



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Migrazione planetaria:
circolarizzazione mareale e meccanismo di Kozai

Relatore

Prof. Francesco Marzari

Laureando

Linda Callegaro

Anno Accademico 2017/2018

Indice

1.Introduzione	5
2.Scattering pianeta-pianeta e circolarizzazione mareale	7
2.1.Circolarizzazione mareale.....	7
2.2.Meccanismo di Kozai.....	10
3.Simulazioni numeriche	11
3.1.Impostazione iniziale.....	11
3.2.Risultato dello scattering pianeta-pianeta: set N	12
3.3.Evoluzione orbitale in pianeti caldi.....	13
3.4.Distribuzione orbitale finale.....	16
3.5.Probabilità di circolarizzazione.....	19
4.Il percorso verso la migrazione di Kozai	21
5.Conclusioni	24
Appendice A: Formule per il guadagno di energia e momento angolare	26
A.1.Interazione mareale di un pianeta convettivo rotante in un'orbita debolmente legata.....	26
A.1.1.Equazioni base.....	26
A.1.2.Modi normale del pianeta rotante.....	27
A.1.3.Espansione delle autofunzioni.....	27
A.1.4.Soluzione del problema mareale.....	28
A.1.5.Scambi di energia e momento angolare.....	28
A.1.6.Maree quasi statiche.....	29
A.1.7. Maree dinamiche ed eccitazione mareale dei modi normali.....	31
Bibliografia	35

Abstract

Il modello “standard” di formazione di pianeti giganti ravvicinati prevede che i giganti gassosi si formino originariamente diverse AU oltre le fasce dei ghiacci, per migrare poi verso la stella. Nonostante la migrazione di tipo II, dovuta alle interazioni tra pianeta e disco, sia il canale più probabile seguito per la migrazione, qui vogliamo analizzare una diversa modalità di spostamento dei pianeti verso le prossimità della stella, lo scattering model (Rasio & Ford, 1996), che è un processo che combina lo scattering pianeta-pianeta e la circolarizzazione mareale. Se l’eccentricità orbitale viene spinta a valori vicini all’unità, a causa della vicinanza del pericentro, l’eccentricità ed il semiasse maggiore del pianeta vengono smorzati dall’effetto mareale della stella, quasi mantenendo la distanza del pericentro, per formare un pianeta ravvicinato con eccentricità relativamente piccola. Includeremo inoltre il meccanismo di Kozai, che è un ulteriore processo chiave del nostro modello.

Lo studio analizza le integrazioni orbitali di tre pianeti della massa di Giove, includendo direttamente l’effetto di circolarizzazione mareale. Si è riscontrato che in circa il 30% dei casi vengono formati pianeti ravvicinati, percentuale molto più alta rispetto a quella suggerita dagli studi precedenti, che avevano monitorato solamente lo stadio finale, dopo l’espulsione di uno o due pianeti che di solito avviene durante l’intersezione delle orbite di un sistema di tre corpi, sottostimando significativamente la probabilità di formazione.

1. Introduzione

Più di 250 pianeti sono stati osservati attorno a stelle sia di tipo solare che non solare. Il recente sviluppo dei metodi di studio della velocità radiale e una raccolta di osservazioni hanno rivelato delle dettagliate distribuzioni orbitali di pianeti ravvicinati. La figura 1a mostra la distribuzione di semiasse maggiore ed eccentricità per 236 pianeti¹ scoperti attorno a stelle di tipo solare grazie a tecniche di velocità radiale.

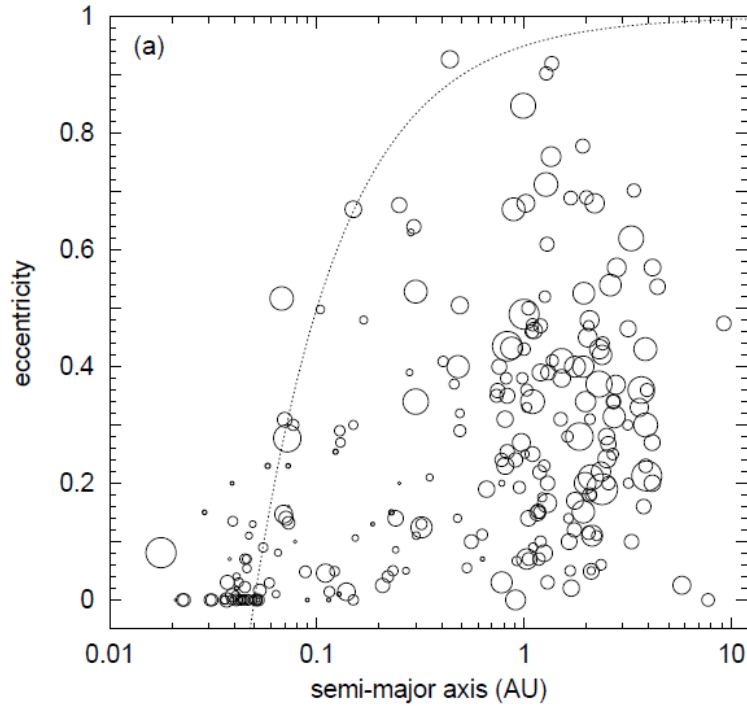


Figura 1a: distribuzione di eccentricità orbitale e e semiasse maggiore a dei pianeti extrasolari osservati. Le dimensioni dei cerchi sono proporzionali a $(m \sin i)^{1/3}$. La linea tratteggiata mostra la distanza del pericentro $q = a(1 - e) = 0.05$ AU.

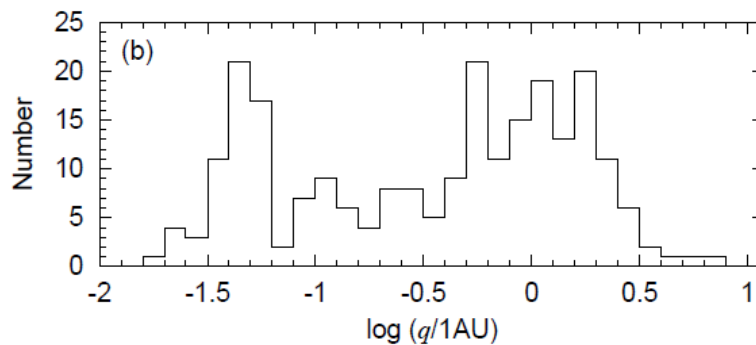


Figura 1b: istogramma della distanza del pericentro.

La linea tratteggiata mostra la distanza del pericentro $q = 0.05$ AU. Per $q \lesssim 0.05$ AU molti pianeti ravvicinati hanno piccole eccentricità, motivate da una circolarizzazione dovuta alla dissipazione mareale di energia tra le fasce planetarie (Rasio & Ford, 1996). La distribuzione dei semiasse

¹ <http://exoplanet.eu/catalogue-RV.php>

maggiori dei pianeti extrasolari scoperti mostra dei doppi picchi attorno a 0.05 AU e 1 AU (Marcy et al., 2005; Jones et al., 2004; ecc.). La posizione del picco esterno è determinata dai limiti di osservazione, ma il picco interno a 0.05 AU, ovvero la carenza di pianeti tra 0.06 e 0.8 AU, è probabilmente reale. Poiché i pianeti ravvicinati hanno eccentricità relativamente piccole, il picco attorno a 0.05 AU appare come un ammassamento a $\log q/(1AU) = -1.3$, anche nella distribuzione del pericentro (figura 1b).

I pianeti ravvicinati scoperti si sarebbero formati a grandi distanze oltre la fascia dei ghiacci e sarebbero migrati verso orbite di più breve periodo (Ida & Lin, 2004; ecc.). Un meccanismo molto seguito per la migrazione orbitale è la migrazione di tipo II (Lin et al., 1996; ecc.). Si tratta di una migrazione con accrescimento del disco dovuto al gap che si forma attorno all'orbita planetaria a causa dell'interazione gravitazionale tra il pianeta e il gas del disco proto planetario.

Nonostante il canale di formazione principale per i pianeti ravvicinati possa essere la migrazione di tipo II, gli scattering verso l'interno causati da altri pianeti giganti potrebbe essere un altro canale, in particolare per i pianeti ravvicinati con moderate eccentricità.

Con la distanza del pericentro sufficientemente piccola ($\lesssim 0.05$ AU), l'orbita planetaria può essere circolarizzata nell'orbita ravvicinata per mezzo di effetti mareali generati dalla stella (Rasio & Ford, 1996). Nello studio qui analizzato, ci riferiremo al processo di scattering pianeta-pianeta seguito dalla circolarizzazione mareale come "scattering model". Per spingere un pianeta nell'orbita interna, gli altri pianeti devono perdere la loro energia orbitale. Poiché lo scattering verso l'interno di un pianeta più leggero fa risparmiare più energia, i sistemi che sperimentano uno scattering pianeta-pianeta tendono ad avere pianeti più piccoli all'interno.

L'osservazione dell'effetto Rossiter-McLaughlin per cinque pianeti ravvicinati transitanti, incluso HAT-P-2, con eccentricità $e \simeq 0.52$, mostra che i loro piani orbitali sono quasi allineati con l'asse di spin stellare (Narita et al., 2007; Winn et al., 2005,2006,2007; Wolf et al., 2007), fatto che potrebbe suggerire che il meccanismo di scattering non è un canale principale per la formazione di pianeti ravvicinati, perché esso potrebbe eccitare l'inclinazione orbitale, così come l'eccentricità (come riprenderemo nella sezione 3.4, le inclinazioni orbitali dei pianeti ravvicinati formatisi con lo scattering model non sono necessariamente elevate). Dal momento che anche HD 17156b, con $e \simeq 0.67$, sta transitando, l'osservazione dell'effetto Rossiter-McLaughlin sarà importante.

Un problema più serio dello scattering model potrebbe essere la probabilità che le distanze del pericentro diventino troppo piccole, ovvero che le eccentricità diventino troppo vicine all'unità ($e \gtrsim 0.98$), per permettere la circolarizzazione mareale. In un sistema con due soli pianeti giganti, la legge di conservazione dell'energia mantiene il rapporto tra i semiassi maggiori vicino al valore iniziale (vedi sezione 2.1). In tali sistemi la probabilità di avere pianeti finali con un grande rapporto tra i semiassi maggiori e un'eccentricità molto elevata è $\lesssim 3\%$ (Ford et al., 2001). In un sistema con più pianeti giganti la situazione è leggermente migliore, specialmente quando i pianeti hanno inclinazioni non nulle. I pianeti ravvicinati sono molto rari appena dopo lo scattering, ma tenendo in conto la più lunga evoluzione orbitale la probabilità per i candidati pianeti ravvicinati sale a $\sim 10\%$ (Weidenschilling & Marzari, 1996; Marzari & Weidenschilling, 2002; Chatterjee et al., 2007). I pianeti coinvolti sono pianeti nello stato di Kozai (vedi sezione 3.5).

Ripercorrendo lo studio svolto da M. Nagasawa, S. Ida e T. Bessho, vogliamo rivisitare lo scattering model attraverso l'integrazione orbitale di tre pianeti giganti con l'inclusione diretta degli effetti della circolarizzazione mareale e di un argomento analitico per l'effetto di Kozai. Vedremo che la probabilità di formazione di pianeti ravvicinati viene significativamente aumentata al 30%. Nonostante i precedenti studi fossero concentrati su stati orbitali successivi alla stabilizzazione per espulsione di qualche pianeta, vedremo che la circolarizzazione orbitale avviene attraverso la "migrazione di Kozai" (Wu, 2003; Wu & Murray, 2003), causata dai pianeti esterni, principalmente durante un'intersezione orbitale di tre pianeti, dopo una provvisoria separazione del pianeta interno da quelli esterni. Nella sezione 2 descriveremo l'instabilità orbitale di un sistema planetario e l'evoluzione orbitale, che diviene importante dopo che il sistema entra in uno stato stabile (circolarizzazione mareale e meccanismo di Kozai). Presenteremo i risultati delle simulazioni numeriche nella sezione 3. Mostriamo risultati tipici dello scattering, come i pianeti siano circolarizzati in orbite a breve periodo e le relative probabilità. Nella sezione 4 presenteremo infine le argomentazioni analitiche.

2. Scattering pianeta-pianeta e circolarizzazione mareale

Vogliamo analizzare l'integrazione orbitale di tre pianeti giganti di egual massa m e raggio R rotanti attorno a una stella di massa m_* . Le interazioni con il gas del disco sono trascurate. Consideriamo il caso in cui la scala temporale dell'intersezione orbitale sia più lunga del tempo di vita medio del disco (vedi sezione 2.1). Le orbite vengono integrate fino a che un pianeta non sia marealmente circolarizzato, due pianeti non siano espulsi, o il sistema non diventi stabile dopo che un pianeta viene espulso e gli altri si posizionano su orbite ben separate. Ad ogni modo, l'integrazione viene effettuata abbastanza a lungo dopo la stabilizzazione orbitale per osservare il meccanismo di Kozai, che avviene su tempi più lunghi. Per comprendere i risultati numerici, riassumiamo brevemente in questa sezione i processi chiave di circolarizzazione mareale e meccanismo di Kozai.

Nell'analisi assumiamo pianeti della massa di Giove ($m = m_j = 10^{-3}M_\odot$) e una stella di massa solare ($m_* = M_\odot$). Di seguito useremo a per il semiasse maggiore, e per l'eccentricità, i per l'inclinazione e ω per l'argomento del pericentro. Per distinguere i pianeti useremo i pedici 1, 2 e 3 dal pianeta più interno a quello più esterno. Useremo un asterisco come pedice per le quantità relative alla stella, mentre con "tide" ci riferiremo a valori relativi alle dinamiche mareali. Definiamo inoltre la variabile h come $h = (1 - e^2)\cos^2 i$. Il mutuo raggio di Hill dei pianeti k e j è infine dato da $R_H(k, j) = [(m_k + m_j)/3m_*]^{1/3} (a_k + a_j)/2$.

