi rimane nel fondo, tendono a diminuire con l'aumentare del periodo in cui i sottoscrittori hanno mantenuto le quote.

Questi costi stanno via via scomparendo, a causa dell'aumentata concorrenza tra i gestori. Vengono tuttavia mantenute le commissioni di gestione.

Le commissioni di performance vengono trattenute dai gestori che nell'arco di un periodo di tempo hanno ottenuto un determinato rendimento. Esistono due metodi per calcolare la performance di un fondo. Il primo esprime in percentuale la differenza fra il rendimento del fondo e un rendimento di confronto (il benchmark), mentre il secondo considera la relazione tra la performance e il rischio. In quest'ultimo caso la misurazione del rendimento, avviene al netto delle componenti di rischio, delle commissioni e dei costi

sostenuti dal sottoscrittore. Per quanto riguarda il rischio un metodo comunemente usato è l'indice di Sharpe, precedentemente trattato, che è dato dal rapporto fra l'extrarendimento e lo scarto quadratico medio del rendimento stesso.

In Europa il mercato dei fondi comuni italiani si colloca al terzo posto alle spalle di Francia e Lussemburgo. Il suo sviluppo è avvenuto soprattutto nell'ultimo decennio, a seguito del risanamento finanziario italiano. Alla fine del 1994 infatti, i fondi comuni italiani rappresentavano ancora la sesta industria in Europa per fondi amministrati, con una quota pari al 6,8% del patrimonio complessivo dei paesi dell'attuale area euro.

	Patrimonio netto		Rendimento Totale
	Totale	Di cui azioni	
1990	47.379	10.813	-3,5
1991	56.191	8.297	9,9
1992	60.663	6.576	8,3
1993	110.093	12.220	25,4
1994	130.168	20.598	-2,4
1995	126.802	18.921	6,8
1996	197.544	20.652	9,3
1997	368.432	39.409	11,8
1998	720.823	76.326	9,4
1999	920.311	85.893	12,6

Figura 3.1: Fondi comuni mobiliari di diritto italiano: patrimonio netto (in miliardi di lire) e rendimento. Fonte: Banca d'Italia, Relazione 1999.

	Totale	Di cui azioni
Italia	475.301	140.359
Germania	235.709	133.053
Francia	651.700	153.600
Lussemburgo	656.618	266.885
Area dell'Euro	2.419.790	859.255
Regno Unito	369.398	299.398
Stati Uniti	6.814.951	4.023.392

Figura 3.2: Patrimonio netto dei fondi comuni nei principali paesi. Fonte: Banca d'Italia, Relazione 1999.

	Totale		Macrocategoria								
	Mill. EURO	Azionari Mill.Euro	%	Bilanciati Mill.Euro	%	Obbligazionari Mill.Euro	%	Fondi di liquidità Mill.Euro	%	Flessibili Mill.Euro	%
dic-84	597,000	121,4	20,3	115,2	19,3	360,5	60,4				
dic-85	10.216,600	2884,9	28,2	3782	37	3549,6	34,7				
dic-86	33.609,500	9741,4	29	14571,8	43,4	9296,2	27,7				
dic-87	30.702,800	7996,8	26	10981,9	35,8	11724,1	38,2				
dic-88	26.630,100	7843,9	29,5	9187,8	34,5	9598,4	36				
dic-89	25.393,200	8581,4	33,8	8465,2	33,3	8346,5	32,9				
dic-90	24.470,800	7472,1	30,5	6795	27,8	10203,6	41,7				
dic-91	29.025,400	6972,2	24	6021,4	20,7	16031,9	55,2				
dic-92	31.326,700	6626,1	21,2	5208,5	16,6	19492,1	62,2				
dic-93	56.858,300	11436,4	20,1	8237,5	14,5	37184,4	65,4				
dic-94	67.225,600	20018,4	29,8	9354,1	13,9	37853,2	56,3				
dic-95	65.482,100	18529,4	28,3	7405,5	11,3	39547,2	60,4				
dic-96	101.719,800	17945,8	17,6	6646,3	6,5	77127,7	75,8				
dic-97	189.739,600	40287,3	21,2	11454,5	6	137997,8	72,7				
dic-98	372.273,900	73965,4	19,9	28878,9	7,8	269429,5	72,4				
dic-99	472.449,600	140358,6	29,7	51119,2	10,8	254365,1	53,8	21142,9	4,5	5463,7	1,2
dic-00	449.930,900	155679,7	34,6	72717,6	16,2	191421,5	42,6	22491	5	7620,9	1,7
dic-01	403.678,800	110635,2	27,4	51947,7	12,9	188568,8	46,7	46651,8	11,6	5875,2	1,5
dic-02	360.694,100	72560,6	20,1	36199,6	10	171878,9	47,7	75705	21	4350,1	1,2
dic-03	379.044,200	74793,8	19,7	32097,3	8,5	170203,6	44,9	96130	25,4	5819,6	1,5
dic-04	358.861,100	72562,03	20,2	30799	8,6	164546	45,9	82708,1	23	8246	2,3

Figura 3.3: Fondi di diritto italiano ed esteri promossi da intermediari italiani-patrimonio Italia. Dati aggregati per macrocategoria in milioni di euro. Fonte:www.assogestioni.it.

	Patrimonio	Ripartizione %					
	Mil. di euro	Titoli di stato	Obbl. Italia	Azioni Italia	Obbl. Estere	Azioni Estere	Altre Attività
dicembre 1988	26.630,1	43,41	9,08	27,06	8,49	6,76	5,20
dicembre 1989	25.393,2	38,05	8,95	30,27	3,84	10,09	8,80
dicembre 1990	24.470,8	49,27	7,86	22,81	3,27	8,20	8,59
dicembre 1991	29.025,4	54,38	6,26	14,77	5,43	9,35	9,81
dicembre 1992	31.326,7	53,35	4,26	10,92	12,15	10,46	8,86
dicembre 1993	56.858,3	47,21	1,68	11,10	18,35	13,15	8,51
dicembre 1994	67.225,6	41,80	3,01	15,61	11,09	15,57	12,92
dicembre 1995	65.482,1	50,21	3,15	14,85	8,94	14,07	8,79
dicembre 1996	101.719,8	62,21	2,42	10,43	7,42	8,02	9,50
dicembre 1997	189.739,6	51,96	2,07	10,63	13,55	10,66	11,13
dicembre 1998	372.273,9	51,91	1,41	10,61	17,16	11,70	7,21
dicembre 1999	472.449,6	34,21	2,66	10,07	21,54	25,76	5,76
dicembre 2000	449.931,0	28,05	2,34	10,70	22,55	29,11	7,25
dicembre 2001	403.678,8	30,32	3,46	7,05	25,81	24,74	8,63
dicembre 2002	360.694,1	36,00	3,84	5,32	24,92	17,43	12,49
dicembre 2003	379.044,2	54,35	2,94	4,46	8,75	18,36	11,14
dicembre 2004	358.861,1	56,11	2,81	5,22	8,1	18,08	9,68

Figura 3.4: Composizione del portafoglio dei fondi di diritto italiano. Fonte: www.assogestioni.it.

3.3 Il benchmark

Il benchmark, utilizzato come parametro di confronto nelle valutazioni delle performance dei fondi comuni d'investimento, è stato istituzionalizzato dalla CONSOB. In ogni fondo il benchmark deve essere composto da indici di titoli in cui il fondo investe o da un'indice della categoria a cui il fondo appartiene. La definizione di benchmark data dal regolamento della CONSOB è la seguente: “parametro oggettivo di riferimento costruito facendo riferimento ad indicatori finanziari elaborati da soggetti terzi e di comune utilizzo, coerente con i rischi connessi alla gestione dell'OICR, al quale confrontare il rendimento dell'OICR stesso.”

Dal primo luglio 2000 questo parametro deve essere obbligatoriamente presente in ogni prospetto che accompagni l'offerta di un fondo d'investimento. In sostanza il benchmark è un indice, ad esempio l'indice S&P/MIB per l'azionario Italia e il Morgan Stanley Capital International per il mercato azionario mondiale, che chiarisce al risparmiatore le caratteristiche e il profilo di rischio del portafoglio in cui investe. Infatti, utilizzato *ex-ante*, funge da indicatore della composizione media del portafoglio; *ex-post* misura il risultato del portafoglio tramite il confronto con il benchmark stesso.

Il solo confronto o riferimento al benchmark è sinonimo di gestione passiva del portafoglio. Con questo metodo il gestore si limita a replicare il paniere dei titoli che è alla base del benchmark, eliminando quindi tutti i costi relativi all'*asset allocation* e alla selezione dei titoli. I fondi a gestione passiva potrebbero però paradossalmente risultare poco convenienti in un mercato, quello dei *free-rider*, dove molti operatori possono facilmente accedere alle medesime informazioni. In tali condizioni il mercato non sarebbe più efficiente e, replicare il benchmark, non sarebbe conveniente.

La presenza di commissioni di performance sottintende che il gestore del fondo s'impegna a battere il proprio benchmark (gestione attiva) e in generale il mercato attraverso conoscenze superiori del mercato stesso, offrendo così un servizio effettivo al cliente. Dal punto di vista teorico è evidente che, se i mercati sono efficienti, tutti gli operatori finanziari dispongono delle medesime informazioni. Poiché tutte le informazioni sono già incorporate nei prezzi, gli

eventuali scostamenti della performance del fondo rispetto al mercato sono puramente casuali e destinati ad annullarsi nel lungo periodo. Per questi motivi gli operatori finanziari tendono a preferire la gestione passiva.

Con queste affermazioni non si vuole sostenere che una gestione passiva sia migliore di una attiva, ma che è necessario verificare che una gestione attiva aggiunga veramente qualcosa all'alternativa passiva.

La ricerca circa l'andamento dei rendimenti dei fondi, gestiti in maniera attiva, è ampia. Jensen (1964) dimostra l'esistenza di extra-rendimenti positivi nel lungo periodo. La maggioranza della ricerca empirica (Cesari e Panetta 1998) giunge alla stessa conclusione, sottolineando che, per il calcolo delle performance non vengono però considerati i vari costi di gestione. Tali costi in realtà, assorbono in maniera rilevante parte delle performance calcolate.

3.4 Portafogli con versamenti o prelevamenti

L'investimento nei fondi comuni viene alterato dall'ammontare di versamenti o prelevamenti intermedi. Se $P(t+1)$ è il valore finale del portafoglio, $P(t)$ è il valore iniziale e $F(t+1)$ è l'ammontare dei versamenti (al netto dei prelevamenti) allora avremo la seguente uguaglianza:

$$P(t+1) = P(t) + CED(t+1) + KGAIN(t+1) + F(t+1)$$

Essa indica che il valore finale è la somma tra valore iniziale, cedole e dividendi incassati, guadagni in c/capitale (variazione dei prezzi di mercato dei titoli in portafoglio) e versamenti netti effettuati.

Il metodo delle quote e rendimento "time-weighted"

Per calcolare il rendimento neutralizzando l'effetto dei versamenti intermedi, si utilizza il metodo delle quote, tipico dei fondi comuni d'investimento. Al tempo 0 si stabilisce il valore iniziale della quota $q(0)$ per cui, dato $P(0)$ il valore del fondo al tempo 0 , avremo un numero di quote pari a $n(0) = P(0)/q(0)$.

Il valore della quota al tempo t è dato da $q(t) = P(t)/n(t)$.

Versamenti e prelevamenti non alterano il valore della quota, e il tasso di rendimento di periodo si ricava dalla variazione del valore della stessa:

$$R(t+1) = \frac{q(t+1)}{q(t)} - 1$$

Il precedente risultato è facilmente dimostrabile: un versamento (prelevamento se negativo) pari a $F(t+1)$, essendo per definizione $F(t+1) = q(t)D_n$, genera (distrugge) D_n quote. Escludendo per semplicità cedole e guadagni in conto capitale, il valore del fondo in data $t+1$ diventa: $P(t+1) = P(t) + F(t+1)$. Il numero delle quote in circolazione diventa $n(t+1) = n(t) + D_n$ e quindi il valore unitario della quota non cambia per effetto del versamento (prelevamento):

$$q(t+1) = \frac{P(t+1)}{n(t+1)} = \frac{P(t) + q(t)D_n}{n(t) + D_n} = \frac{P(t) + \frac{P(t)}{n(t)}D_n}{n(t) + D_n} = \frac{P(t)}{n(t)} = q(t)$$

Un metodo alternativo, per depurare il valore del fondo dai flussi della giornata, si ottiene considerando il seguente valore teorico

$$P^*(t+1) = P(t+1) - F(t+1),$$

ottenendo così il rendimento

$$R(t+1) = \frac{P^*(t+1)}{P(t)} - 1,$$

che prende anche il nome di tasso di rendimento *time-weighted* o *manager rate of return*.

Il rendimento “money-weighted”

Per ottenere un tasso di rendimento che tenga conto dei versamenti intermedi si ricava il tasso interno $r(t+1)$, in regime composto, che verifica la relazione tra valore finale, valore iniziale e flussi intermedi F_1, F_2, \dots ciascuno per le durate (rispetto al momento finale $t+1$) w_1, w_2, \dots

$$P(t+1) = P(t)(1+r(t+1)) + F_1(1+r(t+1))^{w_1} + F_2(1+r(t+1))^{w_2} + \dots$$

Con capitalizzazione semplice si ha:

$$P(t+1) = P(t)(1+r(t+1)) + F_1(1+w_1r(t+1)) + F_2(1+w_2r(t+1)) + \dots$$

da cui :

$$r(t+1) = \frac{P(t+1) - P(t) - \sum_{i=1} F_i}{P(t) + \sum_{i=1} \omega_i F_i}$$

Tale tasso viene chiamato rendimento *money-weighted* o *investor rate of return*.

Il tasso *time-weighted* rappresenta la performance del gestore, mentre il tasso *money-weighted* rappresenta il risultato effettivo dell'investitore tenuto conto di tutti i movimenti del portafoglio. La differenza tra i due dipende sia dall'ammontare che dal momento del versamento intermedio.

Errori di valutazione, soprattutto nel caso in cui le notizie siano ormai di dominio pubblico e quindi già incorporate nei prezzi, determinano risultati disastrosi anche quando il portafoglio viene gestito dal migliore gestore presente sul mercato. Un esempio è fornito dai fondi comuni obbligazionari per i quali si può ricavare sia il tasso di rendimento *time-weighted* (dal valore delle quote), sia il tasso *money-weighted* (stimabile tenendo conto dei versamenti netti effettuati dagli investitori nel tempo).

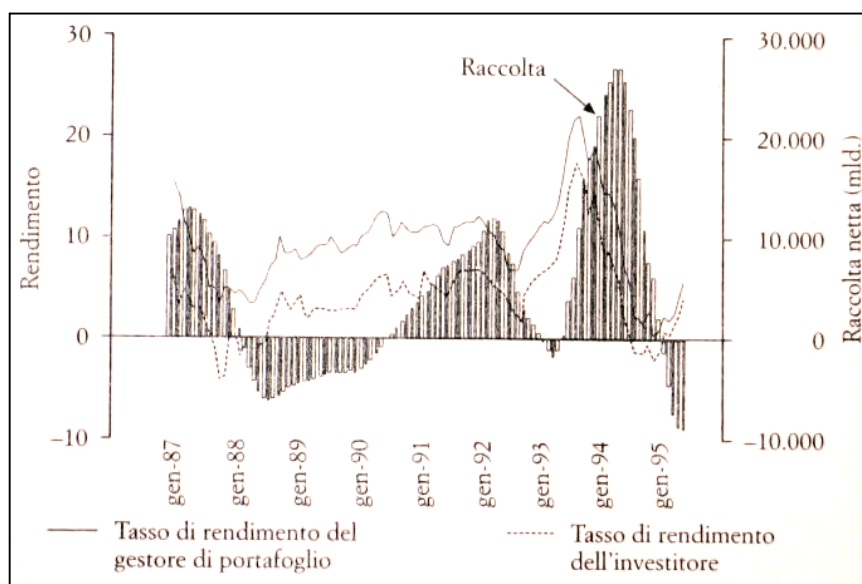


Figura 3.6: Tasso di rendimento del gestore e tasso di rendimento dell'investitore nei fondi comuni obbligazionari. Fonte: R. Cesari, *Introduzione alla finanza del risparmio gestito*, Bologna, CLUEB, 1999

Si può notare che il differenziale a sfavore dell'investitore è stato nel tempo anche vicino a 10 punti percentuali e che in alcune fasi (1987, 1994) quest'ultimo, a fronte di rendimenti positivi per il gestore, ha ottenuto rendimenti inferiori dell'ammontare versato.

Capitolo 4

I RENDIMENTI DELLE ATTIVITA'

Nel seguente capitolo analizzeremo i rendimenti delle attività utilizzate nell'analisi, mostreremo il loro andamento per il periodo campionario considerato e condurremo dei test statistici per verificare il rispetto di alcune condizioni di regolarità.

