



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Le Tassellazioni di Voronoi e Delaunay

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Laureando

Elias Van den Driessche

Anno Accademico 2019/2020

Indice

| | | |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Introduzione | 4 |
| 2 | Tassellazioni di Voronoi e Delaunay | 6 |
| 2.1 | Tassellazione di Voronoi | 6 |
| 2.2 | Tassellazione di Delaunay | 7 |
| 2.3 | Proprietà statistiche delle tassellazioni di Voronoi e Delaunay | 7 |
| 2.4 | Modi d'impiego delle tassellazioni di Voronoi | 9 |
| 3 | Strutture cosmiche: formazione ed osservazione | 11 |
| 3.1 | Formazione delle strutture cosmiche | 11 |
| 3.1.1 | Analogia tra tassellazioni di Voronoi e processo di clustering | 12 |
| 3.1.2 | Modello cinematico di Voronoi | 13 |
| 3.2 | Superclustering | 14 |
| 3.2.1 | Caratteristiche del superclustering | 16 |
| 3.3 | Clustering dei vertici della tassellazione di Voronoi | 17 |
| 3.3.1 | Selezione dei vertici della tassellazione di Voronoi | 18 |
| 3.3.2 | Caratteristiche derivanti dalla selezione dei vertici della tassellazione | 19 |
| 3.3.3 | Applicazione della selezione dei vertici della tassellazione allo stu- dio dei supercluster | 20 |
| 4 | Conclusioni | 21 |
| 5 | Bibliografia | 22 |

Capitolo 1

Introduzione

Le tassellazioni di Voronoi e Delaunay sono uno strumento matematico adoperato per studiare distribuzioni di punti e ricavarne informazioni, quali ad esempio densità e velocità, mediante opportuni metodi computazionali.

Nella fattispecie la tassellazione di Voronoi è una partizione dello spazio in celle, ognuna delle quali è il luogo dei punti più vicini ad un punto prestabilito, detto nucleo, rispetto a tutti gli altri nuclei. La tassellazione di Delaunay, invece, è il poliedro che ha per vertici quattro nuclei i, j, k, n e per centro il vertice in comune alle quattro celle di Voronoi relative a i, j, k, n . Entrambe le tassellazioni saranno formalmente introdotte nelle sezioni 2.1 e 2.2, seguite da alcune loro proprietà statistiche e da un breve cenno ai metodi computazionali citati in precedenza.

Nonostante la distribuzione di punti studiata mediante le tassellazioni di Voronoi e Delaunay possa appartenere a qualunque ambito, dall'informatica all'ingegneria civile, mi concentrerò esclusivamente sull'uso delle suddette tassellazioni in campo cosmologico. In tale prospettiva, i punti rappresenteranno galassie o cluster di galassie.

Sarà pertanto necessario esporre la teoria di formazione delle strutture cosmiche, spiegando come, a partire da una distribuzione primordiale di materia, si possa arrivare alla formazione di vuoti intergalattici, filamenti, muri e cluster di galassie. La genesi di tali strutture è da ricercarsi nella presenza di fluttuazioni nel campo di densità e velocità della materia primordiale.

L'aggregarsi delle galassie nelle strutture sopracitate porta alla costituzione della cosiddetta cosmic web, fotografata in fig.1.1, che condivide diverse caratteristiche con le tassellazioni di Voronoi. Si utilizzano perciò tali tassellazioni, con i dovuti *distinguo*, per evincere informazioni sulla distribuzione primordiale di materia.

Si concluderà con una verifica critica dell'analogia tra cosmic web e tassellazioni di Voronoi, confrontando quantitativamente il clustering dei cluster di galassie rispetto al clustering dei vertici della tassellazione.

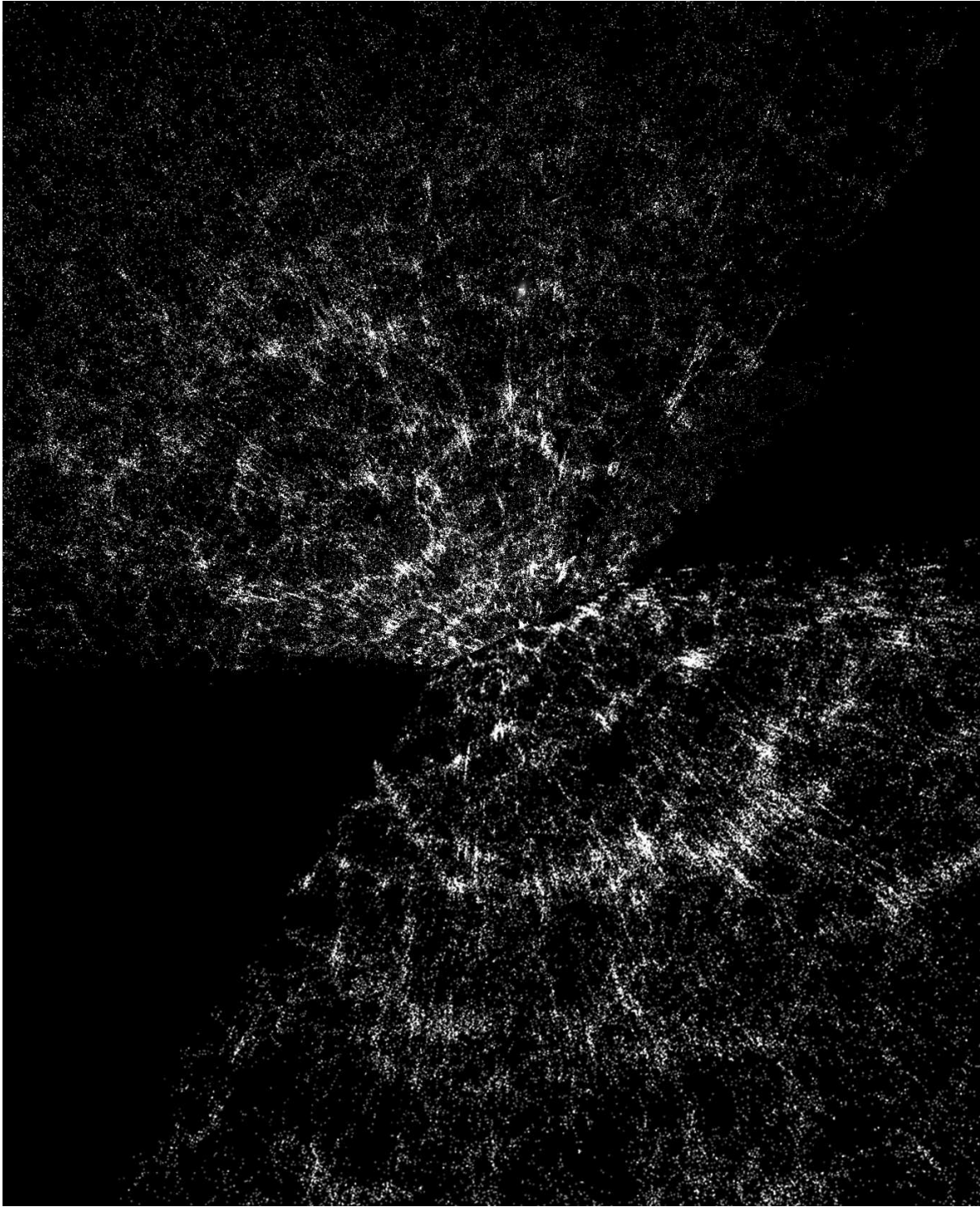


Figura 1.1: da (4) pag.5; immagine del 25 % della volta celeste, elaborata nello studio SSDS (Sloan Digital Sky Survey).