2.1. Circolarizzazione mareale

Se consideriamo solo lo scattering mutuo, il semiasse maggiore del pianeta finale più interno ($a_{fin,1}$) è limitato dalla conservazione dell'energia. Nel caso limite in cui gli altri pianeti sono sufficientemente lontani ($a_{fin,k} \gg a_{fin,1}$, $k = 2, 3, \dots$),

$$\frac{1}{a_{fin,1}} \simeq \sum_k^N \frac{1}{a_{in,k}} \quad (1)$$

dove $a_{in,k}$ è il semiasse maggiore iniziale del pianeta "k" e N è il numero di pianeti. L'equazione implica che $a_{fin,1}$ debba essere maggiore di $a_{in,1}/N$. Ciò significa che i pianeti ravvicinati difficilmente si formano come risultato dello scattering diretto di pochi pianeti originati a diverse AU.

Affinché l'energia sia conservata, lo scattering pianeta-pianeta non può far sì che il periodo orbitale di un pianeta sia di pochi giorni. Tuttavia, se l'energia viene dissipata nell'interno planetario dalla forza mareale proveniente dalla stella, allora può essere formato un pianeta con un periodo di pochi giorni. Con e fortemente eccitata a valori vicini all'unità, il pericentro del pianeta può avvicinarsi alla stella, essendo la distanza del pericentro data da $q = a(1 - e)$. Poi, sia e che a diminuiscono, mentre q rimane quasi costante per la dissipazione mareale.

La dissipazione mareale dipende fortemente da q . Siccome i pianeti che hanno subito uno scattering possiedono in generale orbite molto eccentriche, consideriamo solo la marea dinamica. Nella simulazione è stata utilizzata la formula di Ivanov e Papaloizou (2004), i quali calcolarono analiticamente i più forti modi normali (i modi fondamentali $l = 2$) della dissipazione mareale. Si assume che i modi normali risultati vicino al pericentro siano completamente dissipati prima che avvenga un successivo passaggio al pericentro. Se i modi normali permangono, il momento angolare e l'energia possono aumentare o diminuire al successivo passaggio al pericentro (Mardling, 1995; ecc.).

Ivanov e Papaloizou (2004) calcolarono il momento angolare (ΔL_{tide}) e l'energia (ΔE_{tide}) guadagnati marealmente durante un singolo passaggio al pericentro come segue²:

$$\Delta L_{tide} \sim -\frac{32\sqrt{2}}{15} \tilde{w}_0^2 \tilde{Q}^2 \xi \exp\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3} w_+ \xi\right) \left[1 - \frac{9}{2^{14}(\tilde{w}_0 \xi)^4} \exp\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} \tilde{\sigma} \xi\right)\right] L_{pl} \quad (2)$$

$$\Delta E_{tide} \sim -\frac{16\sqrt{2}}{15} \tilde{w}_0^3 \tilde{Q}^2 \xi \exp\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3} w_+ \xi\right) \left[1 + \frac{3}{2^7(\tilde{w}_0 \xi)^2} \exp\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \tilde{\sigma} \xi\right)\right]^2 E_{pl} \quad (3)$$

dove $L_{pl} = m(GmR)^{1/2}$ e $E_{pl} = Gm^2/R$ sono il momento angolare orbitale e l'energia orbitale, $\xi = (mq^3)^{1/2}(m_*R^3)^{-1/2}$, $w_+ \sim \tilde{w}_0(Gm/R^3)^{1/2} + \Omega_r$, e $\tilde{\sigma} \sim 2\Omega_r/(Gm/R^3)^{1/2}$. Il valore Ω_r è la velocità angolare della rotazione del pianeta, \tilde{w}_0 è una frequenza adimensionale di modo fondamentale, e \tilde{Q} è un integrale di sovrapposizione adimensionale che dipende dal modello interno del pianeta. L'asse di spin è assunto essere perpendicolare al piano orbitale. Con le approssimazioni di Ivanov e Papaloizou, scriviamo $\tilde{w}_0 \simeq 0.53(R/R_J) + 0.68$ e $\tilde{Q} \simeq -0.12(R/R_J) + 0.68$ per pianeti gioviani, dove R_J è il raggio di Giove.

Per un pianeta non rotante, le equazioni (2) e (3) si semplificano in

$$\Delta L_{tide} \sim -\frac{32\sqrt{2}}{15} \tilde{w}_0^2 \tilde{Q}^2 \xi \exp\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3} w_0 \xi\right) L_{pl} \quad (4)$$

$$\Delta E_{tide} \sim -\frac{16\sqrt{2}}{15} \tilde{w}_0^3 \tilde{Q}^2 \xi \exp\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3} w_0 \xi\right) E_{pl} \quad (5)$$

² In Appendice A è riportato il procedimento seguito da Ivanov e Papaloizou per l'ottenimento delle formule.

Quando la marea accelera il pianeta alla sua rotazione critica, $\Omega_r = \Omega_{crit}$, che non contribuisce ad aumentare il momento angolare del pianeta nell'equazione (2),

$$\Delta L_{tide} = 0 \quad (6)$$

$$\Delta E_{tide} \sim -\frac{1}{5\sqrt{2}} \frac{\tilde{w}_0 \tilde{Q}^2}{\xi} \exp\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3} w_0 \xi\right) E_{pl} \quad (7)$$

I valori di $\Delta E_{tide}/E_{pl}$ per un pianeta di massa gioviana attorno a una stella di massa solare dati dalle equazioni (5) e (7) sono mostrati in figura 2 per $R = R_J$ e $R = 2R_J$. Come si vede in figura, la marea ha effetto solo se in prossimità della stella.

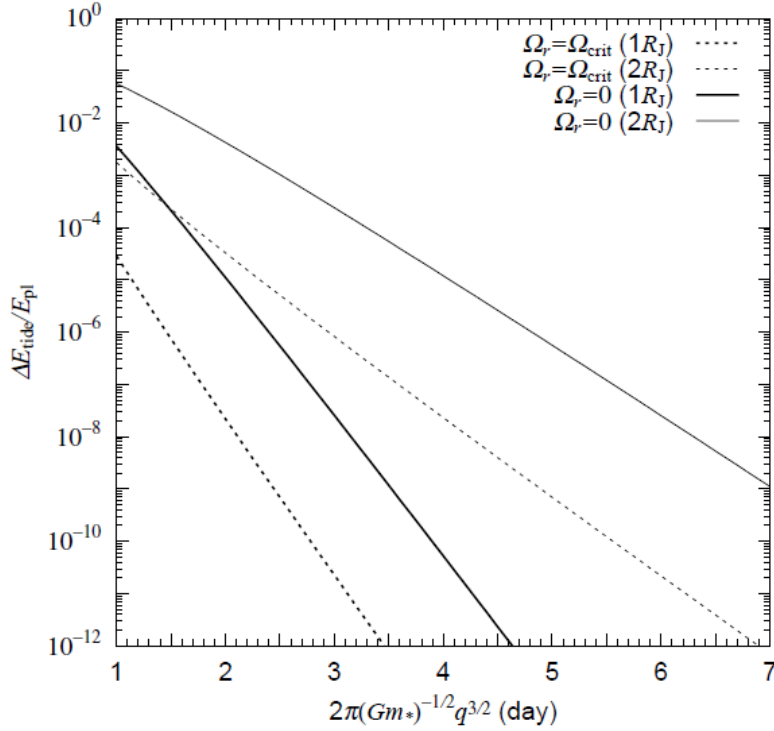


Figura 2: variazione di energia ΔE_{tide} durante un passaggio al pericentro in funzione del periodo orbitale. E_{pl} è l'energia orbitale. Si sono assunti una stella di massa solare e un pianeta di massa gioviana. Per masse planetarie maggiori, ΔE_{tide} è maggiore. Le linee continue corrispondono a pianeti non rotanti, quelle tratteggiate a pianeti con rotazione critica ($\Delta L_{tide} = 0$). Le linee spesse corrispondono a pianeti di $1R_J$, quelle sottili a pianeti di $2R_J$.

Il modello è valido solamente per pianeti completamente convettivi in orbite fortemente eccentriche, poiché viene considerato solo il modo $l = 2f$ e viene usata un'approssimazione di impulso. Quando un'orbita planetaria è considerevolmente circolarizzata, in modo tale che l'approssimazione di impulso non sia più valida e una marea quasi-statica diventi importante, le equazioni precedenti non sono più adeguate. Tuttavia, poiché il nostro scopo non è studiare i dettagli del processo di circolarizzazione mareale in sé, ma mostrare un possibile canale per la formazione di pianeti ravvicinati, useremo tali formule per maree dinamiche fino al termine delle simulazioni.

Con le stime $dE_{tide}/dt \simeq \Delta E_{tide}/T_{Kep}$ e $dL_{tide}/dt \simeq \Delta L_{tide}/T_{Kep}$ (il passaggio al pericentro avviene ad ogni T_{Kep}), i periodi di evoluzione di semiasse maggiore ed eccentricità sono

$$\tau_a = -\frac{a}{\dot{a}} = \frac{Gmm_*}{2a} \frac{T_{Kep}}{(-\Delta E_{tide})} \quad (8)$$

$$\tau_e = -\frac{e}{\dot{e}} = Gmm_* T_{Kep} \left(-\alpha \gamma \Delta E_{tide} + \sqrt{\frac{\gamma Gm_*}{ae^2}} \Delta L_{tide} \right)^{-1} \quad (9)$$

dove T_{Kep} è un periodo Kepleriano e $\gamma = (1 - e^2)/e^2 = q(2a - q)/(a - q)^2$. Il tempo di smorzamento per un pianeta che subisce uno scattering verso un'orbita molto eccentrica ($e \sim 1$) con $a = 2$ AU è mostrato in figura 3 ($q = a(1 - e)$). Le masse di stella e pianeta sono rispettivamente M_\odot e m_j . Sono rappresentati due casi limite di marea forte ($\Omega_r = 0$ e $R = 2R_j$) e marea debole ($\Omega_r = \Omega_{crit}$ e $R = R_j$). Nel primo caso il semiasse maggiore è smorzato in 10^{10} anni a $q \lesssim 0.04$ AU, mentre nel secondo a $q \lesssim 0.02$ AU. Nelle seguenti simulazioni numeriche verranno analizzati entrambi i casi.

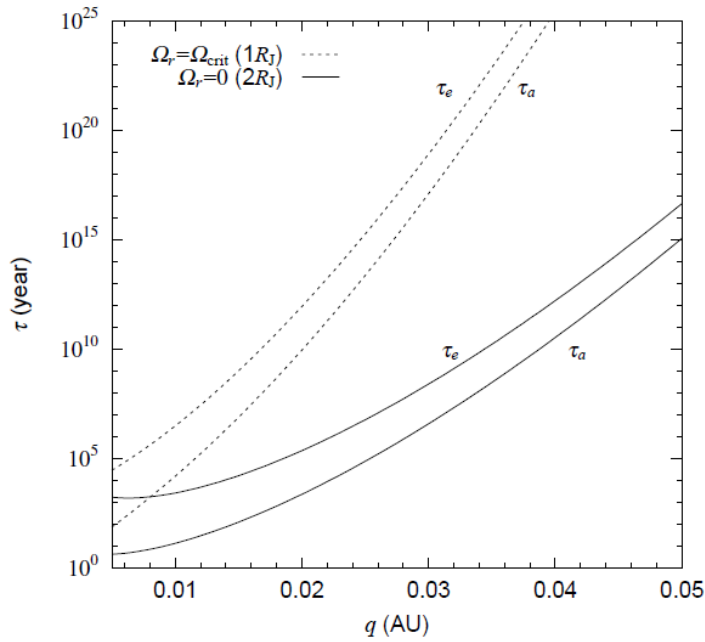


Figura 3: scale temporali di circularizzazione mareale in funzione della distanza del pericentro q . Le formule sono date dalle equazioni (8) e (9) con le (4) e (5) per pianeti non rotanti o le (6) e (7) per pianeti in rotazione critica. Le linee continue corrispondono a pianeti non rotanti con $R = 2R_j$, quelle tratteggiate a pianeti con $R = 1R_j$ in rotazione critica. Le linee spesse mostrano τ_a , quelle sottili τ_e . Si è utilizzato un semiasse maggiore $a = 2$ AU. Per masse planetarie maggiori, le scale temporali sono molto più brevi.

2.2. Meccanismo di Kozai

Quanto si avvicini il pericentro alla stella dipende dall'eccentricità. Anche dopo che un pianeta si posiziona su un'orbita stabile, la sua eccentricità e la sua inclinazione possono oscillare per via delle perturbazioni secolari causate da altri pianeti separati, in particolare quando il pianeta più interno possiede una componente z del momento angolare, l_z , relativamente piccola. Questo processo è detto meccanismo di Kozai (Kozai, 1962). Supponiamo che il pianeta interno 1 venga perturbato da un pianeta esterno 2 ben separato. L'eccentricità e_1 , l'inclinazione i_1 e l'argomento del pericentro ω_1 del pianeta interno evolvono conservando la sua Hamiltoniana di tempo medio ed l_z . Nel più

basso ordine di a_1/a_2 (a_1 e a_2 si conservano), la conservazione dell'Hamiltoniano medio e di l_z del pianeta interno danno

$$(2 + 3e_1^2) \left(\frac{3h}{1-e_1^2} - 1 \right) + 15e_1^2 \left(1 - \frac{h}{1-e_1^2} \right) \cos(2\eta) \equiv C = \text{cost.} \quad (10)$$

$$(1 - e_1^2) \cos^2 i_1 \equiv h = \text{cost.} \quad (11)$$

dove $\eta = \omega_2 - \omega_1$ è la differenza tra gli argomenti del pericentro dei due pianeti. Le equazioni precedenti sono indipendenti da a_1 e dai parametri del pianeta esterno, ma la scala temporale per la circolazione o la librazione è proporzionale a $(1 - e_2)^{3/2} (a_2/a_1)^3 m_2^{-1} n_2^{-1}$, dove n_2 è il moto medio del pianeta 2. La conservazione di l_z , cioè $h = \text{cost.}$, mostra che il cambio di i_1 in 0 provoca un aumento di e_1 verso l'unità, ovvero l'avvicinamento del pericentro alle prossimità della stella. Quanto e_1 si possa avvicinare all'unità è regolato dall'equazione (10).