4.1 Le serie storiche

Dal sito www.morningstar.it sono stati scelti quattro fondi comuni d'investimento bilanciati, che si distinguono per la presenza di vincoli, inerenti alla percentuale d'investimento nella sfera obbligazionaria ed azionaria, necessari ai fini della nostra analisi. Le relative serie storiche delle quotazioni sono state scaricate da Datastream Advance 3.5, programma diffuso negli ambienti finanziari. Per la nostra ricerca abbiamo considerato gli indici dei prezzi di chiusura giornalieri e settimanali in euro, di tali fondi, per il periodo compreso tra 01/01/2002 e 04/10/2004. Tuttavia per facilitare l'analisi, abbiamo utilizzato i relativi rendimenti calcolati come: $r_t = (Q_t - Q_{t-1}) / Q_{t-1}$.

AAA Master Bilanciato ACC.

La composizione del portafoglio di tale fondo, è prevalentemente orientata verso strumenti finanziari di natura azionaria, in misura non superiore al 70% del patrimonio netto, e verso obbligazioni. Le aree geografiche d'investimento sono i mercati regolamentati d'America, i paesi dell'Area del Pacifico, il Sud-Africa e l'Europa. Gli investimenti nei Paesi Emergenti hanno carattere residuale.

Il fondo è gestito da ANTONVENETA ABN AMRO S.G.R. dal 1 marzo 2003.

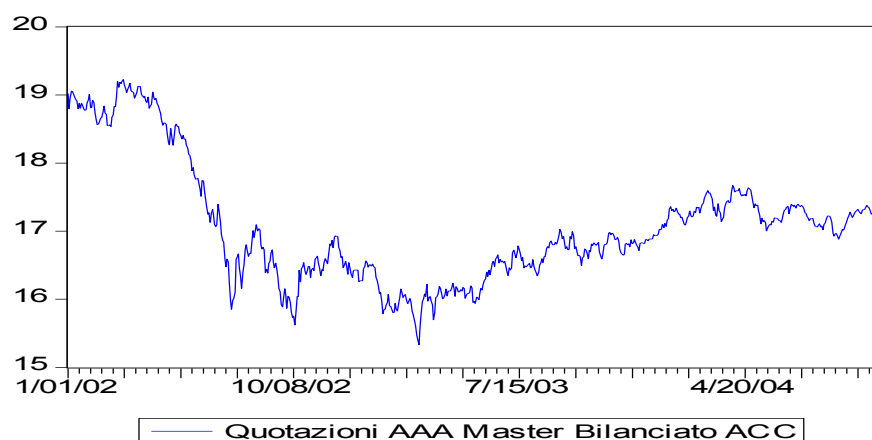


Figura 4.1 Quotazioni giornaliere del fondo dal 01/01/2002 al 04/10/2004

I rispettivi rendimenti vengono poi calcolati tramite la formula:

$$r_t = (Q_t - Q_{t-1}) / Q_{t-1}$$

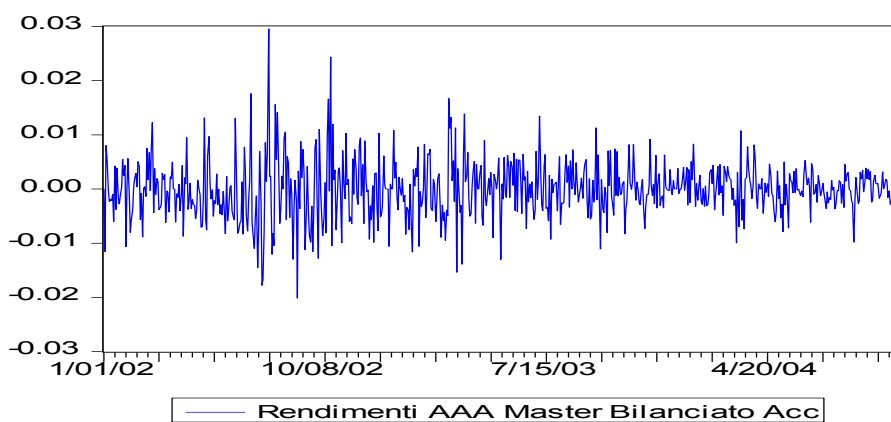


Figura 4.2 rendimenti giornalieri del fondo dal 01/01/2002 al 04/10/2004

I seguenti dati sono aggiornati al 30/09/2004. Fonte www.morningstar.it.

Rendimenti per anni solari:

	2000	2001	2002	2003	2004
Rendimento Totale %	-4,4	-5,8	-14,4	4,1	3,9

Rendimenti trimestrali:

	<i>Trim. 1</i>	<i>Trim. 2</i>	<i>Trim.3</i>	<i>Trim.4</i>
2004	2,8	-0,3	-0,8	2,2
2003	-3,5	4,5	0,5	2,7
2002	0,6	-9,5	-8,4	2,6
2001	-2,8	1,2	-8,6	4,8
2000	5,4	-4,6	-0,1	-4,8

Composizione del fondo

Prime 5 regioni:

Nord America	44,8%
Europa Occidentale-Euro	36,3%
Giappone	8,9%
Regno Unito	5,5%
Europa Occidentale-Non euro	3,1%

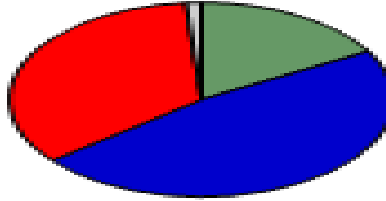
Primi 5 settori

Finanza	27,6%
Beni di consumo	10,4%
Energia	11,4%
Salute	9,7
Beni industriali	9,0%

Esposizione valutaria:

EUR	61,8%
USD	24,2%
YEN	4,6%

Asset allocation :



% sul patrimonio netto

■ Liquidità	16,7
■ Azioni	47,5
■ Obbligazioni	34,5
■ Altro	1,3

Primi 5 Titoli:

France (O.A.T.) 3% 12.7.2008	5,3 %
Netherlands(Bonds) 4,25% 15.7.2013	4,4%
Germany (Bundes) 5.5% 4.1.2031	3,8 %
Ferrovie Dello Stato 9.125%	3,7 %
Finland (Bonds) 5.75% 23.3.2011	3,7 %

Benchmark Dichiarato:

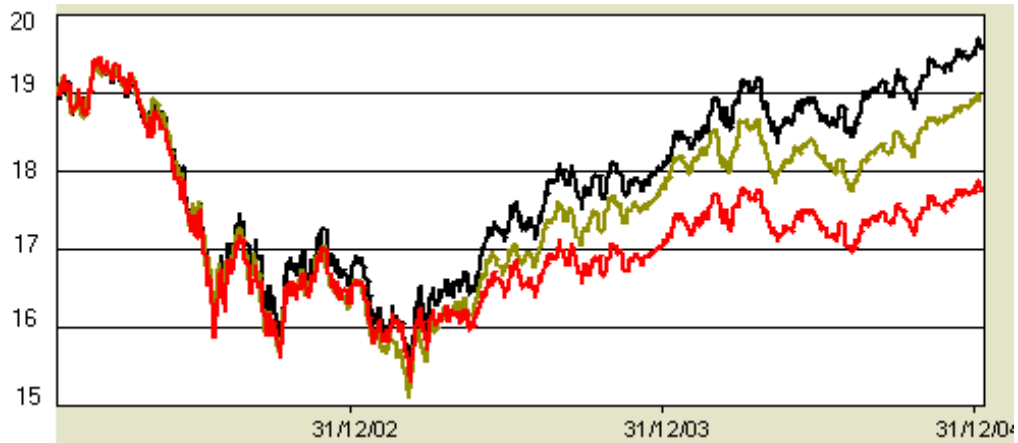
40% MSCI World free index

40% Merrill Lynch EMU Direct Gouvernement Bond Index

10% MSCI Italy

10% Merrill Lynch Euro Gouvernement Bill Index

Utile è il confronto tra il rendimento del fondo ed il relativo benchmark che il gestore ha come obiettivo di realizzare :



- Rendimenti del fondo AAA Master Bilanciato Acc
- Benchmark del fondo AAA Master Bilanciato Acc
- Rendimenti dei fondi categoria bilanciati moderati

Figura 4.3: confronto rendimenti del fondo e relativo benchmark. Periodo compreso dal 01/01/02 al 31/12/04. Fonte: www.morningstar.it

AAA Master Bilanciato Obbligazionario Acc

Il portafoglio di tale fondo è composto prevalentemente da obbligazioni, e prevede la possibilità d'investire in strumenti finanziari di natura azionaria, un valore compreso tra 10-50% del patrimonio netto. Esso permette la diversificazione degli investimenti in tutti i settori economici. Le aree geografiche d'investimento sono i mercati regolamentati d' America, i Paesi dell'Area del Pacifico e l'Europa. Gli investimenti nei paesi Emergenti hanno carattere residuale. Il fondo è gestito da ANTONVENETA ABN AMRO S.G.R. dal 1 marzo 2003.

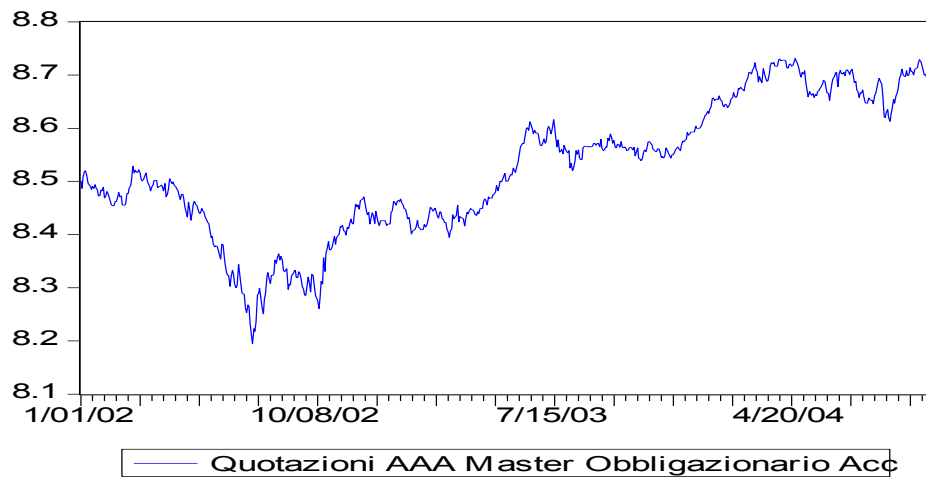


Figura 4.4 Quotazioni giornaliere del fondo dal 01/01/2002 al 04/10/2004

I rispettivi rendimenti vengono poi calcolati tramite la formula:

$$r_t = (Q_t - Q_{t-1}) / Q_{t-1}$$

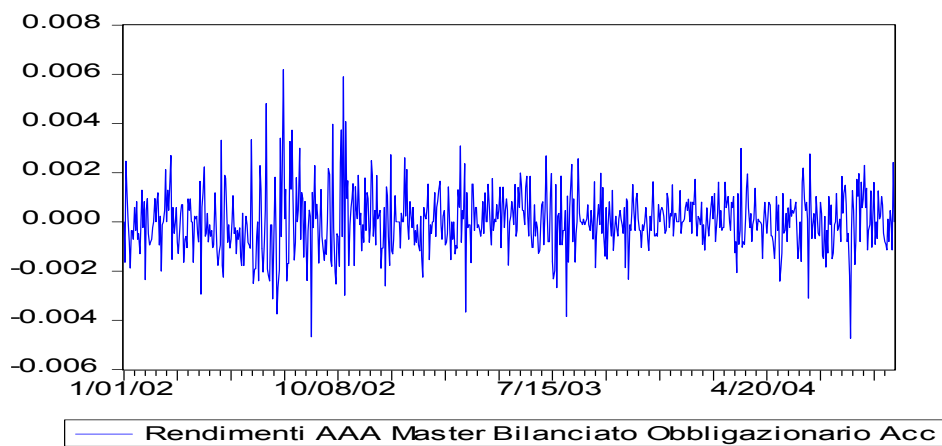


Figura 4.5: Rendimenti giornalieri del fondo dal 01/01/2002 al 04/10/2004

I seguenti dati sono aggiornati al 30/09/2004. Fonte: www.morningstar.it.

Rendimenti per anni solari:

	2000	2001	2002	2003	2004
Rendimento Totale %	1,6	2,5	-1,0	2,1	1,8

Rendimenti trimestrali:

	<i>Trim. 1</i>	<i>Trim. 2</i>	<i>Trim.3</i>	<i>Trim.4</i>
2004	1,4	-0,1	-0,3	0,8
2003	0,0	1,8	0,0	0,4
2002	0,0	-2,0	-0,5	1,5
2001	0,6	0,6	-0,2	1,5
2000	1,8	-1,0	0,5	0,4

Composizione del fondo:**Prime 5 regioni:**

Nord America	64,7%
Europa Occidentale-Euro	21,7%
Regno Unito	10,5%
Europa Occidentale-Non Euro	3,2%
Giappone	0,0%

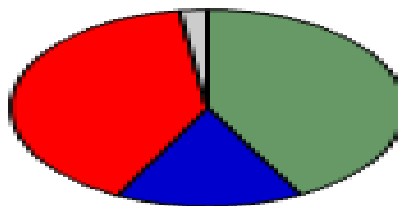
Primi 5 settori

Finanza	24,7%
Beni industriali	11,9%
Beni di consumo	11,8%
Salute	12,9%
Energia	7,6%

Esposizione Valutaria:

EUR	81,0%
USD	14,0%
YEN	2,1%

Asset allocation:



% sul patrimonio netto

■ Liquidità	42,2
■ Azioni	15,4
■ Obbligazioni	40,1
■ Altro	2,3

Primi 5 titoli:

Germany (Bundes)	3,25%	17.4.2009	8,0%
Austria (Bonds)	4%	15.7.2009	3,8%
Belgium (Bonds)	5%	28.3.2035	3,4%
Netherlands (Bonds)	3%	15.7.2006	2,6%
Olivetti Fin Nv	6,5%	24.4.2007	2,0%

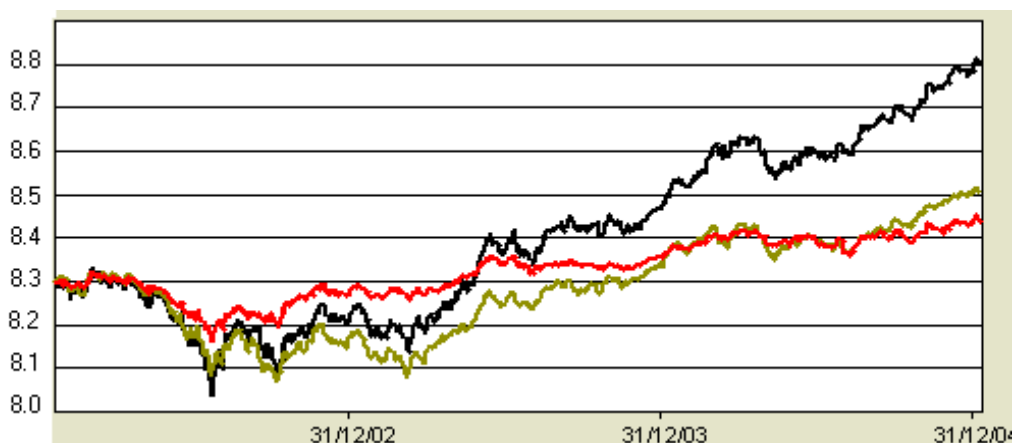
Benchmark dichiarato:

50% Merrill Lynch Euro Government Bill Index

30% Merrill Lynch EMU Direct Government Bond Index

20% MSCI World Free index

Utile è il confronto tra il rendimento del fondo ed il relativo benchmark che il gestore ha come obiettivo di realizzare :



- Rendimenti del fondo AAA Master Bilanciato Obbligazionario Acc
- Benchmark del fondo AAA Master Bilanciato Obbligazionario Acc
- Rendimenti dei fondi categoria bilanciati prudenti

Figura 4.6: confronto rendimenti del fondo e relativo benchmark. Periodo compreso dal 01/01/02 al 31/12/04. Fonte: www.morningstar.it

Arca TE Acc

Questo fondo persegue una politica d'investimento orientata ad una composizione bilanciata del portafoglio, che si divide tra strumenti di natura obbligazionaria ed azionaria. La componente azionaria è prevista in misura non superiore al 30% del patrimonio netto, ed investe in titoli azionari internazionali. La componente obbligazionaria del portafoglio è invece orientata prevalentemente verso investimenti in titoli di Stato europei, americani ed asiatici, ed in via residuale in titoli di Stato emessi da paesi in via di sviluppo. Il portafoglio risulta diversificato sia a livello di mercati sia a livello geografico. Il fondo è gestito da ARCA S.G.R..

