



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI CIVITA"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

**Uno studio della precessione degli equinozi con la
teoria hamiltoniana delle perturbazioni**

Laureando:

Daniele Giannetto

Matricola 1219797

Relatore:

Prof. Massimiliano Guzzo

Anno Accademico 2021/2022

23/09/2022

Indice

Introduzione	5
1 Il modello classico della precessione degli equinozi	7
1.1 L'Hamiltoniana del modello classico della precessione	9
1.2 Rappresentazione dell'energia potenziale gravitazionale	9
1.3 Studio e sviluppo della funzione f	11
1.4 Espressione esplicita della funzione di Hamilton	13
2 Applicazione della teoria delle perturbazioni	17
2.1 Primo passo perturbativo per il modello classico di precessione	18
2.2 Secondo passo perturbativo	21
3 Risultati numerici per il modello classico di precessione	23
3.1 Il problema di Cauchy associato al modello classico della precessione	23
3.2 La precessione degli equinozi terrestre	24
3.3 Esperimenti numerici con dati iniziali fittizi	25

Introduzione

Si dice precessione degli equinozi il fenomeno per cui l'asse di rotazione terrestre descrive un cono, nell'arco di circa 26000 anni, attorno alla verticale al piano in cui giace il moto di rivoluzione terrestre attorno al Sole. Ciò avviene, principalmente, a causa della forma non perfettamente sferica della Terra e dell'attrazione gravitazionale esercitata da Sole e Luna.

Se si vuole studiare questo fenomeno occorre innanzitutto definire un modello matematico che permetta lo studio della rotazione terrestre. Si osserva, però, che un modello reale, che tenga conto di tutte le forze agenti sulla Terra e della geometria reale del pianeta, risulterebbe molto complesso da trattare. Pertanto in questa tesi si considera un modello semplificato chiamato "il modello classico della precessione degli equinozi" che rappresenta il più semplice modello in cui si possa evidenziare tale fenomeno, e che fornisce una stima della frequenza di precessione prossima a quella reale. Questo è composto da un ellissoide a simmetria assiale P con distribuzione omogenea di massa ed il cui centro di massa è vincolato a muoversi su un'orbita kepleriana circolare attorno ad un punto materiale O fissato.

In questa tesi si descrive la formulazione hamiltoniana di tale modello, applicando successivamente la teoria hamiltoniana delle perturbazioni al primo (e al secondo) ordine al fine di poter evidenziare il fenomeno della precessione del corpo. Quindi si applica il modello classico della precessione al caso in cui P identifichi la Terra ed O rispettivamente prima il Sole e poi la Luna riportando quindi l'influenza dei due corpi celesti sul moto di precessione terrestre. In conclusione, tornando al modello generale, si riscontra come particolari dati iniziali del sistema hanno un effetto "stabilizzante" sull'andamento delle soluzioni delle equazioni del moto.

Si fornisce una rapida descrizione degli strumenti matematici di cui ci si servirà. Dalla teoria hamiltoniana di un corpo rigido in movimento, si definisce lo spazio delle fasi del sistema e si considera un intorno delle rotazioni giroscopiche del corpo P escludendo il caso in cui il momento angolare sia allineato alla normale al piano dell'orbita del corpo P attorno ad O . La teoria hamiltoniana delle perturbazioni è ben implementata utilizzando le variabili di azione-angolo di Andoyer-Deprit. Purtroppo, tali variabili non sono ben definite sulle rotazioni giroscopiche del corpo, che rientrano nel dominio di interesse per lo studio della rotazione della Terra. Seguendo gli articoli [1, 2] è possibile definire delle variabili canoniche (I, φ, z, w) in cui implementare la teoria delle perturbazioni, e che sono ben definite in un intorno delle rotazioni giroscopiche. Si procede a definire l'hamiltoniana del problema utilizzando tali variabili non singolari, ed il problema successivo è la rappresentazione esplicita dell'energia potenziale gravitazionale in questo sistema di variabili.

Si osserva che, seguendo [1], l'implementazione della teoria delle perturbazioni nelle variabili non singolari richiede lo sviluppo della perturbazione utilizzando, anziché l'usuale serie di Fourier, uno sviluppo sulla base di funzioni $\{z^n e^{i\nu' \cdot \varphi}, w^n e^{i\nu' \cdot \varphi}\}$, dove $n \in \mathbb{N}$ e $\nu' \in \mathbb{Z}^3$.

Benché l'hamiltoniana espressa nelle variabili non singolari sia nella forma quasi integrabile, da essa non traspare immediatamente il fenomeno della precessione degli equinozi. Per evidenziare tale fenomeno sarà necessario coniugare l'hamiltoniana ad un sistema hamiltoniano in cui tutte le armoniche non risonanti sono relegate ad ordini superiori del parametro perturbativo. Trascurando tali ordini superiori, si rimane con un sistema i cui moti sono quasi-periodici, ed una delle frequenze è la frequenza associata alla precessione degli equinozi. Inoltre si tratterà, in modo meno dettagliato, della costruzione di un secondo passo perturbativo al fine di migliorare le stime ottenute e rendendole valide su tempi più lunghi.

La verifica sperimentale di tali considerazioni teoriche viene evidenziata, per il sistema Terra-Sole, tramite uno studio numerico delle soluzioni delle equazioni del moto legate al sistema hamiltoniano citato e della trasformazione canonica che definisce il primo passo perturbativo.

Si verifica inoltre l'effetto stabilizzante dovuto alla vicinanza del moto alle rotazioni giroscopiche tramite un breve studio numerico delle soluzioni delle equazioni del moto con dati iniziali adeguati (effetto trattato in [2]).

Il Capitolo 1 è dedicato al modello classico della precessione ed alla rappresentazione esplicita dell'hamiltoniana del problema; il Capitolo 2 è dedicato all'implementazione della teoria hamiltoniana delle perturbazioni utilizzando le variabili non singolari, alla rappresentazione esplicita della funzione generatrice che definisce il primo passo perturbativo e alla costruzione di un secondo passo perturbativo per il modello classico di precessione; il Capitolo 3 è dedicato ad uno studio numerico del modello descritto, alla verifica della bontà delle ipotesi perturbative e all'evidenziare numericamente l'effetto stabilizzante dato dalla vicinanza del moto alle rotazioni giroscopiche.

Capitolo 1

Il modello classico della precessione degli equinozi

Si considerano un sistema di riferimento $\{O, e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ con centro nel punto materiale O , dotato di massa m_O , con assi paralleli a quelli di un sistema di riferimento inerziale, e un corpo rigido P , di massa m_P , baricentro B che si assume eseguire un moto circolare attorno ad O dato da:

$$\begin{aligned} B(t) - O &= a(\cos(\Omega t), \sin(\Omega t), 0) \\ \Omega &= \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_O}{a^3}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

dove \mathcal{G} indica la costante di gravitazione universale, ed $a > 0$ il raggio del moto.

Si descrive P come un insieme di P_1, \dots, P_N punti di massa, dotati delle rispettive masse m_1, \dots, m_N , sottoposti a vincoli di rigidità, dotato di un sistema di riferimento solidale $\mathcal{E} = \{B, e_1, e_2, e_3\}$, supposto principale di inerzia e di uno con assi paralleli ad un riferimento inerziale $\mathcal{E}^* = \{B, e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ entrambi centrati nel baricentro.

Inoltre, sia

$$\mathcal{J}_B = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix}$$

la matrice di inerzia nel riferimento \mathcal{E} dato, dove \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} sono i momenti principali di inerzia.

Lo spazio delle configurazioni per un sistema di questo tipo è in corrispondenza con l'insieme $SO(3) \times \mathbb{S}^1$ e lo spazio delle fasi è diffeomorfo alla varietà

$$D = T^*SO(3) \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$$

che ha una carta locale di coordinate canoniche $(G, g, J, j, L, l, \lambda, \Lambda)$, ove λ è un angolo che parametrizza il moto di B lungo l'orbita circolare, Λ il suo momento coniugato, e (G, g, J, j, L, l) le note variabili di Andoyer-Deprit dove:

$$J = M \cdot e_3^*; \quad G = \|M\|; \quad L = M \cdot e_3$$

sono le azioni (M denota il momento angolare) e, definiti i vettori:

$$n' = e_3^* \wedge M; \quad n'' = M \wedge e_3$$

gli angoli ad esse coniugati sono

$$\begin{aligned} j &\equiv \text{angolo tra i vettori } e_1^* \text{ e } n' \\ g &\equiv \text{angolo tra i vettori } n' \text{ e } n'' \\ l &\equiv \text{angolo tra i vettori } n'' \text{ e } e_1 \end{aligned}$$

Si osserva come, sia nel caso in cui $G = L$ (corrispondentemente M è parallelo ad e_3 e si dicono rotazioni giroscopiche del corpo P) che nel caso in cui $G = J$ (corrispondentemente M è parallelo a e_3^*), le variabili di Andoyer-Deprit non risultano più ben definite. Si osserverà, in particolare, che nel modello trattato della precessione degli equinozi per la Terra risulta un dato iniziale $G(0) \approx L(0)$. Trovandosi a trattare un moto definito in un intorno molto piccolo di un

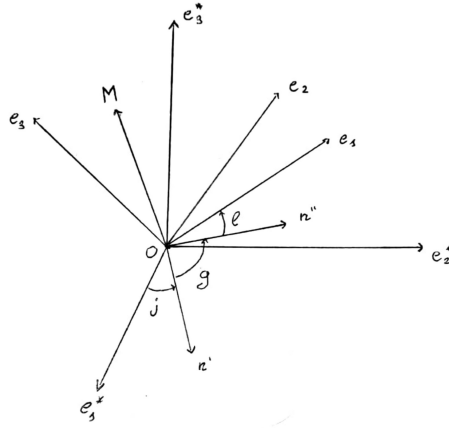


Figura 1.1: Rappresentazione degli angoli j, g, l per un corpo rigido di baricentro O , momento angolare M dotato di un sistema di riferimento solidale $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ e di uno con assi paralleli ad un riferimento inerziale $\{O, e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$.

dato giroscopico è necessario, sia ai fini della trattazione teorica che del calcolo numerico, rimuovere tale singolarità definendo delle nuove variabili canoniche, ben definite ed analitiche in un intorno delle rotazioni giroscopiche del corpo P e che comunque rispecchino la geometria delle variabili di Andoyer-Deprit (si veda [1, 2]).

Si segue quanto mostrato in [3, 2] e si definiscono, nella stessa carta, delle nuove variabili di azione-angolo:

$$(I, \varphi) := (I_1, I_2, I_3, I_4, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = (G, J, \Lambda, G - L, g + l, j, \lambda, -l) \quad (1.2)$$

Si osserva che la singolarità persiste, ma coinvolge solo la coppia di variabili coniugate (I_4, φ_4) . Si introducono quindi le coordinate cartesiane:

$$\xi = \sqrt{2I_4} \cos(\varphi_4); \quad \eta = \sqrt{2I_4} \sin(\varphi_4)$$

che risultano ben definite, analitiche e l'insieme delle variabili $(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \xi, \eta)$ sono canoniche in un intorno delle rotazioni giroscopiche del corpo P (si vedano i risultati riportati in [2]).