Capitolo 2

Tassellazioni di Voronoi e Delaunay

2.1 Tassellazione di Voronoi

La tassellazione di Voronoi associata ad una data distribuzione di *nuclei* si definisce come una partizione dello spazio in celle Π_i di Voronoi, dove l' *i* - *esima* cella è il luogo dei punti più vicini al corrispondente nucleo *i*, rispetto a tutti gli altri nuclei. Formalmente:

$$\Pi_i = \{ \vec{x} \in R^n \mid d(\vec{x}, \vec{x}_i) < d(\vec{x}_j, \vec{x}) \mid \forall i \neq j \}$$

dove d è la distanza euclidea, \vec{x}_i è il vettore posizione relativo all'*i* - *esimo* nucleo. Tale proprietà, caratteristica della tassellazione di Voronoi, si aggiunge alle condizioni che garantiscono l'esistenza in generale della tassellazione T :

$$\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\cup_i \Pi_i = R^n$$

$$\#\{\Pi_i \in T \mid \Pi_i \cap B \neq \emptyset\} < \infty \quad \forall B \text{ compatto } \subset R^n$$

La prima condizione richiede che le celle siano disgiunte, la seconda che le celle ricoprano lo spazio, la terza che la tassellazione sia costituita da un insieme numerabile di celle.

Dalla definizione data, considerando R^3 , si evince che le celle (o regioni) di Voronoi siano poliedri convessi contenenti un solo nucleo, l' *i* - *esimo*. Ciascuna cella annovera i seguenti elementi costitutivi:

- Muri ($\Sigma_{i,j}$); i muri della cella sono poligoni giacenti sul piano equidistante dai due nuclei *i* e *j*.
- Spigoli ($\Gamma_{i,j,k}$); gli spigoli della cella sono le intersezioni tra i muri $\Sigma_{i,j}$ e $\Sigma_{i,k}$.
- Vertici ($V_{i,j,k,n}$); i vertici di una cella sono dati dalle intersezioni di tre spigoli, o equivalentemente, quattro muri. I vertici di una cella di Voronoi ricoprono una certa importanza, in primis perchè la loro distribuzione nello spazio è una diretta conseguenza della distribuzione dei nuclei; inoltre saranno rilevanti nell'ambito dei tetraedri di Delaunay e dell'omonima tassellazione.

Si definiscono inoltre come nuclei *contigui* la coppia di nuclei le cui celle condividono una faccia. Due nuclei contigui sono anche detti *vicini naturali*. A partire dal concetto di vicini naturali è possibile generalizzare la tassellazione di Voronoi: si estende il concetto di cella di Voronoi Π_j generata dal nucleo j alla cella di Voronoi $\Pi^k(j_1 \dots j_k)$ generata dall'insieme di k nuclei $(j_1 \dots j_k)$. La cella di Voronoi del k -ordine Π^k consiste nel luogo dei punti che hanno i k nuclei $(j_1 \dots j_k)$ come i loro k vicini naturali più vicini.

Si può infine dimostrare che, data una tassellazione di Voronoi, la corrispondente distribuzione di nuclei non è unica.

2.2 Tassellazione di Delaunay

Considerando un vertice $V_{i,j,k,n}$ di una cella di Voronoi, si ha per costruzione che i quattro nuclei i, j, k, n saranno equidistanti dal vertice. Inoltre la sfera centrata sul vertice e di raggio pari alla distanza tra il vertice e i nuclei, non comprenderà alcun vertice (oltre a i, j, k, n). Tale sfera circoscrive il tetraedro (detto tetraedro di Delaunay) avente come vertici i nuclei i, j, k, n ; l'unione di tali tetraedri è detta tassellazione di Delaunay.

Formalmente, generalizzando a R^n : dato un insieme P numerabile di punti $\{\vec{x}_i\}$ in R^n , un tetraedro D di Delaunay è il simpleso¹ T definito da $d+1$ punti di P tali che la sfera S_m circoscrivente T , di circocentro C e raggio R non contiene altri punti di P . In formule:

$$D = T(\vec{x}_{i_1} \dots \vec{x}_{i_{(n+1)}}) \quad \text{con } d(C, \vec{x}_j) > R \quad \forall j \neq i_1, \dots, i_{(n+1)}$$

Una tassellazione di Delaunay è la partizione dello spazio in tetraedri di Delaunay.

2.3 Proprietà statistiche delle tassellazioni di Voronoi e Delaunay

Le tassellazioni di Voronoi e Delaunay sono l'una la duale dell'altra; data una delle due tassellazioni, l'altra è univocamente determinata. Le principali proprietà statistiche delle tassellazioni sono il numero di vicini naturali dei nuclei generatori della tassellazione e il volume delle celle di Voronoi e Delaunay. Gli studi condotti in tal senso hanno concluso che, in due dimensioni, ciascun nucleo ha in media 6 vicini naturali indipendentemente dalla distribuzione dei nuclei stessi; questo implica che ciascun nucleo appartiene in media a 6 triangoli di Delaunay. In tre dimensioni si annoverano le seguenti proprietà:

- Il numero di vicini naturali di ciascun nucleo non è più indipendente dalla distribuzione dei nuclei; esso può non essere un numero intero: ad esempio, per una distribuzione poissoniana, vale ~ 13.4 .

¹Un simpleso n -dimensionale è una combinazione lineare convessa dei suoi $(d+1)$ vertici. Formalmente, siano $u_1 \dots u_d$ vettori in R^n affinemente indipendenti, ossia tali che $u_1 - u_0 \dots u_k - u_0$ siano linearmente indipendenti. Il simpleso T d -dimensionale è definito come $T = \{a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_n u_n \mid \sum_{i=0}^n a_i > 0 \wedge a_i > 0 \forall i\}$. Un simpleso bidimensionale è un triangolo, uno tridimensionale è un tetraedro.

