



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Misure “quantum non-demolition”

Relatore

Prof. PIERALBERTO MARCHETTI

Laureando

MICHELE CAPPELLESSO

Anno Accademico 2018/2019



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iv</b>
<b>1 Concetti generali</b>	<b>1</b>
1.1 Lo Standard Quantum Limit . . . . .	1
1.2 Misure non-ortogonali . . . . .	2
1.3 Misure indirette . . . . .	3
1.4 Criteri . . . . .	5
1.5 La sonda ponderomotrice . . . . .	5
<b>2 Misure QND in ottica quantistica</b>	<b>7</b>
2.1 Criteri . . . . .	7
2.2 Onde non stazionarie . . . . .	11
2.3 Energia di un risonatore . . . . .	12
2.4 Stati anticorrelati in frequenza . . . . .	13
<b>3 Misure QND e informazione quantistica</b>	<b>14</b>
3.1 Criteri . . . . .	14
3.2 Il gate CNOT . . . . .	15
3.3 Lettura QND di uno spin-qubit . . . . .	16

# Introduzione

Negli anni '70 venne introdotto da Braginsky, Thorne, Unruh e Caves il concetto di misure "quantum non-demolition" (abbreviato QND), che indica un insieme di misure quantistiche in cui l'osservabile misurata viene disturbata il meno possibile: più precisamente, si cerca di fare in modo che l'indeterminazione di tale misura non aumenti a causa della misura stessa, in modo che misure ripetute diano lo stesso risultato, o più in generale che tale risultato sia predicibile. Come vedremo più avanti, questo permette di superare i cosiddetti standard quantum limit (SQL), ovvero dei limiti alla precisione della misura dovuti a effetti di natura quantistica, in particolare al principio di indeterminazione di Heisenberg. Lo studio di questo tipo di misure, infatti, inizialmente era motivato dagli esperimenti di rivelazione di onde gravitazionali, come ad esempio le barre di Weber, che richiedevano delle precisioni così elevate da non poter essere raggiunte non solo per ragioni pratiche ma addirittura, per alcune misure, nemmeno in linea di principio. Successivamente lo studio di questo tipo di esperimenti venne abbandonato, ma le misure quantum non-demolition trovarono applicazione nel campo degli esperimenti di ottica e informazione quantistica, in cui, a differenza della maggior parte degli esperimenti condotti in precedenza, l'oggetto dell'esperimento non veniva distrutto (come avviene spesso in fisica delle particelle) ma viene invece misurato ripetutamente, ed è quindi necessario porre particolare attenzione alle modalità di misura.

L'idea di tali esperimenti è di fare in modo che la "back-action", ovvero la perturbazione causata dalla misura stessa, vada a influire su altre osservabili a cui non si è interessati (solitamente quelle canonicamente coniugate a quella misurata). Perché questo avvenga, è quindi innanzitutto necessario che il sistema osservato interagisca il meno possibile con l'esterno, e che l'unica interazione sia quella minima necessaria per estrarre l'informazione desiderata. Per questo motivo le misure QND avvengono tramite l'interazione con un altro sistema quantistico, di cui in seguito viene misurata un'osservabile correlata a quella desiderata. Poiché solitamente l'osservabile  $\hat{O}$  del sistema originario è un'integrale del moto, la condizione per tali esperimenti si riduce a  $[\hat{H}_{int}, \hat{O}] = 0$ , cioè al fatto che  $\hat{O}$  non venga modificata dall'interazione col sistema ausiliario. È da notare che l'unico caso in cui una misura QND non modifica lo stato è quando questo è un autostato dell'osservabile misurata. Ciò che in generale non viene disturbato è invece l'evoluzione di tale osservabile.

In questo modo viene garantita la possibilità di monitorare le variazioni sul sistema dovute a forze esterne, ad esempio osservando l'aumento di energia un oscillatore armonico, o l'avvenimento di uno "spin-flip" di una particella. Un'altra possibilità è quella di produrre i cosiddetti "squeezed states", in cui la fluttuazione di un osservabile è molto minore rispetto al valore standard, e nel complesso il principio di indeterminazione rimane saturato.