Si equipaggia il seguente insieme:

$$\tilde{\Sigma} = \{x \in T^*SO(3) : 0 < |I_2(x)| < I_1(x), I_4(x) \geq 0\} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \quad (1.3)$$

con la struttura di varietà indotta da D . In questa varietà sono ben definite, analitiche e canoniche le variabili:

$$(I_1, \varphi_1, I_2, \varphi_2, I_3, \varphi_3, \xi, \eta) \\ z = \frac{\xi + i\eta}{\sqrt{2}}; \quad w = \frac{\xi - i\eta}{\sqrt{2}i} \quad (1.4)$$

dove le (ξ, η) vengono sostituite dalle coordinate complesse di Birkhoff (z, w) . Risulta inoltre:

$$I_4 = izw \\ z = \sqrt{I_4} e^{i\varphi_4} \\ iw = \sqrt{I_4} e^{-i\varphi_4} \quad (1.5)$$

Sia, infine, definita la rappresentativa locale delle parentesi di Poisson:

$$\{f, g\}(I, \varphi, z, w) := \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_j} \frac{\partial g}{\partial I_j} - \frac{\partial f}{\partial I_j} \frac{\partial g}{\partial \varphi_j} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

dove f e g corrispondono alle rappresentative locali di due funzioni definite sulla carta $\tilde{\Sigma}$.

Osservazione. Si mette in evidenza come verranno utilizzate sia le variabili complesse di Birkhoff (z, w) , che le variabili reali (ξ, η) . Le prime risultano convenienti ai fini della trattazione teorica del modello e della successiva applicazione della teoria delle perturbazioni, ma scomode se lo scopo è l'integrazione numerica del sistema, nel qual caso le seconde sono più adatte.

1.1 L'Hamiltoniana del modello classico della precessione

Si assume da ora il corpo P a simmetria assiale, cioè con i momenti principali di inerzia tali che $\mathcal{A} = \mathcal{B} \neq \mathcal{C}$.

E' noto che la funzione di Hamilton del sistema assume la forma:

$$H = T + \Omega I_3 + V \quad (1.6)$$

dove T e V indicano rispettivamente le rappresentative locali dell'energia cinetica di P e dell'energia potenziale gravitazionale. Si vuole fornire un'espressione esplicita per la funzione di Hamilton in (1.6) evitando di considerare i termini additivi che non dipendano dalle variabili canoniche date in (1.4); difatti questi non contribuiranno alle equazioni di Hamilton del sistema considerato. E' noto, grazie al teorema di König, che vale:

$$T = T' + T_B$$

con $T_B = \frac{1}{2}m_P a^2 \Omega^2$ (termine che verrà trascurato poiché costante nel tempo), e

$$T' = \frac{G^2}{2\mathcal{A}} + \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{C})L^2}{2\mathcal{A}\mathcal{C}}$$

Sostituendo le coordinate date in (1.4) nella funzione T' si ottiene:

$$T' = \frac{I_1^2}{2\mathcal{A}} + \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{C})(I_1 - izw)^2}{2\mathcal{A}\mathcal{C}} = \frac{I_1^2}{2\mathcal{C}} - \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{C})I_1 izw}{\mathcal{A}\mathcal{C}} - \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{C})z^2 w^2}{2\mathcal{A}\mathcal{C}} \quad (1.7)$$

L'energia potenziale gravitazionale, invece, assume la forma:

$$V = - \sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{G}m_O m_j}{\|P_j - O\|} \quad (1.8)$$

dalla legge di gravitazione universale, e dovrà essere rappresentata in funzione delle variabili (1.4).

1.2 Rappresentazione dell'energia potenziale gravitazionale

Per quanto riguarda l'energia potenziale gravitazionale data in (1.8) in un primo momento la si rappresenta esplicitamente in funzione delle variabili di Andoyer-Deprit. Siano i vettori:

$$x_j = \frac{P_j - B}{a} \quad e \quad \rho = \frac{B - O}{a} \quad (1.9)$$

Si dimostra:

$$V = - \frac{\mathcal{G}m_O m_T}{a} - \sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{G}m_O m_j \|P_j - B\|^2}{a^3} + \frac{3\mathcal{G}m_O J_B \rho \cdot \rho}{2a^3} + O\left(\frac{R}{a}\right)^3 \quad (1.10)$$

dove R denota il semiasse maggiore del corpo P .

Dimostrazione della (1.10). Seguendo quanto mostrato in [4] si rappresenta il termine $\frac{1}{\|P_j - O\|}$ che compare nella definizione (1.8) utilizzando i vettori x_j e ρ definiti in (1.9) come segue:

$$\frac{1}{\|P_j - O\|} = \frac{1}{a} \frac{1}{\|x_j + \rho\|} = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{\|x_j\|^2 + 2x_j \cdot \rho + 1}} \quad (1.11)$$

Si noti come sia lecito assumere:

$$\|x_j\|^2 \leq \left(\frac{R}{a}\right)^2 \ll 1$$

$$|x_j \cdot \rho| \leq \frac{R}{a} \ll 1$$

che implicano:

$$\|\|x_j\|^2 + 2x_j \cdot \rho\| \leq \|x_j\|^2 + 2|x_j \cdot \rho| \ll 1$$

pertanto si sviluppa il termine (1.11) in serie di Mc-Laurin:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \left(1 - \frac{\|x_j\|^2}{2} - \rho \cdot x_j + \frac{3(\|x_j\|^2 + 2x_j \cdot \rho)^2}{8} \right) + O\left(\frac{R}{a}\right)^3 = \\ & = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{\|x_j\|^2}{2} - \rho \cdot x_j + \frac{3(x_j \cdot \rho)^2}{2} \right) + O\left(\frac{R}{a}\right)^3 \end{aligned} \quad (1.12)$$

secondo il noto sviluppo:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\beta}} = 1 - \frac{\beta}{2} + \frac{3\beta^2}{8} + o(\beta^2) \quad \text{se } |\beta| < 1$$

Per le proprietà del baricentro risulta:

$$\sum_{j=1}^N m_j \rho \cdot x_j = \rho \cdot \left(\sum_{j=1}^N m_j (P_j - B) \right) = 0 \quad (1.13)$$

Inoltre si osserva la validità delle seguenti:

$$\sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{G}m_O}{a} m_j \left(1 - \frac{\|x_j\|^2}{2} \right) = \frac{\mathcal{G}m_O m_P}{a} - \sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{G}m_O m_j \|P_j - B\|^2}{2a^3} \quad (1.14)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{3\mathcal{G}m_O m_j (\rho \cdot x_j)^2}{2a} = \frac{3\mathcal{G}m_O}{2a^3} \sum_{j=1}^N m_j (\rho \cdot (P_j - B))^2 = \frac{3\mathcal{G}m_O}{2a^3} \sum_{j=1}^N m_j (\|P_j - B\|^2 - d_j^2) \quad (1.15)$$

dove d_j indica la distanza del punto P_j dalla retta passante per il punto B e di direzione il versore ρ . Nella formula (1.15) l'ultima uguaglianza è giustificata grazie ad una proprietà geometrica del prodotto scalare.

In particolare si mostra che l'espressione (1.15) risulta uguale a:

$$\frac{3\mathcal{G}m_O}{2a^3} \sum_{j=1}^N m_j \|P_j - B\|^2 - \frac{3\mathcal{G}m_O}{2a^3} \sum_{j=1}^N m_j d_j^2 = \frac{3\mathcal{G}m_O}{2a^3} \sum_{j=1}^N m_j \|P_j - B\|^2 - \frac{3\mathcal{G}m_O}{2a^3} \mathcal{J}_B \rho \cdot \rho \quad (1.16)$$

poiché, dalla teoria del corpo rigido, vale:

$$\sum_{j=1}^N m_j d_j^2 = \mathcal{J}_B^\rho = \mathcal{J}_B \rho \cdot \rho$$

Applicando lo sviluppo (1.12) alla definizione (1.8), e applicando successivamente le identità (1.13), (1.14), (1.16), si verifica che il potenziale V assume la forma indicata dalla tesi (1.10). \square

Per concludere si mostra la seguente:

Proposizione. Vale la formula:

$$V = -\frac{\mathcal{G}m_O m_T}{a} + \frac{\mathcal{G}m_O}{2a^3} (A - \mathcal{C}) - \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}m_O}{a^3} (A - \mathcal{C}) f\left(\frac{L}{G}, \frac{J}{G}, g, j - \lambda\right) + O\left(\frac{R}{a}\right)^3 \quad (1.17)$$

con

$$\begin{aligned} f\left(\frac{L}{G}, \frac{J}{G}, g, j - \lambda\right) &= \sin^2(j - \lambda) \cos^2(g) \frac{J^2}{G^2} \left(1 - \frac{L^2}{G^2}\right) + 2 \sin^2(j - \lambda) \cos(g) \frac{JL}{G^2} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} \\ & \sqrt{1 - \frac{J^2}{G^2}} + 2 \sin(j - \lambda) \cos(j - \lambda) \sin(g) \left[\frac{J}{G} \left(1 - \frac{L^2}{G^2}\right) \cos(g) + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \frac{J^2}{G^2}} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} \right] \\ & + \sin^2(j - \lambda) \frac{L^2}{G^2} \left(1 - \frac{J^2}{G^2}\right) + \left(1 - \frac{L^2}{G^2}\right) \sin^2(g) \cos^2(j - \lambda) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Osservazione. Prima di procedere con la dimostrazione della proposizione si osserva come, da ora in poi, i primi due termini dell'espressione (1.17) non verranno più considerati poiché non contribuiscono alle equazioni di Hamilton del sistema in quanto costanti rispetto al tempo.

Dimostrazione. Si segua la trattazione in [4] e si indicano con ρ_1, ρ_2, ρ_3 le componenti del vettore ρ nel riferimento \mathcal{E} . Ricordando che ρ è un versore, si verifica:

$$\mathcal{J}_{B\rho} \cdot \rho = \mathcal{A}\rho_1^2 + \mathcal{B}\rho_2^2 + \mathcal{C}\rho_3^2 = \mathcal{A}(\rho_1^2 + \rho_2^2) + \mathcal{C}\rho_3^2 = \mathcal{A} - (\mathcal{A} - \mathcal{C})\rho_3^2 \quad (1.19)$$

Si indicano inoltre con x_j, y_j, z_j le componenti nel riferimento \mathcal{E} dei vettori $P_j - B$ e si applica l'osservazione (1.19) al termine

$$-\sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{G}m_O m_j \|P_j - B\|^2}{a^3} + \frac{3\mathcal{G}m_O}{2a^3} I_B \rho \cdot \rho$$

che compare nella formula (1.10), ottenendo:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left(\frac{\mathcal{G}m_O m_j}{a^3} \left(\frac{3}{2}(y_j^2 + z_j^2) - (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2) \right) \right) - \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}m_O}{a^3} (\mathcal{A} - \mathcal{C})(e_3 \cdot \rho)^2 = \\ & = \frac{\mathcal{G}m_O}{2a^3} (\mathcal{A} - \mathcal{C}) - \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}m_O}{a^3} (\mathcal{A} - \mathcal{C})(e_3 \cdot \rho)^2 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Pertanto applicando il risultato (1.20) all'espressione (1.10) si deriva la formula (1.17), dove si è denotato:

$$f\left(\frac{L}{G}, \frac{J}{G}, g, j - \lambda\right) = (e_3 \cdot \rho)^2$$

Per mostrare il risultato (1.18) si segua quanto mostrato in [5] e, siano gli angoli:

$$\begin{aligned} \psi_1 & \equiv \text{angolo tra i vettori } e_3^* \text{ e } M \\ \psi_2 & \equiv \text{angolo tra i vettori } M \text{ e } e_3 \end{aligned}$$

Per la loro definizione valgono le seguenti proprietà:

$$\cos(\psi_1) = \frac{J}{G}; \quad \cos(\psi_2) = \frac{L}{G} \quad (1.21)$$

$$\sin(\psi_j) = \sqrt{1 - \cos^2(\psi_j)} \quad \forall j \in \{1, 2\} \quad (1.22)$$

Grazie alle regole della trigonometria sferica e alle proprietà (1.21) e (1.22) vale:

$$\begin{aligned} e_3 \cdot \rho & = \sin(\lambda - j)(\cos(g) \sin(\psi_2) \cos(\psi_1) + \sin(\psi_1) \cos(\psi_2)) - \cos(\lambda - j) \sin(g) \sin(\psi_2) = \\ & = -\sin(j - \lambda) \left[\frac{J}{G} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} \cos(g) + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \frac{J^2}{G^2}} \right] - \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} \sin(g) \cos(j - \lambda) \end{aligned}$$

da cui si deriva il risultato cercato. \square

1.3 Studio e sviluppo della funzione f

Poiché l'energia potenziale gravitazionale è rappresentata mediante la funzione f descritta in (1.18), la si vuole studiare in questa sezione al fine di portarla in una forma conveniente per poter poi applicare la teoria hamiltoniana delle perturbazioni.