3. Simulazioni numeriche

3.1. Impostazione iniziale

Studieremo le simulazioni di Nagasawa, Ida e Bessho per l'evoluzione di sistemi di tre pianeti con la massa di Giove ($m = 10^{-3} M_\odot$) in orbite circolari attorno a una stella di massa solare ($e_1 = e_2 = e_3 = 0$). I semiassi maggiori iniziali sono $a_1 = 5.00$ AU, $a_2 = 7.25$ AU e $a_3 = 9.50$ AU, mentre le loro inclinazioni sono $i_1 = 0.5^\circ$, $i_2 = 1.0^\circ$ e $i_3 = 1.5^\circ$, secondo le impostazioni delle simulazioni di Marzari e Weidenschilling (2002). Gli angoli orbitali sono selezionati casualmente. L'integrazione orbitale è ripetuta per diverse serie di numeri casuali per gli angoli orbitali iniziali con gli stessi a , e ed i iniziali.

Con questa scelta, il semiasse maggiore più corto atteso dopo lo scattering è $a_{min} = 2.26$ AU (equazione (1)). Il periodo di smorzamento mareale è una funzione della massa e del raggio dei pianeti. Fissata la massa planetaria, analizziamo i casi $R = R_J$ e $R = 2R_J$. Quest'ultimo caso corrisponde a pianeti neonati che non si sono raffreddati. Dal momento che una separazione orbitale media del sistema è $\sim 3.6R_H$ con questa scelta di semiassi maggiori, ci si aspetta che l'instabilità orbitale cominci su scale temporali di 10^3 anni (vedi sezione 2.1).

I modi di oscillazione aumentano nell'interno planetario a causa della forza mareale provocata dalla stella nelle vicinanze del pericentro. Assumiamo che l'energia dei modi venga dissipata e che il momento angolare venga trasferito al momento angolare orbitale prima del successivo passaggio al pericentro. Ipotizzando che i cambiamenti orbitali siano piccoli negli avvicinamenti individuali, cambiamo l'orbita impulsivamente al passaggio al pericentro, come spieghiamo di seguito.

Presentiamo sei set di simulazioni (tabella 1).

Table 1. Characteristics of simulations

Set	Ω_r	R/R_J	comments	Close-in planets
Set N	-	-	No tide	-
Set V	0	2	$\Delta v^2 = 2\Delta E_{\text{tide}}$	37%
Set T1	0	2	equation (4)	38%
Set T2	0	1	equation (4)	29%
Set T3	Ω_{crit}	2	equation (6)	33%
Set T4	Ω_{crit}	1	equation (6)	32%

Nel set V adottiamo il modello più semplice, assumendo cioè che la velocità \boldsymbol{v} del pianeta sia modificata discontinuamente in \boldsymbol{v}' al passaggio al pericentro secondo la

$$\boldsymbol{v}' = \sqrt{2\Delta E_{\text{tide}} + v^2} \frac{\boldsymbol{v}}{v} \quad (12)$$

dove ΔE_{tide} è data dall'equazione (5). In questo set assumiamo $\Omega_r = 0$ e $R = 2R_J$. Poiché non cambiamo la posizione del pericentro e la direzione del moto, la variazione del momento angolare è data da $q\Delta v$, che è inconsistente con l'equazione (4). Nei set T1 e T2, d'altro canto, la distanza del pericentro è modificata, così come la velocità, in modo da soddisfare consistentemente sia l'equazione (4) che la (5) per $\Omega_r = 0$, ma la direzione del moto non cambia. Le equazioni (6) e (7) sono soddisfatte nei set T3 e T4 ($\Omega_r = \Omega_{\text{crit}}$). Nei set T1 e T3 il raggio planetario è $R = 2R_J$, mentre nei set T2 e T4 è $R = R_J$. Come mostreremo in seguito, la probabilità che avvenga la circolarizzazione mareale non dipende significativamente dai modelli di modifica orbitale per dissipazione mareale. Per confronto, testiamo anche il caso senza circolarizzazione mareale (set N).

A causa della natura caotica dei processi di scattering, si sono integrati 100 runs in ogni set per $10^7 \div 10^8$ anni. Il calcolo viene bloccato quando un pianeta colpisce la superficie della stella con $1R_\odot$, oppure quando ΔL_{tide} supera il momento angolare che possiede un pianeta circolarizzato. Quest'ultima condizione avviene nei set T1 \div T4. Nel set V avviene una collisione del pianeta circolarizzato marealmente con la stella. Negli altri casi la stabilità dei sistemi viene controllata ogni 10^6 anni dopo i primi 10^7 anni. Se solo un pianeta sopravvive e il suo pericentro è lontano dalla stella, o due pianeti rimangono su orbite dinamicamente stabili con l_z relativamente grandi, la simulazione viene bloccata. La simulazione viene continuata fino a 10^8 anni, fintanto che il sistema contiene tre pianeti.

3.2. Risultato dello scattering pianeta-pianeta: set N

Il risultato degli scattering pianeta-pianeta senza la forza mareale è consistente con gli studi precedenti di Marzari e Weidenschilling (2002). Sistemi che finiscono con l'avere due pianeti sono il risultato più comune. In 75 casi del set N un pianeta viene espulso. In 22 casi uno dei pianeti colpisce la stella. Questo accade principalmente durante la fase caotica di interazione planetaria, ossia prima dell'espulsione di un pianeta. Raro è il caso in cui due pianeti vengono espulsi, come trovarono Marzari e Weidenschilling. Questo risultato viene osservato in 5 casi del set N.

La distribuzione dei semiassi maggiori e delle eccentricità è mostrata in figura 4. I pianeti più interni subiscono scattering verso orbite con $a \approx 2.5$ AU. Poiché una piccola variazione nell'energia orbitale causa una grande differenza nel semiasse maggiore nella regione esterna, i semiassi maggiori dei pianeti esterni sono distribuiti su un ampio range. La figura comprende i pianeti che colpiscono la stella; questi sono raggruppati attorno a $e \approx 1$. I pianeti con piccola distanza del pericentro ($q \lesssim 0.05$ AU) sono quelli che collidono con la stella. Non essendoci alcun meccanismo di smorzamento nel set N, i pianeti con piccolo q hanno anche $a \sim 2 \div 3$ AU.

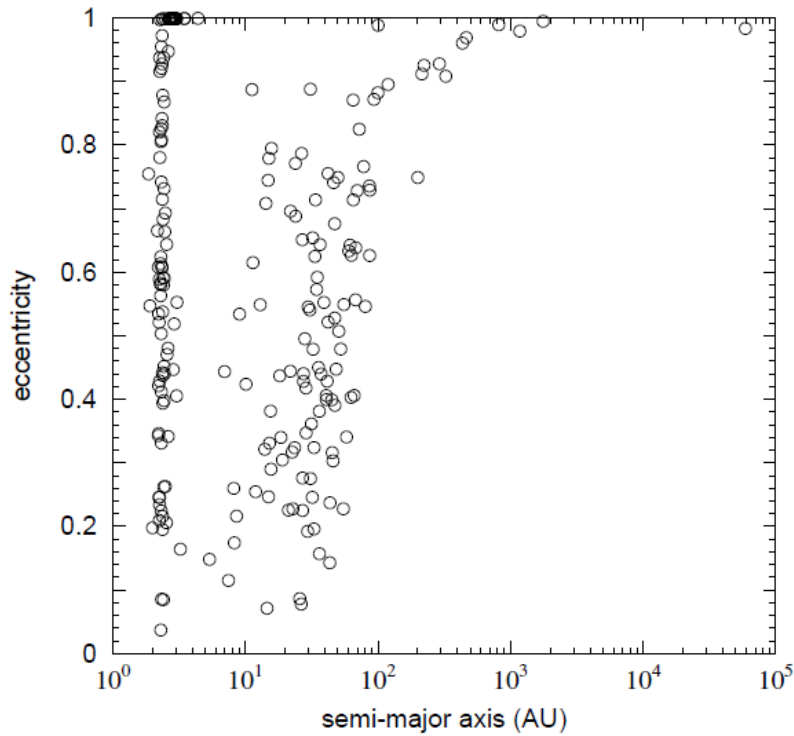


Figura 4: distribuzione finale di a ed e nel caso del set N (senza maree).

3.3. Evoluzione orbitale in pianeti caldi

I pianeti che avvicinano la stella vengono circolarizzati e diventano pianeti ravvicinati se nella nostra simulazione includiamo la forza mareale. In figura 5 mostriamo una tipica evoluzione di semiasse maggiore, pericentro e apocentro nel caso del set V.

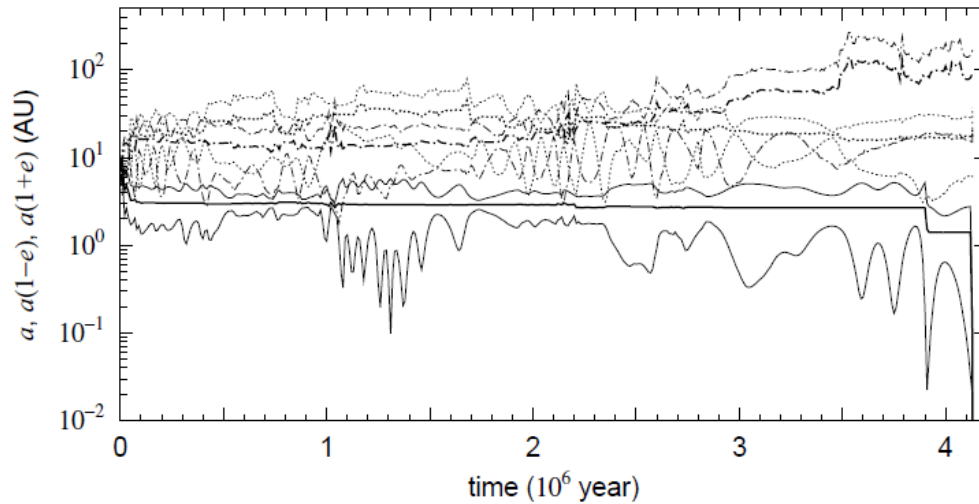


Figura 5: tipica evoluzione del semiasse maggiore di tre pianeti. Le linee sottili mostrano l'evoluzione dei pericentri ($a(1 - e)$) e degli apocentri ($a(1 + e)$). Il pianeta indicato dalla linea continua viene circolarizzato a 4.13×10^6 anni.

Il sistema entra velocemente nella fase caotica, ed inizialmente il pianeta più esterno viene spinto all'interno ad $a \sim 3$ AU, attraverso diverse interazioni. Il pianeta è isolato dagli altri pianeti e diventa marginalmente stabile con $a \sim 3$ AU dopo un tempo $t \sim 10^5$ anni, fino a che non subisce uno smorzamento mareale ($t \gtrsim 3.9 \times 10^6$ anni), nonostante i due pianeti esterni continuino ad interagire con intersezioni orbitali. Durante il periodo di provvisorio isolamento, l'eccentricità e l'inclinazione del pianeta più interno vengono modificate principalmente da perturbazioni secolari (lontane) dei due pianeti esterni (vedi figura 6). Poiché si tratta di perturbazioni secolari, il semiasse maggiore del pianeta isolato non varia significativamente fino a 3.9×10^6 anni, ma la sua eccentricità varia casualmente nelle occasioni in cui il pianeta mezzano si avvicina. Come conseguenza di uno di questi continui incontri ravvicinati, a $t \simeq 1.0 \times 10^6$ anni il pianeta isolato acquisisce una e ed una i relativamente grandi. La sua eccentricità oscilla con larga ampiezza, scambiando l_z con l'inclinazione tramite il meccanismo di Kozai. Nonostante l'ampiezza delle oscillazioni di e ed i decada dopo $t \simeq 1.7 \times 10^6$ anni, esse aumentano di nuovo a $t \simeq 2.5 \times 10^6$ anni. A $t \simeq 3.7 \times 10^6$ anni il pianeta acquisisce un'ampiezza di oscillazione di inclinazione ed eccentricità molto elevata. L'eccentricità raggiunge il valore massimo di un ciclo di Kozai a 3.9×10^6 anni, quando il pericentro si avvicina alla stella. Poi il pianeta viene marealmente spinto leggermente verso l'interno, ma lo smorzamento del semiasse maggiore viene interrotto quando l'eccentricità raggiunge il valore massimo di un ciclo di Kozai e comincia a diminuire. A 4.1×10^6 anni la distanza del pericentro q può essere abbastanza piccola per la circolarizzazione mareale durante un ciclo di Kozai. Poiché in questo caso q diventa < 0.01 AU, l'orbita viene circolarizzata in un tempo di 10^4 anni.

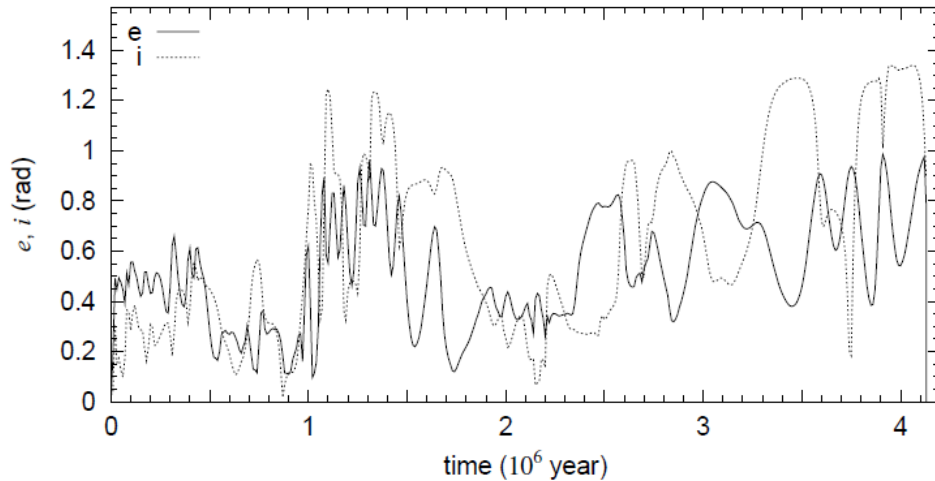


Figura 6: evoluzione di eccentricità e (linea continua) ed inclinazione i (linea tratteggiata) del pianeta circolarizzato mostrato in figura 5.

Un altro esempio del set T1 è mostrato in figura 7.