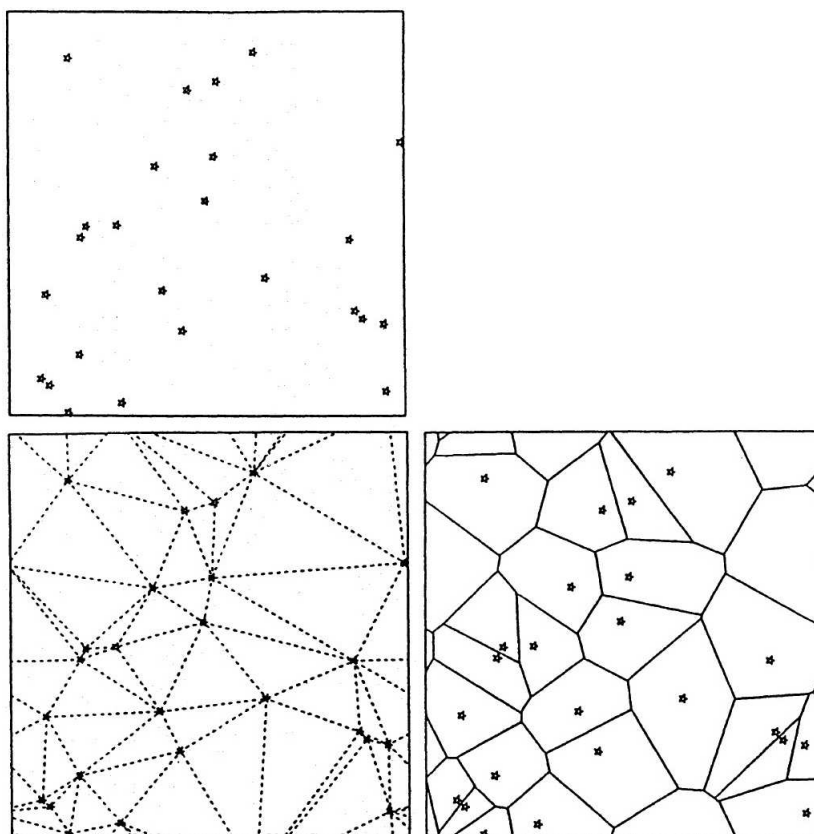


Figura 2.1: da (4) pag.33; si illustra nel quadrante superiore una distribuzione di punti (rappresentanti, ad esempio, stelle). Nel quadrante inferiore a sinistra si illustra la corrispondente tassellazione di Delaunay; a destra la corrispondente tassellazione di Voronoi.

- Se nel caso bidimensionale, il numero di vertici di una cella di Voronoi è lo stesso dei vicini naturali del nucleo corrispondente, nel caso tridimensionale quest'uguaglianza non vale più. Ad esempio, data una distribuzione poissoniana, il numero di vertici è ~ 27.07 .

Per quanto riguarda la distribuzione statistica dei volumi delle celle delle tassellazioni, non ne è nota una formula analitica nel caso di nuclei distribuiti poissonianamente. Per le celle di Voronoi è stata elaborata una formula interpolante approssimata, mentre per le celle di Delaunay è possibile derivare la distribuzione ergodica senza ulteriori assunzioni. I vertici del tetraedro di Delaunay sono $[\vec{c} + \vec{u}_i \cdot R]$, dove R è il raggio del cerchio circoscritto, c ne è il centro ed $u_1 \dots u_{n+1}$ sono versori giacenti sulle congiungenti dal centro ai vertici. Sia Δ il volume del simpleso unitario generato dai u_i , allora il volume del tetraedro è:

$$V = \Delta_d \cdot R^d$$

dove d è la dimensione dello spazio. Si è trovato pertanto che, per una distribuzione poissoniana di nuclei, di intensità n , la distribuzione dei volumi è data da:

$$f(V) = a(n, d) \Delta_d R^{n^2-1} \exp(-n \omega_d R^n)$$

dove a è una costante, ω è il volume della sfera unitaria in d dimensioni.

Si nota la seguente caratteristica della distribuzione dei volumi delle celle, sia per Voronoi e Delaunay: anche nel caso di campo di densità dei nuclei uniforme, in nessun caso la distribuzione avrà spread elevato².

2.4 Modi d'impiego delle tassellazioni di Voronoi

Le tassellazioni di Voronoi trovano impiego in una moltitudine di campi, anche estranei alla cosmologia. Vengono adoperate ad esempio in epidemiologia, in informatica (in machine learning, grafica computerizzata, networking) e in ingegneria urbana.

Esistono alcuni algoritmi e procedimenti di calcolo che sfruttano le tassellazioni per ricavare informazioni sulla distribuzione di nuclei sottostante. In particolare tratterò il procedimento più comune, ossia il Natural Neighbor Interpolation.

Natural Neighbour interpolation La seguente è una procedura di interpolazione multidimensionale, che sfrutta il concetto di vicinanza naturale dei nuclei delle tassellazioni di Voronoi per ricavare informazioni e modellizzare le caratteristiche del sistema considerato. Sia noto per ogni nucleo un certo insieme di informazioni (siano ad esempio densità, velocità, carica etc.), la Natural Neighbor Interpolation produce una funzione continua ovunque (fatta eccezione dei punti in cui si trovano i nuclei). Produce tale funzione implementando, per ogni punto, una media pesata delle informazioni di ciascun vicino naturale del punto stesso:

$$f(\vec{x}) = \sum_j \phi_j f(\vec{x}_j)$$

dove $f(\vec{x})$ è l'informazione desiderata, $f(\vec{x}_j)$ è l'informazione associata al nucleo j -esimo e la sommatoria è estesa a tutti i vicini naturali del punto \vec{x} . Con ciò, si intendono tutti i nuclei j tali che le celle di ordine 2 di Voronoi $\Pi(j, x)$ sono non vuote.

Nella formulazione di Sibson³ i pesi relativi ϕ_j valgono:

$$\phi_j(\vec{x}) = \frac{A_2(\vec{x}, \vec{x}_j)}{A(\vec{x})}$$

dove $A(\vec{x}) = \sum_j A(\vec{x}, j)$ è il volume della virtuale cella di Voronoi relativa al punto \vec{x} se esso facesse parte dell'originaria distribuzione di nuclei, mentre $A_2(\vec{x}, j)$, concernente la cella di ordine 2 di Voronoi $\Pi(\vec{x}, j)$, è la regione dello spazio che ha \vec{x} e j come punti più

²(4) pag.40

³(4) pag.43

vicini. Si evince pertanto che i pesi ϕ sono sempre positivi e si sommano a uno. La Natural Neighbor Interpolation, pur essendo la maniera più conservativa, efficace e frequente di interpolazione multidimensionale, ha tuttavia lo svantaggio di richiedere un grande sforzo computazionale, specialmente in 3 dimensioni o dimensioni superiori. Quando si hanno a disposizione grandi quantità di dati esaminandi, il metodo più indicato è il Delaunay Tessellation Field Estimator (DTFE), anch'esso un procedimento interpolante basato sul concetto di vicinanza naturale ed affine al metodo precedente, con la differenza che DTFE si limita ad interpolazioni lineari⁴.