Innanzitutto si esprime una rappresentazione di f in termini delle variabili definite in (1.2):

$$\begin{aligned} f & = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3) \cos^2(\varphi_1 + \varphi_4) \frac{I_2^2}{I_1^2} \left(1 - \frac{(I_1 - I_4)^2}{I_1^2} \right) + 2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3) \cos(\varphi_1 + \varphi_4) \frac{I_2(I_1 - I_4)}{I_1^2} \\ & \quad \sqrt{1 - \frac{(I_1 - I_4)^2}{I_1^2}} \sqrt{1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}} + 2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \sin(\varphi_1 + \varphi_4) \\ & \quad \left[\frac{I_2}{I_1} \left(1 - \frac{(I_1 - I_4)^2}{I_1^2} \right) \cos(\varphi_1 + \varphi_4) + \frac{I_1 - I_4}{I_1} \sqrt{1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}} \sqrt{1 - \frac{(I_1 - I_4)^2}{I_1^2}} \right] \\ & \quad + \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3) \frac{(I_1 - I_4)^2}{I_1^2} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2} \right) + \left(1 - \frac{(I_1 - I_4)^2}{I_1^2} \right) \sin^2(\varphi_1 + \varphi_4) \cos^2(\varphi_2 - \varphi_3) \end{aligned}$$

Successivamente la si sviluppa in serie di Fourier complessa secondo gli angoli φ ottenendo:

$$f = \sum_{\nu \in S} \hat{f}_\nu I_4^{\frac{|\nu_4|}{2}} e^{i\nu \cdot \varphi} \quad (1.23)$$

dove

$$S = \{(-2, -2, 2, -2), (2, 2, -2, 2), (2, 0, 0, 2), (-2, 0, 0, -2), (-2, 2, -2, -2), (2, -2, 2, 2), \\ (0, 2, -2, 0), (0, -2, 2, 0), (1, 2, -2, 1), (-1, -2, 2, -1), (1, 0, 0, 1), (-1, 0, 0, -1), \\ (-1, 2, -2, -1), (1, -2, 2, 1), (0, 0, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{Z}^4$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{(0,0,0,0)} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}\right) + \left(\frac{3I_2^2}{I_1^2} - 1\right) \left(\frac{I_4}{2I_1} - \frac{I_4^2}{4I_1^2}\right) \\ \hat{f}_{(2,2,-2,2)} &= \hat{f}_{(-2,-2,2,-2)} = -\frac{1}{16} \frac{(I_1 + I_2)^2(2I_1 - I_4)}{I_1^4} \\ \hat{f}_{(2,0,0,2)} &= \hat{f}_{(-2,0,0,-2)} = -\frac{1}{8} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}\right) \frac{2I_1 - I_4}{I_1^2} \\ \hat{f}_{(2,-2,2,2)} &= \hat{f}_{(-2,2,-2,-2)} = -\frac{1}{16} \frac{(I_1 - I_2)^2(2I_1 - I_4)}{I_1^4} \\ \hat{f}_{(0,2,-2,0)} &= \hat{f}_{(0,-2,2,0)} = -\frac{1}{8} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}\right) \left(2 - 6\frac{I_4}{I_1} + 3\frac{I_4^2}{I_1^2}\right) \\ \hat{f}_{(1,2,-2,1)} &= \hat{f}_{(-1,-2,2,-1)} = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{I_4}{I_1}\right) \left(\frac{I_2}{I_1} + 1\right) \sqrt{1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}} \sqrt{\frac{2}{I_1}} \sqrt{1 - \frac{I_4}{2I_1}} \\ \hat{f}_{(1,0,0,1)} &= \hat{f}_{(-1,0,0,-1)} = \frac{1}{2} \frac{I_2}{I_1} \left(1 - \frac{I_4}{I_1}\right) \sqrt{1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}} \sqrt{\frac{2}{I_1}} \sqrt{1 - \frac{I_4}{2I_1}} \\ \hat{f}_{(1,-2,2,1)} &= \hat{f}_{(-1,2,-2,-1)} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{I_4}{I_1}\right) \left(1 - \frac{I_2}{I_1}\right) \sqrt{1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}} \sqrt{\frac{2}{I_1}} \sqrt{1 - \frac{I_4}{2I_1}} \end{aligned}$$

Osservazione. Si osserva brevemente una proprietà che risulterà importante in seguito ai fini dell'applicazione della teoria hamiltoniana delle perturbazioni:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu_4 \\ \nu_2 &= -\nu_3 \end{aligned} \quad (1.24)$$

per ogni $\nu \in S$.

A questo punto si fornisce una rappresentazione di f secondo le variabili (I, φ, z, w) date in (1.4), ottenendo lo sviluppo trattato in [2]:

$$f = \sum_{\nu \in S} f_\nu(I, izw) E_\nu(\varphi, z, w) \quad (1.25)$$

dove

$$E_\nu(\varphi, z, w) = \begin{cases} z^{\nu_4} e^{i\nu' \cdot \varphi} & \text{se } \nu_4 \geq 0 \\ (iw)^{-\nu_4} e^{i\nu' \cdot \varphi} & \text{se } \nu_4 < 0 \end{cases}$$

$$f_\nu = \left(\hat{f}_\nu\right)_{I_4=izw}$$

in cui compare $\nu' = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$.

La dimostrazione della (1.25) consiste in un cambio di variabili nell'espressione (1.23) e di alcune manipolazioni algebriche sfruttando le osservazioni (1.5).

In conclusione, applicando il risultato (1.25) alla formula (1.17) si ottiene la rappresentazione voluta dell'energia potenziale gravitazionale V definita in (1.8).

1.4 Espressione esplicita della funzione di Hamilton

Si riuniscono le formule dedotte per energia cinetica e energia potenziale gravitazionale del corpo P e si riporta la rappresentazione esplicita della funzione di Hamilton in (1.6) in termini delle variabili canoniche (1.4). Si vuole successivamente far notare come nell'applicazione al caso terrestre, questa sia l'hamiltoniana di un sistema quasi-integrabile.

Si applica, innanzitutto, un riscaldamento delle variabili di un fattore $\|M_0\|$ (dove M_0 indica il momento angolare del corpo P nell'istante iniziale del moto $t = 0$), che sarà utile ai fini del calcolo numerico, definito come:

$$(I, \varphi, z, w) = (\|M_0\|I', \varphi', \sqrt{\|M_0\|}z', \sqrt{\|M_0\|}w')$$

Si interpreta il riscaldamento come una trasformazione canonica di valenza $c = \frac{1}{\|M_0\|}$ che viene applicata all'hamiltoniana del sistema.

Da ora in poi, per non appesantire la notazione, si eviteranno di riportare gli apici sopra citati delle variabili riscalate.

Denotando con $\alpha = \frac{\|M_0\|}{c}$, $\beta = \frac{c-A}{c}$, $\gamma = \alpha\beta \frac{c}{A}$, $\varepsilon = \frac{3}{2} \beta \frac{\Omega^2}{\alpha}$ e ricordando $\Omega = \sqrt{\frac{g m_0}{a^3}}$ da (1.1), si riporta l'espressione esplicita (in forma trigonometrica) di H data in (1.6) sfruttando i risultati ottenuti in (1.7), (1.17) e (1.25):

$$\begin{aligned} H(I, \varphi, z, w) &= h(I, izw) + \varepsilon f(I, \varphi, z, w) := \\ &\alpha \frac{I_1^2}{2} + \gamma I_1 izw + \gamma \frac{z^2 w^2}{2} + \Omega I_3 + \varepsilon \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2} \right) + \left(\frac{3I_2^2}{I_1^2} - 1 \right) \left(\frac{izw}{2I_1} + \frac{z^2 w^2}{4I_1^2} \right) \right. \\ &- \frac{1}{16} \frac{(I_1 + I_2)^2 (2I_1 - izw)}{I_1^4} ((z^2 - w^2) \cos(2\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3) + i(z^2 + w^2) \sin(2\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3)) \\ &- \frac{1}{8} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2} \right) \frac{2I_1 - izw}{I_1^2} ((z^2 - w^2) \cos(2\varphi_1) + i(z^2 + w^2) \sin(2\varphi_1)) \\ &- \frac{1}{16} \frac{(I_1 - I_2)^2 (2I_1 - izw)}{I_1^4} ((z^2 - w^2) \cos(2\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3) + i(z^2 + w^2) \sin(2\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3)) \\ &- \frac{1}{4} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2} \right) \left(2 - 6 \frac{izw}{I_1} - 3 \frac{z^2 w^2}{I_1^2} \right) \cos(2\varphi_2 - 2\varphi_3) + \\ &- \frac{\mathcal{K}_1}{4} \left(\frac{I_2}{I_1} + 1 \right) ((iw + z) \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3) + (w + iz) \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3)) \\ &+ \frac{I_2 \mathcal{K}_1}{2I_1} ((iw + z) \cos(\varphi_1) + (w + iz) \sin(\varphi_1)) \\ &\left. + \frac{\mathcal{K}_1}{4} \left(1 - \frac{I_2}{I_1} \right) ((iw + z) \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3) + (w + iz) \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3)) \right] \end{aligned} \quad (1.26)$$

dove

$$\mathcal{K}_1 = \sqrt{1 - \frac{izw}{2I_1}} \left(1 - \frac{izw}{I_1} \right) \sqrt{1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}} \sqrt{\frac{2}{I_1}}$$

Osservazione. Si applica la trasformazione canonica

$$(z, w) = \left(\frac{\xi + i\eta}{\sqrt{2}}, \frac{\xi - i\eta}{\sqrt{2}i} \right)$$

all'espressione dell'hamiltoniana data in (1.26) e si ottiene:

$$H(I, \varphi, \xi, \eta) = \alpha \frac{I_1^2}{2} + \gamma I_1 \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - \gamma \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2}{8} + \Omega I_3 + \varepsilon f(I, \varphi, \xi, \eta) \quad (1.27)$$

dove

$$\begin{aligned}
f(I, \varphi, \xi, \eta) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}\right) + \left(\frac{3I_2^2}{I_1^2} - 1\right) \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{4I_1} - \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2}{16I_1^2}\right) \\
&- \frac{1}{32} \frac{(I_1 + I_2)^2(4I_1 - \xi^2 - \eta^2)}{I_1^4} ((\xi^2 - \eta^2) \cos(2\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3) - 2\xi\eta \sin(2\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3)) \\
&- \frac{1}{16} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}\right) \frac{4I_1 - \xi^2 - \eta^2}{4I_1^2} ((\xi^2 - \eta^2) \cos(2\varphi_1) - 2\xi\eta \sin(2\varphi_1)) \\
&- \frac{1}{32} \frac{(I_1 - I_2)^2(4I_1 - \xi^2 + \eta^2)}{I_1^4} ((\xi^2 - \eta^2) \cos(2\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3) - 2\xi\eta \sin(2\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3)) \\
&- \frac{1}{4} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}\right) \left(2 - 3\frac{\xi^2 + \eta^2}{I_1} + \frac{3(\xi^2 + \eta^2)^2}{4I_1^2}\right) \cos(2\varphi_2 - 2\varphi_3) + \\
&- \frac{\mathcal{K}_2}{4} \left(\frac{I_2}{I_1} + 1\right) (\sqrt{2}\xi \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3) - \sqrt{2}\eta \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3)) \\
&+ \frac{I_2\mathcal{K}_2}{2I_1} (\sqrt{2}\xi \cos(\varphi_1) - \sqrt{2}\eta \sin(\varphi_1)) \\
&+ \frac{\mathcal{K}_2}{4} \left(1 - \frac{I_2}{I_1}\right) (\sqrt{2}\xi \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3) - \sqrt{2}\eta \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3))
\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{K}_2 = \sqrt{1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4I_1}} \left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2I_1}\right) \sqrt{1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}} \sqrt{\frac{2}{I_1}}$$

Si vuole applicare il modello supponendo che il corpo P identifichi la Terra, dando dei valori ai parametri $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \Omega$ adeguati. Sia pertanto il Sole posto nel punto O . Innanzitutto, per evitare di trattare con grandezze di natura astronomica, si applica un riscaldamento delle costanti fisiche prese in considerazione.