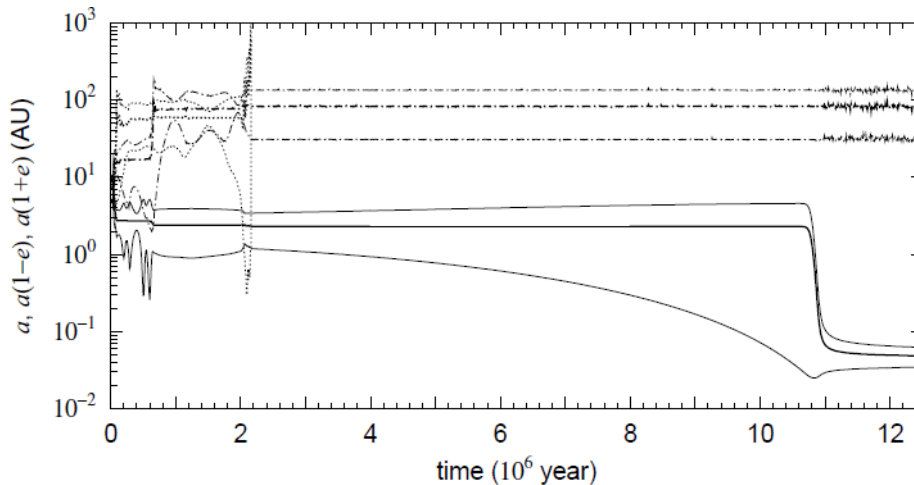


Figura 7: evoluzione del semiasse maggiore di tre pianeti (significato delle linee come in figura 5). Un pianeta (rappresentato dalla linea tratteggiata) viene espulso dal sistema a 2.2×10^6 anni. il pianeta indicato dalla linea continua viene circolarizzato a $\approx 1.1 \times 10^7$ anni.

In questo caso uno dei pianeti entra in un'orbita iperbolica a 2.2×10^6 anni. Due pianeti rimangono su orbite stabili a 2.3 e 80 AU. Ad ogni modo, il pianeta più interno è nello stato di Kozai. Al momento dell'isolamento, l'eccentricità e l'inclinazione del pianeta più interno sono rispettivamente 0.49 e 1.5 rad. L'eccentricità e l'inclinazione oscillano secondo il meccanismo di Kozai. Poiché il pianeta perturbatore si trova molto più lontano (~ 80 AU) che nel caso della figura 5, l'eccentricità aumenta più lentamente. A 10.5×10^6 anni, e raggiunge il valore 0.984. Dato che q raggiunge ≈ 0.02 AU, e ed a del pianeta sono marealmente smorzati. Poiché il periodo di smorzamento dell'eccentricità, τ_e , è maggiore di quello del semiasse maggiore (vedi figura 4), e decade dopo che a è diminuito notevolmente. A differenza del set V, nel set T q aumenta gradualmente durante la circolarizzazione mareale. Essendo il periodo di smorzamento una funzione fortemente crescente di q , in questo set la circolarizzazione mareale rallenta con il tempo. Come conseguenza, e non è completamente smorzata dopo 10^8 anni (in questo esempio, dopo 10^8 anni, $e = 0.08$). Wu (2003) e Wu e Murray (2003) indicarono anche una migrazione dovuta ad un

effetto combinato del meccanismo di Kozai e della circolarizzazione mareale per un pianeta in un sistema binario, definita “migrazione di Kozai”. Wu e Murray hanno considerato il meccanismo di Kozai indotto dalle perturbazioni di una stella compagna, mentre qui consideriamo quelle di pianeti esterni nelle intersezioni orbitali. Se il pianeta che subisce scattering verso l’interno possiede una piccola $h = (1 - e^2)\cos^2 i$, è soggetto a circolarizzazione mareale.

3.4. Distribuzione orbitale finale

La distribuzione dell’eccentricità finale dei pianeti più interni è mostrata in figura 8. Essa è suddivisa in tre gruppi: un picco a $e > 0.95$, uno a $e < 0.05$, ed un’ampia distribuzione tra i due picchi. Il picco a $e > 0.95$ è composto principalmente da pianeti del set N (linea tratteggiata lunga). Questo riflette il fatto che si sia stoppata la simulazione nel set N quando il pianeta colpisce la superficie della stella. Negli altri set questi pianeti sono circolarizzati marealmente. Quasi tutti i pianeti circolarizzati rientrano nel picco più importante a $e < 0.05$. Escludendo i due picchi, l’eccentricità è ampiamente distribuita e centrata in $e \sim 0.5$, come trovato negli studi precedenti.

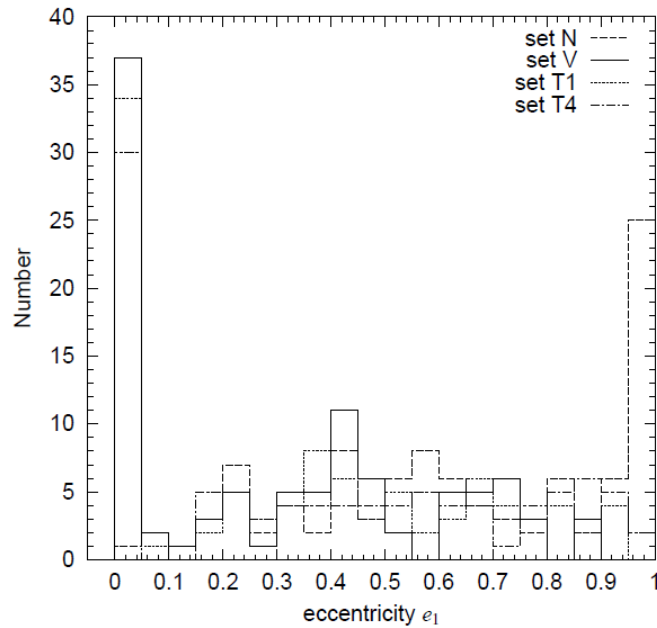


Figura 8: istogramma delle eccentricità dei pianeti che hanno subito scattering verso orbite interne. Le linee tratteggiate lunghe, continue, a punti e tratteggiate a punti corrispondono rispettivamente ai set N, V, T1 e T4.

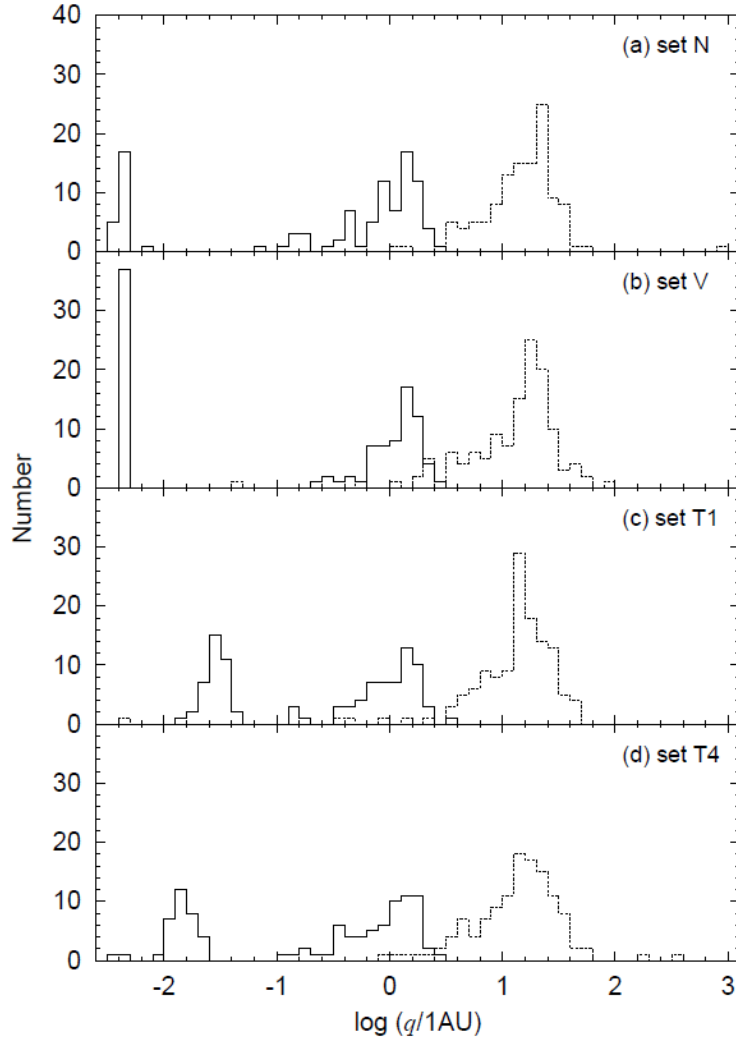


Figura 9: istogramma della distanza del pericentro. Le linee continue rappresentano i pianeti interni, le tratteggiate quelli esterni (alla fine delle simulazioni).

I pianeti che vengono spinti nelle orbite interne con moderate eccentricità, ma che non hanno subito circolarizzazione mareale, sono distribuiti attorno ad $a \sim 2.3$ AU, come richiesto dalla legge di conservazione dell'energia. In figura 9 è mostrata la distribuzione del pericentro. Le distribuzioni a $\log(q/1AU) > -0.5$ non presentano differenze notevoli nei modelli. Nel set V i pianeti ravvicinati sono ammassati a $\log(q/1AU) = -2.3$. Siccome non teniamo conto del fatto che la marea dinamica dovrebbe diventare meno efficiente con la circolarizzazione orbitale, il pianeta non può fermare il decadimento mareale una volta che la circolarizzazione è cominciata, e ciò conduce alla sovra-densità nel picco inferiore di q . Un tale picco non esiste nel set T, perché l'aumento di q durante la circolarizzazione mareale rallenta l'ulteriore circolarità, come mostrato in figura 8. Nei set T3 e T4, in cui $\Delta L_{tide} = 0$, il momento angolare iniziale, $[Gm_*(1 - e_{ini}^2)a_{ini}]^{1/2} \simeq (2Gm_*q_{ini})^{1/2}$, è uguale a quello finale, $[Gm_*(1 - e_{fin}^2)a_{fin}]^{1/2} \simeq (Gm_*q_{fin})^{1/2}$, quindi q può aumentare di un fattore 2. I q finali dei pianeti ravvicinati sono distribuiti tra $\log(q/1AU) = -2$ e $\log(q/1AU) = -1$, come per i pianeti osservati (vedi figura 1b). Le e finali non sono necessariamente completamente smorzate, e sono distribuite in un range di $0 \div 0.4$ nel set T, in cui gli a finali sono maggiori di quelli del set V.

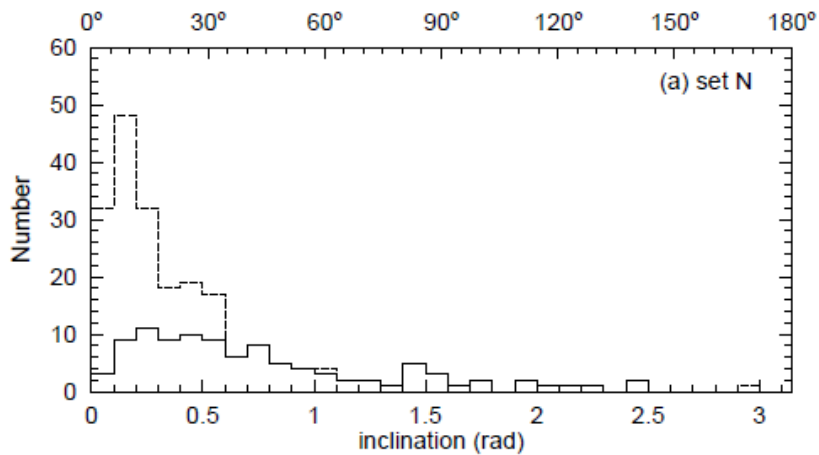


Figura 10a: istogramma dell'inclinazione dei pianeti senza forza mareale (set N). La linea continua mostra i pianeti più interni, la tratteggiata tutti i pianeti rimasti.

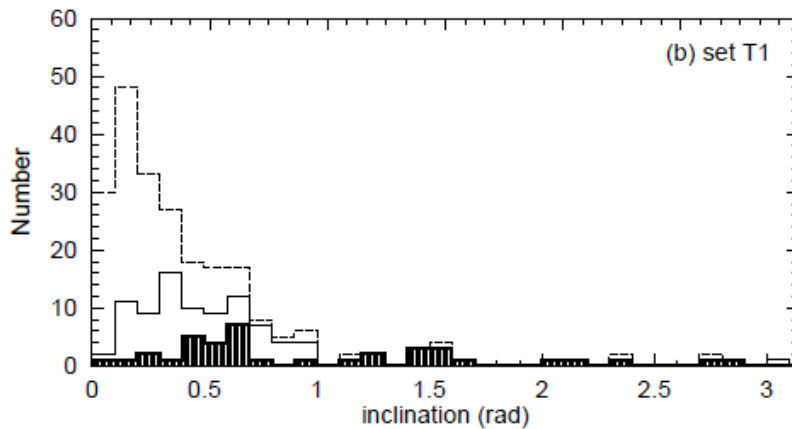


Figura 10b: istogramma dell'inclinazione dei pianeti con forza mareale (set T1). L'inclinazione dei pianeti ravvicinati è mostrata nella regione scura.

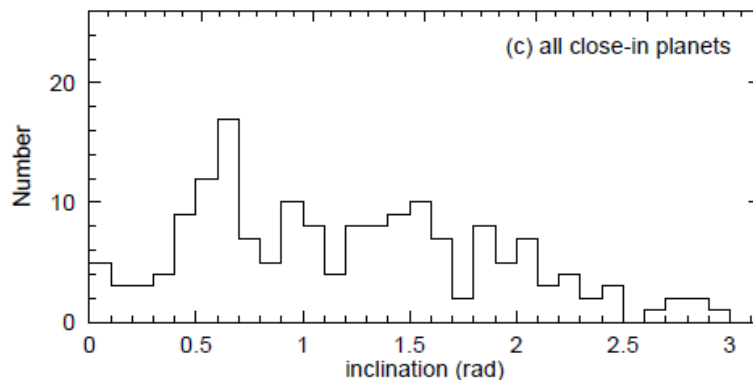


Figura 10c: istogramma dell'inclinazione dei pianeti ravvicinati formati in tutte le simulazioni (set V e T1÷T4).