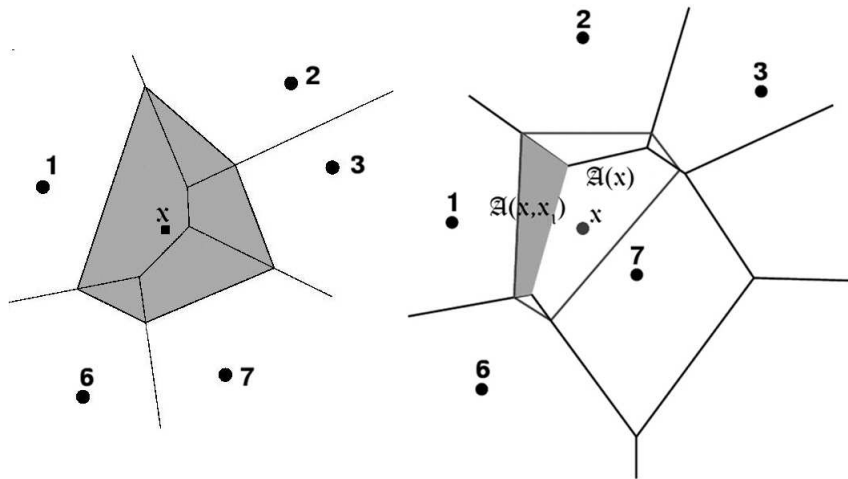


Figura 2.2: da (4), pag.43. A sinistra si evidenzia la cella di Voronoi generata dal punto \vec{x} ; a destra si evidenzia le cella di Voronoi di ordine 2, relativi ai punti \vec{x}, \vec{x}_1 .

⁴(4) pag.46

Capitolo 3

Strutture cosmiche: formazione ed osservazione

3.1 Formazione delle strutture cosmiche

La formazione delle strutture cosmiche, quali ad esempio galassie e cluster, è imputata alla presenza di perturbazioni, distribuite gaussianamente, di densità e velocità nella distribuzione primordiale di materia. La distribuzione gaussiana ha largo riscontro osservativo, specialmente nell'anisotropia della temperatura della radiazione cosmica di fondo. L'origine di questa campo gaussiano di perturbazioni è da ricercarsi nell'iniziale fase inflazionaria dell'universo. E' tuttavia da riportare anche la più recente scuola di pensiero, che pone condizioni meno stringenti sulla suddetta gaussianità ed anzi ammette lievi deviazioni.

Le regioni dotate di maggiore densità esercitarono una maggiore attrazione gravitazionale sulla materia circostante, causando dunque un progressivo accumulo di materia ed infine, a seguito del processo di collasso e virializzazione, generando una struttura cosmica legata e stabile.

Il processo descritto avvenne gerarchicamente: si formarono per primi oggetti di piccole dimensioni, che solo successivamente si aggregarono alla materia attorno a loro.

Per contrasto, regioni a bassa densità hanno visto la propria materia migrare verso le zone sovradense, con il risultato di creare i cosiddetti *vuoti*. Inoltre, se il processo di instabilità gravitazionale, finora descritto, causò l'aggravamento dell'anisotropia delle zone sovradense, al contrario i vuoti si svilupparono nel senso di una maggiore sfericità.

Ovverosia, regioni sovradense diventarono sempre più dense ed anisotrope, mentre i vuoti funsero da "centri d'espansione" e, espandendosi, costrinsero la materia negli interstizi e negli spazi lasciati dai vuoti stessi. L'espansione peraltro più veloce per i vuoti, rispetto alle zone sovraddense, a causa della bassa densità esterna e dunque bassa attrazione gravitazionale.

Si osservano pertanto ampi spazi tondeggianti a bassa densità, contenenti anch'essi una

serie di oggetti e strutture a piccola scala, l'evoluzione dei quali è dettata da due regole: la fusione di due vuoti genera un vuoto di dimensioni maggiori; un vuoto che si trova all'interno di un oggetto sovradenso può venire distrutto nel processo di collasso. Si osserva inoltre che le dimensioni dei vuoti assumono una certa distribuzione particolarmente piccata attorno ad una dimensione media; vale a dire che esiste una dimensione privilegiata dei vuoti, pari a $\sim 10 - 30h^{-1}$ Mpc¹. Ciò non esclude tuttavia che, pur esistendo tale dimensione privilegiata, i vuoti continuino naturalmente ad espandersi.

Osservazione riguardante l'instabilità gravitazionale È interessante sottolineare un'aspetto dell'instabilità gravitazionale: il fenomeno sopradescritto, di accrescimento delle fluttuazioni di densità, avviene se il collasso indotto dalla gravità stessa della fluttuazione è maggiore della tendenza della pressione a stabilizzare il fluido considerato e ad appiattire le fluttuazioni di densità.

Matematicamente, l'accrescimento delle fluttuazioni avviene se la lunghezza d'onda associata è maggiore di una certa lunghezza d'onda di soglia, detta lunghezza d'onda di Jeans. Tale lunghezza d'onda si può calcolare in diversi modi equivalenti; a titolo di esempio: data una fluttuazione positiva di massa, situata in un'inomogeneità sferica all'interno di un fluido uniforme, affinché la fluttuazione aumenti è necessario chiedere che la forza gravitazionale per unità di massa esercitata dall'inomogeneità sia maggiore della forza per unità di massa dovuta alla pressione esercitata dal fluido.

Approssimazione di Zel'dovich Precedentemente si è esposto l'esempio di una fluttuazione sferica di densità; una fluttuazione di tale forma sarebbe tuttavia instabile, poiché eventuali deformazioni non radiali sarebbero prontamente accresciute. Effettivamente si dimostra che una generica fluttuazione triassiale della densità collassa in una struttura approssimativamente bidimensionale, quale un foglio o, nel gergo tecnico, un *pancake*.

L'approssimazione di Zel'dovich permette di descrivere l'evoluzione di fluttuazioni di densità particolarmente intense; prescrive che esistano zone, dette *caustiche*, ove la densità diventi infinita ma dove l'accelerazione di gravità resti finita. In tali circostanze non è corretto ignorare la pressione, poiché si formano shock waves che comprimono la materia collassante. Il processo di accrescimento delle zone caustiche si arresta quando la materia condensata è trattenuta dalla propria gravità, mentre la materia esterna è sostenuta dalla pressione.