Si pone perciò la massa del Sole $m_O = 1$, la distanza Terra-Sole $a = 1$ e la costante di gravitazione universale $\mathcal{G} = 1$. Si osserva che queste assunzioni riscalanano l'unità di tempo misurandolo in $\tau = \frac{\text{anno}}{2\pi}$, inoltre si nota immediatamente $\Omega = 1 \frac{\text{rad}}{\tau}$.

Proposizione. Dalle assunzioni fatte e dai dati sulla geometria terrestre e sul suo moto di rotazione si attribuiscono i seguenti valori ai parametri:

$$\alpha \approx 365.24220 \quad \beta \approx 3.34724 \cdot 10^{-3} \quad \gamma \approx 1.22666 \quad \varepsilon \approx 1.37467 \cdot 10^{-5} \quad (1.28)$$

Dimostrazione. Inizialmente si definisce il vettore velocità angolare della Terra, ω_G di modulo

$$v_G = \frac{2\pi}{T} \approx 365.24220 \frac{\text{rad}}{\tau}$$

dove T rappresenta il periodo di rotazione terrestre attorno al proprio asse (circa 1 giorno), di direzione l'asse di rotazione terrestre e verso concorde con l'asse e_3 del riferimento solidale. Siano $\hat{\varphi}$ l'angolo tra la proiezione del vettore ω_G sul piano $\pi : x_3 = 0$ nel riferimento solidale \mathcal{E} e il vettore e_1 , e $\hat{\psi}$ l'angolo tra ω_G e il vettore e_3 .

Nel riferimento \mathcal{E} si rappresentano i vettori:

$$\omega_G = v_G \cos(\hat{\varphi}) \sin(\hat{\psi}) e_1 + v_G \sin(\hat{\varphi}) \sin(\hat{\psi}) e_2 + v_G \cos(\hat{\psi}) e_3$$

e

$$M_0 = J_B \omega_G = \mathcal{A}(v_G \cos(\hat{\varphi}) \sin(\hat{\psi}) e_1 + v_G \sin(\hat{\varphi}) \sin(\hat{\psi}) e_2) + \mathcal{C}v_G \cos(\hat{\psi}) e_3 \quad (1.29)$$

In particolare si ha

$$\|M_0\| = \sqrt{\mathcal{A}^2 \sin^2(\hat{\psi}) + \mathcal{C}^2 \cos^2(\hat{\psi})} v_G$$

Se ai fini del proseguimento l'angolo $\hat{\varphi}$ è irrilevante, è invece importante dare un valore iniziale per l'angolo $\hat{\psi}$. Nel caso terrestre grazie alle osservazioni sperimentali fatte sul raggio dell'oscillazione di Chandler del polo nord geografico (di circa 9 metri in media) si deriva il valore $1.4158 \cdot 10^{-6}$ rad (si veda [6]).

Approssimando la distribuzione di massa della Terra con quella di un elissoide omogeneo a simmetria assiale si ricavano i momenti di inerzia:

$$\mathcal{A} = \frac{m_T}{5}(r_1^2 + r_2^2), \quad \mathcal{C} = \frac{m_T}{5}(2r_1^2)$$

dove $r_1 \approx 6378.137$ km e $r_2 \approx 6356.752$ km indicano rispettivamente il raggio della Terra all'equatore e ai poli (valori presi da [7]).

Da queste considerazioni si derivano i parametri:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\|M_0\|}{\mathfrak{C}} = \sqrt{\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{C}}\right)^2 \sin^2(\psi_2) + \cos^2(\psi_2)} v_G \approx 365.24220 \frac{\text{rad}}{\tau} \\ \beta &= \frac{\mathfrak{C} - \mathcal{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2 r_1^2} = 3.34724 \cdot 10^{-3} \\ \gamma &= \alpha \beta \frac{\mathfrak{C}}{\mathcal{A}} \approx 1.22666 \frac{\text{rad}}{\tau} \\ \varepsilon &= \frac{3}{2} \beta \frac{\Omega^2}{\alpha} \approx 1.37467 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\tau}\end{aligned}$$

□

Analogamente a quanto appena mostrato, supponendo la Luna posta nel punto O si pongono: la massa della Terra $m_T = 1$, la distanza Terra-Luna $a_{TL} = 1$ e la costante di gravitazione universale $\mathfrak{G} = 1$, si osserva che il tempo verrà misurato in $\tau' = \frac{\text{mese}}{2\pi}$, che la frequenza del moto di rivoluzione della Luna attorno alla Terra è $\Omega_L = \sqrt{\frac{\mathfrak{G}m_T}{a_{TL}^3}} = 1$ e che la massa della Luna risulta $m_L \approx 0.012294 m_T$ (dati ottenuti da [8, 9]). Da queste nuove assunzioni si derivano i valori dei parametri:

$$\begin{aligned}\alpha &\approx 27.32167 & \beta &\approx 3.34724 \cdot 10^{-3} & \gamma &\approx 0.09176 \\ \varepsilon &\approx 2.25932 \cdot 10^{-6} & \Omega &\approx 0.11088\end{aligned}\tag{1.30}$$

Pertanto si verifica che la funzione (1.26) in entrambe le applicazioni rappresenta l'hamiltoniana di un sistema quasi-integrabile.

Capitolo 2

Applicazione della teoria delle perturbazioni

Si introduce ora la teoria hamiltoniana delle perturbazioni al fine di studiare il modello classico di precessione. Rispetto alle formulazioni standard della teoria, l'utilizzo di variabili non di azione-angolo per rappresentare la funzione di Hamilton del sistema obbliga una riformulazione di alcune definizioni e procedimenti. Si seguirà la via indicata in [1, 2].

Definizione. Data una funzione definita nella carta (1.3) della forma:

$$H = h(I, izw) + \varepsilon f(I, \varphi, z, w)$$

con $\varepsilon \ll 1$ e le variabili (I, φ, z, w) date come in (1.4), si definisce “passo perturbativo” l'applicazione di una trasformazione canonica prossima all'identità

$$(I', \varphi', z', w') = \mathcal{W}(I, \varphi, z, w)$$

che coniughi H in

$$H' = h'(I', z', w') + \varepsilon^2 f'(I', \varphi', z', w')$$

per delle funzioni h' e f' sopra indicate, con f' limitata uniformemente in ε .

L'utilità di un tale procedimento è in primo luogo il fatto di poter trattare una nuova hamiltoniana quasi-integrabile H' definita come una perturbazione di ordine ε^2 di un'hamiltoniana h' più semplice, derivando perciò delle stime a priori più precise per le soluzioni delle equazioni del moto.

Nel caso del modello classico della precessione vi è però una motivazione più immediata. L'applicazione di almeno un passo perturbativo risulta necessario ai fini dello studio del fenomeno di precessione. Difatti se si volesse studiare l'approssimazione integrabile dell'hamiltoniana (1.6) si otterrebbe un sistema integrabile in cui non vi è precessione degli equinozi. L'applicazione di un tale procedimento permette di ottenere un'approssimazione integrabile, le cui dinamiche sono caratterizzate dalla precessione del momento angolare attorno alla normale dell'orbita. In effetti si verificherà che la funzione h' dipende esplicitamente da I'_2 e pertanto permette di calcolare una frequenza per l'angolo di precessione φ'_2 .

Ulteriori passi perturbativi potrebbero essere utili per caratterizzare il moto di precessione su tempi molto più lunghi di $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Tuttavia, si noterà, tramite la costruzione effettiva dei passi perturbativi, che se per il primo passo la funzione che si ottiene da H' trascurando i termini di ordine ε^2 compreso risulta integrabile alla Liouville-Arnold (e pertanto integrabile per quadrature), applicando ulteriori passi perturbativi la funzione ottenuta da $H^{(n)}$ trascurando i termini di ordine $\varepsilon^{(n+1)}$ potrebbe non essere più integrabile alla Liouville-Arnold.

Si vuole esplicitare nel dettaglio, in questo capitolo, il processo che porta alla costruzione del primo passo perturbativo, sfruttando il quale, successivamente, si otterranno dei risultati numerici. Inoltre, è riportata la costruzione teorica, citando esplicitamente solo alcune parti delle funzioni trattate, di un secondo passo perturbativo, mettendo in evidenza i risultati più importanti per quanto riguarda lo studio del fenomeno della precessione.

2.1 Primo passo perturbativo per il modello classico di precessione

Si riporta di seguito la costruzione dettagliata di un primo passo perturbativo per il sistema trattato mettendo in evidenza in particolare la formula per la stima della frequenza del moto di precessione del corpo P . Si adatta pertanto la trattazione del classico “metodo di Lie” e si cerca una funzione χ che genera la trasformazione canonica:

$$(I, \varphi, z, w) = \Phi_\chi^\varepsilon(I', \varphi', z', w') \quad (2.1)$$

definita come il flusso hamiltoniano di χ al tempo ε con dato iniziale (I', φ', z', w') . Si osserva che si tratta di una trasformazione canonica prossima all'identità:

$$\begin{cases} I = I' - \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}(I', \varphi', z', w') + o(\varepsilon^2) \\ \varphi = \varphi' + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial I}(I', \varphi', z', w') + o(\varepsilon^2) \\ z = z' + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial w}(I', \varphi', z', w') + o(\varepsilon^2) \\ w = w' - \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial z}(I', \varphi', z', w') + o(\varepsilon^2) \end{cases}$$

Osservazione. Successivamente sarà più rilevante l'inversa di tale trasformazione, dopo aver reintrodotta le variabili cartesiane (ξ, η) in sostituzione delle (z, w) :

$$(I', \varphi', \xi', \eta') = \Phi_\chi^{-\varepsilon}(I, \varphi, \xi, \eta)$$

che si scrive esplicitamente come:

$$\begin{cases} I' = I + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}(I, \varphi, \xi, \eta) + o(\varepsilon^2) \\ \varphi' = \varphi - \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial I}(I, \varphi, \xi, \eta) + o(\varepsilon^2) \\ \xi' = \xi - \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \eta}(I, \varphi, \xi, \eta) + o(\varepsilon^2) \\ \eta' = \eta + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \xi}(I, \varphi, \xi, \eta) + o(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (2.2)$$

Coniugando l'hamiltoniana (1.26) tramite la trasformazione (2.1) si ottiene

$$H' = H \circ \Phi_\chi^\varepsilon(I', \varphi', z', w') = H(I(\varepsilon), \varphi(\varepsilon), z(\varepsilon), w(\varepsilon))$$