La distribuzione dell'inclinazione è mostrata in figura 10 nei casi del set N (figura 10a) e del set T1 (figura 10b). Le linee continue mostrano la distribuzione dei soli pianeti più interni, mentre le linee tratteggiate quella di tutti gli altri pianeti (interni ed esterni). Le distribuzioni generali non riportano differenze tra i modelli con e senza marea. La maggior parte dei pianeti mantiene un'inclinazione relativamente piccola, come affermato da Chatterjee et al. (2007). Tuttavia, i pianeti ravvicinati rappresentati in figura 10c tendono ad avere un'inclinazione relativamente grande, perché la

migrazione di Kozai è efficace per pianeti spinti verso orbite molto inclinate ($i \sim \pi/2$), cosicché pianeti ravvicinati formati secondo questo modello possiedono orbite selettivamente molto inclinate. Nel meccanismo di Kozai, ad ogni modo, l'inclinazione assume valori minori quando l'eccentricità è maggiore. La circolarizzazione mareale avviene quando l'eccentricità è elevata. Perciò, il pianeta ravvicinato si forma più facilmente quando l'inclinazione assume valori minori nel ciclo di Kozai. Questo effetto inibisce la sovra-densità per le maggiori inclinazioni e ne provoca piuttosto un'ampia distribuzione. Da notare è il fatto che non è stato incluso alcun meccanismo di smorzamento per l'inclinazione, che in generale è caratterizzato da scale temporali molto lunghe. Il nostro modello mostra che una frazione non trascurabile di pianeti ravvicinati possiede una rotazione retrograda ($i > \pi/2$) rispetto all'equatore della stella, nonostante i pianeti retrogradi possano essere marealmente instabili su scale di tempo più lunghe. Poiché la migrazione di tipo II non può produrre rotazioni retrograde, se tali pianeti venissero scoperti sarebbe una prova di un certo contributo dello scattering model alla formazione di pianeti ravvicinati.

3.5. Probabilità di circolarizzazione

La frazione di campioni nei quali si formano pianeti ravvicinati è mostrata nella tabella 1 per ciascun modello. Essa è circa il 30%, quasi indipendentemente dal modello specifico per la circolarizzazione mareale. Questo dato è molto maggiore della probabilità di circa il 10% di formazione di pianeti ravvicinati predetta da Marzari e Weidenschilling (2002). Questo studio ha mostrato che in circa 2/3 dei campioni che formano pianeti ravvicinati, i pianeti vengono prodotti durante le interazioni di tre pianeti. Nel restante 1/3 dei campioni i pianeti ravvicinati si formano dopo che uno dei pianeti viene espulso dal sistema e questo diventa stabile. La differenza tra questi risultati e le previsioni di Marzari e Weidenschilling (2002) deriva dal fatto che questi ultimi erano interessati solo agli ultimi casi dopo la stabilizzazione, e non diedero importanza ai primi, che contribuiscono maggiormente. L'ultimo caso di circolarizzazione rappresenta il 6÷8% delle totali simulazioni, dato consistente con le stime di Marzari e Weidenschilling.

I modelli di circolarizzazione mareale utilizzati potrebbero essere troppo forti, dato che abbiamo usato la formula di marea dinamica anche dopo che l'eccentricità viene significativamente smorzata. Nonostante ciò, anche se si utilizzasse un modello più realistico, i risultati non cambierebbero di molto. Nello studio sono stati utilizzati cinque diversi modelli di circolarizzazione mareale. Tra i nostri modelli, la forza di smorzamento è la più debole nel set T4 (vedi figura 2). In questo caso, solo i pianeti con $q \lesssim 0.02$ AU vengono circolarizzati. Nonostante ciò, la probabilità di formazione di pianeti ravvicinati è ancora di circa il 30%. La relativamente elevata probabilità è un risultato di ripetuti meccanismi di Kozai inerenti allo scattering di tre pianeti giganti.

La figura 11 mostra un esempio di evoluzione di e , i e h senza forza mareale. La corrispondente evoluzione del semiasse maggiore è mostrata in figura 12. Durante la fase iniziale ($t < 1.5 \times 10^6$ anni), in cui tutti i pianeti ripetono diversi incontri ravvicinati mutui, la loro eccentricità varia caoticamente. Comunque, dopo che un pianeta subisce uno scattering verso un'orbita interna di $a = 2.47$ AU, la sua variazione orbitale è regolata principalmente da variazioni secolari.

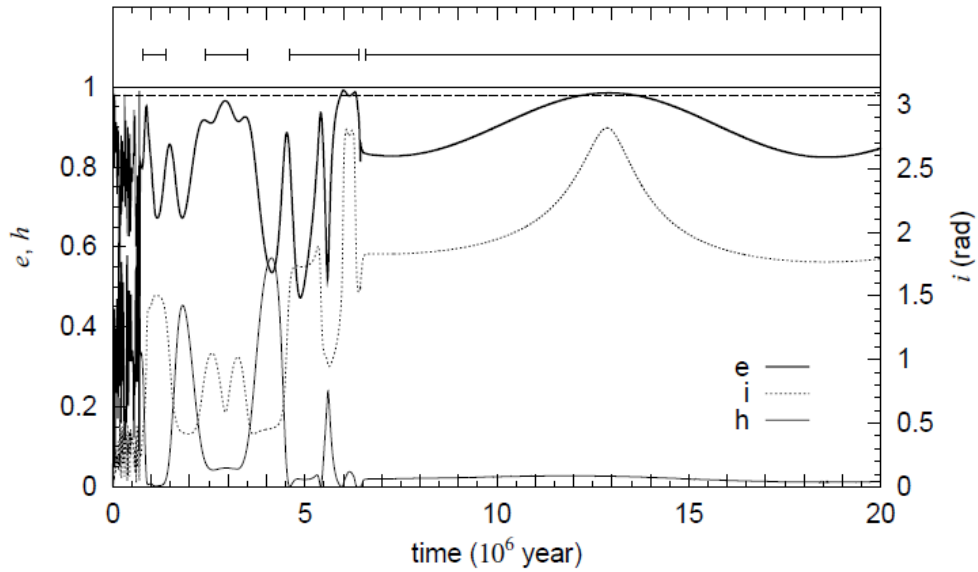


Figura 11: un esempio di evoluzione di e , i e h per il pianeta interno. La linea tratteggiata mostra $e = 0.98$. Le barre mostrano il periodo in cui il pianeta è nello stato di Kozai (piccoli valori di h).

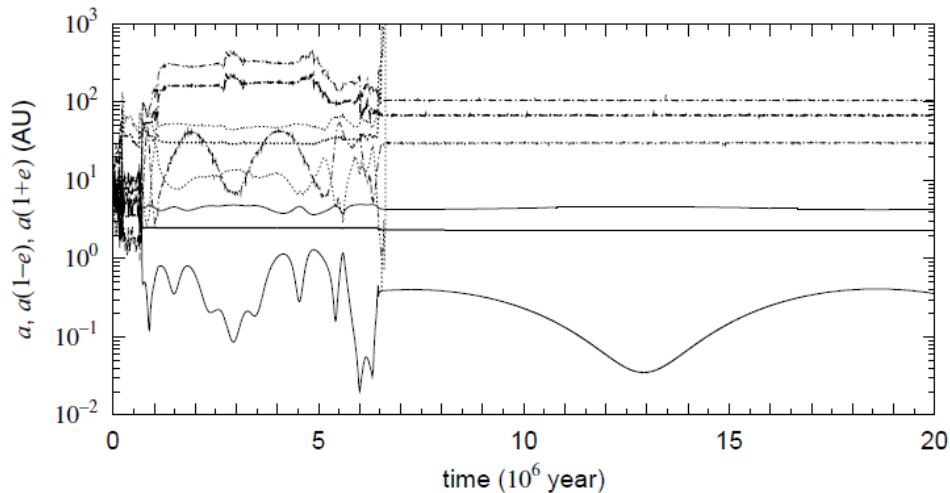


Figura 12: evoluzione di semiasse maggiore, pericentro e apocentro del sistema della figura 11.

L'anticorrelazione tra le dimensioni di e ed i mostra che il pianeta si trova nello stato di Kozai. Come spiegheremo nella sezione 4, la massima eccentricità durante il ciclo di Kozai è determinata principalmente dal valore di h , quasi indipendentemente da posizione e massa del pianeta perturbatore. Poiché non vi è alcuna dissipazione di energia in questo caso (anche con la circularizzazione mareale, la dissipazione di energia è trascurabile fintanto che $q \gtrsim 0.05$ AU), l'isolamento del pianeta più interno è provvisorio, ed esso è occasionalmente sottoposto ad un incontro relativamente vicino con i pianeti esterni. Dopo l'incontro, il pianeta entra in un nuovo stato di Kozai con un diverso h . Nel caso della figura 11, il pianeta entra in uno stato di Kozai per la prima volta a $t \approx 1.5 \times 10^6$ anni. Questo ciclo termina con un incontro relativamente vicino con un pianeta esterno prima che l'eccentricità sia pienamente aumentata. Lo stato di Kozai successivo inizia a $t \approx 2.5 \times 10^6$ anni, ma in questo ciclo h non è abbastanza piccolo da innalzare e a valori $\gtrsim 0.98$ ($q \lesssim 0.05$ AU). Il terzo stato di Kozai inizia a $t \approx 4.5 \times 10^6$ anni, ma non è uno stato di Kozai puro, perché un pianeta esterno è relativamente vicino. Ciò nonostante, grazie al piccolo valore di h , e può essere $\gtrsim 0.99$ ($q \lesssim 0.02$ AU) in questo ciclo. Se si include lo smorzamento

mareale, l'orbita sarebbe circolarizzata. Infine, a $t \simeq 6.5 \times 10^6$ anni, uno dei pianeti esterni viene espulso, e il sistema entra in uno stato stabile in cui il pianeta interno e il rimanente esterno sono separati da 70 AU. Nel momento in cui il sistema entra nello stato stabile, $q \sim 0.4$ AU. Ad ogni modo, poiché il pianeta interno si trova di nuovo in uno stato di Kozai con un h relativamente piccolo, il pericentro si avvicina periodicamente a 0.04 AU, dove la dissipazione mareale ha effetti marginali in un modello di marea relativamente forte. Essendo il pianeta esterno lontano 70 AU, il periodo del ciclo di Kozai è maggiore di 10^7 anni.

Marzari e Weidenschilling (2002) notarono questa variazione orbitale a lungo termine dopo la stabilizzazione, che può portare il pericentro in prossimità della superficie della stella, pur non facendo riferimento al meccanismo di Kozai. Ma, secondo i loro criteri, verrebbe a mancare il terzo ciclo di Kozai, in cui q assume il valore più piccolo in questo campione. Durante l'intersezione delle orbite di tre pianeti, ci sono molte probabilità di trovarsi in uno stato di Kozai. Lo stato di Kozai è quasi-stabile, e spesso dura abbastanza a lungo perché il pericentro possa avvicinarsi alla stella e possa avvenire la circolarizzazione mareale. Monitorando q anche durante l'intersezione delle orbite dei tre pianeti (nei modelli contenenti l'effetto di circolarizzazione mareale è monitorato automaticamente), si sono trovati molti più casi di formazione di pianeti ravvicinati rispetto ai precedenti studi.

La figura 13 mostra un ulteriore esempio.

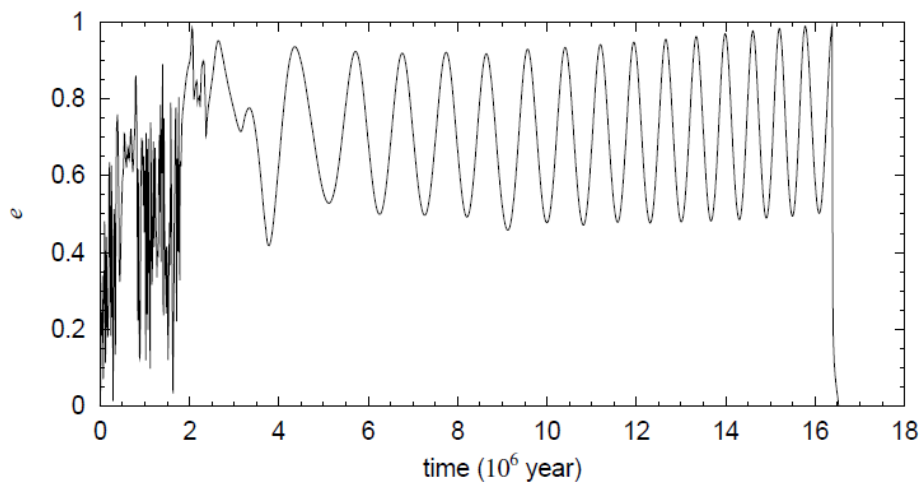


Figura 13: un esempio dell'evoluzione dell'eccentricità del pianeta interno.

In questo caso è inclusa la marea dinamica. Al termine della fase caotica, tre pianeti entrano in uno stato quasi-stabile. L'eccentricità del pianeta più interno oscilla con grande ampiezza, scambiando e ed i . La perturbazione a periodo più lungo fa aumentare gradualmente l'eccentricità media, e l'orbita del pianeta viene circolarizzata a 1.6×10^7 anni.

4. Il percorso verso la migrazione di Kozai

Nella sezione 3 abbiamo visto che il meccanismo di Kozai, combinato con la circolarizzazione mareale, spinge effettivamente i pianeti verso orbite a breve periodo. Ora presenteremo delle

argomentazioni analitiche del meccanismo di Kozai col fine di calcolare la probabilità di formazione di pianeti ravvicinati e di spiegare i risultati numerici.

Nella figura 14, i profili di C dati dall'equazione (10) (“mappa Hamiltoniana”) sono rappresentati nel piano $e-\eta$, dove $\eta = \omega_2 - \omega_1$. La topologia della mappa Hamiltoniana dipende soltanto da h . Il primo e il secondo grafico rappresentano rispettivamente le mappe con $h = 0.2$ e $h = 0.6$. Quando un pianeta subisce uno scattering verso un'orbita con un certo valore di (C, h) , il pianeta si muove lungo la linea di C costante, che è determinata da h , ammesso che gli altri pianeti siano ben separati e che le perturbazioni da essi indotte siano secolari.