3.1.1 Analogia tra tassellazioni di Voronoi e processo di clustering

Il processo di espansione dei vuoti porta al confinamento della materia e delle strutture cosmiche in specifici spazi, siano essi superfici, filamenti, o vertici. Di conseguenza il risultato asintotico del processo di clustering è descritto geometricamente da una tassellazione di Voronoi, dove i *nuclei* corrispondono ai centri dei vuoti, i muri corrispondono

¹Un parsec (pc) equivale a circa 3.26 anni luce. Esso è definito come la distanza dalla terra di una stella che ha una parallasse annua pari a 1 secondo d'arco.

alle superfici di accumulazione della materia, gli spigoli sono i filamenti e i vertici equivalgono ai nodi della ragnatela cosmica, tra i quali si trovano i cluster. Chiaramente l'interno delle celle di Voronoi sono costituite dal vuoto.

In quest'ottica, la tassellazione di Voronoi schematizza il processo di clustering, ne costituisce uno scheletro lungo il quale la materia migra, in direzione dei vertici.

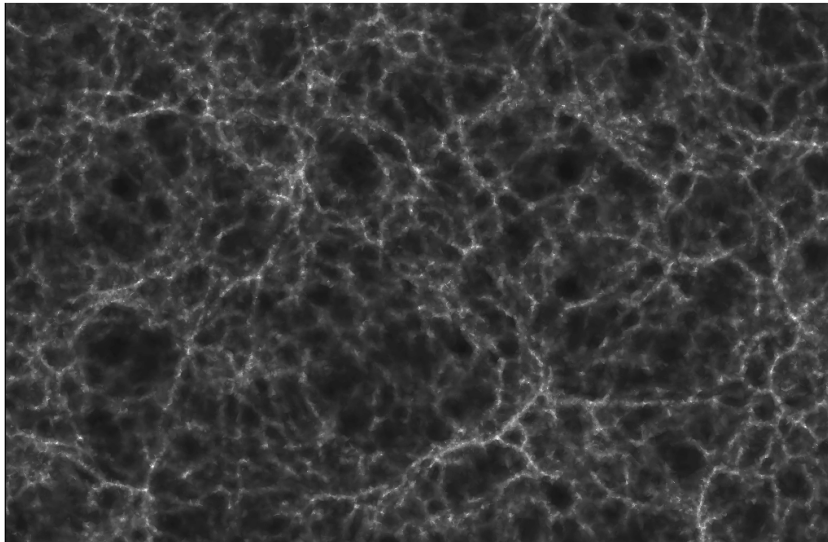


Figura 3.1: da (4) pag.25; simulazione ad N-corpi del processo di formazione delle strutture cosmiche.

3.1.2 Modello cinematico di Voronoi

Il modello cinematico di Voronoi descrive la distribuzione delle galassie a piccole scale, ed il modo in cui esse interagiscono con gli elementi costitutivi della tassellazione di Voronoi. In particolare, si pone l'enfasi sul ruolo dei vuoti, i quali con la loro opera di espansione compiono l'analogia tra lo sviluppo delle strutture cosmiche e una struttura a bolle di sapone in evoluzione.

Si sottolinea inoltre che il modello cinematico di Voronoi ha la singolare ed importante caratteristica di descrivere la distribuzione di galassie attorno ai suddetti elementi della tassellazione, i quali a loro volta sono tutt'altro che allocati casualmente, bensì fortemente correlati tra di loro nella costituzione della *cosmic web*.

Quantitativamente, il modello cinematico di Voronoi permette di descrivere lo spostamento di un numero N di galassie, distribuite secondo un processo poissoniano all'interno di un volume di prova V . A tal fine è necessario specificare la distribuzione degli M *centri d'espansione*, corrispondenti ai centri delle celle della tassellazione. A partire da tale informazione, è possibile individuare a quale cella appartenga ciascuna galassia. Ciascuna galassia si muoverà nella direzione individuata dalla congiungente tra la galassia stessa ed il centro d'espansione della cella considerata. Tale moto radiale avrà luogo fintanto che la galassia non intercetterà uno dei muri che delimitano la cella, allora la gravità

del muro decelererà il moto della galassia. In media, la componente della velocità della galassia perpendicolare al muro verrà dissipata; la galassia sarà allora confinata a muoversi in direzione parallela al muro stesso. Un processo analogo si ripeterà quando la galassia giungerà "al termine" del muro, ovverosia si appresterà ad entrare in una cella adiacente: la componente di velocità diretta verso tale cella verrà dissipata e la galassia sarà obbligata a perpetuare il proprio moto lungo un filamento, sinché non giungerà ad un vertice. Quando si verificherà tale evenienza, la galassia dissiperà completamente qualunque componente di velocità le sarà rimasta, e troverà quiete presso il vertice stesso. Quanto è stato appena descritto è un processo di agglomerazione e localizzazione: a partire da una distribuzione quasi uniforme ed omogenea di galassie in moto, si verificherà una graduale creazione di picchi e depressioni di densità; l'esito sarà la completa migrazione delle galassie presso sedi di massima densità, i cluster (come simulato in fig.3.2). Come si vedrà in seguito, gli stessi cluster sono sottoposti ad un processo di agglomerazione nella costituzione dei supercluster.

Il modello cinematico di Voronoi non è l'unico modo per descrivere l'interazione tra le galassie e gli elementi della tassellazione; vengono adoperate altresì simulazioni ad N corpi oppure vengono considerate distribuzioni *ad hoc* di galassie in prossimità degli elementi della tassellazione. Il modello cinematico di Voronoi considera una tale distribuzione come l'esito finale ed asintotico di un processo dinamico, costituito dall'espansione dei vuoti.

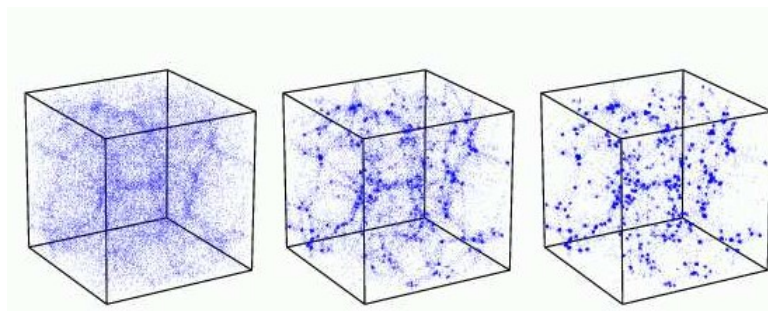


Figura 3.2: da (5) pag.6; sequenza a tempi successivi del processo di clustering secondo il modello cinematico di Voronoi. Conferendo al cubo di spazio un lato di $100h^{-1}\text{Mpc}$ e generando inizialmente 32000 galassie, si ottengono alla fine del processo 64 celle di Voronoi, di dimensioni tipiche $25h^{-1}\text{Mpc}$.