# Capitolo 1

## Concetti generali

### 1.1 Lo Standard Quantum Limit

Consideriamo il caso semplice di una particella libera di massa  $m$ . Su tale particella vengono effettuate due misure consecutive della posizione, separate tra di loro da un intervallo di tempo  $\tau$ , da cui si può quindi ricavare anche il momento della particella. La prima misura, avendo una precisione finita  $\Delta x_1$ , per il principio di indeterminazione di Heisenberg  $\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$ , produce un'incertezza minima sul momento pari a

$$\Delta P_{add} = \frac{\hbar}{2 \Delta x_1}. \quad (1.1)$$

A sua volta questa perturbazione produrrà quindi un'incertezza minima aggiuntiva nella posizione

$$\Delta X_{add} = \frac{\hbar \tau}{2 m \Delta x_1}. \quad (1.2)$$

Dalle due misure di posizione si può ricavare il momento della particella  $\Delta P = m \frac{x_2 - x_1}{\tau}$ , con una incertezza che sarà

$$\Delta P = \frac{m}{\tau} \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_{add})^2}. \quad (1.3)$$

Sostituendo (1.2) in (1.3), minimizzando in  $\Delta x_1$ , e assumendo nel limite  $\Delta x_2$  nulla, si ha per l'incertezza minima sul momento

$$\Delta P \geq \sqrt{\frac{\hbar m}{\tau}} \quad (1.4)$$

e tale minimo si ha per

$$\Delta X_{add} = \Delta X_1 = \sqrt{\frac{\hbar \tau}{2m}}. \quad (1.5)$$

Con dimostrazioni più rigorose si ricava che i limiti di precisione per due misure consecutive a distanza temporale  $\tau$  per spostamento e momento di una particella libera di massa  $m$  sono:

$$\Delta X_{SQL} = \sqrt{\frac{\hbar \tau}{2m}} \quad \Delta P_{SQL} = \sqrt{\frac{\hbar m}{2\tau}}, \quad (1.6)$$

i quali saturano il principio di indeterminazione di Heisenberg come uguaglianza. Tali limiti sono i cosiddetti "standard quantum limit" per la posizione e il momento di una particella libera con massa.

Esistono poi altri esempi di standard quantum limit: per le quadrature di un oscillatore armonico si ha  $\Delta X_{SQL} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ , dove  $m$  è la massa e  $\omega$  è la frequenza, e per la sua energia  $\Delta E_{SQL} = \sqrt{\hbar E \omega}$ , dove  $E$  è l'energia media dell'oscillatore. È ovvio che in generale queste precisioni possono essere superate, purché rispettino il principio di indeterminazione di Heisenberg, evitando quindi di raccogliere informazioni sull'osservabile coniugata a quella che vogliamo misurare. In particolare queste precisioni possono essere superate in misure singole, in cui non è necessario preoccuparsi degli

effetti della misura sul sistema stesso, ma non in misure consecutive, in cui la misura entra a far parte dell'evoluzione temporale del sistema. Lo studio delle misure "quantum non-demolition" è nato proprio per superare questi limiti di precisione.

## 1.2 Misure non-ortogonali

Come prima cosa è necessario considerare una generalizzazione delle misure ortogonali, che sono definite tramite proiettori. In queste, se lo stato iniziale è definito da una matrice di densità  $\hat{\rho}_{in}$ , lo stato dopo una misura con risultato  $q_j$  è dato da

$$\hat{\rho}(q_j) = \frac{1}{w_j} \hat{E}_j \hat{\rho}_{in} \hat{E}_j, \quad (1.7)$$

dove  $w_j$  è la probabilità di ottenere il valore  $q_j$ , e gli operatori  $\hat{E}_j$  soddisfano le condizioni

$$\sum_j \hat{E}_j = \hat{I} \quad (1.8)$$

$$\hat{E}_j \hat{E}_k = \delta_{jk} \hat{E}_j \quad \forall j, k \quad (1.9)$$

(con  $\hat{I}$  l'operatore identità) ovvero sono un set completo di proiettori. Questo tipo di decomposizioni dell'unità è di carattere discontinuo e può portare a conseguenze peculiari e non realistiche, rendendo necessaria una generalizzazione che rispecchi la precisione limitata di un apparato strumentale realistico e in cui le misure ortogonali sono un caso limite.