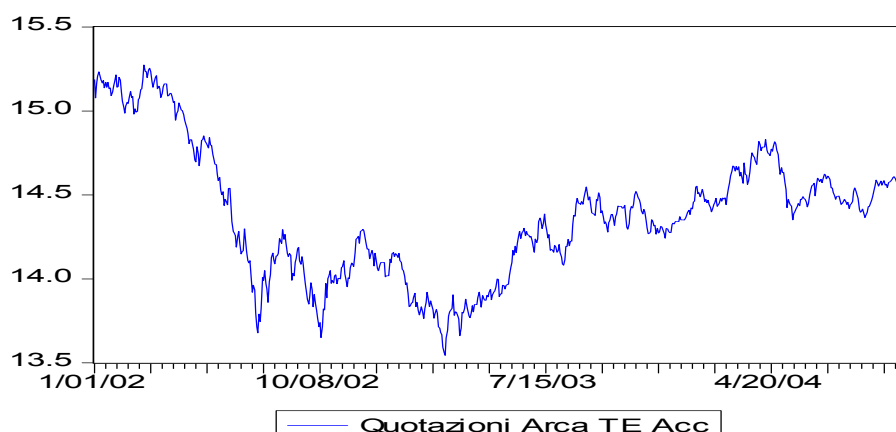


Figura 4.7: Quotazioni giornaliere del fondo dal 01/01/2002 al 04/10/2004

I rispettivi rendimenti vengono poi calcolati tramite la formula:

$$r_t = (Q_t - Q_{t-1}) / Q_{t-1}$$

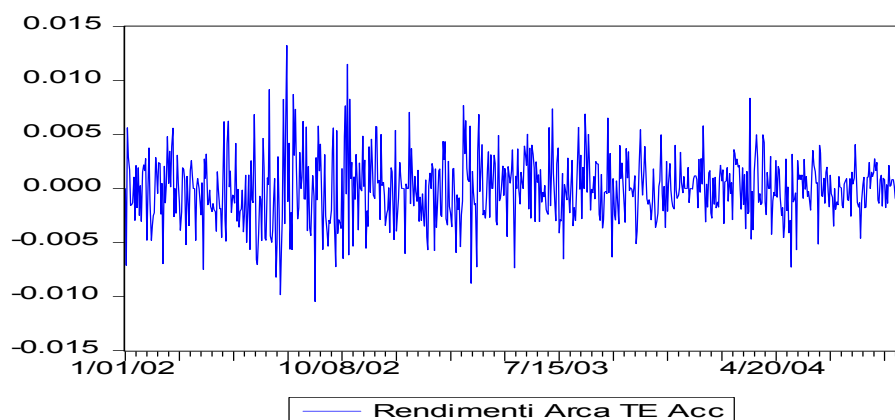


Figura 4.8: Rendimenti giornalieri del fondo dal 01/01/2002 al 04/10/2004

I seguenti dati sono aggiornati al 31/10/2004. Fonte www.morningstar.it.

Rendimenti per anni solari:

	2000	2001	2002	2003	2004
Rendimento Totale %	-0,2	-1,1	-7,7	2,4	3,2

Rendimenti trimestrali:

	<i>Trim. 1</i>	<i>Trim. 2</i>	<i>Trim.3</i>	<i>Trim.4</i>
2004	2,4	-0,7	-0,6	2,0
2003	-2,6	3,9	0,6	0,5
2002	-0,2	-5,7	-3,2	1,3
2001	-0,7	1,7	-5,4	3,6
2000	3,4	-0,7	0,9	-3,7

Composizione del fondo:

Prime 5 regioni:

Nord America	59,5%
Europa Occidentale-Euro	14,7%
Giappone	11,9%
Regno Unito	9,4%
Europa Occidentale-Non Euro	4,5%

Primi 5 settori

Finanza	7,7%
Energia	14,9%
Beni industriali	14,6%
Hardware	9,4%
Beni di consumo	9,3%

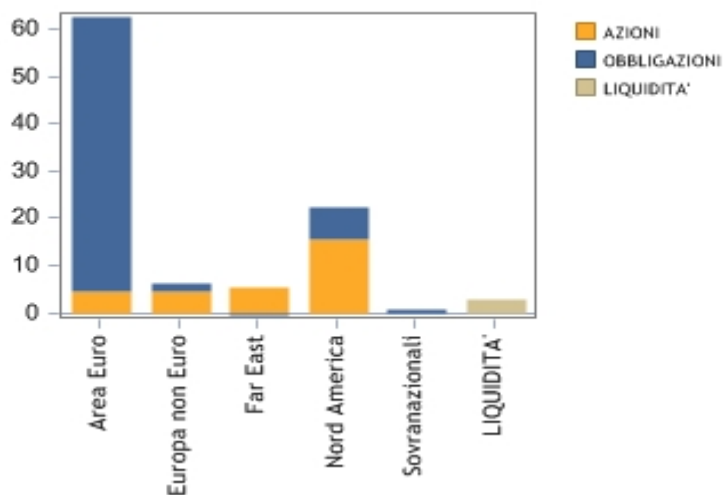


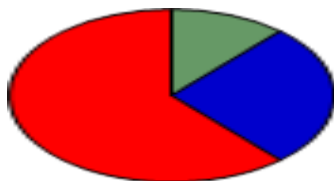
Figura 4.9: Diversificazione per area geografica del titolo Arca TE Acc. Dati aggiornati al 30/11/2004. Fonte www.arcaonline.it

Esposizione valutaria :

EUR 76,7%

USD 12,4%

YEN 8,4%

Asset Allocation:

% sul patrimonio netto

■	Liquidità	11,6
■	Azioni	26,8
■	Obbligazioni	61,6
■	Altro	0,0

Primi 5 titoli:

Germany (Bundes) 1999/4.7.2009	4,5%	10,3%
Italy (BTP) 2003/15.1.2008	3,5%	9,2%
Germany (Bundes)2000/4.1.2030	6,25%	6,5%
Germany (Bundes) 2003/01.04.2013	4,5%	6,5%
Italy (BTP) 1999/1.11.2010	5,5%	4,7%

Benchmark dichiarato:

45% Merrill Lynch EMU Direct Government Bond Index

30% MSCI World Free Index

20% Merrill Lynch Global Government Bond Index

5% Merrill Lynch Euro Government Bill Index

Utile è il confronto tra i rendimenti del fondo ed il relativo benchmark che il gestore ha come obiettivo di replicare:



Figura 4.10: Confronto tra rendimento e benchmark del fondo ARCA TE Acc.
Fonte www.arcaonline.it

Arca BB Acc

Il fondo Arca BB Acc persegue una politica d'investimento orientata ad una composizione bilanciata del portafoglio, in titoli di natura azionaria ed obbligazionaria, riservando non più del 50% del patrimonio netto agli investimenti azionari. La politica d'investimento della componente obbligazionaria del portafoglio è orientata prevalentemente agli investimenti in titoli di Stato e obbligazioni societarie denominate in Euro e, in via residuale, in titoli di Stato ed obbligazioni societarie denominate in Euro emesse da emittenti residenti in Paesi in via di sviluppo. Il fondo è gestito da ARCA S.G.R..

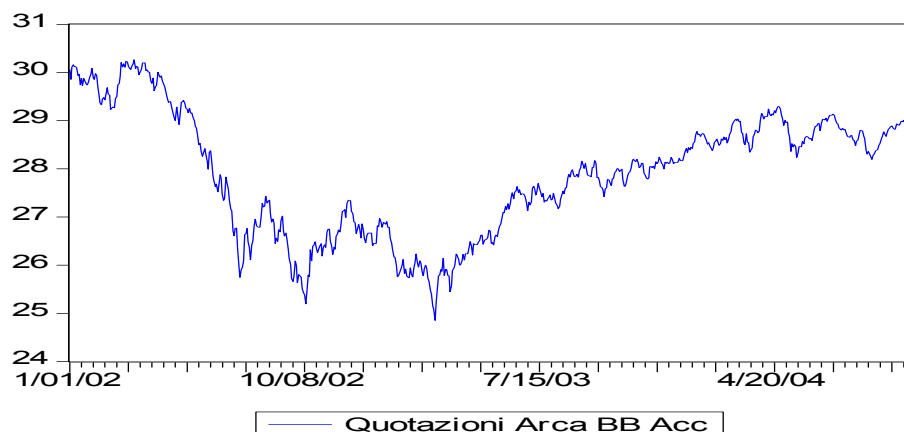


Figura 4.11: Quotazioni giornaliere del fondo dal 01/01/2002 al 04/10/2004

I rispettivi rendimenti vengono poi calcolati tramite la formula:

$$r_t = (Q_t - Q_{t-1}) / Q_{t-1}$$

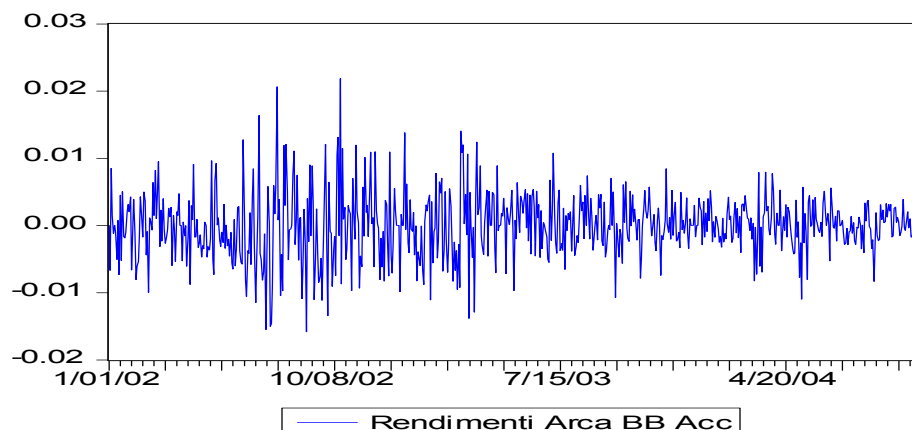


Figura 4.12: Rendimenti giornalieri del fondo dal 01/01/2002 al 04/10/2004

I seguenti dati sono aggiornati al 31/10/2004. Fonte www.morningstar.it

Rendimenti per anni solari:

	2000	2001	2002	2003	2004
Rendimento Totale %	1,5	-6,8	-12,0	6,5	6,8

Rendimenti trimestrali:

	<i>Trim. 1</i>	<i>Trim. 2</i>	<i>Trim.3</i>	<i>Trim.4</i>
2004	2,1	1,2	-1,0	4,4
2003	-3,8	7,2	0,5	2,7
2002	0,5	-7,7	-8,0	3,2
2001	-4,1	0,7	-8,4	5,4
2000	4,6	0,6	0,5	-3,1

Composizione del fondo:

Prime 5 regioni:

Europa Occidentale-Euro	54,7%
Nord America	31,5%
Giappone	6,3%
Regno Unito	5,1%
Europa Occidentale-Non Euro	2,4%

Primi 5 settori

Finanza	30,3%
Energia	15,0%
Telecomunicazioni	14,0%
Beni industriali	9,0%
Beni di consumo	6,5%

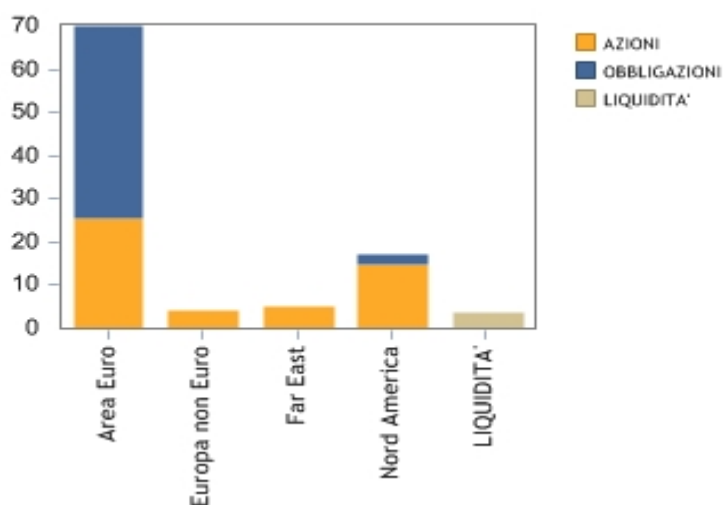
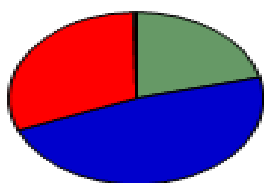


Figura 4.13: Diversificazione per area geografica del titolo Arca BB Acc. Dati aggiornati al 30/11/2004. Fonte www.arcaonline.it

Esposizione valutaria:

EUR	94,3%
USD	5,2%
GBP	0,6%

Asset Allocation:



% sul patrimonio netto

■ Liquidità	21,1
■ Azioni	47,9
■ Obbligazioni	30,8
■ Altro	0,3

Primi 5 titoli:

Germany (Bundes) 1998/4.1.2028	5,625%	4,9%
France (O.A.T.)1998/25.4.2009	4%	4,5%
Eni		3,5%
Greece 2002/22.10.2022	5,9%	2,9%
Spain (Bonos) 1998/31.1.2008	6%	2,8%

Benchmark dichiarato:

45% Merrill Lynch EMU direct Government Bond Index

20% MSCI Italy Index

30% MSCI World Free Index

5% ML Euro Government Bill Index

Utile è il confronto tra rendimento del fondo ed il relativo benchmark che il gestore ha come obiettivo di replicare:



Figura 4.14: Confronto tra rendimento e benchmark del fondo ARCA BB Acc.
Fonte www.arcaonline.it

4.2 La normalità dei rendimenti

Per verificare che i rendimenti seguano una distribuzione normale si può ricorrere alla statistica di Jarque-Bera.

Il test di Jarque-Bera si basa sulle proprietà dei momenti terzo e quarto della distribuzione normale, per la quale se $r_i : N(\mu, \sigma^2)$ allora $E[(r_i - \mu)^3] = 0$ e

$$E[(r_i - \mu)^4] = 3\sigma^4.$$

Si possono così costruire gli indici di asimmetria e di curtosi :

$$S = \sqrt{\frac{T}{6}} \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^3}{\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$K = \sqrt{\frac{T}{24}} \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^4}{\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2 \right)^2} \xrightarrow{d} N(3,1)$$

da cui ricaviamo il test di normalità :

$$JB = S^2 + (K - 3)^2 \xrightarrow{d} \chi_2^2$$

Di seguito riportiamo i risultati del test condotti sulla serie dei rendimenti giornalieri per i quattro fondi, sotto l'ipotesi nulla di normalità che si verifica per valori bassi della statistica JB .

	S	K	JB	p-value
AAA Master Bilanciato Acc	0,376978	5,702859	236,2169	0,00000
AAA Master Bilanciato Obbligazionario Acc	0,332312	5,220627	161,1873	0,00000
Arca TE Acc	0,186782	3,990841	33,6395	0,00000
Arca BB Acc	0,205616	4,661218	87,8627	0,00000

Figura 4.15 : Risultati del test di Jarque-Bera sulla normalità della serie dei rendimenti giornalieri

L'ipotesi nulla viene rifiutata in quanto le serie non soddisfano i criteri di normalità. Esse presentano una leggera asimmetria a destra ($S > 0$), più marcata per AAA Master Bilanciato Acc e AAA Master Bilanciato Obbligazionario Acc. In queste due si evidenzia anche una marcata leptocurtosi ($K > 3$), meno evidente invece per Arca TE Acc che si attesta su valori poco più elevati di 3. La presenza di serie che non seguono una distribuzione normale non pregiudica comunque il nostro lavoro. Il test BJS , che utilizziamo per verificare l'efficienza di un portafoglio, non richiede esplicitamente l'assunzione di normalità dei rendimenti, che invece otteniamo attraverso l'applicazione del teorema del limite centrale.

Riportiamo ora i risultati del test condotti sulle serie dei rendimenti settimanali per i quattro fondi, sempre sotto l'ipotesi nulla di normalità che si verifica per valori bassi della statistica JB .

	S	K	JB	p-value
AAA Master Bilanciato Acc	0,245941	3,704245	4,119987	0,127455
AAA Master Bilanciato Obbligazionario Acc	0,230607	3,704245	3,062465	0,216269
Arca TE Acc	0,335910	3,444186	3,621596	0,163524
Arca BB Acc	0,134040	3,572049	2,228351	0,328186

Figura 4.16 : Risultati del test di Jarque-Bera sulla normalità della serie dei rendimenti settimanali.

Sebbene tutte le serie presentino una leggera asimmetria a destra ($S > 0$), esse evidenziano sia un indice di curtosi poco più elevato di tre che un valore basso

della statistica di JB . Per tali motivi accettiamo l'ipotesi nulla di normalità per tutte le serie.