3.2 Superclustering

I cluster, raggruppamenti di galassie, a loro volta si concentrano in agglomerati, andando a formare cluster *di cluster*, detti supercluster. Tali supercluster hanno proprietà diverse dai cluster stessi, infatti la densità dei supercluster è solo un lieve incremento rispetto al background, esteso nell'ordine delle decine di Megaparsec.

Nello studio delle proprietà dei supercluster si adopera la funzione di correlazione (spa-

ziale o angolare) a due punti cluster-cluster. Tale strumento matematico sarà introdotto nel seguente paragrafo.

La funzione di correlazione Le funzioni di correlazione descrivono le proprietà di clustering di un insieme di punti nello spazio, siano essi galassie o cluster stessi. Tali funzioni offrono una misura di quanto agglomerati siano tali punti.

Si consideri la probabilità congiunta $dP(r)$ di trovare una galassia in un elemento di volume dV_2 , data un'altra galassia in un altro elemento di volume dV_1 , tali elementi di volume separati da un vettore r_{12} e scelti arbitrariamente all'interno un ampio volume di prova. Questa probabilità si calcola come:

$$dP(r) = n^2(1 + \xi(r))dV_1dV_2$$

dove n è la densità numerica di punti nel volume considerato e ξ è la funzione di correlazione spaziale a due punti galassia-galassia. Pertanto la funzione di correlazione esprime la probabilità in eccesso di trovare una galassia ad una distanza r da una galassia data; in eccesso rispetto alla probabilità (di trovare una galassia ad una distanza r da una galassia data) nel caso in cui le galassie siano distribuite arbitrariamente.

La funzione di correlazione si può altresì definire a tre o più punti; ha inoltre le seguenti proprietà: presenta uno zero in corrispondenza di $r = r_a$ dove r_a è detta lunghezza di correlazione; è maggiore di zero se, all'interno della distanza r considerata, i punti sono *clustered*. Al contrario, è negativa se i punti tendono a repellersi.

Un ulteriore scala utile per comprendere la compattezza dei cluster è la cosiddetta lunghezza di clustering, r_0 , con la proprietà che $\xi(r_0) = 1$.

Come si era accennato in precedenza, è possibile definire una funzione di correlazione angolare a due punti, $\omega(\theta)$, in maniera analoga a $\xi(r)$. Si introduce la probabilità:

$$dP_\Omega(\theta) = n_\Omega^2(1 + \omega(\theta))d\Omega_1d\Omega_2$$

corrispondente alla probabilità di trovare due galassie in due elementi di angolo solido $d\Omega_1$ e $d\Omega_2$, posti ad una distanza angolare θ_{12} sulla volta celeste. ω è la proiezione bidimensionale (sulla volta celeste) della funzione di correlazione spaziale.

Risultati empirici sulla funzione di correlazione galassia-galassia L'analisi di cataloghi bidimensionali di galassie ha portato alla conclusione che la funzione di correlazione angolare galassia-galassia possa essere espressa come:

$$\omega(\theta) = A \cdot \theta^{-\delta}$$

con θ all'interno di un certo intervallo ($\theta_{min}, \theta_{max}$) e $\delta \simeq 0.8$. Il coefficiente A dipende dalla distanza caratteristica delle galassie considerate nel catalogo. Oltre all'intervallo considerato, la funzione di correlazione tende velocemente a zero.

Corrispondentemente la funzione di correlazione spaziale galassia-galassia si esprime come:

$$\xi_{gg} = Br^{-\gamma}$$

con $\gamma \simeq 1.8$; B si può esprimere in termini della lunghezza di clustering:

$$\xi_{gg} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}$$

dove $r_0 \simeq 5h^{-1}$ Mpc e con un intervallo di validità della legge: $0.1h^{-1} < r < 10h^{-1}$ Mpc, oltre al quale la funzione di correlazione tende rapidamente a zero.

3.2.1 Caratteristiche del superclustering

In primo luogo si osserva che la funzione di correlazione spaziale dei cluster è analoga a quella galassia-galassia, ovverosia:

$$\xi_{cc} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}$$

dove $\gamma \simeq 1.8$, come prima. Ciò che cambia è l'intervallo di validità della legge, che non è noto con esattezza e del quale sono presenti numerose stime. Ciò che si può affermare è che è più ampio dell'ampiezza di correlazione galassia-galassia.

Cambia inoltre la lunghezza di clustering r_0 , anch'essa indefinita. Alcune studi supportano la stima $r_0 \simeq 15 - 20 h^{-1}$ Mpc.

Una seconda caratteristica è data dalla dipendenza del valore della lunghezza di clustering r_0 dal catalogo di cluster preso in considerazione. Si evidenzia inoltre che, al crescere della massa del cluster, aumenta altresì r_0 . Questa relazione, assieme alla proprietà di auto-similarità dei supercluster, ha portato ad un tentativo di spiegare tale fenomeno nell'ottica dei frattali.

Superclustering e frattali

Coerentemente con lo scopo di questa tesi, ci limiteremo a definire i frattali come un insieme dotato di *autosimilarità*'. In particolare: dato un sottoinsieme F di R^n , esso è (a,k)-autosimilare se F è composto da a copie di sé stesso scalate di un fattore k .

L'interpretazione frattale del fenomeno di superclustering è stata proposta sostenendo che la lunghezza di clustering r_0 vari linearmente a seconda della scala tipica L del catalogo di cluster. Tale scala tipica, $L(R)$, è la distanza media tra cluster di massa maggiore a R. Di conseguenza la funzione di correlazione cluster-cluster si scriverebbe come:

$$\xi_{cc}(r) = \beta \left(\frac{r}{L(r)}\right)^{-\gamma}$$

dove $L(R) = n^{-1/3}$. Tale dipendenza della scala tipica dalla densità numerica non è esatta né condivisa; si è tuttavia osservato che $L(R)$ è monotonamente crescente.

La struttura frattale può inoltre aiutare a comprendere il valore di γ : si consideri una sfera di raggio r attorno ad una galassia; si consideri la massa $M(r)$ ivi contenuta. Essa sarà proporzionale a:

$$M(r) \propto \xi(r) r^3 \propto r^D$$

dove $D \simeq 1.2$, detta *misura di Hausdorff*. Tale valore frazionario indica una struttura frattale²; si può interpretare questo risultato pensando che, se la massa fosse concentrata su filamenti unidimensionali, D sarebbe pari a 1. Se la massa fosse organizzata su muri, si avrebbe D pari a 2 e se la massa fosse disposta in una struttura tridimensionale, si avrebbe D pari a 3. Il valore trovato della misura di Hausdorff significa che la materia predilige distribuirsi lungo spazi unidimensionali, quali i filamenti.