Sviluppando in serie di Taylor la funzione $H(I(t), \varphi(t), z(t), w(t))$ al tempo $t = 0$ si mostra:

$$\begin{aligned} H' &= \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon^j}{j!} \left(\frac{d^j}{dt^j} H(I(t), \varphi(t), z(t), w(t)) \right)_{t=0} \\ &= H(I', \varphi', z', w') + \varepsilon \{H, \chi\}(I', \varphi', z', w') + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\{H, \chi\}, \chi\}(I', \varphi', z', w') + o(\varepsilon^3) \\ &= h(I', iz'w') + \left[\varepsilon(f + \{h, \chi\}) + \varepsilon^2 \left(\{f, \chi\} + \frac{\{\{h, \chi\}, \chi\}}{2} \right) \right] (I', \varphi', z', w') + o(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

Si cerca quindi una funzione χ tale per cui lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f + \{h, \chi\}$ contenga solo il termine legato al coefficiente $\nu = (0, 0, 0, 0)$, cioè, nello specifico, una soluzione dell'equazione:

$$f + \{h, \chi\} = g \quad (2.3)$$

con

$$g = f_{(0,0,0,0)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2} \right) + \left(\frac{3I_2^2}{I_1^2} - 1 \right) \left(\frac{izw}{2I_1} + \frac{z^2w^2}{4I_1^2} \right)$$

Sia definito l'operatore lineare:

$$L_h = \{\cdot, h\} \quad (2.4)$$

e il vettore:

$$\omega(I, izw) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) := (\alpha I_1 + \gamma izw, 0, \Omega, \gamma(I_1 - izw))$$

le cui componenti sono definite da

$$\omega_i(I) = \left(\frac{\partial h}{\partial I_i} \right)_{I_4=izw} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Si verifica che l'operatore (2.4) si caratterizza nel seguente modo (si veda [1]):

$$L_h = \sum_{j \leq 3} \omega_j \frac{\partial}{\partial \varphi_j} + i\omega_4 \left(z \frac{\partial}{\partial z} - w \frac{\partial}{\partial w} \right)$$

Proposizione. Una soluzione formale per l'equazione (2.3) è una funzione del tipo:

$$\chi = \sum_{\substack{\nu \in S \\ \nu \neq (0,0,0,0)}} \frac{f_\nu}{i(\nu \cdot \omega)} E_\nu \quad (2.5)$$

con

$$E_\nu = \begin{cases} z^{\nu_4} e^{i\nu' \cdot \varphi} & \text{se } \nu_4 \geq 0 \\ (iw)^{-\nu_4} e^{i\nu' \cdot \varphi} & \text{se } \nu_4 < 0 \end{cases}$$

in cui $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ e $\nu' = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$.

Osservazione. Si noti che poiché il vettore omega dipende solo da I_1, I_2 e da izw , la divisione per i termini $\nu \cdot \omega$ non altera i coefficienti ν dello sviluppo della funzione χ sulla base E_ν .

Dimostrazione. Preliminarmente si notano le seguenti identità, valide per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^4$:

$$\begin{aligned} L_h(z^{\nu_4} e^{i\nu' \cdot \varphi}) &= i(\nu \cdot \omega) z^{\nu_4} e^{i\nu' \cdot \varphi} \\ L_h(w^{-\nu_4} e^{i\nu' \cdot \varphi}) &= i(\nu \cdot \omega) w^{-\nu_4} e^{i\nu' \cdot \varphi} \end{aligned}$$

inoltre, dal momento che le funzioni f_ν e $i(\nu \cdot \omega)$ dipendono unicamente da (I_1, I_2, izw) , si verifica:

$$L_h \left(\frac{f_\nu}{i(\nu \cdot \omega)} \right) = \frac{i(\nu \cdot \omega) L_h(f_\nu) - f_\nu L_h(i(\nu \cdot \omega))}{(i(\nu \cdot \omega))^2} = 0 \quad (2.6)$$

se $\nu \neq (0, 0, 0, 0)$. Si cerca quindi una soluzione χ dell'equazione (2.3) sviluppata in serie di Fourier sulla base $\{E_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}^4}$

$$\chi = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^4} \chi_\nu E_\nu$$

con

$$E_\nu = \begin{cases} z^{\nu_4} e^{i\nu' \cdot \varphi} & \text{se } \nu_4 \geq 0 \\ (iw)^{-\nu_4} e^{i\nu' \cdot \varphi} & \text{se } \nu_4 < 0 \end{cases}$$

Si osserva, grazie al risultato (2.6), che

$$L_h(\chi_\nu E_\nu) = L_h(\chi_\nu) E_\nu + \chi_\nu L_h(E_\nu) = i(\omega \cdot \nu) \chi_\nu E_\nu$$

Per la linearità dell'operatore L_h e per le proprietà di ortogonalità delle serie di Fourier, la ricerca di una tale soluzione è equivalente a risolvere il sistema di equazioni:

$$i(\omega \cdot \nu) \chi_\nu = \begin{cases} 0 & \text{se } \nu = (0, 0, 0, 0) \\ f_\nu & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^4$.

Si pone perciò:

$$\begin{cases} \chi_\nu = 0 & \text{se } \nu = (0, 0, 0, 0) \text{ o } \nu \notin S \\ \chi_\nu = \frac{f_\nu}{i(\nu \cdot \omega)} & \text{se } \nu \in S \end{cases}$$

□

Osservazione. Si nota come in questo caso la funzione h data in (1.26) non dipende dalla variabile I_2 , pertanto si ha $\omega_2 = 0$. Ciò, in generale, potrebbe rappresentare un problema ai fini della costruzione formale della soluzione dell'equazione (2.3) data in (2.5).

Difatti, supponendo per la funzione di Hamilton considerata una funzione f il cui sviluppo di Fourier contenga un termine non nullo legato al vettore $\hat{\nu} = (0, \hat{\nu}_2, 0, 0)$ con $\hat{\nu}_2 \neq 0$, si avrebbe l'equazione non risolubile:

$$0 = i(\hat{\nu} \cdot \omega)\chi_{\hat{\nu}} = f_{\hat{\nu}} \neq 0$$

rendendo di fatto impossibile la costruzione di una soluzione sviluppata come in (2.5).

Si nota come ora risulta fondamentale la proprietà osservata in (1.24) che garantisce la costruzione formale di una χ facendo notare come nello sviluppo di Fourier della funzione f nel modello classico di precessione l'unica armonica non nulla che legata ad un vettore ν con $\nu_3 = 0$ è quella legata al vettore $(0, 0, 0, 0)$.

Si riporta di seguito la rappresentazione esplicita, in forma trigonometrica, della funzione χ per il modello trattato:

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{i\mathcal{A}(I_1 + I_2)^2(2I_1 - izw)}{32I_1^4(\alpha\mathcal{C}I_1 - \Omega\mathcal{A})} ((z^2 + w^2) \cos(2\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3) + i(z^2 - w^2) \sin(2\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3)) \\ & + \frac{i\mathcal{A}(2I_1 - izw)}{16\alpha\mathcal{C}I_1^3} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}\right) ((z^2 + w^2) \cos(2\varphi_1) + i(z^2 - w^2) \sin(2\varphi_1)) \\ & + \frac{i\mathcal{A}(I_1 - I_2)^2(2I_1 - izw)}{32I_1^4(\alpha\mathcal{C}I_1 + \Omega\mathcal{A})} ((z^2 + w^2) \cos(2\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3) + i(z^2 - w^2) \sin(2\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3)) \\ & + \frac{1}{8\Omega} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}\right) \left(2 - 6\frac{izw}{I_1} - 3\frac{z^2w^2}{I_1^2}\right) \sin(2\varphi_2 - 2\varphi_3) - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{izw}{I_1}\right) \left(\frac{I_2}{I_1} + 1\right) \\ & \sqrt{1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}} \sqrt{\frac{2}{I_1}} \sqrt{1 - \frac{izw}{2I_1}} \frac{((z - iw) \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3) - (w - iz) \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3))}{i \left(\alpha \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}} I_1 - 2\Omega\right)} \\ & + \frac{I_2}{2I_1} \left(1 - \frac{izw}{I_1}\right) \sqrt{1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}} \sqrt{\frac{2}{I_1}} \sqrt{1 - \frac{izw}{2I_1}} \frac{((z - iw) \cos(\varphi_1) - (w - iz) \sin(\varphi_1))}{i \left(\alpha \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}} I_1\right)} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{izw}{I_1}\right) \\ & \left(1 - \frac{I_2}{I_1}\right) \sqrt{1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}} \sqrt{\frac{2}{I_1}} \sqrt{1 - \frac{izw}{2I_1}} \frac{((z - iw) \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3) - (w - iz) \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3))}{i \left(\alpha \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}} I_1 + 2\Omega\right)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Si riporta inoltre la funzione (2.7) dopo aver reintrodotta le coordinate (ξ, η) :

$$\begin{aligned} \chi = & -\frac{\mathcal{A}(I_1 + I_2)^2(4I_1 - \xi^2 - \eta^2)}{32I_1^4(2\alpha\mathcal{C}I_1 - 2\Omega\mathcal{A})} ((\xi^2 - \eta^2) \sin(2\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3) + 2\xi\eta \cos(2\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3)) \\ & - \frac{1}{16} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}\right) \frac{4I_1 - \xi^2 - \eta^2}{I_1^2} \frac{\mathcal{A}}{2\alpha\mathcal{C}I_1} ((\xi^2 - \eta^2) \sin(2\varphi_1) + 2\xi\eta \cos(2\varphi_1)) \\ & - \frac{\mathcal{A}(I_1 - I_2)^2(4I_1 - \xi^2 - \eta^2)}{32I_1^4(2\alpha\mathcal{C}I_1 + 2\Omega\mathcal{A})} ((\xi^2 - \eta^2) \sin(2\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3) + 2\xi\eta \cos(2\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3)) \\ & + \frac{1}{8\Omega} \left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}\right) \left(2 - 3\frac{\xi^2 + \eta^2}{I_1} + \frac{3(\xi^2 + \eta^2)^2}{4I_1^2}\right) \sin(2\varphi_2 - 2\varphi_3) - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2I_1}\right) \\ & \left(\frac{I_2}{I_1} + 1\right) \sqrt{1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}} \sqrt{\frac{2}{I_1}} \sqrt{1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4I_1}} \frac{\sqrt{2}\mathcal{A}(\xi \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3) + \eta \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3))}{\alpha\mathcal{C}I_1 - 2\Omega\mathcal{A}} \\ & + \frac{I_2}{I_1} \left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2I_1}\right) \sqrt{1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}} \frac{1}{\sqrt{I_1}} \sqrt{1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4I_1}} \frac{\mathcal{A}(\xi \sin(\varphi_1) + \eta \cos(\varphi_1))}{\alpha\mathcal{C}I_1} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2I_1}\right) \\ & \left(1 - \frac{I_2}{I_1}\right) \sqrt{1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}} \sqrt{\frac{2}{I_1}} \sqrt{1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4I_1}} \frac{\sqrt{2}\mathcal{A}(\xi \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3) + \eta \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_3))}{\alpha\mathcal{C}I_1 + 2\Omega\mathcal{A}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Osservazione. La funzione riportata in (2.7) risulta ben definita sulla varietà $\tilde{\Sigma}$ (1.3), a meno dei valori della variabile $I_1 = -\frac{\nu_3}{\nu_1} \frac{\Omega}{\alpha} \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{C}}$. In particolare riportando i valori dei parametri in (1.28) i punti in cui la χ non risulta ben definita sono: $I_1 \approx \pm 0.0027$, $I_1 \approx \pm 0.0014$, $I_1 = 0$.