Capitolo 5

L'EFFICIENZA DEI FONDI COMUNI BILANCIATI

In questo capitolo analizzeremo l'efficienza dei fondi comuni d'investimento, considerando, sia la presenza che l'assenza ,di restrizioni nei pesi degli asset che compongono ciascun portafoglio. Per cui applicheremo a seconda dei casi, il test sulle Performance di Sharpe ed il test di Basak, Jagannathah e Sun. Nell'analisi consideriamo i rendimenti giornalieri per il periodo compreso tra il 01/01/2002 e il 04/10/2004. Ricordiamo che, come asset primitivi, sono stati considerati gli indici che costituiscono il benchmark di ciascun fondo, e per tale motivo i risultati e le relative frontiere efficienti rappresentano una approssimazione di quelli reali.

5.1 AAA Master Bilanciato Acc.

5.1.1 Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi degli asset

Per verificare l'efficienza del fondo in assenza di restrizioni nei pesi degli asset, applichiamo sia il test sulle performance di Sharpe che il test BJS. Ponendo:

w1: peso ottimale destinato a MSCI World,

w2: peso ottimale destinato a ML EMU Direct Government

w3: peso ottimale destinato a MSCI Italy

w4: peso ottimale destinato a ML EURO Government Bill Index,

Riportiamo nella seguente tabella i risultati dei test e i pesi ottimali delle rispettive attività che compongono il portafoglio.

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,0269	0,1577	-1,0571	-0,0945	1,9940
P.S.	0,0000	-0,0016	-0,0077	0,00014	1,00923

Figura 5.1: Risultati del test BJS e del test sulle Performance di Sharpe (P.S).

Secondo i risultati del test BJS il fondo risulta non efficiente se fissato un livello di significatività α pari a 0,05. Sebbene il fondo sia efficiente nel momento in cui si considera un livello di significatività α di 0,02 (p.value 0,0269), tale risultato non'è da considerarsi attendibile. Infatti, analizzando la frontiera efficiente (figura 5.2), il fondo si posiziona nel semipiano inferiore contenente il ramo d'iperbole che, costituito da portafogli che a dato rischio potrebbero assumere un valore di rendimento atteso maggiore, non c'interessa considerare. Il test BJS, nel valutare la frontiera nella sua totalità, propende verso l'accettazione dell'ipotesi d'efficienza, in quanto in questo caso il fondo si posiziona non molto distante dal ramo inferiore. Per tali motivi il fondo è da considerarsi non efficiente, risultato che tra l'altro viene confermato dal test sulle performance di Sharpe. Si può notare che i pesi assumono in entrambi i casi anche valori negativi.

Riportiamo la relativa frontiera efficiente e il fondo comune considerato come punto d'intersezione tra il suo valore atteso e rischio.

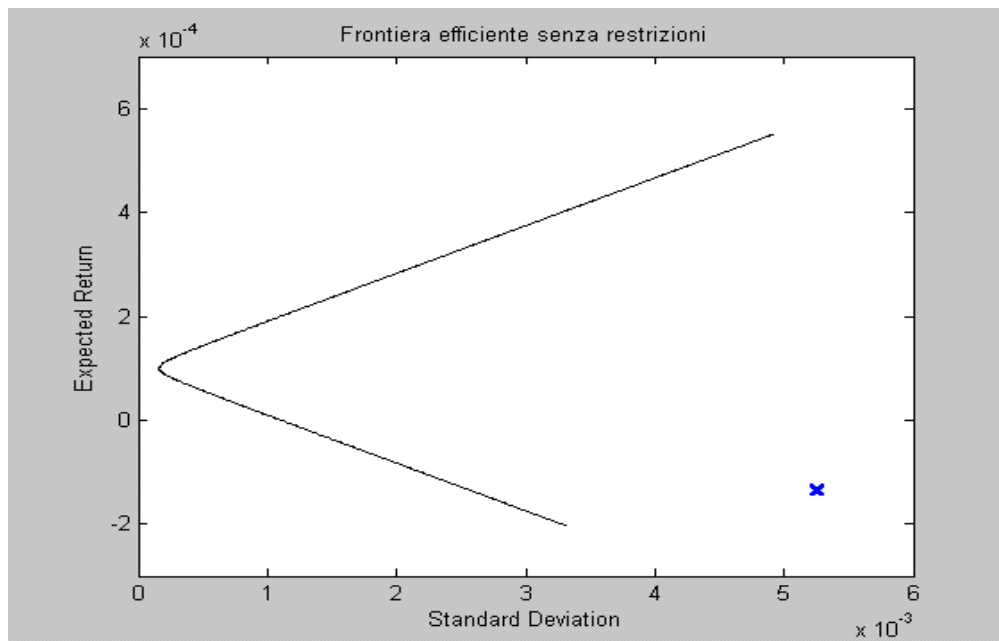


Figura 5.2 Frontiera efficiente senza vincoli e fondo comune.

5.1.1 Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi degli asset

Valutiamo ora l'efficienza del fondo solamente tramite il test BJS. In questo caso imponiamo che i pesi degli asset non possano assumere valori negativi e che la somma della percentuale dei pesi delle attività azionarie non sia superiore al 70% del patrimonio netto ($w_1+w_3 \leq 70$). Riportiamo nella seguente tabella i risultati del test e i pesi ottimali delle attività che compongono il portafoglio.

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,4384	0,5341	0	0	0,4659

Figura 5.3: Risultati del test BJS in presenza di vincoli

In base ai risultati del test BJS il fondo è efficiente. Nel momento in cui andiamo a studiare la relativa frontiera vincolata (figura 5.4), tali risultati non possono considerarsi attendibili. Il fondo si posiziona addirittura al di sotto di tale frontiera, motivo per cui propendiamo verso il rifiuto dell'ipotesi d'efficienza del fondo in presenza di vincoli.

Riportiamo la relativa frontiera efficiente e il fondo considerato come punto d'intersezione tra il suo valore atteso e il suo rischio

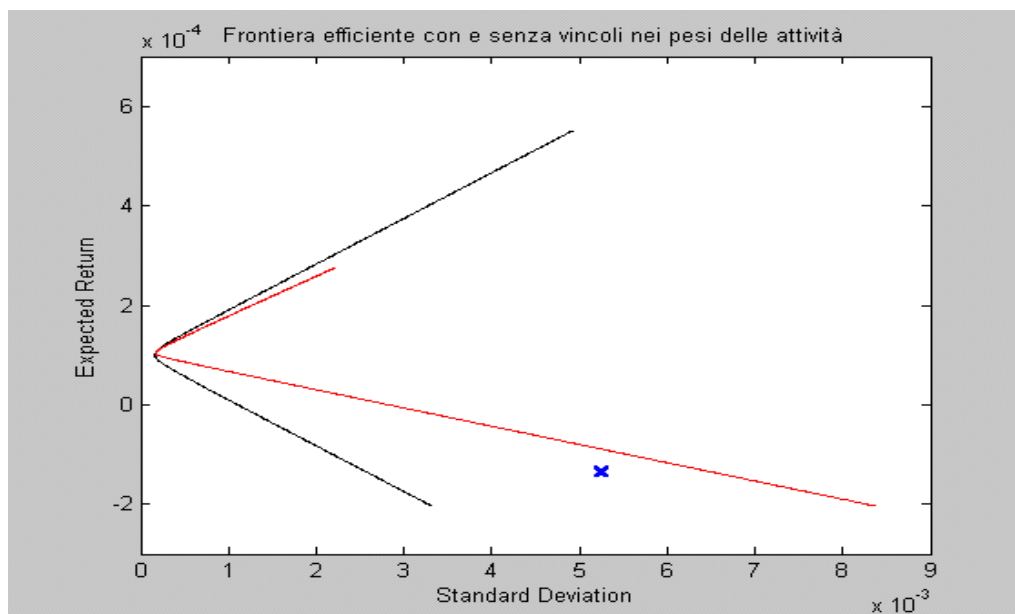


Figura 5.4: Frontiera efficiente con vincoli di disuguaglianza (curva in rosso), e frontiera efficiente senza vincoli (curva in nero)

5.2 Arca BB Acc.

5.2.1: Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi degli asset.

Anche in questo caso, per verificare l'efficienza del fondo, applichiamo sia il test basato sulle performance di Sharpe, sia il test BJS. Ponendo:

w1: peso ottimale destinato a ML EMU Diresct Government Bond Index

w2: peso ottimale destinato a MSCI Italy Index

w3: peso ottimale destinato Msci World Free Index

w4: peso ottimale destinato a ML EURO Governement Bill Index,

riportiamo nella seguente tabella i risultati dei test, e i pesi ottimali delle rispettive attività che compongono il fondo:

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,0059	-0,1128	-0,0094	0,0144	1,1078
P.S.	0,0000	-0,0077	0,00014	-0,001624	1,00923

Figura 5.5: risultati del test BJS e del test sulle performance di Sharpe (P.S.)

Il fondo non risulta efficiente in entrambi i casi. Vedremo, nel seguente paragrafo, se il grado d'inefficienza del fondo diminuisca inserendo i vincoli a livello dei pesi degli asset. I pesi delle attività assumono in entrambi i casi, anche valori negativi.

Riportiamo la relativa frontiera efficiente e il fondo considerato come punto d'intersezione tra il suo valore atteso e il suo rischio

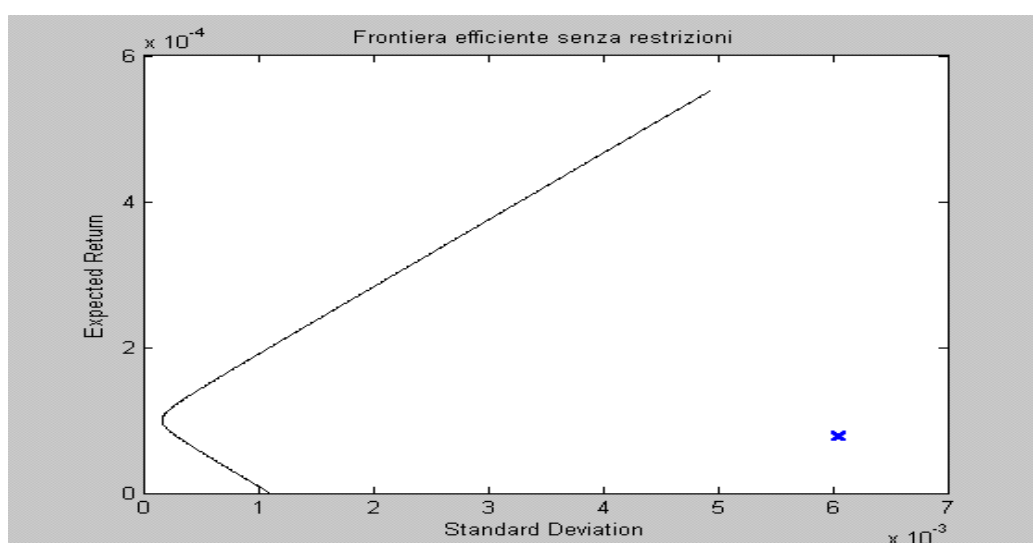


Figura 5.6: Frontiera efficiente senza vincoli e fondo comune

5.2.2: Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi degli asset

Valutiamo ora l'efficienza del fondo prendendo in considerazione ulteriori aspetti. Imponiamo che i pesi degli asset siano non negativi, e che la somma della percentuale dei pesi delle attività azionarie sia minore del 50% del patrimonio netto ($w_2+w_3 \leq 50$). Introducendo tali vincoli di disuguaglianza, calcoliamo l'efficienza del fondo solo tramite il test BJS. Riportiamo nella seguente tabella i risultati dei test e i pesi ottimali delle rispettive attività che compongono il portafoglio.

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,0367	0	0	0,0548	0,9452

Figura 5.7: Risultati del test BJS in presenza di vincoli.

Secondo i precedenti risultati, fissato un livello di significatività di α pari a 0.05 (p.value 0,0367), il fondo è inefficiente. Sebbene risulti efficiente nel momento in cui consideriamo un α pari di 0.03, tale risultato non'è da considerarsi credibile. Infatti il fondo, posizionandosi nel semipiano inferiore della frontiera efficiente, ci porta a concludere che esso è inefficiente (Fig.5.8). La relativa frontiera efficiente, in presenza di vincoli, risulta essere la seguente:

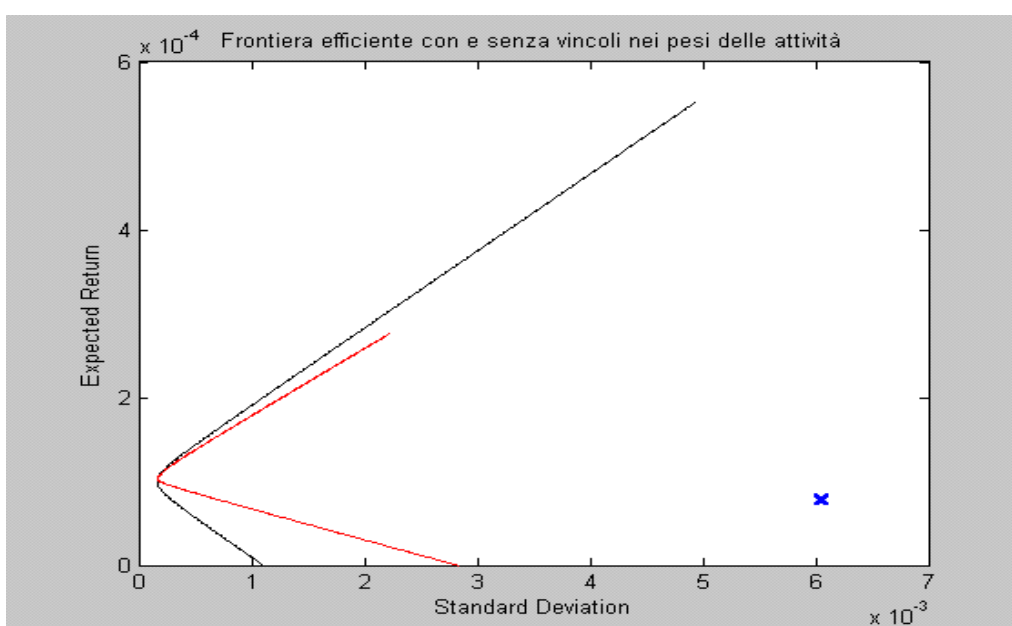


Figura 5.8: Frontiera efficiente con vincoli (curva in rosso), e frontiera efficiente senza vincoli (curva in nero).

5.3: Arca TE Acc.