Una terza ed ultima caratteristica del superclustering è una deviazione dall'autosimilarità sopra citata. La funzione di correlazione spaziale a due punti cluster-cluster rimane positiva su una scala più ampia della funzione di correlazione galassia-galassia. Questo confligge con l'ipotesi di genesi dei supercluster, la quale sostiene che tale fenomeno sia dovuto a picchi, nel campo primordiale di densità, maggiormente agglomerati rispetto ai picchi nei quali hanno trovato origine le galassie. Secondo tale spiegazione, ξ_{cc} non potrebbe più essere positiva laddove ξ_{gg} è negativa.

3.3 Clustering dei vertici della tassellazione di Voronoi

La distribuzione dei vertici di una tassellazione di Voronoi è particolarmente importante perchè i vertici sono identificati con i cluster di galassie, pertanto offre un modello teorico con il quale paragonare le osservazioni empiriche descritte in precedenza.

Tale distribuzione di vertici è univocamente determinata dalla tassellazione stessa; è inoltre un invariante topologico, indipendente dallo stato di moto del sistema di riferimento e svincolato dalla distribuzione delle galassie stesse all'interno dei filamenti, muri e cluster. I vertici della tassellazione, come i cluster, non si distribuiscono poissonianamente. Il grado di clustering è espresso dalla funzione di correlazione spaziale a due punti vertice-vertice $\xi_{vv}(r)$; attraverso l'analisi di ξ_{vv} risulta che l'agglomerazione è particolarmente intensa su scale inferiori o nell'ordine delle dimensioni λ_c della cella di Voronoi. Risulta inoltre possibile approssimare:

$$\xi_{vv}(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}$$

per: $0 < r < \frac{1}{4}\lambda_c$. I parametri valgono: $\gamma \simeq 1.95$; $r_0 \simeq 0.3\lambda_c$. Oltre al range considerato, già per distanze pari alla metà di λ_c , la funzione di correlazione tende rapidamente a zero, per poi dar vita ad un andamento altalenante fino a dimensioni nell'ordine di $2 \cdot \lambda_c$, oltre al quale ξ tende a zero, come illustrato in figura 3.3.

Queste caratteristiche della funzione di correlazione trovano ottimo accordo con i risultati sperimentali del superclustering; in particolare si evidenzano i simili valori di γ ,

²(2) p.351

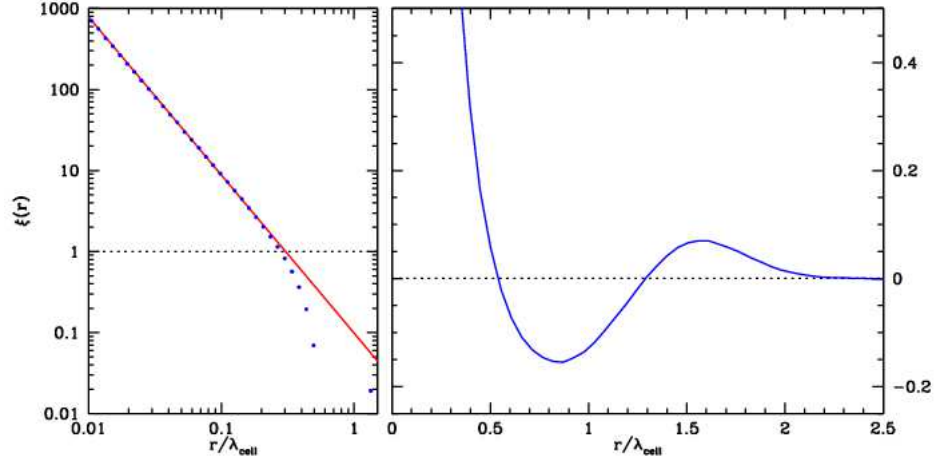


Figura 3.3: da (5) pag. 7; funzione di correlazione spaziale a due punti dei vertici della tassellazione di Voronoi. Le distanze sono normalizzate alle dimensioni tipiche λ_{cell} della cella; a sinistra rappresentazione in scala log-log, a destra scala lineare su ascisse e ordinate.

attorno a 2.

Si può inoltre trovare la dimensione media di una cella della tassellazione, utilizzando il dato empirico della lunghezza di clustering $r_0 \simeq 20h^{-1}\text{Mpc}$. Si ottiene $\lambda_c \simeq 70h^{-1}\text{Mpc}$, il quale tuttavia è in contraddizione con le dimensioni tipiche osservate di un vuoto nella distribuzione di galassie, che si aggira attorno a $25h^{-1} - 35h^{-1}\text{Mpc}$.

Alla suddetta problematica si aggiunge anche la seguente, che appare come un'inconsistenza nell'impiego della tassellazione: si è visto che la dimensione di una cella della tassellazione, che si evince dalla funzione di correlazione galassia-galassia, tenendo conto della presenza di galassie organizzate nei filamenti e nei muri della stessa tassellazione, vale circa $25h^{-1}\text{Mpc}$. Tale dimensione tuttavia confligge con λ_c ottenuta comparando il superclustering con il clustering dei vertici della tassellazione, perchè, come detto prima, la distribuzione dei vertici della tassellazione non tiene conto della distribuzione delle galassie all'interno dei suoi elementi costitutivi.

3.3.1 Selezione dei vertici della tassellazione di Voronoi

Per ovviare alla problematica esposta al termine del paragrafo precedente, è necessario adottare un processo di selezione dei vertici attraverso i quali calcolare ξ_{vv} . Si riassume l'impasse trovata: l'inconsistenza tra la dimensione della cella della tassellazione, prevista mediante ξ_{cc} , e la dimensione reale dei vuoti, ed anche la dimensione della cella di Voronoi, prevista dalla ξ_{gg} .

La selezione dei vertici avviene a seconda della loro massa: i vertici di massa superiore ad una data soglia, vengono mantenuti nel calcolo di ξ_{vv} . La massa di tali vertici viene calcolata nel seguente modo: si stima la quantità di materia che, come descritto nel modello cinematico di Voronoi, migrerà verso il vertice in questione. Si considera pertanto la quantità di materia contenuta all'interno di ciascuna cella e, a seconda della distanza

dal vertice, si somma (mediante media geometrica³) alla massa del vertice.

A seguito della selezione descritta, considerando vertici sempre più massivi, si osserva che la distribuzione di tali vertici risulta tutt'altro che casuale; mostra al contrario un grado di organizzazione superiore, che verrà esaminato nel seguente paragrafo.