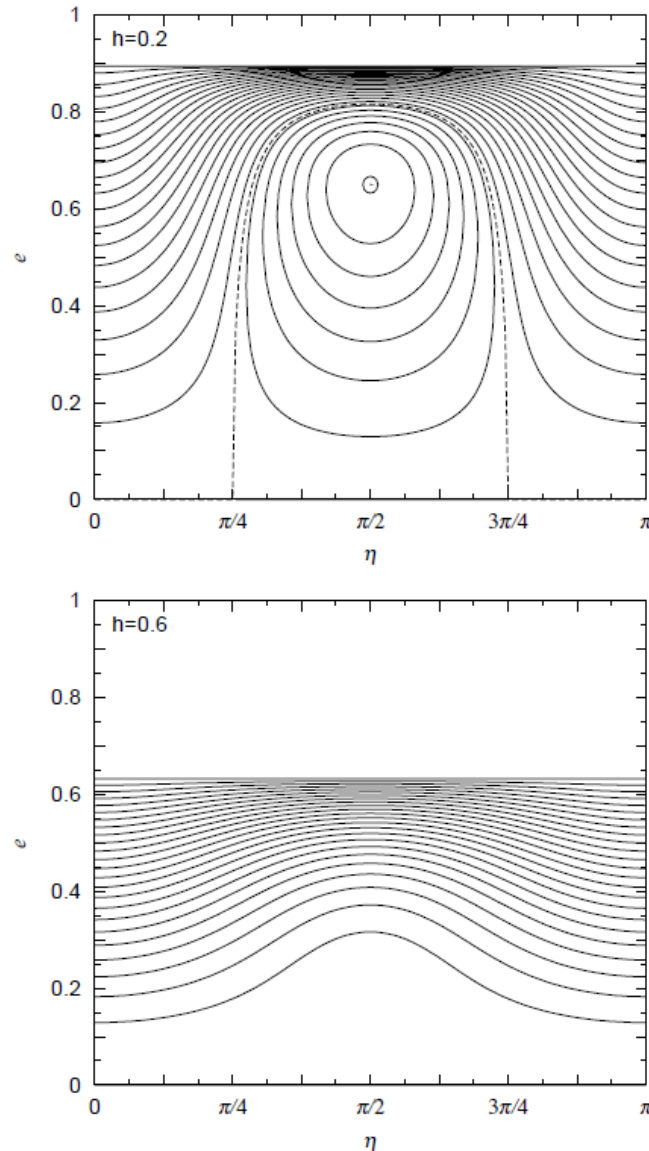


Figura 14: mappa Hamiltoniana per un pianeta più interno con $h = 0.2$ e $h = 0.6$. I profili nel riquadro superiore sono tracciati ogni $\Delta C = 0.5$ da $C = -4.02$ a 8.8 (dagli interni agli esterni) per $h = 0.2$. C è minimo nel centro di librazione e massimo in cima al profilo. Nel riquadro inferiore, i profili sono tracciati ogni $\Delta C = 0.2$ da $C = 1.6$ a 6.4 (dal basso verso l'alto) per $h = 0.6$. La linea tratteggiata indica una separazione tra librazione e circolazione.

Il pericentro (η) è libero quando $C < 6 - h$ e $h < 0.6$. Con altri valori di (C, h) , η oscilla. Il range di valori di C e \sqrt{h} che il pianeta può effettivamente assumere è determinato dalle condizioni $0 \leq e < 1$, $0 \leq i \leq \pi$ e $0 \leq \eta \leq 2\pi$. Il range permesso di C e h è rappresentato in figura 15. Nel centro di

librazione C assume il valore minimo di $-20 - 24h + 12\sqrt{15h}$. L'eccentricità corrispondente è $[1 - (5h/3)^{1/2}]^{1/2}$.

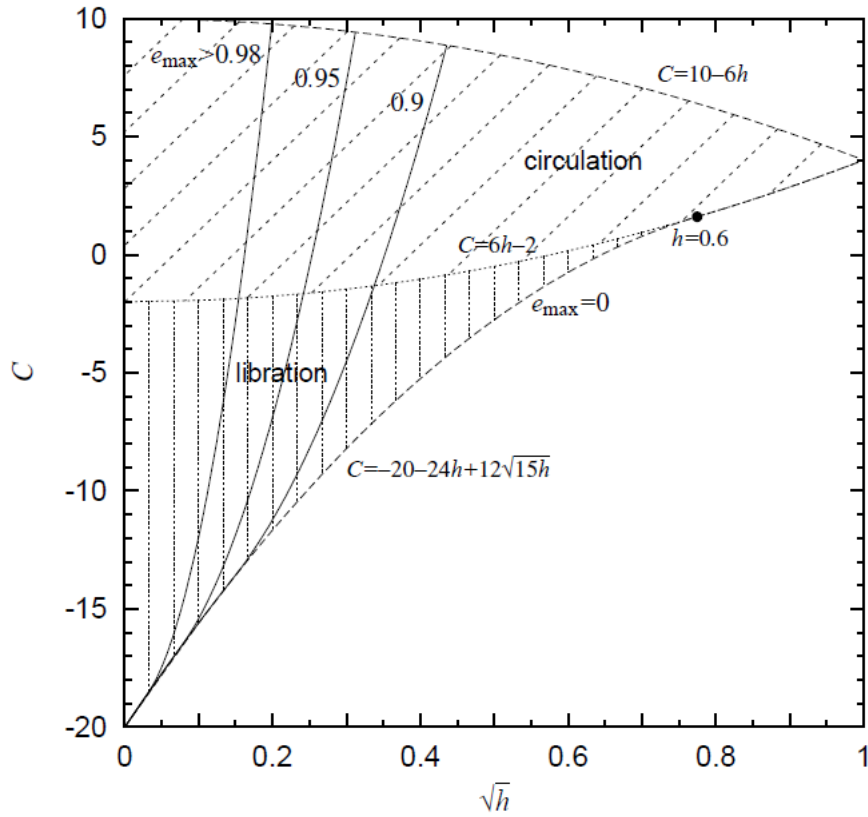


Figura 15: range di C e \sqrt{h} per una data e_{max} . Per $h \leq 0.6$ il minimo valore di C è $C = -20 - 24h + 12\sqrt{15h}$. Per $h \geq 0.6$ esso è $C = 6h - 2$. Nelle regioni ombreggiate (librazione e circolazione) il pianeta è in un'orbita ellittica. Nella regione di librazione l'angolo mutuo dei pericentri $|\eta|$ è ristretto tra $\pi/4$ e $3\pi/4$. Nella regione di circolazione $|\eta|$ oscilla tra 0 e π .

Come mostra la figura, la massima eccentricità raggiungibile (e_{max}) è maggiore se h è minore. La massima eccentricità raggiunta a $\eta = \pi/2$ è

$$e_{max}^2 = \frac{1}{36} \left(16 - 24h - C + \sqrt{400 - 1200h + 40C + 576h^2 + 48hC + C^2} \right) \quad (13)$$

Per e_{max} più vicina all'unità, la minima distanza del pericentro durante il ciclo di Kozai è minore. Se è abbastanza piccola, la circolarizzazione mareale è efficace, ed è attesa la formazione di un pianeta ravvicinato. Nella figura 16 sono rappresentati nel piano $C-\sqrt{h}$ i profili di e_{max} per valori prossimi all'unità. Poiché \sqrt{h} è proporzionale al momento angolare l_z , questo piano è essenzialmente il piano energia-momento angolare. Assumendo che dopo lo scattering C e \sqrt{h} siano distribuite uniformemente, la probabilità $P(e_{crit})$ che un pianeta entri in regioni con $e_{max} > e_{crit}$ è del 46.8%, 30.8% e 22.1% per $e_{crit} = 0.95, 0.98$ e 0.99 rispettivamente.

Nella nostra simulazione, in cui un pianeta più interno è inizialmente a 5 AU, un tipico semiasse maggiore finale per questo pianeta è ~ 2 AU (figura 5). Con i modelli adottati, la circolarizzazione è efficace su periodi $\leq 10^8$ anni, se la distanza del pericentro è minore di $\sim 0.015 \div 0.03$ AU. Inoltre, perché avvenga la circolarizzazione, è necessario che sia $e_{max} \gtrsim e_{crit} = 0.985 \div 0.993$. Dalla probabilità $P(e_{crit})$ stimata sopra, ci aspettiamo che la probabilità di formazione di pianeti

ravvicinati sia del 20÷30% con queste impostazioni, dato consistente con i risultati numerici. Delle distribuzioni più realistiche di C e \sqrt{h} potrebbero essere più concentrate su valori minori di C e/o maggiori di \sqrt{h} . In tal caso, $P(e_{crit})$ potrebbe essere inferiore per un singolo scattering, ma la natura ripetitiva del meccanismo di Kozai potrebbe compensare la diminuzione di $P(e_{crit})$ e produrre una probabilità di formazione di pianeti ravvicinati di valore simile. Le simulazioni numeriche della sezione 3 si riferivano ad un solo setting iniziale dei semiassi maggiori dei pianeti, ma le stime ricavate suggeriscono che la probabilità di formazione di pianeti ravvicinati potrebbe essere simile in altri campioni.

5. Conclusioni

Il modello standard per la formazione di pianeti giganti ravvicinati prevede che i giganti gassosi si siano formati diverse AU oltre le linee dei ghiacci e che successivamente siano migrati nelle vicinanze della stella, seguendo principalmente il canale di migrazione di tipo II. Qui abbiamo investigato il canale alternativo dello scattering model, che è un processo che comprende lo scattering pianeta-pianeta e la circolarizzazione mareale. Se l'eccentricità orbitale viene eccitata a valori prossimi all'unità, a causa della vicinanza del pericentro l'eccentricità stessa e il semiasse maggiore del pianeta vengono smorzati dall'effetto mareale della stella, mantenendo la distanza del pericentro tale da dare origine ad un pianeta ravvicinato con eccentricità relativamente piccola. Abbiamo inoltre incluso nel modello un ulteriore processo chiave, il meccanismo di Kozai.

Abbiamo analizzato l'integrazione orbitale di tre pianeti della massa di Giove, trovando che la formazione di pianeti ravvicinati avviene circa nel 30% dei casi, che è una probabilità molto maggiore di quella suggerita dagli studi precedenti (Weidenschilling & Marzari, 1997 e 2002; Chatterjee et al., 2007), poiché in molti casi la circolarizzazione avviene durante lo scattering di un sistema di tre pianeti, situazione non considerata nei precedenti studi. Lo scattering tra tre pianeti si conclude solitamente con l'espulsione di uno di essi e con l'entrata del sistema in uno stato stabile, e gli studi antecedenti si concentravano solamente sullo stato stabile.

Poiché la scala temporale di smorzamento mareale è di solito maggiore di quella di variazione orbitale durante la fase caotica dell'interazione fra tre pianeti, in tale fase non avviene la circolarizzazione mareale, anche se la distanza del pericentro fosse sufficientemente piccola. Tuttavia, abbiamo visto che quando un pianeta subisce uno scattering verso l'interno spesso viene separato da quelli esterni. Fintanto che la dissipazione mareale è trascurabile, l'isolamento è solo temporaneo, ma dura abbastanza a lungo perché avvenga la circolarizzazione, se la distanza del pericentro è sufficientemente piccola (0.02 ÷ 0.04 AU per pianeti con la massa di Giove). Abbiamo inoltre visto che il pianeta isolato entra di solito in uno stato di Kozai. Anche se l'eccentricità del pianeta non viene eccitata abbastanza dallo scattering che lo ha spinto su un'orbita più interna, essa può aumentare secolarmente verso valori prossimi all'unità durante il ciclo di Kozai, in particolare quando il pianeta possiede un'orbita inclinata. Nonostante la probabilità che l'eccentricità assuma valori tra 0.98 e 1.0 sia piuttosto bassa immediatamente dopo lo scattering, essa aumenta notevolmente al 30% durante il ciclo di Kozai. Anche se il ciclo di Kozai ha un momento angolare relativamente grande e l'eccentricità non è molto elevata, i pianeti esterni finiscono per distruggere lo stato quasi-stabile, per poi portare il pianeta interno ad entrare in un nuovo stato quasi-stabile,

ovvero un nuovo stato di Kozai. Il nuovo stato di Kozai può avere un momento angolare relativamente piccolo e può aumentare la sua eccentricità abbastanza da avere circolarizzazione mareale. La ripetizione del meccanismo di Kozai aumenta la probabilità che la circolarizzazione avvenga, perciò abbiamo trovato una probabilità molto maggiore di formazione di pianeti ravvicinati. Pertanto, lo scattering contribuisce alla formazione di pianeti ravvicinati, nonostante la migrazione di tipo II rimanga il canale preferenziale.

È stato scoperto un numero non trascurabile di pianeti ravvicinati privi di pianeti secondari vicini, ma con eccentricità $\gtrsim 0.3$. La migrazione di tipo II fatica a spiegare le elevate eccentricità, mentre lo scattering model può renderne conto. Come mostrato nelle sezioni 3.3 e 3.4, prima di essere completata, la circolarizzazione mareale può rallentare aumentando q , mantenendo moderate eccentricità. Tra i pianeti ravvicinati scoperti, quelli eccentrici sono generalmente più massivi (con masse maggiori di quella di Giove) (figura 1a), pertanto i loro tempi di circolarizzazione sono molto più brevi di quelli mostrati in figura 3. Pertanto i risultati dei set T potrebbero essere consistenti con questi pianeti.

I risultati ottenuti suggeriscono che i pianeti ravvicinati possiedono una distribuzione molto ampia in inclinazione, includendo rotazioni retrograde.

Notiamo che il modello di circolarizzazione mareale che abbiamo utilizzato potrebbe non essere sufficiente. Abbiamo fatto molte assunzioni per le equazioni (2) e (3). Il modello è valido soltanto per pianeti completamente convettivi in orbite altamente eccentriche, dato che considera solo i modi $l=2$ e utilizza un'approssimazione d'impulso. Abbiamo applicato il modello anche dopo che le orbite vengono significativamente circolarizzate, cosa che potrebbe sovrastimare l'effetto della dissipazione mareale. Negli incontri multipli con la stella, l'energia e il momento angolare possono aumentare o diminuire (Press & Teukolsky, 1997; Mardling, 1995), ma noi consideriamo l'effetto mareale che comporta sempre una diminuzione. A seguito di queste semplificazioni, la simulazione potrebbe risultare un caso limite in cui la forza mareale agisce massimamente, nonostante l'inclusione di modi g potrebbe rafforzare l'effetto mareale. Tuttavia lo scopo di questa analisi non era uno studio dettagliato del processo di smorzamento mareale, ma quello di mostrare un canale alternativo di formazione di pianeti ravvicinati.