5.3.1: Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi degli asset

Per valutare l'efficienza del fondo Arca Te, considerando che i pesi possano assumere qualsiasi valore nell'intero asse dei numeri reali e che la loro somma sia uno, utilizziamo come in precedenza sia il test BJS, sia il test basato sulle performance di Sharpe. Ponendo:

w1: peso ottimale destinato ML EMU Direct Government Bond Index
w2: peso ottimale destinato a MSCI World Free Index
w3: peso ottimale destinato a ML Global Government Bond Index
w4: peso ottimale destinato a ML Euro Government Bill Index,
riportiamo nella seguente tabella i risultati dei test:

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,0303	-0,6957	0,0472	0,3127	1,3359
P.S.	0,0000	-0,0069	-0,0014	-0,003599	1,01201

Figura 5.9: Risultati del test BJS , del test sulle performance di Sharpe (P.S) e relativi pesi ottimali delle attività

Nell'utilizzo del test BJS, il fondo risulta inefficiente nel momento in cui viene fissato un livello di significatività pari a 0,05. Sebbene, per un valore di α pari a 0,03 il fondo risulti efficiente, esso si posiziona vicino al ramo inferiore, portandoci quindi alla conclusione che è inefficiente (fig. 5.10). Tale inefficienza si riscontra anche dai risultati del test sulle performance di Sharpe. Riportiamo la relativa frontiera efficiente ed il fondo ottenuto come punto d'intersezione tra il suo valore atteso e il suo rischio:

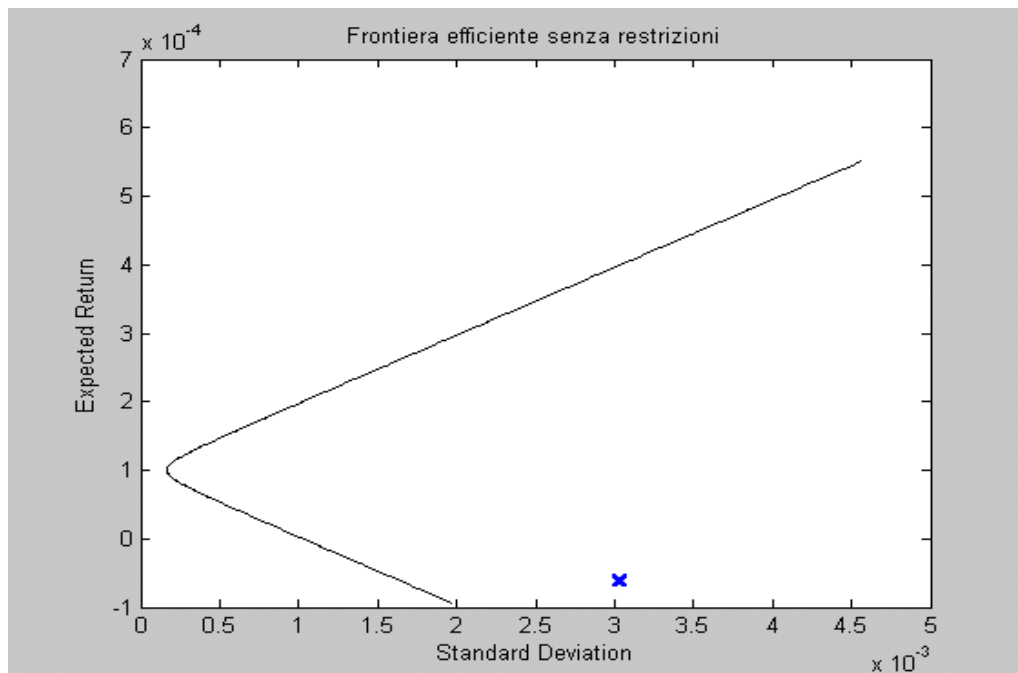


Figura 5.10: Frontiera efficiente senza vincoli e fondo comune

5.3.2: Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi degli asset

Valutiamo l'efficienza del fondo considerando che i pesi degli asset non possano assumere valori negativi, e che la somma della percentuale dei pesi delle attività azionarie non possa assumere valori maggiori del 30% del patrimonio netto ($w_2 \leq 30$). Applichiamo dunque, anche in questo caso, solo il test BJS, da cui ricaviamo i seguenti risultati:

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,4447	0	0,2396	0,7604	0

Figura 5.11: Risultati del test BJS in presenza di vincoli e pesi ottimali delle rispettive attività

Secondo i risultati del test BJS, il fondo risulta efficiente. Considerando però la relativa frontiera efficiente vincolata, il fondo si posiziona addirittura al di sotto di essa (Fig.5.12). Per tale motivo, anche in questo caso, si rifiuta l'ipotesi d'efficienza del fondo. Riportiamo di seguito la frontiera efficiente in presenza di restrizioni ed il relativo fondo:

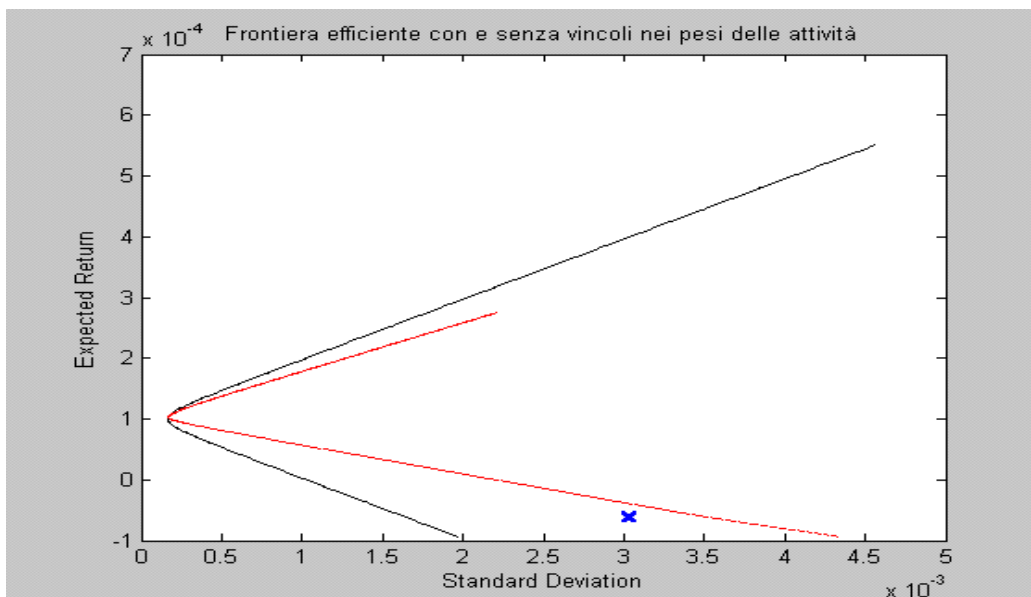


Figura 5.12: Frontiera efficiente con vincoli (curva in rosso), e frontiera efficiente senza vincoli (curva in nero).

5.4 Master Bilanciato Obbligazionario Acc.

5.4.1: Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi degli asset

Anche in quest'ultimo caso, valutiamo se il fondo sia efficiente in assenza di vincoli di disuguaglianza nei pesi degli asset. Ponendo:

w1: peso ottimale destinato a ML EURO Government Bill Index

w2: peso ottimale destinato a ML EMU Direct Government Bond Index

w3: peso ottimale destinato a MSCI World

applichiamo dunque, sia il test BJS che il test sulle performance di Sharpe, ed otteniamo i seguenti risultati:

	P.Value	W1	W2	W3
BJS	0,1363	1,3078	-0,3326	0,0248
P.S.	0,0000	1,00929	-0,0077	-0,00151

Figura 5.13: Risultati del test BJS , del test sulle performance di Sharpe (P.S.) e pesi ottimali delle rispettive attività

Dai risultati del test BJS, per un valore del p.value pari a 0,1363, il fondo risulta efficiente. Anche in questo caso, come nei precedenti, il fondo AAA Master Bilanciato Obbligazionario si posiziona vicino al ramo d'iperbole inferiore che costituisce la frontiera efficiente (Fig.5.14). Esso risulta pertanto inefficiente, ed i risultati del test non attendibili. Tale inefficienza viene tra l'altro sottolineata dai risultati del test sulle performance di Sharpe. Riportiamo la relativa frontiera efficiente ed il fondo ottenuto come punto d'intersezione tra il suo valore atteso e il suo rischio:

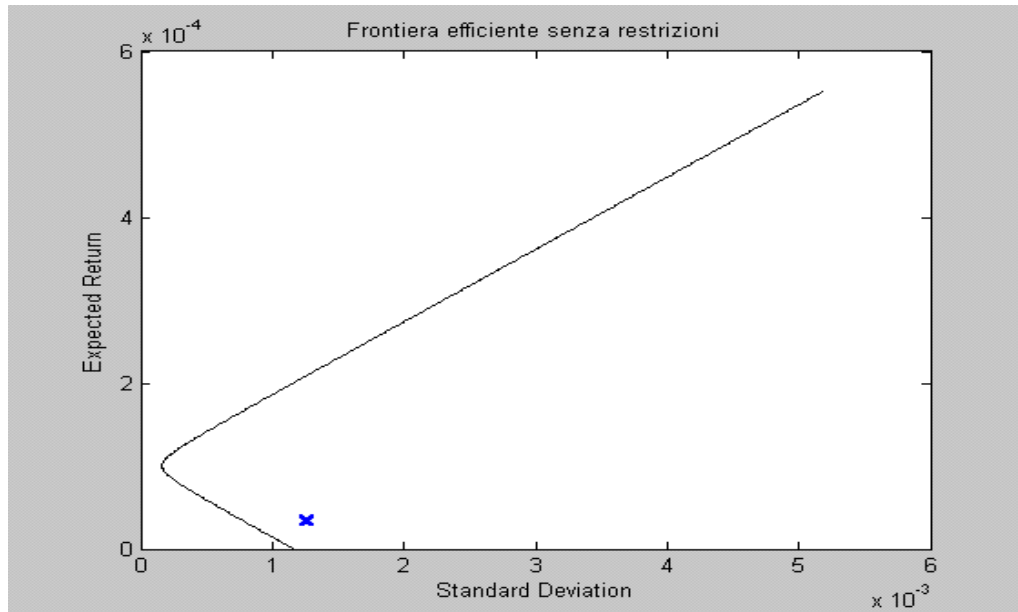


Figura 5.14: Frontiera efficiente senza vincoli e fondo.

5.4.2: Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi degli asset

Valutiamo ora l'efficienza del fondo, considerando che i pesi, non possano assumere valori negativi, e che la somma della percentuale delle attività azionarie sia compresa tra 10 e 50% del patrimonio netto ($10 \leq w_3 \leq 50$). Applichiamo anche in questo caso, solamente il test BJS, da cui ricaviamo i seguenti risultati:

	P.Value	W1	W2	W3
BJS	0,4008	0,8467	0	0,1533

Figura 5.15: risultati del test BJS e pesi ottimali delle rispettive attività

In base ai risultati del test BJS, il fondo è efficiente. Consideriamo ora la sua frontiera efficiente: il fondo si posiziona al di sotto del ramo inferiore della frontiera, perciò anche in questo caso concludiamo che esso è inefficiente (Fig.5.16). La relativa frontiera efficiente, dopo l'introduzione dei vincoli risulta essere:

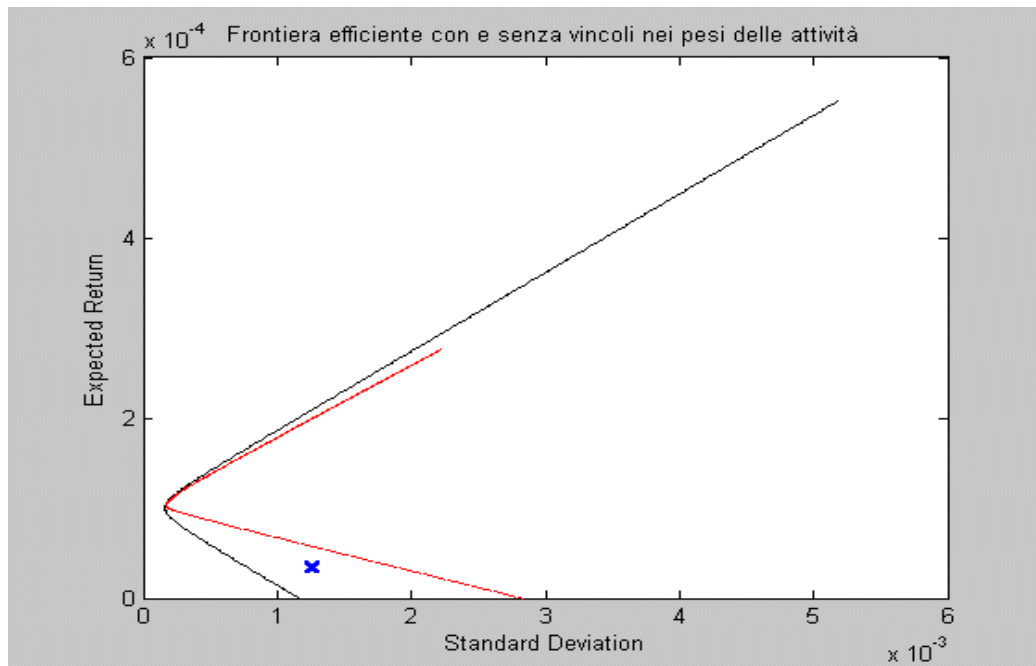


Figura 5.16: Frontiera efficiente con vincoli (curva in rosso) e frontiera efficiente senza vincoli (curva in nero).

Riassumendo:

		RENDIMENTI GIORNALIERI			
		Master Bilanciato	Arca BB	Arca TE	Master Bilanciato Obbl.
senza vincoli	BJS	0,0269	0,0059	0,0303	0,1363
	P.S.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
con vincoli	BJS	0,4384	0,0367	0,4447	0,4008

Figura 5.17: p.value del test BJS e del test sulle performance di Sharpe (P.S.) per ciascun fondo, utilizzando rendimenti giornalieri.

Sebbene il test BJS in alcune occasioni e sotto determinate condizioni, ci ha portati ad accettare l'ipotesi d'efficienza, tale risultato non è però coerente con i grafici delle relative frontiere efficienti. Per questi motivi arriviamo alla conclusione che i fondi in tutte le situazioni considerate sono inefficienti, come viene sottolineato anche dal test sulle performance di Sharpe.

Capitolo 6

L'EFFICIENZA DEI BENCHMARK DEI FONDI

In questo capitolo analizzeremo l'efficienza dei benchmark dichiarati nel prospetto informativo di ciascun fondo. A tale scopo utilizzeremo sia il test sulle performance di Sharpe che il test BJS, applicandoli opportunamente sia nel caso di assenza di restrizioni nei pesi delle attività che compongono il benchmark, sia quando andremo ad introdurre i relativi vincoli di disuguaglianza.

I Rendimenti giornalieri

La prima parte della nostra analisi si basa sui rendimenti giornalieri per il periodo compreso tra il 01/01/2002 e il 04/10/2004.

6.1. Benchmark di AAA Master Bilanciato ACC.

6.1.1 Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività

Per valutare l'efficienza del benchmark del fondo AAA Master Bilanciato ACC., utilizziamo il test BJS e il test sulle performance di Sharpe. Ponendo:
 w_1 : peso ottimale destinato a MSCI World

w2: peso ottimale destinato a ML EMU Direct Government Bond Index

w3: peso ottimale destinato a MSCI Italy

w4: peso ottimale destinato a ML EURO Government Bill Index

otteniamo i seguenti risultati:

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,0000	0,0815	-0,5552	-0,0493	1,5230
P.S.	0,0000	-0,0016	-0,0077	0,00014	1,00923

Figura 6.1: Risultati del test BJS, del test basato sulle performance di Sharpe(P.S.) e pesi ottimali delle rispettive attività.

Utilizzando entrambi i test, il benchmark non risulta efficiente. Riportiamo la relativa frontiera efficiente:

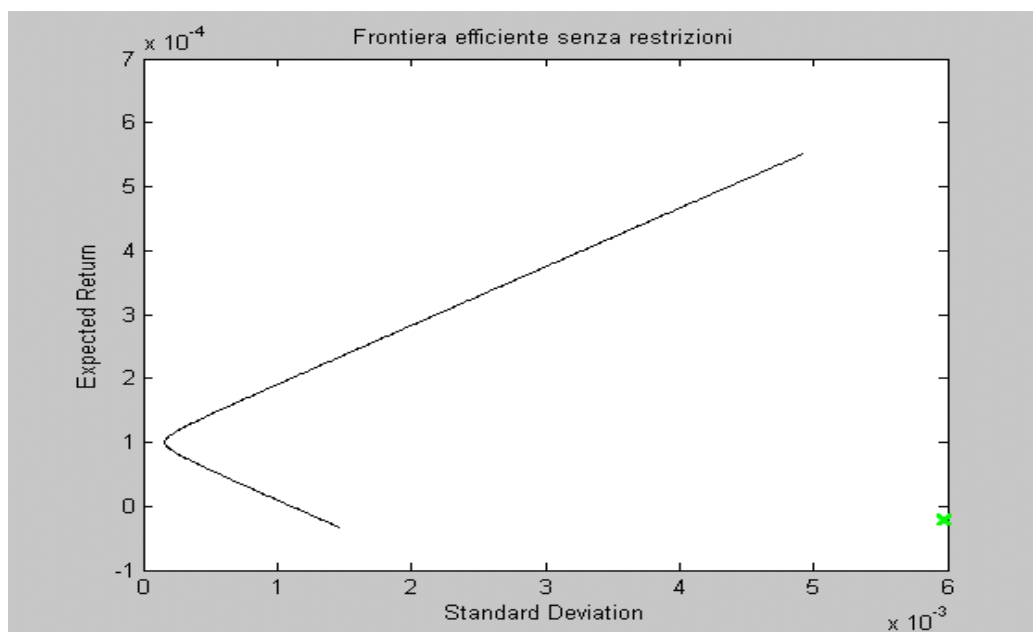


Figura 6.2: Frontiera efficiente senza vincoli e benchmark

Dal grafico precedente, notiamo che effettivamente il benchmark si posiziona molto distante dalla relativa frontiera efficiente. Vediamo se, introducendo i vincoli di disuguaglianza, la situazione tende a migliorare.