3.3.2 Caratteristiche derivanti dalla selezione dei vertici della tassellazione

Per studiare le caratteristiche di questi sottoinsiemi di vertici più massicci, si analizzano le corrispondenti funzioni di correlazione a due punti ξ_{vv} . Si osserva innanzitutto che l'andamento qualitativo di ξ_{vv} rimane invariato, sia per l'insieme completo dei vertici che per i suoi sottoinsiemi più esigui. Nella fattispecie, si registra un intervallo spaziale entro il quale la funzione di correlazione è assimilabile ad una legge di potenza; oltre a tale range ξ_{vv} tende a zero con andamento oscillante.

Esistono tuttavia alcune peculiarità di ξ_{vv} :

1. L'ampiezza di ξ_{vv} aumenta monotonamente considerando sottoinsiemi di vertici sempre più massicci.

A dimostrazione di questo fatto, si può osservare che la lunghezza di clustering r_0 (che ricordiamo soddisfa $\xi(r_0) = 1$) è linearmente dipendente da λ_v ; λ_v è la distanza media tra i vertici compresi nel sottoinsieme considerato. Tale distanza media (tra vertici di ricchezza, o massa, R) soddisfa:

$$\lambda_v(R) = n(R)^{-1/3}$$

dove n è la densità numerica di vertici.

La suddetta dipendenza lineare va a sostegno della descrizione frattale del clustering; è inoltre la causa di una maggiore compattezza e agglomeratezza dei vertici della tassellazione.

2. Gli effetti di clustering si estendono su scale proporzionalmente più ampie, considerando sottoinsiemi di vertici sempre più massicci.

ξ_{vv} tende a zero solo a distanze via via maggiori; ciò suggerisce il fatto che all'interno di strutture a bolle risiedono strutture coerenti, di dimensioni maggiori delle tipiche dimensioni della struttura di partenza.

Quantitativamente, si osserva che anche in questo caso esiste un rapporto di dipendenza lineare tra la scala di correlazione r_a (che soddisfa $\xi(r_0) = 0$) e la distanza media λ_v . Unendo quest'osservazione con l'osservazione precedente, si deduce che reti e tassellazioni, come le reti soggiacenti a strutture a bolle, inducono fenomeni di clustering con la caratteristica che gli elementi più ricchi sono maggiormente agglomerati tra loro, su distanza più ampie degli elementi meno ricchi.

3. Una terza ed ultima caratteristica delle funzioni di correlazione riguarda la loro pendenza; in particolare ai sottoinsiemi più massicci corrispondono valori di γ più bassi (si varia da un valore $\gamma \simeq 1.95$ ad uno $\gamma \simeq 1.8$).

³(3) pag.16

In virtù delle osservazioni fatte precedentemente, si deduce pertanto che esiste una certa auto-similarità nel fenomeno del clustering. Esso si manifesta con caratteristiche analoghe, nella stessa forma, al variare della massa degli elementi soggetti ed anche al variare della scala presa in considerazione.

Tale conclusione è supportata quantitativamente dal rapporto tra lunghezza di correlazione e lunghezza di clustering, al variare dei sottoinsiemi di vertici. Tale rapporto è pressoché costante (e vale $r_a/r_0 \simeq 1.86$).

3.3.3 Applicazione della selezione dei vertici della tassellazione allo studio dei supercluster

Si è dimostrato come la geometria di una struttura a bolle induca un fenomeno di clustering dei vertici, con proprietà di autosimilarità. Applicando tale modello alla *cosmic web*, si può comprendere perché i cluster più ricchi abbiano livelli di clustering maggiori dei cluster meno massicci. Sempre in quest'ottica, è possibile spiegare perché i cluster abbiano una ξ_{cc} positiva su scale più ampie della scala tipica dei vuoti o di altri elementi della tassellazione.

Cosa implica tale paragone tra clustering dei vertici, e selezione dei vertici in base alla massa, e supercluster? Significa che la geometria delle strutture cosmiche manifesta chiare e quantificabili proprietà di autosimilarità: gli elementi più massicci risultano più agglomerati, rilevanti ed organizzati rispetto agli elementi più esigui.

Capitolo 4

Conclusioni

Si è osservato il processo di formazione delle strutture cosmiche per effetto dell'instabilità gravitazionale, risultante in una distribuzione di zone sovradense e zone tondeggianti di densità minore dell'ambiente circostante. Si è complementato tale procedimento con il modello cinematico di Voronoi, che permette di tracciare, almeno in teoria, le traiettorie delle singole galassie dalla loro posizione iniziale, verso i muri circostanti alla cella, lungo i filamenti e all'interno dei cluster.

Si è notata l'analogia tra la tassellazione di Voronoi e la ragnatela cosmica, basata sull'uguaglianza dei vertici delle celle della tassellazione con i cluster di galassie. In particolare gli elementi costitutivi della tassellazione corrispondono alle strutture cosmiche entro le quali si muovono le galassie, vale a dire muri, filamenti, vertici.

A partire da questa analogia, mediante i metodi computazionali ai quali si è brevemente accennato, è possibile discernere informazioni sulla velocità o sulla densità delle strutture cosmiche, nell'ottica di una maggiore comprensione della distribuzione primordiale di materia. Si è infine messa alla prova, e parzialmente superata, l'analogia sopra citata, confrontando gli andamenti delle funzioni di correlazione dei vertici delle celle e dei cluster di galassie; sono state notate divergenze sulle stime della scala tipica delle celle e dei vuoti.

Tali divergenze si inseriscono in un paradigma più ampio seguito dai vertici della tassellazione; considerando sottoinsiemi di vertici, rispetto alla massa, sono emerse proprietà di autosimilarità: l'intensità del fenomeno clustering aumenta all'aumentare della massività dei vertici. Di conseguenza i vertici più massicci si agglomerano più attivamente e su scale più ampie rispetto ai vertici più esigui.

Per riassumere, si è applicata un'astrazione matematica per descrivere la distribuzione delle galassie nell'universo, esprimendo corrispondenze e divergenze rispetto alla realtà osservata.

Capitolo 5

Bibliografia

- (1) A.R. Liddle, "An Introduction to Modern Cosmology", Chichester: John Wiley & sons Ltd. (2003)
- (2) P. Coles and F. Lucchin, "Cosmology. The Origins and Evolution of Cosmic Structure", Chichester: John Wiley & sons Ltd. (2002)
- (3) R. Van de Weygaert, "The Cosmic Foam: Stochastic Geometry and Spatial Clustering Across the Universe", Groningen: Default Journal. (2002)
- (4) R. Van de Weygaert, "The Cosmic Web: Geometric Analysis", Valencia: Lectures at summerschool "Data Analysis in Cosmology". (2004)
- (5) R. Van de Weygaert, "Voronoi Tessellations and the Cosmic Web: Spatial Patterns and Clustering across the Universe", Kapteyn Astronomical Institute, University of Groningen, the Netherlands. (2007)