La χ in (2.7) genera la trasformazione canonica (2.1) che coniuga la funzione (1.26) alla funzione:

$$H' = \alpha \frac{I_1'^2}{2} + \gamma I_1' iz' w' + \gamma \frac{z'^2 w'^2}{2} + \Omega I_3' + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_2'^2}{I_1'^2} \right) + \left(\frac{3I_2'^2}{I_1'^2} - 1 \right) \left(\frac{iz' w'}{2I_1'} + \frac{z'^2 w'^2}{4I_1'^2} \right) \right) + \varepsilon^2 f'(I', \varphi', z', w') + o(\varepsilon^3) \quad (2.9)$$

dove

$$f'(I', \varphi', z', w') = \frac{1}{2} (\{f, \chi\}(I', \varphi', z', w') + \{g, \chi\}(I', \varphi', z', w'))$$

Osservazione. Si riporta di seguito l'approssimazione integrabile dell'hamiltoniana H' in (2.9), ottenuta trascurando i termini di ordine ε^2 :

$$h' = \alpha \frac{I_1'^2}{2} + \gamma I_1' iz' w' + \gamma \frac{z'^2 w'^2}{2} + \Omega I_3' + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_2'^2}{I_1'^2} \right) + \left(\frac{3I_2'^2}{I_1'^2} - 1 \right) \left(\frac{iz' w'}{2I_1'} + \frac{z'^2 w'^2}{4I_1'^2} \right) \right)$$

si osserva in particolare che l'hamiltoniana h' è integrabile alla Liouville-Arnold (fuori da un intorno delle rotazioni giroscopiche) dove le variabili di azione-angolo sono le variabili singolari date in (1.2). Si riporta la formula per la frequenza dell'angolo di precessione φ_2' :

$$\dot{\varphi}_2' = \frac{\partial H'}{\partial I_2'} = -\varepsilon \frac{I_2'}{I_1'^2} + \varepsilon \frac{6I_2'}{I_1'^2} \left(\frac{iz' w'}{2I_1'} + \frac{z'^2 w'^2}{4I_1'^2} \right) + o(\varepsilon^2) \quad (2.10)$$

Ricordando inoltre che la trasformazione canonica (2.1) è prossima all'identità, si deduce che la formula (2.10) diventa:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2' &= -\varepsilon \frac{I_2 + o(\varepsilon)}{I_1^2 + o(\varepsilon)} + \varepsilon \frac{6I_2 + o(\varepsilon)}{I_1^2 + o(\varepsilon)} \left(\frac{izw + o(\varepsilon)}{2I_1 + o(\varepsilon)} + \frac{z^2 w^2 + o(\varepsilon)}{4I_1^2 + o(\varepsilon)} \right) + o(\varepsilon^2) \\ &= -\varepsilon \frac{I_2}{I_1^2} + \varepsilon \frac{6I_2}{I_1^2} \left(\frac{izw}{2I_1} + \frac{z^2 w^2}{4I_1^2} \right) + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2 Secondo passo perturbativo

Come anticipato in precedenza si riporta una breve trattazione teorica (in quanto il procedimento risulta analogo a quello svolto per la costruzione del primo passo) di un secondo passo perturbativo per il modello classico di precessione mettendo in evidenza la nuova hamiltoniana esplicitando per esteso i termini fino all'ordine ε compreso. Si riporta in conclusione una formula che fornisce una stima migliorata per la frequenza di precessione degli equinozi.

Sia perciò l'hamiltoniana H' ricavata in (2.9) e si sviluppi la funzione f' come segue:

$$f' = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^4} f'_\nu E_\nu$$

allo stesso modo di f nel risultato (1.25). Analogamente a quanto visto nella sezione 2.1 una funzione che genera un passo perturbativo per l'hamiltoniana H' è:

$$\chi' = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^4 \\ \nu \neq 0}} \frac{f'_\nu}{i(\omega' \cdot \nu)} E_\nu$$

dove si denota con ω' il vettore delle frequenze:

$$\begin{aligned} \omega' &= \left(\alpha I_1' + \gamma iz' w' + \varepsilon \left(-\frac{3I_2'^2 w'^2 z'^2}{I_1'^5} - \frac{9iI_2'^2 w' z'}{2I_1'^4} + \frac{I_2'^2}{I_1'^3} + \frac{w'^2 z'^2}{2I_1'^3} + \frac{iw' z'}{2I_1'^2} \right), \right. \\ &\quad \varepsilon \left(\frac{3I_2' w'^2 z'^2}{2I_1'^4} + \frac{3iI_2' w' z'}{I_1'^3} - \frac{I_2'}{I_1'^2} \right), \Omega, \\ &\quad \left. \gamma(I_1' - iz' w') + \varepsilon \left(-\frac{3iI_2'^2 w' z'}{2I_1'^4} + \frac{3I_2'^2}{2I_1'^3} + \frac{iw' z'}{2I_1'^2} - \frac{1}{2I_1'} \right) \right) \end{aligned}$$

La funzione χ' genera la trasformazione

$$(I', \varphi', z', w') = \Phi_{\chi'}^{\varepsilon^2}(I'', \varphi'', z'', w'')$$

che coniuga H' alla funzione:

$$\begin{aligned} H'' &= \alpha \frac{I_1''^2}{2} + \gamma I_1'' iz'' w'' + \gamma \frac{z''^2 w''^2}{2} + \Omega I_3'' + \\ &\varepsilon \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_2''^2}{I_1''^2} \right) + \left(\frac{3I_2''^2}{I_1''^2} - 1 \right) \left(\frac{iz'' w''}{2I_1''} + \frac{z''^2 w''^2}{4I_1''^2} \right) \right) + \varepsilon^2 g_1(I_1'', I_2'', iz'' w'') \\ &+ \varepsilon^4 f''(I'', \varphi'', z'', w'') + o(\varepsilon^6) \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{1}{2} (\{f', \chi'\}(I'', \varphi'', z'', w'') + \{g_1, \chi'\}(I'', \varphi'', z'', w'')) \\ g_1(I_1'', I_2'', iz'' w'') &= (I_2''^2 - I_1''^2)^2 g_1^*(I_1'', iz'' w'') \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g_1^*(I_1'', iz'' w'') &= \frac{(I_1'' - iz'' w'')^2 (I_1'' - 8iI_1'' z'' w'' - 4z''^2 w''^2)}{4I_1''^9} \left(\frac{\frac{A}{\mathcal{C}} \alpha I_1''}{\frac{A^2}{\mathcal{C}^2} \alpha^2 I_1''^2 - 4\Omega^2} \right) \\ &+ \frac{iz'' w'' (iz'' w'' - 2I_1'')(I_1''^2 - 8iI_1'' z'' w'' - 2z''^2 w''^2)}{16I_1''^9} \left(\frac{\frac{A}{\mathcal{C}} \alpha I_1''}{\frac{A^2}{\mathcal{C}^2} \alpha^2 I_1''^2 - \Omega^2} \right) \\ &- \frac{\frac{A}{\mathcal{C}} \alpha \frac{iz'' w'' (2I_1'' - iz'' w'')(I_1'' - iz'' w'')^2}{8I_1''^8}}{\left(\frac{A^2}{\mathcal{C}^2} \alpha^2 I_1''^2 + 4\Omega^2 \right)} \left(\frac{\frac{A^2}{\mathcal{C}^2} \alpha^2 I_1''^2 - 4\Omega^2}{\left(\frac{A^2}{\mathcal{C}^2} \alpha^2 I_1''^2 - 4\Omega^2 \right)^2} \right) \\ &- \frac{\frac{A}{\mathcal{C}} \alpha \frac{(2I_1'' - iz'' w'')^2 z''^2 w''^2}{64I_1''^8}}{\left(\frac{A^2}{\mathcal{C}^2} \alpha^2 I_1''^2 + \Omega^2 \right)} \left(\frac{\frac{A^2}{\mathcal{C}^2} \alpha^2 I_1''^2 + \Omega^2}{\left(\frac{A^2}{\mathcal{C}^2} \alpha^2 I_1''^2 - \Omega^2 \right)^2} \right) \end{aligned}$$

Osservazione. Si riporta l'approssimazione integrabile del sistema dopo due passi perturbativi:

$$\begin{aligned} h'' &= \alpha \frac{I_1''^2}{2} + \gamma I_1'' iz'' w'' + \gamma \frac{z''^2 w''^2}{2} + \Omega I_3'' + \\ &\varepsilon \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_2''^2}{I_1''^2} \right) + \left(\frac{3I_2''^2}{I_1''^2} - 1 \right) \left(\frac{iz'' w''}{2I_1''} + \frac{z''^2 w''^2}{4I_1''^2} \right) \right) + \varepsilon^2 g_1(I_1'', I_2'', iz'' w'') \end{aligned}$$

da cui si deriva una stima migliorata per la frequenza di precessione del corpo:

$$\dot{\varphi}_2'' = \frac{\partial H''}{\partial I_2''} = -\varepsilon \frac{I_2''}{I_1''^2} + \varepsilon \frac{6I_2''}{I_1''^2} \left(\frac{iz'' w''}{2I_1''} + \frac{z''^2 w''^2}{4I_1''^2} \right) + \varepsilon^2 (4I_2''(I_2''^2 - I_1''^2)) g_1^*(I_1'', iz'' w'') + o(\varepsilon^4)$$

Capitolo 3

Risultati numerici per il modello classico di precessione

Dopo aver definito in modo rigoroso il sistema hamiltoniano del modello classico di precessione, si impostano le equazioni del moto e si attribuiscono dei dati iniziali, definendo un problema di Cauchy. Successivamente si sostituiscono i parametri che compaiono con dei dati congrui con la Terra e si mettono in evidenza le influenze di Sole e Luna su frequenza e periodo del moto di precessione degli equinozi terrestri. Si riporta qualche osservazione sulle soluzioni delle equazioni del moto, ottenute tramite un'integrazione numerica del problema di Cauchy, confrontandole con un'approssimazione numerica delle soluzioni delle equazioni del moto del sistema dopo aver applicato il primo passo perturbativo. In conclusione si riporta, con qualche risultato sperimentale, l'effetto stabilizzante che un dato iniziale vicino alle rotazioni giroscopiche del corpo ha sulle soluzioni delle equazioni del moto.

3.1 Il problema di Cauchy associato al modello classico della precessione

Si osserva che, come anticipato nella prima sezione, risulta conveniente studiare le equazioni di Hamilton del modello classico di precessione dopo aver reintrodotta le coordinate cartesiane (ξ, η) definite in (1.4). Queste risultano più adatte poiché, volendo ricavare numericamente le soluzioni delle equazioni del moto, mantenendo le coordinate di Birkhoff si otterrebbero delle approssimazioni complesse delle funzioni che risulterebbero scomode nell'interpretazione fisica dei risultati.

Pertanto in questo capitolo si sfrutteranno le rappresentazioni delle funzioni H , χ riportate rispettivamente in (1.27) e (2.8) e della trasformazione (2.2) per trattare i risultati ottenuti con la teoria perturbativa.

Si definisce il problema di Cauchy:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_j &= \frac{\partial H}{\partial I_j} & \dot{\xi} &= \frac{\partial H}{\partial \eta} \\ \dot{I}_j &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_j} & \dot{\eta} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi}\end{aligned}$$

con $j \in \{1, 2, 3\}$ e dati iniziali:

$$\begin{aligned}\varphi_1(0) &= 0 & I_1(0) &= 1 \\ \varphi_2(0) &= 0 & I_2(0) &= \cos(\psi_1(0)) \\ \varphi_3(0) &= 0 & I_3(0) &= 0 \\ \xi(0) &= \sqrt{2(1 - \cos(\psi_2(0)))} & \eta(0) &= 0\end{aligned}$$

dove sono denotati gli angoli ψ_1 tra il momento angolare M e il vettore e_3^* e ψ_2 tra il momento angolare M e il vettore e_3 . Sia inoltre i definito come l'angolo tra il vettore e_3 e e_3^* .