6.1.2 : Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi degli asset

Valutiamo ora l'efficienza prendendo in considerazione i vincoli di non negatività, e stabilendo che la somma della percentuale delle attività azionarie non superi il 70% del patrimonio netto ($w_1+w_3 \leq 70$). Al nostro scopo applichiamo il test BJS, ed otteniamo i seguenti risultati:

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,1052	0,2793	0	0	0,7207

Figura 6.3: Risultati del test BJS in presenza di vincoli e pesi ottimali delle rispettive attività

Introducendo i vincoli, il benchmark risulta efficiente (p.value 0,1052). Nel momento in cui analizziamo il grafico della frontiera efficiente, notiamo che esso si posiziona vicino al ramo inferiore della frontiera, per tali motivi i risultati del test BJS non sono da considerarsi attendibili, perciò propendiamo per il rifiuto dell'ipotesi d'efficienza del benchmark (Fig. 6.4). La relativa frontiera efficiente risulta:

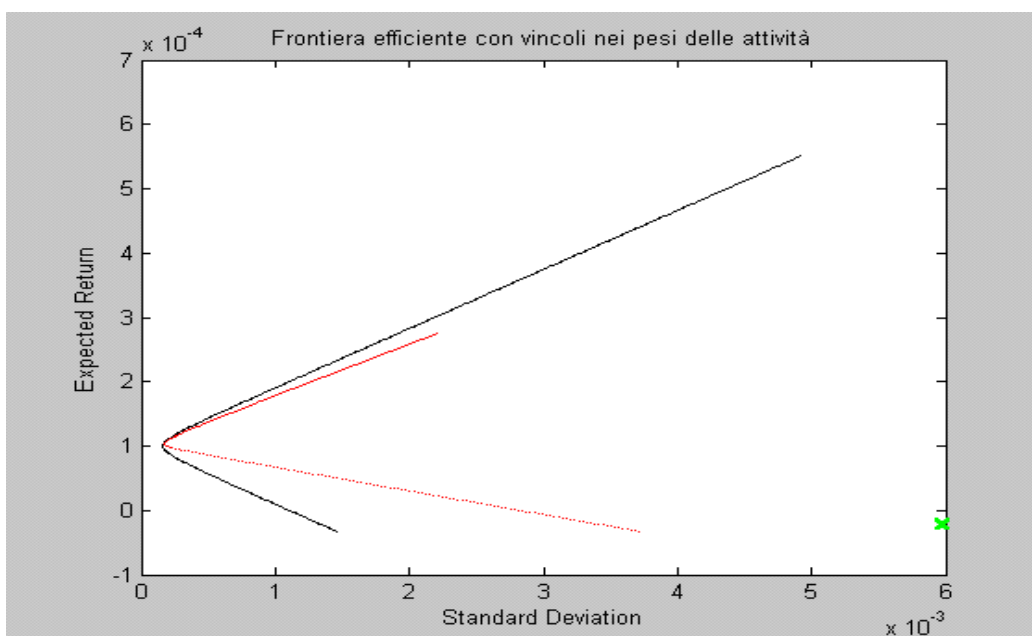


Figura 6.4: Frontiera efficiente con vincoli (curva in rosso), e frontiera senza vincoli (curva in nero).

6.2 Benchmark di Arca BB Acc.

6.2.1: Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività

Per valutare l'efficienza del benchmark di tale fondo, in assenza di restrizioni a livello dei pesi, utilizziamo anche in tal caso il test BJS ed il test sulle performance di Sharpe. Ponendo:

w1: peso ottimale destinato a ML EMU Direct Government Bond Index

w2: peso ottimale destinato a MSCI Italy Index

w3: peso ottimale destinato a MSCI World Free Index

w4: peso ottimale destinato a ML EURO Government Bill Index,

otteniamo i seguenti risultati:

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,0000	-0,3869	-0,0341	0,0560	1,3651
P.S.	0,0000	-0,0077	0,00014	-0,001624	1,00923

Figura 6.5: Risultati del test BJS, del test sulle Performance di Sharpe (P.S.) e pesi ottimali delle rispettive attività

Utilizzando entrambi i test, il benchmark non risulta efficiente. La relativa frontiera efficiente è:

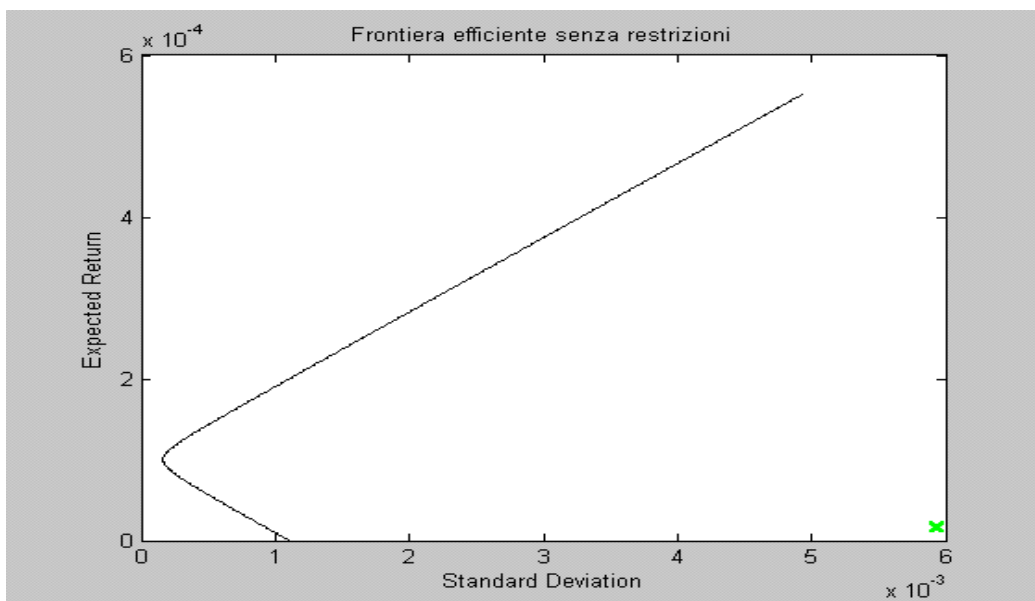


Figura 6.6: Frontiera efficiente senza vincoli e benchmark.

6.2.2: Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi delle attività

Analizziamo ora l'efficienza del benchmark in presenza di restrizioni nei pesi delle attività che lo compongono. Consideriamo dunque che i pesi non possano assumere valori negativi, e che la somma della percentuale delle attività azionarie non sia superiore al 50% del patrimonio netto ($w_2+w_3 \leq 50$). Applicando il test BJS otteniamo:

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,0569	0	0	0,1939	0,8061

Figura 6.7: Risultati del test BJS e pesi ottimali delle rispettive attività

Secondo il test BJS il benchmark risulta efficiente con un valore del p.value pari a 0,0569. Questo risultato non viene però confermato dall'analisi del grafico della frontiera efficiente (Fig.6.8). Anche in questo caso si rifiuta l'ipotesi d'efficienza del benchmark.

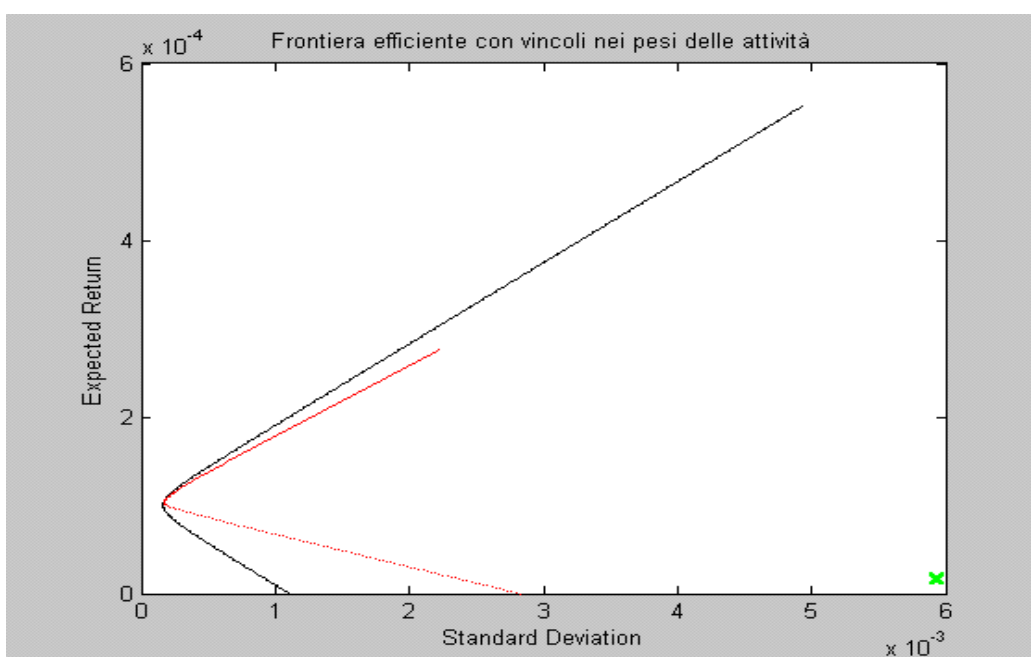


Figura 6.8: Frontiera efficiente con vincoli (curva rossa), frontiera efficiente senza vincoli (curva nera)

6.3 Benchmark di Arca TE Acc.

6.3.1: Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività

Consideriamo, ancora una volta, l'efficienza del benchmark, ipotizzando l'assenza di restrizioni nei pesi delle attività di cui è composto, attraverso il test BJS ed il test sulle performance di Sharpe. Ponendo:

w1: peso ottimale destinato a ML EMU Direct Government Bond Index

w2: peso ottimale destinato a MSCI World Free Index

w3: peso ottimale destinato a ML Global Government Bond Index

w4: peso ottimale destinato a ML Euro Government Bill Index,

otteniamo i seguenti risultati:

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,0000	-0,3052	0,0196	0,1333	1,1523
P.S.	0,0000	-0,0069	-0,0014	-0,003599	1,01201

Figura 6.9: Risultati del test BJS, del test sulle performance di Sharpe (P.S) e pesi ottimali delle attività

In entrambi i test, viene rifiutata l'ipotesi di efficienza. La relativa frontiera efficiente non vincolata risulta quindi essere

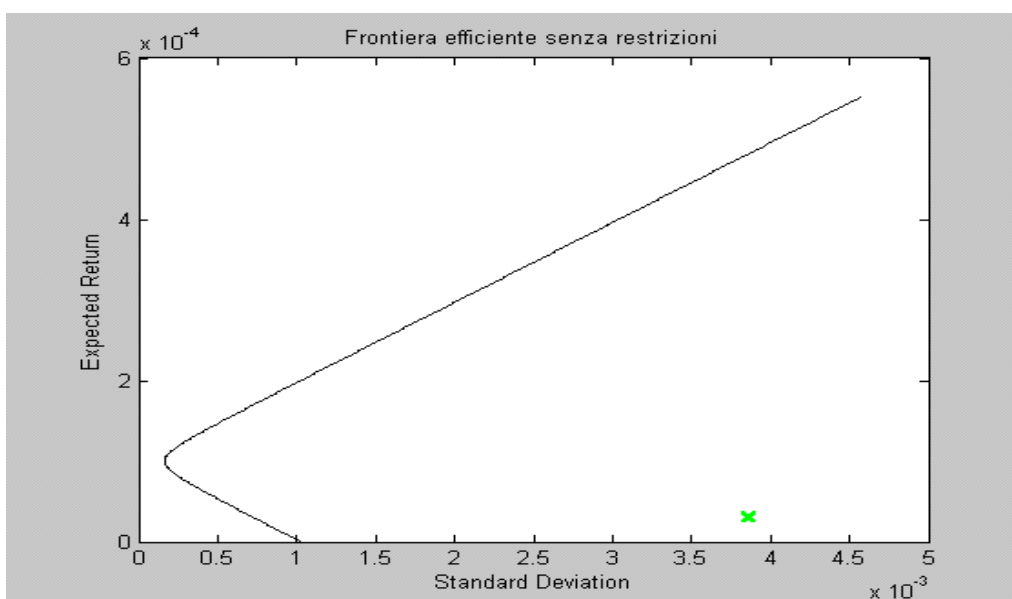


Figura 6.10: Frontiera efficiente non vincolata e benchmark

6.3.1: Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi delle attività

Valutiamo ora l'efficienza del benchmark in presenza di vincoli di non negatività, e assumiamo che la somma della percentuale dei pesi delle attività azionarie non sia maggiore del 30% del patrimonio netto ($w_2 \leq 30$). Applicando il test BJS otteniamo:

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,0283	0	0,0960	0,3766	0,5274

Figura 6.11: Risultati del test BJS in presenza di vincoli e pesi ottimali delle attività

Fissato un valore di α pari a 0,05, il benchmark risulta inefficiente. Sebbene per un livello di significatività α pari a 0,02 il benchmark diventa efficiente, tale condizione d'efficienza non è da considerarsi attendibile. Infatti nell'analisi della frontiera efficiente, il benchmark di Arca TE che si posiziona vicino al suo ramo inferiore risulta inefficiente (Fig.6.12). La frontiera efficiente risulta essere:

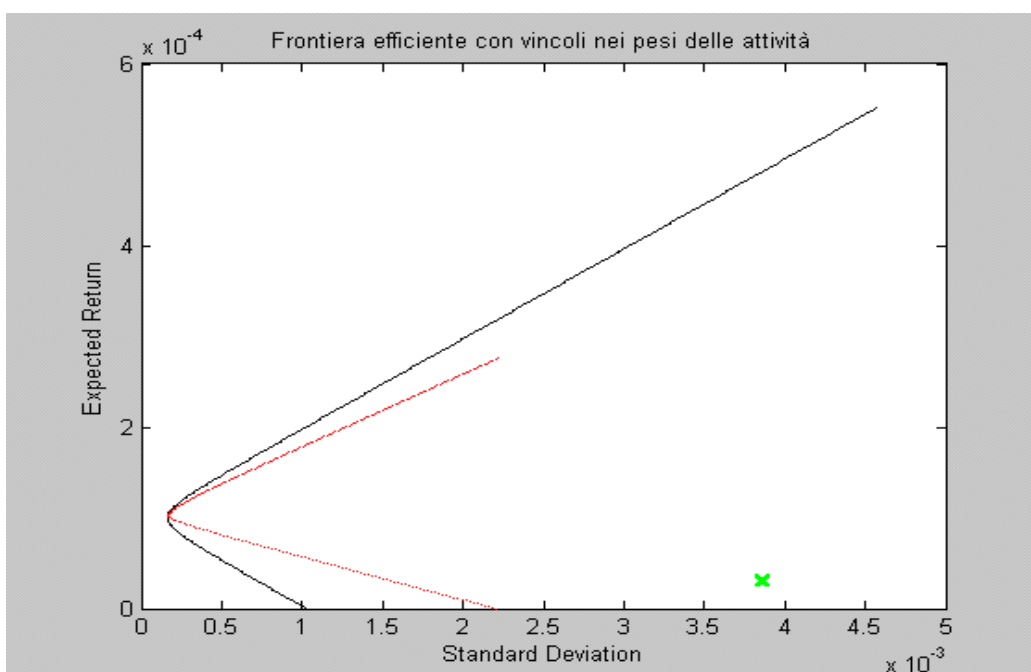


Figura 6.12: Frontiera efficiente vincolata (curva in rosso) e frontiera non vincolata (curva in nero)

6.4 Benchmark di AAA Master Bilanciato Obbligazionario

6.4.1 Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività

Consideriamo anche in quest'ultimo caso l'uso del test BJS e del test sulle performance di Sharpe, al fine di valutare l'efficienza del benchmark di tale fondo. Ponendo:

w1: peso ottimale destinato a ML EURO Government Bill Index

w2: peso ottimale destinato a ML EMU Direct Government Bond Index

w3: peso ottimale destinato a MSCI World

otteniamo i seguenti risultati:

	P.Value	W1	W2	W3
BJS	0,0000	1,1717	-0,1845	0,0128
P.S.	0,0000	1,00929	-0,0077	-0,00151

Figura 6.13: Risultati del test BJS, del test sulle performance di Sharpe (P.S.) e pesi ottimali delle rispettive attività

In entrambi i casi, l'ipotesi di efficienza viene rifiutata. La frontiera efficiente non vincolata risulta essere la seguente:

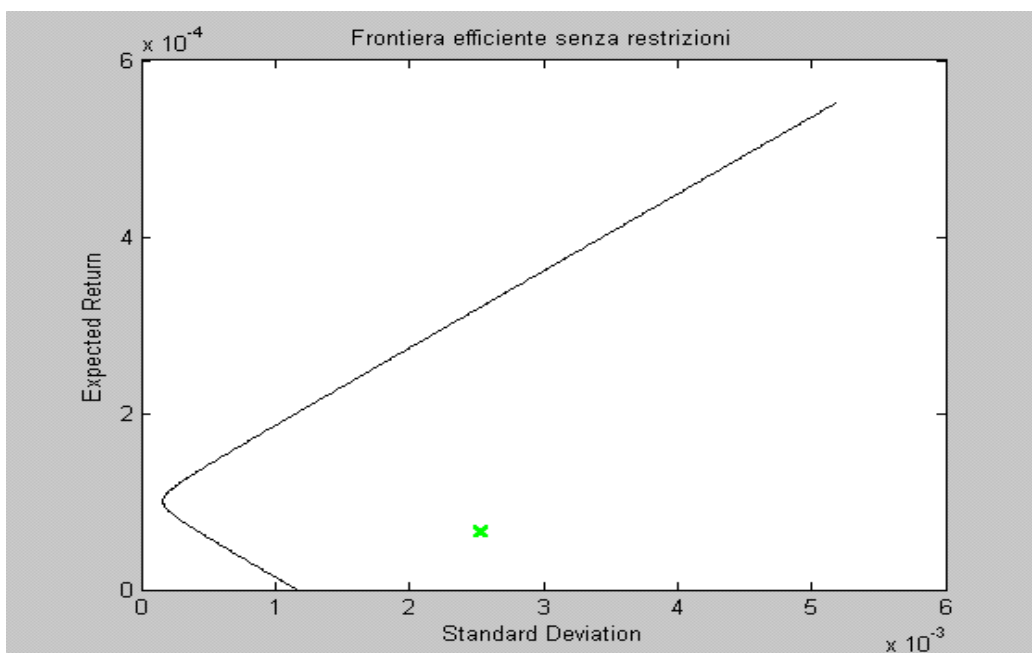


Figura 6.14: Frontiera efficiente non vincolata e benchmark.