Appendice A: Formule per il guadagno di energia e momento angolare

Riportiamo in sintesi il percorso seguito da P.B. Ivanov e J.C.B. Papaloizou, della University of London, per la derivazione delle equazioni per il guadagno di energia e momento angolare dovuti alle maree durante un passaggio al pericentro. Il loro studio tratta una teoria sui disturbi indotti dal campo di marea stellare su un pianeta completamente convettivo lentamente rotante su un'orbita molto eccentrica attorno ad una stella centrale. In questo caso è appropriato trattare l'influenza mareale come una successione di interazioni mareali impulsive che avvengono al passaggio al periastro. Vedremo che ci sono due contributi al guadagno di energia e momento angolare dovuti all'interazione mareale impulsiva: il contributo quasi-statico, che prevede la presenza di processi dissipativi nel pianeta, e il contributo dinamico, associato all'eccitazione dei modi di oscillazione. Questi contributi si ottengono consistentemente da un singolo set delle equazioni che regolano il processo.

I circa 100 pianeti giganti extrasolari scoperti recentemente possiedono masse nel range di $0.12 \div 11$ masse gioviane. Si possono trovare a distanze di diverse AU oppure vicini alla stella centrale, con periodi di pochi giorni. Comuni sono le elevate eccentricità orbitali (Mayor & Queloz, 1995; Marcy & Butler, 1998, 2000; Marcy et al. 2001; ecc.). È stato suggerito che i pianeti giganti si possano formare attraverso l'instabilità gravitazionale in un disco a lungo raggio (Boss, 2002; ecc.) o attraverso il modello di "critical core mass", in cui un nucleo critico ($\sim 15M_{\odot}$) viene formato in un disco per accumulo di materiale solido per poi incominciare un rapido accrescimento gassoso (Papaloizou, Terquem & Nelson, 1999). In questo caso ci si aspetta che i nuclei dei pianeti giganti gassosi debbano iniziare a formarsi oltre un raggio $r \sim 4$ AU, il cosiddetto "raggio di condensazione del ghiaccio", dove l'esistenza del ghiaccio facilita l'accumulo dei solidi. Per spiegare l'esistenza dei pianeti giganti extrasolari in orbite ravvicinate, si è indotti perciò ad ipotizzare una migrazione orbitale. In principio, questa potrebbe verificarsi attraverso l'interazione gravitazionale tra un proto pianeta e il disco proto stellare (Lin & Papaloizou, 1986; Nelson et al., 2000), o attraverso interazioni gravitazionali mutue in un sistema di proto pianeti fortemente interagenti, con conseguente circolarizzazione ad opera delle maree. In questa analisi esploriamo la seconda possibilità.

A.1. Interazione mareale di un pianeta convettivo rotante in un'orbita debolmente legata

In questa sezione consideriamo le perturbazioni mareali indotte in un pianeta rotante a seguito di un incontro parabolico con una stella centrale. Deriveremo delle espressioni per l'energia e il momento angolare guadagnati dal pianeta a seguito di un tale incontro. Dimostreremo che le espressioni per il guadagno di energia e momento angolare associato alle maree quasi-statiche e dinamiche risonanti seguono da un'unica formulazione del problema che porta ad un'unica equazione governativa.

A.1.1. Equazioni base

Usiamo le equazioni linearizzate del moto che governano le piccole perturbazioni nel contesto inerziale. Queste sono state discusse e utilizzate da diversi autori (Lynden-Bell & Ostriker, 1967; Papaloizou & Pringle, 1978; ecc.), quindi non ne presentiamo la derivazione e le scriviamo nella forma

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{\xi} + 2(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \nabla U + f_v \quad (1)$$

dove $\boldsymbol{\xi}$ è lo spostamento Lagrangiano, $\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})$ è l'operatore lineare autoaggiunto che tiene conto dell'azione della pressione e dell'auto gravità sulle perturbazioni (Chandrasekhar 1964; Lynden-Bell & Ostriker 1967) e U è il potenziale di marea.

Il campo di velocità di stato stazionario imperturbato è \mathbf{v}_0 . Per il problema considerato, questo è associato ad una rotazione uniforme del pianeta tale che

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{r} \quad (2)$$

La forza viscosa per unità di massa è f_v .

A.1.2. Modi normali del pianeta rotante

La soluzione delle perturbazioni di un pianeta a seguito di un incontro con una stella centrale includeranno naturalmente i suoi modi normali $\boldsymbol{\xi}_k$ (con $\boldsymbol{\xi}_k(t) = \boldsymbol{\xi}_k e^{i\omega_k t}$) con le associate autofrequenze ω_k . Queste soddisfano

$$-\omega_k^2 \boldsymbol{\xi}_k - 2i\omega_k (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}_k + \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}_k) = 0 \quad (3)$$

con condizioni al contorno standard (Lynden-Bell&Ostriker, 1967).

Quando il flusso \mathbf{v}_0 è assente, le autofunzioni $\boldsymbol{\xi}_k$ si riducono a $\boldsymbol{\xi}_{k0}$ e diventano quelle appropriate per una stella sferica (Tassoul, 1978). Gli autovalori associati sono allora ω_{k0} . Le $\boldsymbol{\xi}_{k0}$ possono essere assunte ortogonali e normalizzate.

In questo limite non rotante, le autofunzioni hanno una dipendenza semplice dall'angolo azimutale ϕ tramite un fattore $\exp(im\phi)$, con m numero del modo azimutale. Siccome usiamo un'espansione

nel piccolo parametro Ω_r/Ω_* , con $\Omega_* = \sqrt{Gm_{pl}/R_{pl}^3}$ (frequenza "dinamica" interna), $\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{\xi}_{k0} + \boldsymbol{\xi}_{k1}$ e $\omega_k = \omega_{k0} + \omega_{k1}$, dove $\boldsymbol{\xi}_{k1}$ e la correzione di frequenza ω_{k1} sono del primo ordine nel piccolo parametro.

A.1.3. Espansione delle autofunzioni

Cerchiamo una soluzione per l'equazione (1) nella forma³

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_k b(t)_k \boldsymbol{\xi}_{k0}(\mathbf{r}) \quad (4)$$

Le autofunzioni soddisfano l'equazione standard per un oggetto non rotante:

$$-\omega_{k0}^2 \boldsymbol{\xi}_{k0} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}_{k0}) = 0 \quad (5)$$

Alla fine dovremo tenere solamente quelle corrispondenti al modo fondamentale $l = 2$, e ci sono tre di queste che corrispondono al numero di modo azimutale $m = -2, 0, 2$.

³Aggiungere le correzioni $\boldsymbol{\xi}_{k1}(\mathbf{r})$ a $\boldsymbol{\xi}_{k0}(\mathbf{r})$ nell'equazione (4) non modifica i risultati.

A.1.4. Soluzione del problema mareale

Sostituendo l'equazione (4) nella (1) otteniamo, sotto le assunzioni di un piccolo tasso di rotazione imperturbato, piccole forze viscoso e predominanza di modi f ,

$$\ddot{b}_k + \omega_{k0}^2 b_k + 2i\omega_{k1} \dot{b}_k + \gamma(\dot{b}_k + im\Omega_r b_k) = f_k^T \quad (6)$$

dove γ è il tasso di smorzamento viscoso.

Ci sono tre equazioni della forma sopra per i modi con $m = -2, 0, 2$ rispettivamente. D'ora in avanti sarà perciò conveniente usare l'equivalenza $k \equiv m$.

La quantità f_k^T determina l'accoppiamento mareale ed è data da

$$f_k^T = \langle \xi_{k0}^* | \nabla U \rangle = \frac{GMQ}{D(t)^3} W_m e^{-im\Phi(t)} \quad (7)$$

dove Q è l'integrale di sovrapposizione (Press & Teukolosky, 1977), $D(t)$ è il vettore posizione della stella e W_m è un coefficiente associato al potenziale di marea.

È conveniente introdurre le quantità reali

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_2 + b_{-2}) \quad a_- = \frac{i}{\sqrt{2}}(b_2 - b_{-2}) \quad a_0 = b_0 \quad (8)$$

$$f_+^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_2^T + f_{-2}^T) \quad (9)$$

$$f_-^T = \frac{i}{\sqrt{2}}(f_2^T - f_{-2}^T) \quad (10)$$

per riscrivere l'equazione (6) in termini di esse e ottenere

$$\ddot{a}_+ + \omega_{00}^2 a_+ + \sigma \dot{a}_- + \gamma(\dot{a}_+ + 2\Omega_r a_-) = f_+^T \quad (11)$$

$$\ddot{a}_- + \omega_{00}^2 a_- - \sigma \dot{a}_+ + \gamma(\dot{a}_- - 2\Omega_r a_+) = f_-^T \quad (12)$$

$$\ddot{a}_0 + \omega_{00}^2 a_0 + \gamma \dot{a}_0 = f_0^T \quad (13)$$

dove $\sigma = 2|\omega_{k1}|$.

A.1.5. Scambi di energia e momento angolare

Poiché vogliamo considerare scambi di energia e momento angolare indotti marealmente tra pianeta e orbita, consideriamo innanzitutto l'energia e il momento angolare associati alle perturbazioni. L'energia E ed il momento angolare L delle perturbazioni canonici possono essere espressi come (Friedman & Schutz, 1978)

$$E = \frac{1}{2}(\dot{a}_0^2 + \dot{a}_+^2 + \dot{a}_-^2) + \frac{\omega_{00}^2}{2}(a_0^2 + a_+^2 + a_-^2) \quad (14)$$

$$L = 2 \left[a_+ \dot{a}_- - a_- \dot{a}_+ - \frac{\sigma}{2}(a_+^2 + a_-^2) \right] \quad (15)$$

Le equazioni che governano l'evoluzione temporale si trovano dalle equazioni (11)÷(13). Scrivendo $dE/dt = dE^T/dt + dE^v/dt$ e $dL/dt = dL^T/dt + dL^v/dt$, il risultato si può esprimere nella forma

$$\frac{dE^T}{dt} = \dot{a}_0 f_0^T + \dot{a}_+ f_+^T + \dot{a}_- f_-^T \quad (16)$$

$$\frac{dE^v}{dt} = -\gamma[\dot{a}_0^2 + \dot{a}_+^2 + \dot{a}_-^2 - 2\Omega_r(a_+ \dot{a}_- - a_- \dot{a}_+)] \quad (17)$$

$$\frac{dL^T}{dt} = 2(a_+ f_-^T - a_- f_+^T) \quad (18)$$

$$\frac{dL^v}{dt} = -2\gamma[a_+ \dot{a}_- - a_- \dot{a}_+ - 2\Omega_r(a_+^2 + a_-^2)] \quad (19)$$

Le quantità espresse sopra si possono considerare come gli aumenti di energia e momento angolare di perturbazione dovuti alle maree (T) e alla viscosità (v). I valori possono essere facilmente calcolati usando le equazioni (11)÷(13).

A.1.6. Maree quasi-statiche

Nel limite in cui la scala temporale associata alle variazioni al più vicino approccio è molto maggiore di quella di dinamica interna, il pianeta risponde evolvendo attraverso una sequenza di equilibri quasi-idrostatici. In questa approssimazione, le perturbazioni significative sono indotte dalle maree solo in prossimità del massimo avvicinamento. Il trasferimento di energia e momento angolare al pianeta avviene solo per azione della viscosità. L'energia e il momento angolare guadagnati dal pianeta sono uguali a quelli dissipati nelle perturbazioni e possono essere espressi come

$$\Delta E_{st} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{dE^v}{dt} \quad (20)$$

$$\Delta L_{st} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{dL^v}{dt} \quad (21)$$

dove $t = 0$ corrisponde all'istante di massimo avvicinamento.

Per calcolare questi integrali, cerchiamo la soluzione delle equazioni (11)÷(13) nella forma di un'espansione in termini del piccolo parametro Ω_p/Ω_* , dove

$$\Omega_p = \sqrt{\frac{GM}{D_{min}^3}} \quad (22)$$

con D_{min} distanza del periastro.

Assumiamo anche $\omega_{00} \sim \Omega_*$ e $\Omega_r \sim \Omega_p$. Con l'approssimazione adottata la soluzione è banale:

$$a_0 = \frac{f_0^T}{\omega_{00}^2} \quad a_{\pm} = \frac{f_{\pm}^T}{\omega_{00}^2} \quad (23)$$

Sostituendo la (23) nella (17) e nella (19) e calcolando gli integrali (20) e (21) otteniamo

$$\Delta E_{st} = \frac{\gamma}{\omega_{00}^4} (I_1 - 2\Omega_r I_2) \quad \Delta L_{st} = \frac{2\gamma}{\omega_{00}^4} (I_2 - 2\Omega_r I_3) \quad (24)$$

dove

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[(\dot{f}_0^T)^2 + (\dot{f}_+^T)^2 + (\dot{f}_-^T)^2 \right] \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt (f_+^T \dot{f}_-^T - f_-^T \dot{f}_+^T) \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[(f_+^T)^2 + (f_-^T)^2 \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Per un'orbita parabolica, il calcolo degli integrali (25) è molto semplice. Con dei calcoli elementari si ottiene

$$\Delta E_{st} = \beta_1 \frac{\gamma \Omega_p (GMQ)^2}{\omega_{00}^4 D_{min}^6} \left(1 - \frac{112}{117} \frac{\Omega_r}{\sqrt{2}\Omega_p} \right) \quad (26)$$

$$\Delta L_{st} = \beta_2 \frac{\gamma (GMQ)^2}{\omega_{00}^4 D_{min}^6} \left(1 - \frac{40}{33} \frac{\Omega_r}{\sqrt{2}\Omega_p} \right) \quad (27)$$

dove $\beta_1 = (11583/5120)\sqrt{2}\pi^2 \approx 31.6$ e $\beta_2 = (693/320)\pi^2 \approx 21.4$. È utile introdurre delle nuove variabili adimensionali nelle equazioni (26) e (27). Invece di usare direttamente D_{min} , esplicitiamo la distanza di maggiore avvicinamento utilizzando il parametro di Press-Teukolsky η così definito:

$$\eta = \frac{\Omega_*}{\Omega_p} = \sqrt{\frac{m_{pl} D_{min}^3}{M R_{pl}^3}} \quad (28)$$

È conveniente esprimere Q , ω_{00} , γ e Ω_r in termini di unità naturali. Nel fare ciò, introduciamo delle variabili adimensionali indicate da una tilde.