Osservazione. Si riporta la formula per la frequenza di precessione (2.11) dopo aver reintrodotta

le variabili reali (ξ, η) :

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_2' &= -\varepsilon \frac{I_2}{I_1^2} + \varepsilon \frac{6I_2}{I_1^2} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{4I_1} - \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2}{16I_1^2} \right) + o(\varepsilon^2) \\ &= -\varepsilon \frac{\cos(\psi_1)}{I_1} + 6\varepsilon \frac{\cos(\psi_1)}{16I_1} (3 - 2\cos(\psi_2) - \cos^2(\psi_2)) + o(\varepsilon^2)\end{aligned}\quad (3.1)$$

3.2 La precessione degli equinozi terrestre

Supponendo che il corpo P identifichi la Terra e il punto O il Sole, si richiamano dalle precedenti sezioni i valori per i parametri $\alpha, \gamma, \Omega, \varepsilon$ dati in (1.28), la definizione del vettore M_0 in (1.29) e siano gli angoli (si veda [5] e [6])

$$i(0) \approx \frac{47\pi}{360} \text{ rad} \quad \hat{\psi} \approx 1.41580 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

Si deduce pertanto

$$\cos(\psi_2(0)) = \frac{M_0 \cdot e_3}{\|M_0\|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{A}{C}\right)^2 \tan^2(\hat{\psi}) + 1}} \approx 1 - 1.00897 \cdot 10^{-12}$$

In particolare si pone $\psi_2(0) \approx 1.42054 \cdot 10^{-6}$ rad e $\psi_1(0) = i(0) + \psi_2(0)$. Si nota come tali risultati suggeriscono di poter approssimare il sistema terrestre con uno in cui il momento angolare M risulta allineato con l'asse di simmetria e_3 . Tale approssimazione sarà applicata prima di riportare i contributi di Sole e Luna alla frequenza di precessione degli equinozi terrestri.

Si riporta quindi il dato iniziale della frequenza di precessione terrestre dovuta al Sole ottenuta dalla formula (3.1):

$$v_s := \dot{\varphi}_2'(0) \approx -1.26113 \cdot 10^{-5} \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{anno}}$$

che corrisponde ad un periodo di circa 79294 anni. Tale valore risulta molto diverso dal valore ottenuto sperimentalmente, indicando apparentemente una non validità del modello proposto. In effetti, per ottenere un valore realistico per la frequenza di precessione è necessario considerare anche il contributo ad essa dovuto all'attrazione gravitazionale da parte della Luna.

Supponendo quindi che il punto O identifichi la Luna, si introducono i valori dei parametri dati in (1.30), siano inoltre (si veda [8] per l'angolo i)

$$i(0) \approx \frac{41\pi}{400} \text{ rad}, \quad \psi_2(0) \approx 0, \quad \psi_1(0) = i(0) + \psi_2(0)$$

Analogamente al caso solare si riporta il dato iniziale della frequenza di precessione dovuta alla Luna:

$$v_l := \dot{\varphi}_2'(0) \approx -2.86501 \cdot 10^{-5} \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{anno}}$$

che corrisponde ad un periodo di circa 34903 anni.

Dal momento che l'hamiltoniana del problema che include sia l'interazione con il Sole che quella della Luna presenta i potenziali associati a tali interazioni in forma additiva, le frequenze di precessione calcolate sopra andranno sommate a loro volta. Si ottiene pertanto la frequenza di precessione dovuta all'attrazione gravitazionale di Sole e Luna:

$$v_{ls} \approx -4.12623 \cdot 10^{-5} \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{anno}}$$

che corrisponde ad un periodo di circa 24235 anni, risultato corretto entro il 6% rispetto al periodo osservato sperimentalmente di circa 25772 anni. In particolare si nota che la frequenza totale è negativa, che indica una precessione retrograda dell'asse terrestre.

Si descrivono ora alcune soluzioni del modello classico della precessione ottenute mediante il calcolo numerico. Si svolge pertanto l'integrazione numerica del sistema Terra-Sole (in cui tutti i valori numerici sono stati trattati in doppia precisione) tramite un algoritmo Runge-Kutta di ordine 6 con passo di integrazione costante, riportando le soluzioni approssimate delle variabili (I, φ, ξ, η) . Un test tradizionale sulla bontà dell'integrazione numerica consiste nel verificare la

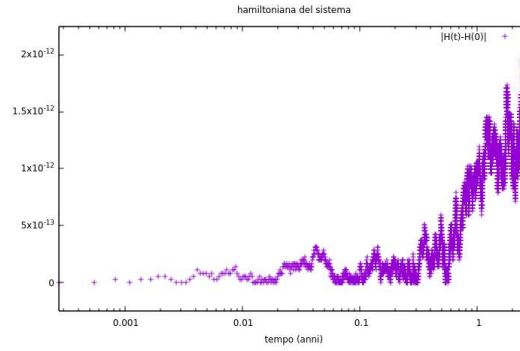


Figura 3.1: Si riporta il modulo della differenza tra l'hamiltoniana valutata lungo le soluzioni approssimate numericamente e la stessa valutata sul dato iniziale del sistema.

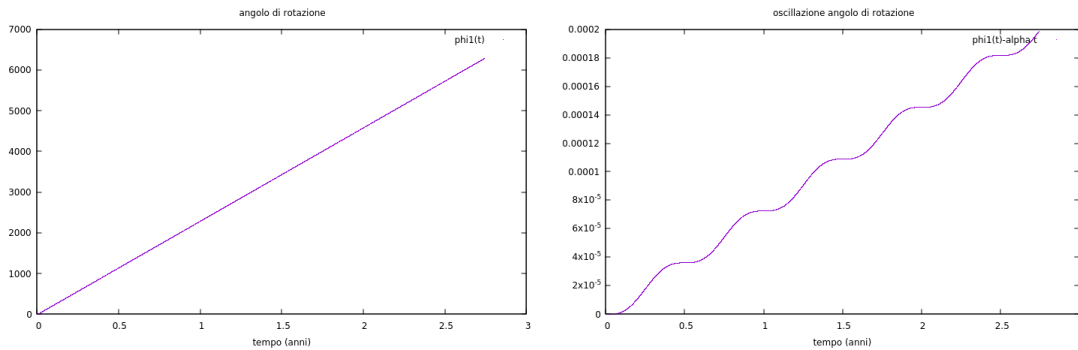


Figura 3.2: A sinistra l'andamento dell'angolo di rotazione terrestre φ_1 nel sistema iniziale, mentre a destra la differenza $\varphi_1(t) - \alpha t$.

variazione dell'hamiltoniana ottenuta per la soluzione numerica, dal momento che per le soluzioni esatte tale variazione deve essere nulla. Si riporta pertanto, nella Figura 3.1 la variazione

$$|H(I(t), \varphi(t), \xi(t), \eta(t)) - H(I(0), \varphi(0), \xi(0), \eta(0))|$$

che rappresenta qualitativamente una stima dell'entità dell'errore ottenuto nell'approssimazione delle soluzioni del sistema. Come tipico per algoritmi Runge-Kutta, l'errore sull'hamiltoniana cresce al crescere del tempo di integrazione. Questo significa che per tempi di integrazione molto più lunghi di quello considerato è necessario considerare algoritmi symplettici, che non sono caratterizzati da tale crescita sistematica. Tuttavia, per i tempi necessari per misurare il fenomeno della precessione degli equinozi tale errore è del tutto accettabile, e compatibile con un'esecuzione dell'algoritmo in doppia precisione.

Le Figure 3.2 descrivono l'andamento dell'angolo di rotazione terrestre φ_1 che, come ci si aspettava, ha un andamento simile alla retta passante per l'origine, di direzione α . Inoltre sono messe in evidenza la variazione della soluzione rispetto alla retta citata.

Le Figure 3.3 mettono in evidenza l'andamento delle variabili I_1, I_2 su tempi brevi, confrontandoli con l'andamento delle nuove variabili I'_1, I'_2 . Mentre le Figure 3.4 descrivono l'orbita relativa al dato iniziale posto delle variabili coniugate (ξ, η) . Si osserva come l'implementazione di un passo perturbativo riduce l'oscillazione delle variabili I_1, I_2 e stabilizza notevolmente l'orbita di (ξ, η) .

Infine la Figura 3.5 mette in evidenza l'andamento dell'angolo di precessione φ_2 riportando anche la sua derivata, prima e dopo l'applicazione di un passo perturbativo, osservando quindi una soluzione più vicina ad una retta, mostrando come le oscillazioni della derivata si riducono di molto rispetto alla soluzione originale.

3.3 Esperimenti numerici con dati iniziali fittizi

Si riportano in questa sezione alcuni risultati numerici ottenuti dall'integrazione numerica delle equazioni del moto legate al modello classico di precessione con dati iniziali fittizi, con cui si vuole riscontrare l'effetto stabilizzante che si ottiene quando il momento angolare iniziale M_0 risulta vicino all'asse di simmetria del corpo P (effetto trattato in generale in [2]).

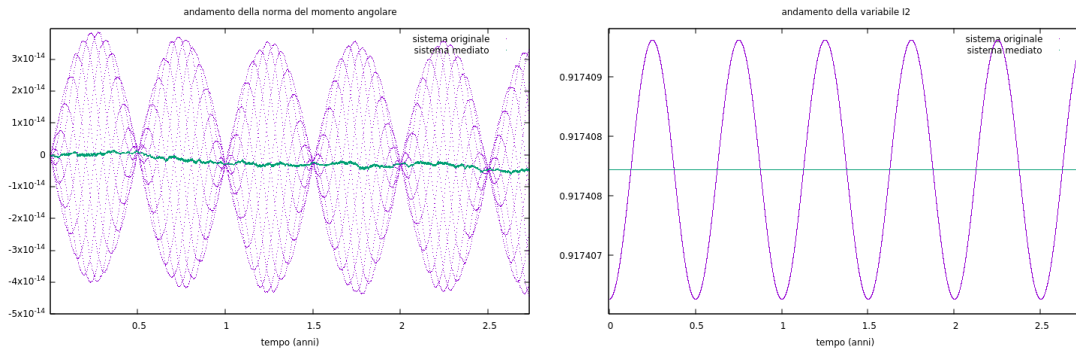


Figura 3.3: A sinistra l'andamento della norma del momento angolare terrestre messo in evidenza dalla differenza $I_1(t) - I_1(0)$ nel sistema originale (in viola) e da $I_1'(t) - I_1'(0)$ nel sistema dopo aver applicato un passo perturbativo (in verde), mentre a destra l'andamento della variabile I_2 nei due casi già citati.

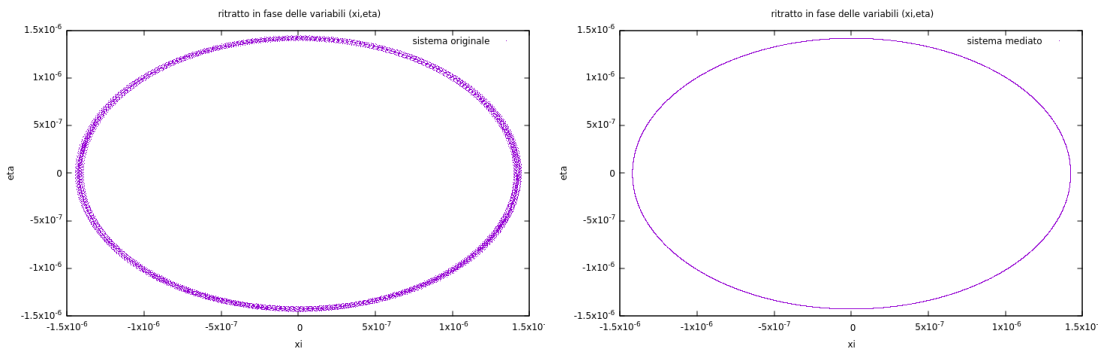


Figura 3.4: A sinistra il ritratto in fase relativo alle variabili coniugate (ξ, η) relativo al sistema iniziale, mentre a destra lo stesso ritratto in fase relativo al sistema dopo aver applicato il primo passo perturbativo.