6.4.2 Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi delle attività

Valutiamo ora l'efficienza del benchmark in presenza di vincoli di non negatività e poniamo che la somma della percentuale delle attività azionarie sia compresa tra il 10 e 50% del patrimonio netto ($10 \leq w_3 \leq 50$). Applicando il test BJS otteniamo:

	P.Value	W1	W2	W3
BJS	0,0000	0,8588	0,0412	0,1000

Figura 6.15: Risultati del test BJS in presenza di vincoli e relativi pesi ottimali delle attività

Anche introducendo i vincoli, il benchmark di tale fondo non risulta efficiente. La frontiera efficiente vincolata risulta:

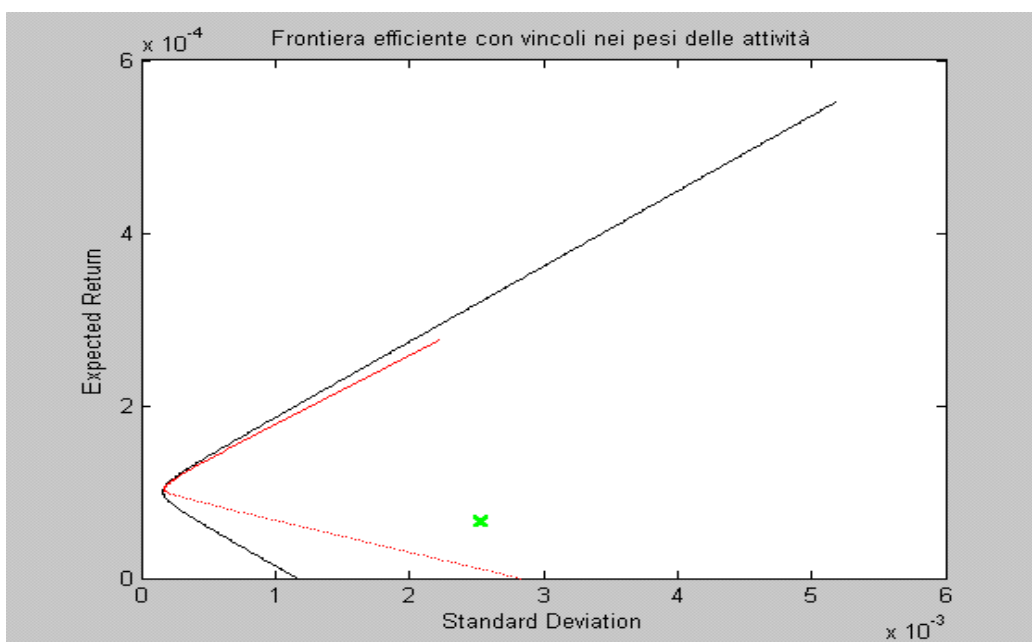


Figura 6.16: Frontiera efficiente vincolata (curva in rosso), frontiera efficiente non vincolata (curva nera).

I Rendimenti settimanali

La nostra analisi prosegue considerando i rendimenti settimanali, sempre per il periodo compreso tra il 01/01/2002 e il 04/10/2004.

6.5 Benchmark di AAA Master Bilanciato ACC.

6.5.1: Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività

Applicando il test BJS ed il test sulle performance di Sharpe al fine di verificare l'efficienza del benchmark otteniamo:

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,0346	0,1062	0,4967	-0,0962	0,4934
P.S.	0,0000	-0,0014	-0,0156	0,01572	1,01572

Figura 6.17 Risultati del test BJS, del test sulle performance di Sharpe (P.S.) e pesi ottimali delle rispettive attività

Secondo BJS il benchmark risulta inefficiente quando viene fissato un livello di significatività α di 0,05. Si ottiene l'efficienza nel momento in cui si considera un α di 0,03. Tale risultato non'è tuttavia da considerarsi coerente nello studio della relativa frontiera efficiente (Fig.6.18). Il benchmark infatti, nel posizionarsi ancora una volta vicino al ramo inferiore della curva, risulta inefficiente. Tale inefficienza viene evidenziata anche dal test sulle performance di Sharpe. Si può notare che i pesi assumono anche valori negativi. La frontiera efficiente non vincolata risulta essere:

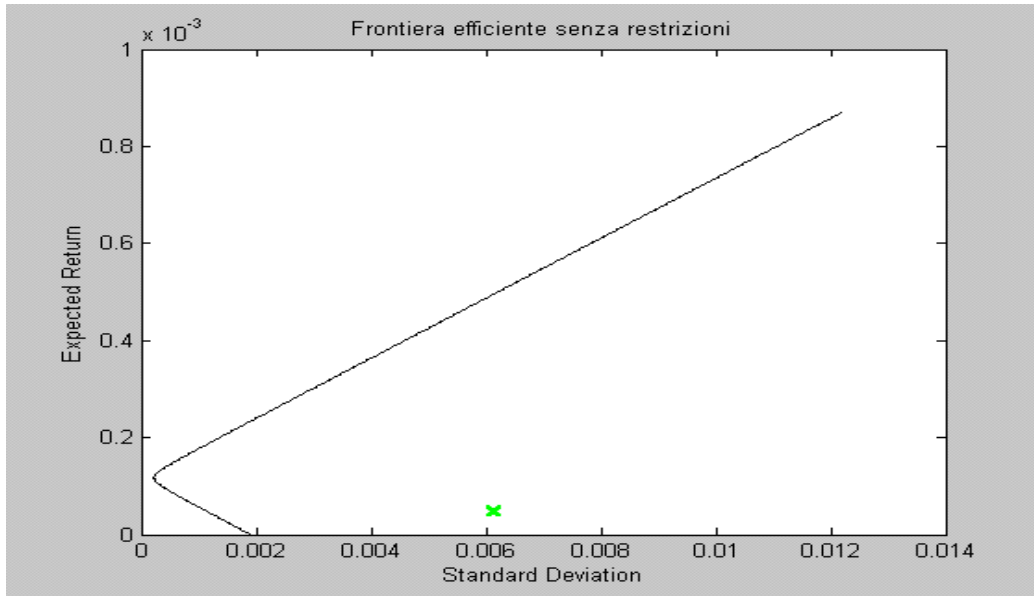


Figura 6.18: Frontiera efficiente non vincolata e benchmark

6.5.2: Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi delle attività

Introducendo i vincoli di disuguaglianza, otteniamo:

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,3848	0,2049	0,7951	0	0

Figura 6.19: Test BJS in presenza di vincoli e relativi pesi ottimali

Dai risultati del test BJS il benchmark risulta efficiente per un valore del p.value di 0,3848. I precedenti risultati non sono però coerenti con il grafico della frontiera efficiente. Infatti il benchmark nuovamente localizzato vicino al ramo inferiore, è ancora inefficiente (Fig.6.20). La frontiera efficiente, in presenza di vincoli risulta essere la seguente:

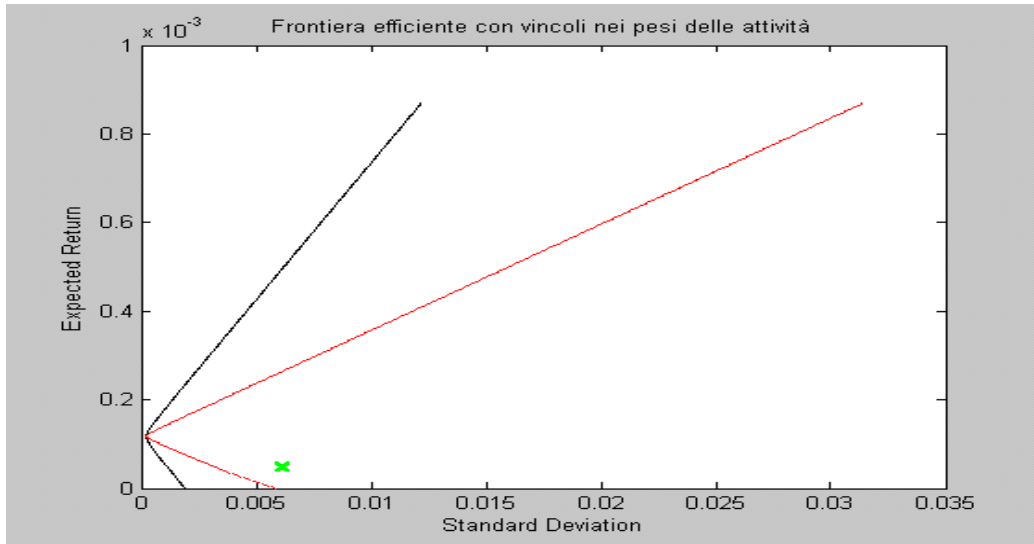


Figura 6.20: Frontiera efficiente vincolata (curva in rosso), e frontiera efficiente non vincolata (curva in nero).

6.6 Benchmark di Arca BB Acc.

6.6.1: Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività

Applicando i due test, in questo caso otteniamo:

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,0000	0,4918	0,0002	0,0082	0,4998
P.S.	0,0000	-0,0156	0,00128	-0,001409	1,01572

Figura 6.21: Test BJS e test sulle performance di Sharpe (P.S.) e relativi pesi ottimali delle attività

Il benchmark non risulta efficiente utilizzando entrambi i test. La frontiera efficiente non vincolata è la seguente:

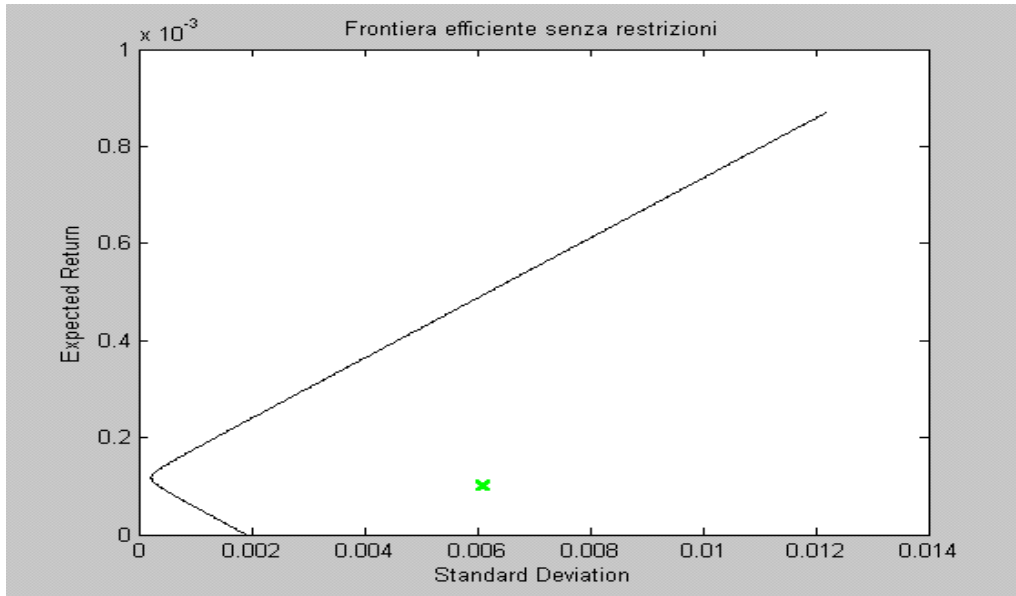


Figura 6.22: Frontiera efficiente non vincolata e benchmark

6.6.2: Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi delle attività

Applichiamo il test BJS al fine di valutare l'efficienza del benchmark in presenza di vincoli di disuguaglianza, ricordando che ($w_2+w_3 \leq 50$).

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,1414	0,1904	0,0000	0,0475	0,7621

Figura 6.22: Risultati del test BJS e relativi pesi ottimali delle attività

Secondo il test BJS il benchmark risulta efficiente con un p.value pari a 0,1414. Come nei casi precedenti, esso si trova vicino al ramo inferiore dell'iperbole costituente la frontiera efficiente, perciò se ne deduce la sua inefficienza (Fig.6.23). La frontiera efficiente vincolata risulta essere la seguente:

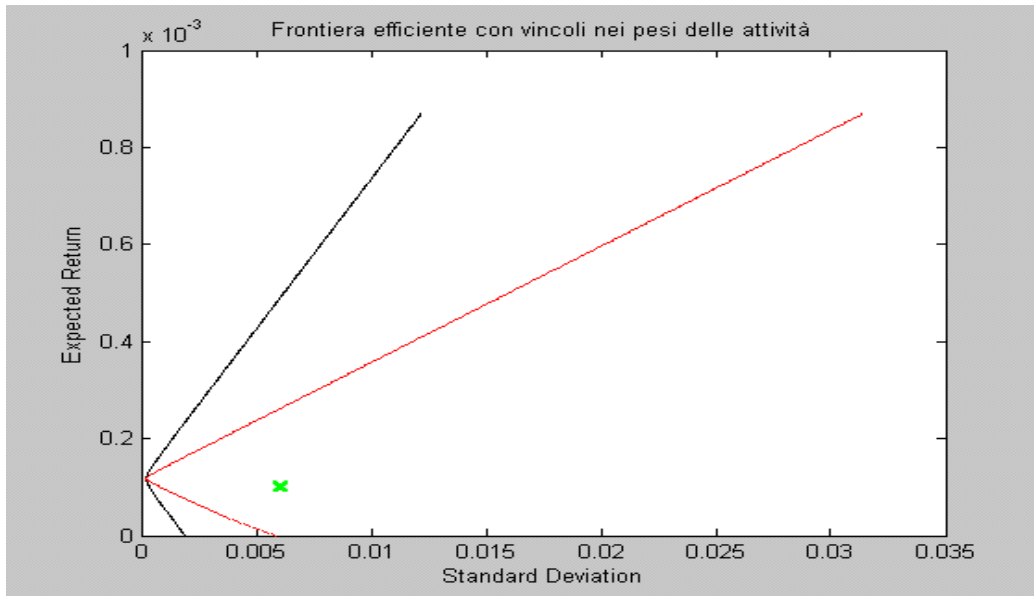


Figura 6.23: Frontiera efficiente vincolata (curva in rosso), curva efficiente non vincolata (curva in nero)

6.7 Benchmark di Arca TE Acc.

6.7.1: Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività

Applichiamo anche in questo caso il test BJS ed il test sulle performance di Sharpe per valutare l'efficienza del benchmark di tale fondo in assenza di restrizioni:

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,1669	0,6952	0,0303	-0,2867	0,5613
P.S.	0,0000	-0,0211	-0,0002	0,01209	1,00929

Figura 6.24: Risultati del test BJS, del test sulle performance di Sharpe (P.S.) e relativi pesi ottimali delle attività

Il benchmark, risulta efficiente, nell'utilizzo del test BJS, con un p.value pari a 0,1669. Tale risultato non risulta coerente nel momento in cui analizziamo la relativa frontiera efficiente (Fig.6.25). Infatti il portafoglio si posiziona, anche in tal caso, vicino al ramo inferiore, risultando pertanto, come conclude il test sulle performance di Sharpe, inefficiente. La frontiera efficiente non vincolata risulta essere la seguente:

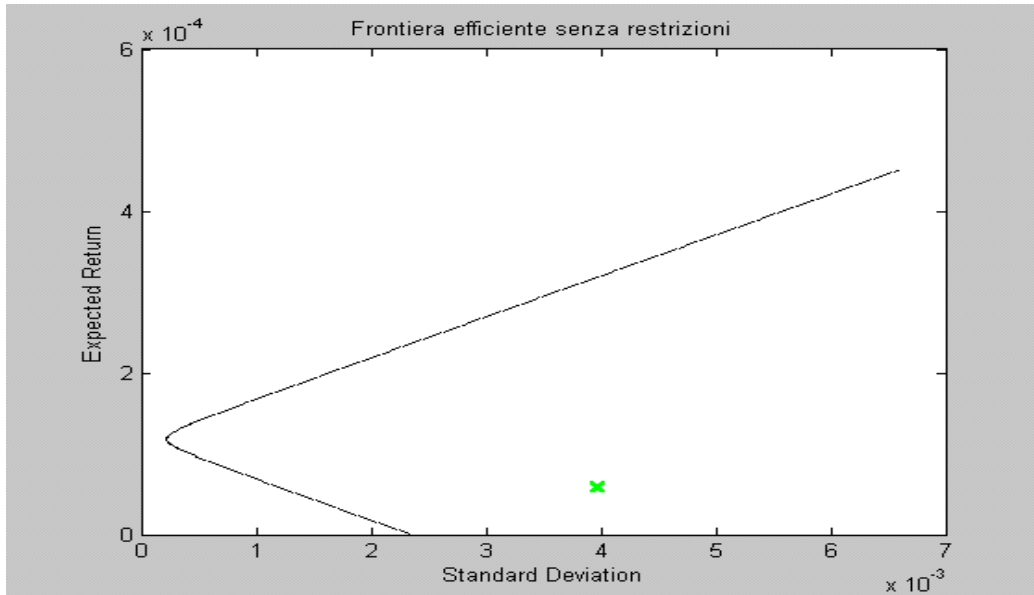


Figura 6.25: Frontiera efficiente non vincolata e benchmark.