Queste sono tali che $Q = \tilde{Q} \sqrt{m_{pl} R_{pl}}$, $\omega_{00} = \tilde{\omega}_{00} \Omega_*$, $\gamma = \tilde{\gamma} \Omega_*$, $\Omega_r = \tilde{\Omega}_r \Omega_*$. Utilizzando le variabili adimensionali, le variazioni di energia e momento angolare possono essere scritte come

$$\Delta E_{st} = \beta_1 \frac{\tilde{\gamma} \tilde{Q}^2 E_{pl}}{\tilde{\omega}_{00}^4 \eta^5} \left(1 - \frac{112}{117} \frac{\eta \tilde{\Omega}_r}{\sqrt{2}} \right) \quad (29)$$

$$\Delta L_{st} = \beta_2 \frac{\tilde{\gamma} \tilde{Q}^2 L_{pl}}{\tilde{\omega}_{00}^4 \eta^4} \left(1 - \frac{40}{33} \frac{\eta \tilde{\Omega}_r}{\sqrt{2}} \right) \quad (30)$$

in cui sono normalizzate in termini rispettivamente di energia $E_{pl} = Gm_{pl}^2/R_{pl}$ e momento angolare $L_{pl} = m_{pl} \sqrt{Gm_{pl} R_{pl}}$.

Come si può vedere dalle equazioni (29) e (30), nel caso limite in cui $\eta \rightarrow \infty$ la velocità angolare planetaria tende a evolvere più velocemente della sua energia orbitale, con la conseguenza che, se avvengono incontri ripetuti, il pianeta raggiunge uno stato di pseudo-sincronizzazione con $\Omega_r = \Omega_{ps} = (33\sqrt{2}/40\eta)\Omega_* \ll \Omega_*$, e in questo istante termina lo scambio di momento angolare tra orbita e pianeta (Hut, 1981). Per $\Omega_r = \Omega_{ps}$ il guadagno di energia è dato dall'equazione (29):

$$\Delta E_{st} = \beta_3 \frac{\tilde{\gamma} \tilde{Q}^2 L_{pl}}{\tilde{\omega}_{00}^4 \eta^4} \quad (31)$$

dove $\beta_3 = (41/195)\beta_1 \approx 6.64$. Osserviamo che la velocità angolare Ω_{ps} corrisponde approssimativamente alla velocità angolare orbitale al massimo approccio. Nella prossima sezione useremo l'equazione (31) per valutare l'importanza delle maree stazionarie per l'evoluzione orbitale del pianeta.

A.1.7. Maree dinamiche ed eccitazione mareale dei modi normali

Quando l'incontro mareale con la stella centrale avviene su scale temporali lunghe, ma non lunghissime se paragonate con i tempi di dinamica interna, il pianeta può rimanere con un modo normale eccitato ad una certa ampiezza non trascurabile. Ci saranno un'energia e un momento angolare trasferiti dall'orbita associati a tale modo. Diversamente dalla situazione delle maree quasi-statiche, l'effetto non dipende dalla viscosità, ma è un contributo non stazionario, o dinamico, al trasferimento di energia e momento angolare.

Per calcolare tale contributo possiamo trascurare il termine di viscosità proporzionale a γ nelle equazioni (11)÷(13), che possiamo allora scrivere nella forma

$$\ddot{a}_{\pm} + \omega_{00}^2 a_{\pm} \pm \sigma \dot{a}_{\mp} = f_{\pm}^T \quad \ddot{a}_0 + \omega_{00}^2 a_0 = f_0^T \quad (32)$$

Riportiamo di seguito la soluzione dell'equazione (32) ottenuta con il metodo della variazione dei parametri corretto al primo ordine in σ/ω_{00} :

$$a_{\pm} = \frac{1}{2\omega_{00}} \int_{-\infty}^t dt' \{f_{\pm} [\sin \omega_{\pm}(t-t') + \sin \omega_{\mp}(t-t')] + f_{\mp} [\cos \omega_{\pm}(t-t') - \cos \omega_{\mp}(t-t')]\} \quad (33)$$

$$a_0 = \frac{1}{\omega_{00}} \int_{-\infty}^t dt' f_0 \sin \omega_{00}(t-t') \quad (34)$$

dove $\omega_{\pm} = \omega_{00} \pm \sigma/2$.

Nelle equazioni (33) e (34) assumiamo che le perturbazioni del pianeta siano assenti prima dell'incontro ravvicinato ($t = -\infty$) ("problema al primo passaggio"). Espressioni generali appropriate per incontri ripetuti potrebbero essere facilmente ottenute dalle espressioni derivate per il problema al primo passaggio (vedi sotto).

Nel limite $t \rightarrow \infty$ i coefficienti che moltiplicano $\sin \omega_{00}(t)$, $\sin \omega_{\pm}(t)$, $\cos \omega_{00}(t)$, $\cos \omega_{\pm}(t)$ nelle equazioni (33) e (34) contengono integrali convergenti. Questi includono le informazioni riguardanti l'eccitazione residua del modo dopo l'incontro. Estendendo il limite superiore di questi integrali all'infinito, otteniamo

$$a_+ = \frac{1}{2\omega_{00}} [I_+(\omega_+) \sin(\omega_+ t) + I_-(\omega_-) \sin(\omega_- t)] \quad (35)$$

$$a_- = \frac{1}{2\omega_{00}} [I_-(\omega_-) \cos(\omega_- t) - I_+(\omega_+) \cos(\omega_+ t)] \quad (36)$$

$$a_0 = \frac{1}{\omega_{00}} I_0(\omega_{00}) \sin(\omega_{00} t) \quad (37)$$

dove

$$I_{\pm}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt [f_+ \cos(\omega t) \pm f_- \sin(\omega t)]$$

$$I_0(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f_0 \cos(\omega t) \quad (38)$$

Questi integrali possono essere espressi nella forma

$$I_{\pm} = 2\sqrt{2}\pi \frac{GMQ}{\Omega_p D_{min}^3} K_m \quad I_0 = 2\pi \frac{GMQ}{\Omega_p D_{min}^3} K_0 \quad (39)$$

dove $m = \mp 2$ per (\pm) , e

$$K_m = \frac{W_m}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\Omega_p t)}{x(t)^3} \cos[\omega t + m\Phi(t)] \quad (40)$$

con $x(t) = D(t)/D_{min}$.

Gli integrali (40) sono stati calcolati numericamente e approssimati analiticamente da Press e Teukolosky (1977). Lai (1997) ottenne le seguenti espressioni analitiche per questi integrali nel limite $(\omega\eta) \rightarrow \infty$:

$$K_{-2} \approx \frac{2z^{3/2} e^{-\frac{2}{3}z}}{\sqrt{15}} \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{z}}\right)$$

$$K_0 \approx -\frac{z^{1/2} e^{-\frac{2}{3}z}}{2\sqrt{10}} \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{z}}\right)$$

$$K_2 \approx \sqrt{\frac{3}{5z}} \frac{e^{-\frac{2}{3}z}}{32} \left(1 - \frac{89}{48z}\right) \quad (41)$$

dove $z = \sqrt{2}\omega\eta$. In questo limite abbiamo $|K_{-2}(z)| > |K_0(z)| > |K_2(z)|$.

Sostituendo le equazioni (35) e (36) nella (15), otteniamo il guadagno di momento angolare dopo il primo passaggio al periastro:

$$\Delta L_{ps} = \frac{1}{2\omega_{00}} \{I_+^2(\omega_+) + I_-^2(\omega_-)\} \quad (42)$$

Analogamente, sostituendo le equazioni (35)÷(37) nella (14), otteniamo l'espressione per il guadagno di energia:

$$\Delta E_{ps} = \frac{I_0^2(\omega_{00})}{2} + \frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{\sigma}{2\omega_{00}}\right) I_+^2(\omega_+) + \left(1 - \frac{\sigma}{2\omega_{00}}\right) I_-^2(\omega_-) \right] \approx \frac{I_0^2(\omega_{00})}{2} + \frac{1}{4} [I_+^2(\omega_+) + I_-^2(\omega_-)] \quad (43)$$

dove nell'ultima uguaglianza distinguiamo ω_{\pm} e ω_{00} solo nei fattori che dipendono esponenzialmente da ω .

A differenza delle espressioni calcolate nell'approssimazione di maree quasi-statiche, le espressioni (42) e (43) danno il guadagno di energia e momento angolare associato ad un particolare modo di pulsazione (nel caso specifico, quello fondamentale).

Le espressioni (42) e (43) possono essere significativamente semplificate. Per un pianeta non rotante ($\Omega_r = 0$) e per elevati valori di η , possiamo trascurare il contributo dei termini $(-)$ e (0) , e dalle equazioni (39), (41) e (43) otteniamo

$$\Delta E_{ps}(\Omega_r = 0) \approx \frac{I_+^2(\omega_{00})}{4} \approx \frac{16\sqrt{2}}{15} \tilde{\omega}_{00}^3 \tilde{Q}^2 \eta \exp\left[-\frac{4\sqrt{2}}{3}(\tilde{\omega}_{00}\eta)\right] E_{pl} \quad (44)$$

e $\Delta L_{ps} \approx I_+^2(\omega_{00})/2\omega_{00} \approx 2\Delta E_{ps}/\omega_{00}$. Naturalmente, queste espressioni seguono direttamente dall'espressione generale per il guadagno di energia fornita da Press e Teukolsky (1977) e dalla relazione generale tra l'energia del modo e il momento angolare per $m = 2$ (Friedman & Schutz, 1978).

Nel caso generico di un pianeta rotante, possiamo sostituire le espressioni asintotiche (41) nell'equazione (42) e ottenere

$$\Delta L_{ps} \approx \frac{32\sqrt{2}}{15} (\tilde{\omega}_{00} \tilde{Q})^2 \eta \exp\left[-\frac{4\sqrt{2}}{3}(\tilde{\omega}_+\eta)\right] \left\{1 - \frac{9}{2^{14}(\tilde{\omega}_{00}\eta)^4} \exp\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}(\tilde{\sigma}\eta)\right]\right\} L_{pl} \quad (45)$$

dove $\tilde{\sigma} = \sigma/\Omega_*$.

Da questa espressione segue che le maree non stazionarie possono accelerare il pianeta fino ad una velocità angolare tale che, se inserita nel membro di destra dell'equazione (45), non aumenta con alcun contributo il momento angolare planetario. Si vede subito che questa velocità angolare è data da

$$\tilde{\Omega}_{crit} = \frac{\tilde{\sigma}_{crit}}{4\beta} = \frac{3}{4\sqrt{2}\beta\eta} \ln\left[\left(\frac{4}{9}\right)^{1/4} 8\tilde{\omega}_{00}\eta\right] \approx \frac{0.53}{\beta\eta} \ln(6.53\tilde{\omega}_{00}\eta) \quad (46)$$

Tipicamente $\beta \approx 0.5$, $\tilde{\omega}_{00} \sim 1$ e

$$\Omega_{crit} \approx \frac{2+\ln\eta}{\eta} \Omega_* \quad (47)$$

Sostituendo l'equazione (41) nella (43), otteniamo un'espressione simile per il guadagno di energia:

$$\Delta E_{ps} \approx \frac{16\sqrt{2}}{5} \tilde{\omega}_{00}^3 \tilde{Q}^2 \eta \exp\left[-\frac{4\sqrt{2}}{3}(\tilde{\omega}_+\eta)\right] \left\{1 + \frac{3}{2^6(\tilde{\omega}_{00}\eta)^2} \exp\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}(\tilde{\sigma}\eta)\right] + \frac{9}{2^{14}(\tilde{\omega}_{00}\eta)^4} \exp\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}(\tilde{\sigma}\eta)\right]\right\} E_{pl} \quad (48)$$

È facile vedere che il guadagno di energia raggiunge il suo valore minimo quando $\Omega = \Omega_{crit}$.

Tenendo conto del fatto che l'espressione tra parentesi tonde nell'equazione (48) è uguale a 4 per $\Omega = \Omega_{crit}$, otteniamo

$$\Delta E_{min} = \Delta E_{ps}(\Omega = \Omega_{crit}) = \frac{3}{32} \frac{\Delta E_0}{(\omega_f \eta)^2} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \frac{\tilde{\omega}_f \tilde{Q}^2}{\eta} \exp\left[-\frac{4\sqrt{2}}{3}(\tilde{\omega}_{00}\eta)\right] E_{pl} \quad (49)$$

Bibliografia

- M. Nagasawa, S. Ida, and T. Bessho, *Formation of Hot Planets by a combination of planet scattering, tidal circularization, and Kozai mechanism*, The Astrophysical Journal, 2008
- P. B. Ivanov and J. C. B. Papaloizou, *On the tidal interaction of massive extrasolar planets on highly eccentric orbits*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2004
- R. Alexander, *Lecture 5: Planet Migration*, University of Leicester (GB), 2017
- C. D. Murray and S. F. Dermott, *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, 2010
- R. Barnes, *Formation and Evolution of Exoplanets*, Wiley, 2010
- C. D. Murray and A. C. M. Correia, *Keplerian Orbits and Dynamics of Exoplanets*, Exoplanets, 2010
- A. Puranam and K. Batygin, *Chaotic excitation and tidal damping in the GJ 876 system*, The Astronomical Journal, 2018
- K. Batygin, A. Morbidelli, and K. Tsiganis, *Formation and evolution of planetary systems in presence of highly inclined stellar perturbers*, Astronomy & Astrophysics, 2011
- A. C. M. Correia, G. Boué and J. Laskar, *Pumping the eccentricity of exoplanets by tidal effects*, The Astrophysical Journal, 2012
- B. Jackson, R. Greenberg and R. Barnes, *Planetary Transit and Tidal Evolution*, IAU Symposium 253, 2008
- B. Jackson, R. Greenberg and R. Barnes, *Tidal Evolution of Close-in Extrasolar Planets*, The Astrophysical Journal, 2008