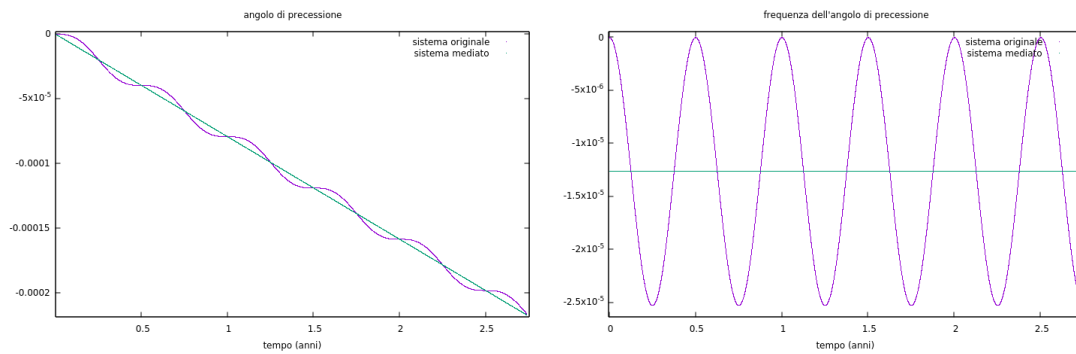


Figura 3.5: A sinistra l'andamento dell'angolo di precessione terrestre φ_2 nel sistema iniziale (in viola) e nel sistema dopo aver applicato un passo perturbativo (in verde), mentre a destra l'andamento della frequenza dello stesso angolo nei due casi già citati.

Analogamente a quanto posto per il caso terrestre si riscalano le costanti fisiche ponendo: la massa del punto O , $m_O = 1$; la distanza tra il corpo P ed il punto O , $a = 1$; la costante di gravitazione universale, $\mathcal{G} = 1$.

Inoltre si assume la geometria del corpo P simile a quella terrestre ed il moto di rotazione attorno al proprio asse molto più rapido di quello di rivoluzione attorno al punto O . Si assumono quindi i parametri:

$$\alpha = 10^2, \quad \beta = 10^{-3}, \quad \gamma = 10^{-1}, \quad \Omega = 1, \quad \varepsilon = 1.5 \cdot 10^{-5}$$

Si richiamano la funzione di Hamilton H del sistema in termini delle variabili (I, φ, ξ, η) , date in (1.4), descritta in (1.27) e il problema di Cauchy generato dalle equazioni di Hamilton associate ad H , descritto in generale nella sezione 3.1.

Innanzitutto si studia il sistema per un dato iniziale giroscopico assumendo i tre angoli:

$$i(0) = \frac{\pi}{6}, \quad \psi_2(0) = 0, \quad \psi_1(0) = i(0) + \psi_2(0)$$

che corrispondono ad un momento angolare iniziale del corpo, M_0 , che risulta perfettamente allineato con il vettore e_3 del riferimento solidale \mathcal{E} .

Successivamente si considera lo stesso sistema descritto precedentemente con un dato iniziale ben distante da uno giroscopico ponendo quindi i valori per gli angoli che determinano i valori iniziali delle variabili:

$$i(0) = \frac{\pi}{6}, \quad \psi_2(0) = \frac{\pi}{6}, \quad \psi_1(0) = i(0) + \psi_2(0)$$

in questo caso difatti il vettore M_0 risulta disallineato in modo rilevante dall'asse e_3 del riferimento solidale al corpo.

Si svolge l'integrazione numerica (imponendo ai valori numerici trattati la doppia precisione) del sistema di equazioni differenziali con il medesimo algoritmo Runge-Kutta di ordine 6 a passo di integrazione costante sfruttato in precedenza e si riportano nelle seguenti figure gli andamenti di alcune delle soluzioni delle equazioni del moto dei due casi trattati a confronto, precedute dal test sulla variazione dell'hamiltoniana ottenuta per le soluzioni numeriche. La Figura 3.6 rappresenta una stima dell'entità dell'errore commesso, che risulta compatibile con l'errore dovuto alla doppia precisione. Per evidenziare la migliore stabilità dell'andamento di un moto, dovuto alla vicinanza alle rotazioni giroscopiche, tale errore è completamente accettabile.

Un primo caso di stabilizzazione si osserva nelle Figure 3.7 dove un dato iniziale distante dalle rotazioni giroscopiche provoca un'oscillazione della norma del momento angolare rispetto ad un dato iniziale giroscopico in cui, nel tempo riportato, la norma del momento angolare rimane costante. Ciò è dovuto al fatto che quanto più il dato iniziale è vicino alle rotazioni giroscopiche del corpo, meno la variabile I_1 differisce dalla funzione

$$\mathcal{F} = I_1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}$$

la quale è uno degli integrali primi del sistema.

Un secondo caso di stabilizzazione delle soluzioni si osserva nelle Figure 3.8 e 3.9, dove si nota come le soluzioni nei due casi dati condividono un andamento approssimativamente simile, con la sostanziale differenza che le variabili legate ad un dato iniziale non giroscopico risultano composte da un insieme di molteplici oscillazioni più piccole lungo tutta l'evoluzione della soluzione.

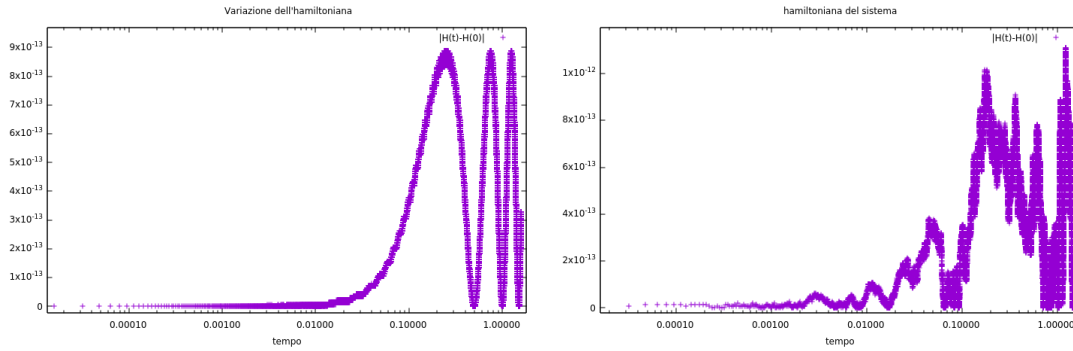


Figura 3.6: Si riporta il modulo della differenza tra l'hamiltoniana valutata lungo le soluzioni approssimate numericamente e la stessa valutata sul dato iniziale del sistema. A sinistra si rappresenta il dato iniziale giroscopico, a destra il dato iniziale distante dalle rotazioni giroscopiche.

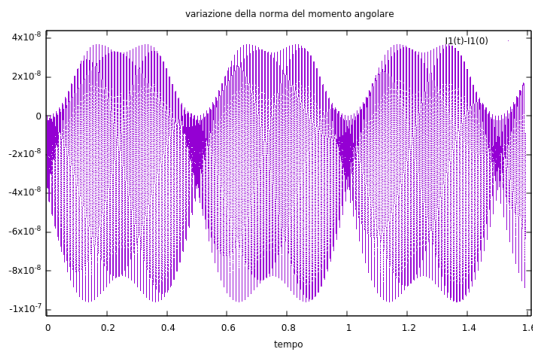


Figura 3.7: Si riporta l'andamento della variabile I_1 con un dato iniziale distante da uno giroscopico.

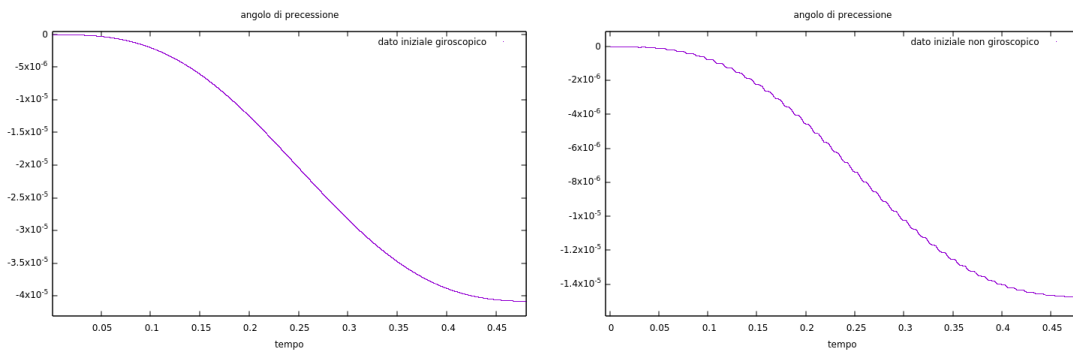


Figura 3.8: si riporta l'andamento dell'angolo di precessione φ_2 con un dato iniziale giroscopico (a sinistra) e uno distante da un dato giroscopico (a destra).

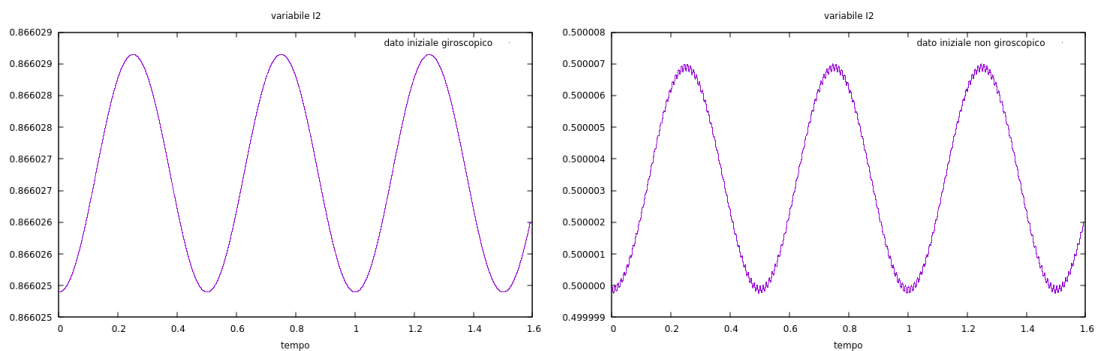


Figura 3.9: si riporta l'andamento della variabile I_2 con un dato iniziale giroscopico (a sinistra) e uno distante da un dato giroscopico (a destra).

Bibliografia

- [1] Benettin, G., Fassò, F., Guzzo, M.: *Fast rotations of the rigid body: a study by Hamiltonian perturbation theory. Part II: Gyroscopic rotations*, in “*Nonlinearity*”, 10, 1695-1717 (1997)
- [2] Benettin, G., Fassò, F., Guzzo, M.: *Long Term Stability of Proper Rotation of the Perturbed Euler Rigid Body*, in “*Communications in Mathematical Physics*”, 250, 133–160 (2004)
- [3] Benettin, G., Guzzo, M., Marini, V.: *Adiabtic chaos in the spin-orbit problem*, in “*Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*”, 101:203–224 (2008)
- [4] Guzzo, M.: *Meccanica Analitica*, Padova (2021)
- [5] Celletti, A.: *Esercizi e complementi di Meccanica Razionale, Applicazione alla Meccanica Celeste*, Roma, Aracne editrice (2003), II
- [6] *Chandler Wobble*, in *Wikipedia*, (ultima modifica 08/2022), https://en.wikipedia.org/wiki/Chandler_wobble
- [7] Archinal, B.A. et al.: *Report of the IAU/IAG Working Group on cartographic coordinates and rotational elements: 2015*, in “*Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*”, 130:22 (2018)
- [8] *Planetary Satellite Mean Elements*, in *jpl.nasa.gov*, <https://ssd.jpl.nasa.gov/sats/elem/>
- [9] *Planetary Physical Parameters*, in *jpl.nasa.gov*, <https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/phys-par.html>