6.7.2: Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi delle attività

Considerando i vincoli, otteniamo:

	P.Value	W1	W2	W3	W4
BJS	0,4084	0,7098	0,1683	0	0,1219

Figura 6.26: risultati del test BJS e relativi pesi ottimali delle attività

Con l'introduzione dei vincoli nel test BJS, il benchmark risulta efficiente. Dovremo però concludere che esso, per gli stessi motivi descritti nel caso non vincolato, è inefficiente (Fig.6.27). La frontiera efficiente vincolata risulta la seguente:

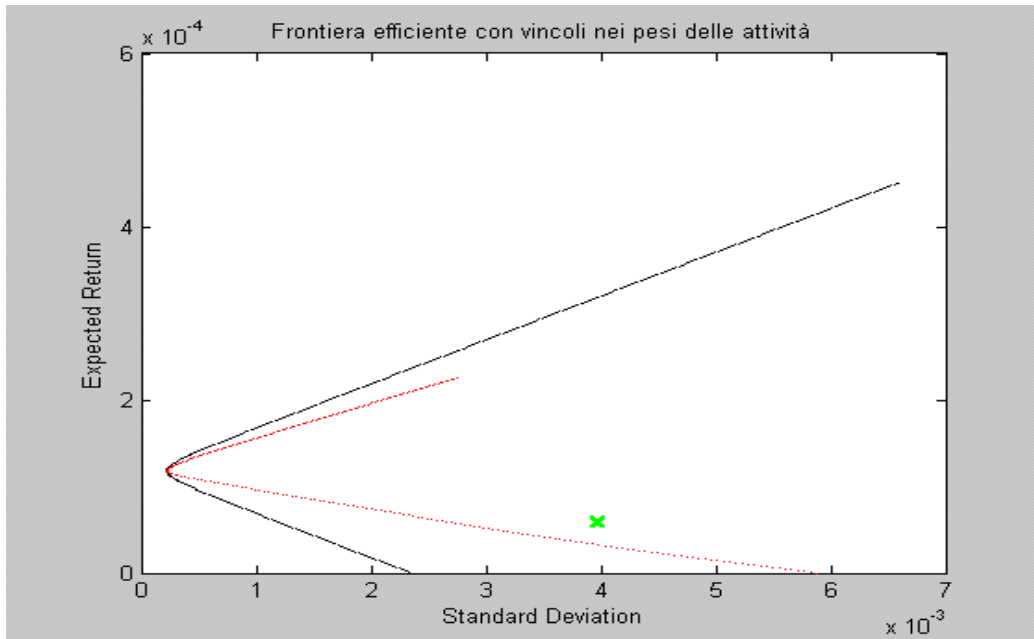


Figura 6.27: Frontiera efficiente vincolata (curva in rosso), frontiera efficiente non vincolata (curva in nero)

6.8 Benchmark di AAA Master Bilanciato Obbligazionario Acc.

6.8.1: Efficienza in assenza di restrizioni nei pesi delle attività

Riportiamo i risultati dei due test, applicati al benchmark, nel caso non vincolato:

	P.Value	W1	W2	W3
BJS	0,4805	0,1966	0,6492	0,1542
P.S.	0,0000	1,01653	-0,0161	-0,00035

Figura 6.28: Risultati del test BJS , del test sulle performance di Sharpe (P.S.) e relativi pesi ottimali delle attività

Dal test BJS, il benchmark del fondo risulta efficiente con un p.value di 0,4805. Anche in questo caso arriviamo alle stesse conclusioni dei precedenti, ossia all'inefficienza del benchmark, sottolineato dal test sulle performance di Sharpe e dal grafico della relativa frontiera efficiente (Fig.6.29) Come nei precedenti casi non vincolati, anche in questo i pesi assumono valori anche negativi. La frontiera efficiente risulta essere la seguente:

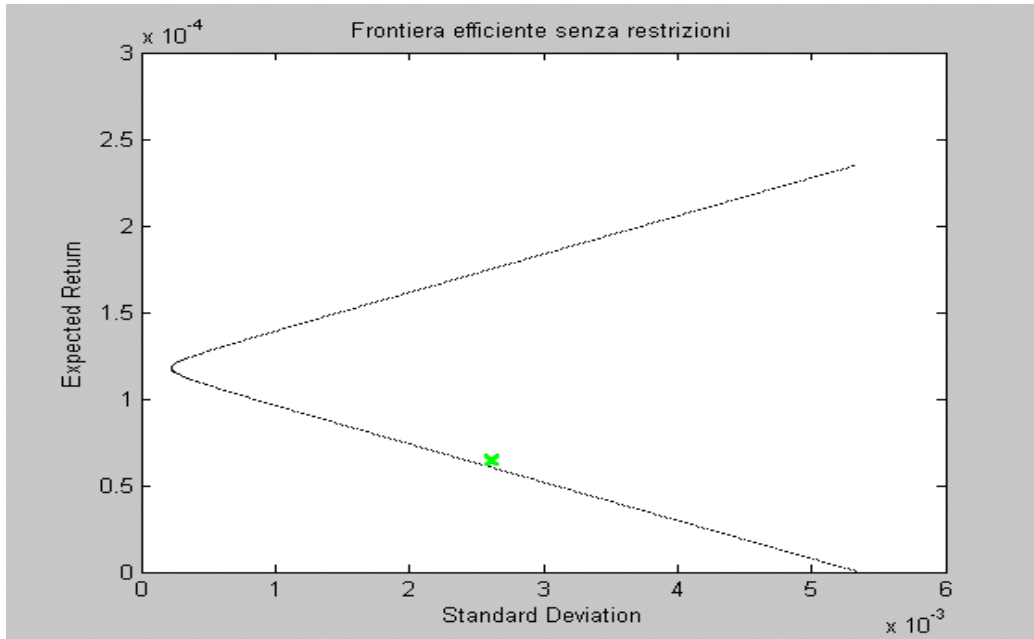


Figura 6.29: Frontiera efficiente non vincolata e benchmark

6.8.2: Efficienza in presenza di restrizioni nei pesi delle attività

Consideriamo ora la presenza di vincoli di non negatività, e assumiamo che la somma della percentuale delle attività azionarie siano comprese tra 10 e 50% del patrimonio netto ($10 \leq w_3 \leq 50$). Dal test BJS otteniamo:

	P.Value	W1	W2	W3
BJS	0,4805	0,1966	0,6492	0,1542

Figura 6.30: Risultati del test BJS e relativi pesi ottimali delle attività

Nell'introduzione dei vincoli, i risultati del test e le conclusioni rimangono immutati. La frontiera efficiente vincolata risulta essere la seguente:

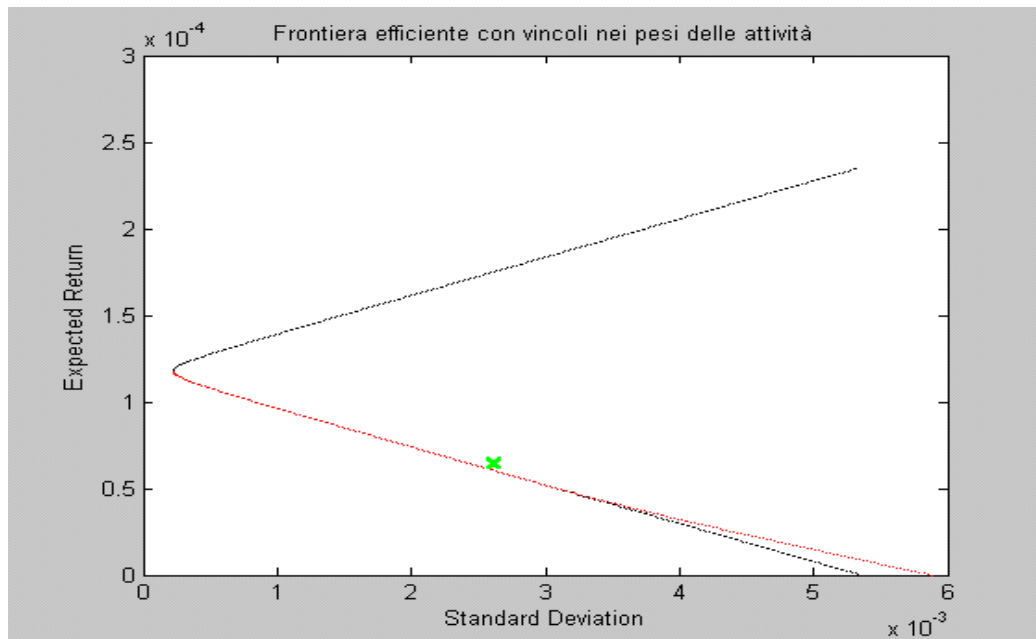


Figura 6.31: Frontiera efficiente vincolata (curva in rosso), frontiera efficiente non vincolata (curva in nero)

Riassumendo:

		RENDIMENTI GIORNALIERI			
		Master Bilanciato	Arca BB	Arca TE	Master Bilanciato Obbl.
senza vincoli	BJS	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	P.S.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
con vincoli		0,1052	0,0569	0,0283	0,0000
		RENDIMENTI SETTIMANALI			
		Master Bilanciato	Arca BB	Arca TE	Master Bilanciato Obbl.
senza vincoli	BJS	0,0346	0,0000	0,1669	0,4805
	P.S.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
con vincoli		0,3848	0,1414	0,4084	0,4805

Figura 6.32: p.value del test BJS e del test sulle performance di Sharpe, per i benchmark di ciascun fondo, con rendimenti giornalieri e settimanali

Anche nella valutazione dell'efficienza dei benchmark di ciascun fondo, il test BJS in alcune occasioni e sotto determinate condizioni, ci ha portato ad accettare l'ipotesi d'efficienza. Tale condizione d'efficienza non risulta però coerente con i grafici delle relative frontiere efficienti. Questi motivi ci

inducono a concludere che i benchmark in tutte le situazioni considerate sono inefficienti, come viene anche sottolineato dal test sulle performance di Sharpe.

CONCLUSIONI

Lo scopo di questa tesi era valutare l'efficienza di quattro fondi comuni d'investimento bilanciati e dei relativi benchmark, introducendo vincoli di disuguaglianza nei pesi delle attività che compongono i rispettivi portafogli. L'inserimento dei vincoli conferisce al problema maggiore attinenza con la realtà. Il nostro obiettivo è stato raggiunto utilizzando una versione modificata del test proposto da Basak, Jagannathan e Sun, che valuta l'efficienza di un benchmark in presenza di vincoli di non negatività. Anche se il nostro test tiene conto di alcune restrizioni presenti nella realtà, sufficientemente rilevanti da portare le frontiere efficienti a differire da quanto solitamente considerato in letteratura, esso è più propenso ad accettare l'ipotesi nulla a causa di una potenza inferiore. Non essendo stato possibile reperire l'intero ventaglio di titoli costituenti ciascun fondo, ma avendo considerato come asset primitivi i relativi indici che ne costituiscono il benchmark, i risultati dei test e le relative frontiere efficienti rappresentano un'approssimazione di quelli reali. Tale discorso non vale nel momento in cui valutiamo l'efficienza dei benchmark di ciascun fondo, in quanto si considerano proprio gli indici che li costituiscono. I risultati del test BJS mostrano che, in assenza di vincoli, il fondo ARCA BB risulta inefficiente, mentre gli altri fondi raggiungono l'efficienza solo se si considera un livello di significatività α pari a 0,02. Imponendo i vincoli, tutti i fondi risultano efficienti, mentre il fondo ARCA BB lo diventa solo nel caso di un α pari a 0,02.

Per quanto riguarda l'analisi dei benchmark, abbiamo considerato sia i rendimenti giornalieri che quelli settimanali. I risultati del test BJS evidenziano che, tolto il benchmark di ARCA BB che risulta comunque inefficiente, utilizzando i rendimenti settimanali l'efficienza viene raggiunta da

tutti i benchmark, già a livello non vincolato, solo se si fissa un livello di significatività α pari a 0,03. Nel caso di presenza di vincoli, il benchmark di Arca BB risulta efficiente, mentre quello di Arca TE lo è, nel caso di rendimenti giornalieri, solo per valore di α pari a 0,03 (p.value=0,0283). L'efficienza del benchmark di Master Bilanciato Obbligazionario rimane invece invariata nel caso settimanale, mentre rimane inefficiente analizzando i relativi rendimenti giornalieri.

La condizione d'efficienza che, in alcuni casi emerge dal test BJS, non risulta però coerente nel momento in cui analizziamo i grafici delle relative frontiere efficienti. Tutti i fondi ed i benchmark si posizionano vicino al ramo d'iperbole inferiore o addirittura al di sotto di esso. Questa parte della frontiera, poiché contiene portafogli che per un dato rischio potrebbero ottenere rendimenti attesi maggiori, non'è da prendere in considerazione. Il test BJS, includendo anche tale ramo nella sua valutazione, ci spinge a volte verso delle conclusioni poco attendibili.

Tutti questi motivi ci portano alla conclusione che i fondi e i benchmark considerati sono inefficienti, sia nel caso non vincolato, come è stato anche sottolineato dai test sulle performance di Sharpe, sia in quello vincolato.

RINGRAZIAMENTI

La mia riconoscenza va ad Alessandro Buccioli per il suo notevole aiuto nella programmazione in linguaggio Matlab e chiarimenti in materia. Un ringraziamento particolare è rivolto al Prof. Raffaele Miniaci e mio relatore per la disponibilità e pazienza. Infine ma non per questo meno importanti i miei genitori che, con il loro sostegno e comprensione mi hanno consentito di giungere fino a qui e mia sorella per avermi concesso “l’invasione” della sua stanza. Un grazie a loro e a tutti coloro che mi hanno accompagnato ed incoraggiato in questi anni d’università.

BIBLIOGRAFIA

- Barucci E., “Teoria dei mercati finanziari”. Il Mulino 2000, Bologna.
- Basak G., Jagannathan R., Sun G., “A direct test for the mean variance efficiency of a portfolio”, 2002. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 26, pp.1195-1215.
- Beltratti A., “I mercati finanziari”. Carocci editore 2000, Roma.
- Bucciol A., “L’efficienza dei portafogli delle famiglie in presenza di restrizioni sulle possibilità d’investimento”, 2003. *Rivista di Politica Economica*, 11-12, pp.31-69.
- Cappuccio N., Orsi R., “Econometria”. Il Mulino 2002, Bologna.
- Cherubini U., Della Lunga G., “Il rischio finanziario”. McGraw-Hill 2002, Milano.
- Fabozzi F. J., Modigliani F., “Mercati finanziari”. Il Mulino 1995, Bologna.
- Gollier C., “What does the classical theory have to say about household portfolios?”, 1999. Paper contenuto in “Household Portfolios” a cura di Guiso L., Haliassos M., Jappelli T.. The MIT Press Cambridge 2002, London, pp. 27-54.
- Gourièroux C., Jouneau F., “Econometrics of efficient fitted portfolios”, 1999. *Journal of empirical Finance*, 6, pp.87-118.
- Li Calzi M., “A language for the construction of preferences under uncertainty”, 1999. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* 93, pp. 439-450.
- Markowitz H. M., “Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets”. Blackwell 1992, Oxford.
- Onado M., “Mercati e intermediari finanziari”. Il Mulino 2000, Bologna.

- Pastorello S., “ Rischio e rendimento”. Il Mulino 2001, Bologna.
- Vaiani Stefano, “Efficienza e ottimalità nell’asset allocation in presenza d’informazioni condizionanti”, 2001-2002. Tesi di laurea, Università Degli Studi di Pavia.
- Von Neuman J., Morgenstern O., “ Theory of games and economic behavior”. Princeton University Press 1944, Princeton (NJ).
- Wang k. Q., “Non parametric tests of conditional mean-variance efficiency of a benchmark portfolio”, 2002. Journal of Empirical Finance, 9,pp.133-169.

RIFERIMENTI WEB

- www.morningstar.it
- www.arcaonline.it
- www.assogestioni.it
- www.msci.com
- www.yahoo.it