A ogni possibile risultato di misura  $\tilde{q}$  associamo un operatore  $\hat{\Pi}(\tilde{q})$  (definito solo formalmente nel caso di spettro continuo) in notazione di Dirac dato da  $|\tilde{q}\rangle \langle \tilde{q}|$ , e imponiamo che tali operatori soddisfino la condizione (adattando la notazione al caso continuo)

$$\int_{\{\tilde{q}\}} \hat{\Pi}(\tilde{q}) d\tilde{q} = \hat{I}, \quad (1.10)$$

necessaria per la conservazione della probabilità, con  $\{\tilde{q}\}$  l'insieme di tutti i possibili valori di  $\tilde{q}$ . La probabilità di ottenere il valore  $\tilde{q}$  (o meglio la densità di probabilità nel caso di spettro continuo), è data come nel caso classico da

$$w(\tilde{q}) = \text{Tr}(\hat{\Pi}(\tilde{q}) \hat{\rho}_{in}). \quad (1.11)$$

L'approssimazione compiuta dall'apparato sperimentale nel processo di misura è rappresentata da un set di probabilità condizionate  $w(\tilde{q}|q)$ , che esprimono la probabilità di ottenere dalla misura il valore  $\tilde{q}$  quando la misura dell'osservabile dovrebbe dare come valore  $q$ . Definiamo allora gli operatori

$$\hat{W}(\tilde{q}) \equiv \int_{\{q\}} |q\rangle w(\tilde{q}|q) \langle q| dq \quad (1.12)$$

con  $\{q\}$  l'insieme di tutti i possibili valori di  $q$ , e la loro "radice quadrata"

$$\hat{W}^{1/2}(\tilde{q}) \equiv \int_{\{q\}} |q\rangle w^{1/2}(\tilde{q}|q) \langle q| dq. \quad (1.13)$$

Questi operatori non sono più dei proiettori, infatti i loro quadrati  $\hat{W}(\tilde{q}) \hat{W}(\tilde{q})$  e  $\hat{W}^{1/2}(\tilde{q}) \hat{W}^{1/2}(\tilde{q})$  non sono definiti. Notiamo, però, che dalla definizione (1.12) si ricavano direttamente le seguenti proprietà di completezza

$$\int_{\{\tilde{q}\}} \hat{W}(\tilde{q}) d\tilde{q} = \hat{I} \quad (1.14)$$

e di commutatività

$$[\hat{W}(\tilde{q}), \hat{W}(\tilde{q}')] = 0. \quad (1.15)$$

Possiamo quindi riscrivere l'equazione (1.11), infatti  $w(\tilde{q}) = \int_{\{q\}} w(\tilde{q}|q) \langle q | \hat{\rho}_{in} | q \rangle$ , quindi

$$w(\tilde{q}) = \text{Tr}(\hat{W}(\tilde{q}) \hat{\rho}_{in}) \quad (1.16)$$

Per analogia con l'equazione (1.7) (nel prossimo paragrafo sarà dimostrato), supponiamo che lo stato finale abbia la forma

$$\hat{\rho}(\tilde{q}) = \frac{1}{w(\tilde{q})} \hat{\Omega}(\tilde{q}) \hat{\rho}_{in} \hat{\Omega}^\dagger(\tilde{q}), \quad (1.17)$$

con  $\hat{\Omega}(\tilde{q})$  operatore limitato, e imponiamo la normalizzazione  $\text{Tr}(\hat{\rho}(\tilde{q})) = 1$ , ottenendo

$$\frac{1}{w(\tilde{q})} \text{Tr}(\hat{\Omega}(\tilde{q}) \hat{\rho}_{in} \hat{\Omega}^\dagger(\tilde{q})) = \frac{1}{w(\tilde{q})} \text{Tr}(\hat{\Omega}^\dagger(\tilde{q}) \hat{\Omega}(\tilde{q}) \hat{\rho}_{in}) = 1, \quad (1.18)$$

dove si è usata la ciclicità della traccia, e quindi

$$\text{Tr}(\hat{\Omega}^\dagger(\tilde{q}) \hat{\Omega}(\tilde{q}) \hat{\rho}_{in}) = w(\tilde{q}) \quad (1.19)$$

Confrontando questo risultato con (1.16), ed essendo  $\hat{\rho}_{in}$  generica, l'operatore  $\hat{\Omega}(\tilde{q})$  deve soddisfare

$$\hat{\Omega}^\dagger(\tilde{q}) \hat{\Omega}(\tilde{q}) = \hat{W}(\tilde{q}), \quad (1.20)$$

e possiamo quindi, tramite la decomposizione polare, rappresentare  $\hat{\Omega}(\tilde{q})$  nella forma

$$\hat{\Omega}(\tilde{q}) = \hat{U}(\tilde{q}) \hat{W}^{1/2}(\tilde{q}), \quad (1.21)$$

dove  $\hat{U}(\tilde{q})$  dovrebbe essere in generale isometrico, ma come vedremo in seguito per i casi di nostro interesse sarà un operatore unitario. La trasformazione dallo stato iniziale a quello finale è allora decomponibile in due passaggi:

1. Lo stato passa da  $\hat{\rho}_{in}$  a

$$\hat{\rho}'(\tilde{q}) = \frac{1}{w(\tilde{q})} \hat{W}^{1/2} \hat{\rho}_{in} \hat{W}^{1/2} \quad (1.22)$$

2. Lo stato subisce una "evoluzione unitaria"  $\hat{U}(\tilde{q})$ :

$$\hat{\rho}(\tilde{q}) = \hat{U}(\tilde{q}) \hat{\rho}'(\tilde{q}) \hat{U}(\tilde{q})^\dagger \quad (1.23)$$

L'operatore  $\hat{\Omega}(\tilde{q})$  è quindi dato da

$$\hat{\Omega}(\tilde{q}) = \hat{U}(\tilde{q}) \hat{W}^{1/2}(\tilde{q}). \quad (1.24)$$

Osserviamo che il primo passaggio non modifica l'osservabile misurata, poiché per la definizione (1.13) l'operatore  $\hat{W}^{1/2}$  commuta con l'osservabile  $\hat{q}$ . Il secondo step, invece, non comporta nessuna estrazione di informazione, ma rappresenta una "evoluzione unitaria" che dipende dalla struttura dell'apparato di misura. Possiamo allora dare come prima definizione di misura "quantum non-demolition" la seguente condizione:

$$[\hat{U}(\tilde{q}), \hat{q}] = 0. \quad (1.25)$$

### 1.3 Misure indirette

Il formalismo introdotto nel paragrafo precedente si applica in particolare a un tipo di misure adatto ad essere "quantum non-demolition": le misure indirette. Con questo termine si intende l'insieme dei processi di misura in cui l'informazione non viene estratta direttamente dall'oggetto misurato tramite un apparato classico (come ad esempio nell'assorbimento di fotoni in un rivelatore) ma si utilizza invece una "sonda" quantistica, che estrae l'informazione dall'oggetto per poi essere misurata con precisione dall'apparato strumentale. Il processo di una misura indiretta è quindi diviso in due step: nel primo

l'oggetto della misura interagisce con la sonda, precedentemente preparata in un determinato stato quantistico, tramite un'evoluzione unitaria  $\hat{U}$ , e nel secondo viene misurata un'opportuna osservabile della sonda tramite un apparato "classico", in cui avviene il cosiddetto "collasso della funzione d'onda".

Dopo il primo step, quindi, il sistema quantistico si trova nello stato

$$\hat{U}(\hat{\rho}_{obj} \otimes \hat{\rho}_{probe})\hat{U}^\dagger \quad (1.26)$$

essendo  $\hat{\rho}_{obj}$  e  $\hat{\rho}_{probe}$  gli stati iniziali rispettivamente dell'oggetto e della sonda (d'ora in poi il simbolo di prodotto tensore  $\otimes$  sarà omissivo). Indichiamo con  $\tilde{q}$  il risultato del processo di misura, alla fine del quale la sonda si trova nell'autostato  $|\tilde{q}\rangle$ . La distribuzione di probabilità per tale risultato è quindi data da

$$\begin{aligned} w(\tilde{q}) &= \text{Tr}_{probe}(|\tilde{q}\rangle \langle \tilde{q}| \text{Tr}_{obj}(\hat{U} \hat{\rho}_{obj} \hat{\rho}_{probe} \hat{U}^\dagger)) \\ &= \text{Tr}(\hat{U}^\dagger |\tilde{q}\rangle \langle \tilde{q}| \hat{U} \hat{\rho}_{obj} \hat{\rho}_{probe}) \\ &= \text{Tr}_{obj}(\hat{\Pi}(\tilde{q}) \hat{\rho}_{obj}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

con

$$\hat{\Pi}(\tilde{q}) \equiv \text{Tr}_{probe}(\hat{U}^\dagger |\tilde{q}\rangle \langle \tilde{q}| \hat{U} \hat{\rho}_{probe}), \quad (1.28)$$

dove nel primo passaggio è stata usata la ciclicità della traccia, e  $\text{Tr}_{obj}$  e  $\text{Tr}_{probe}$  indicano le tracce parziali sugli spazi di Hilbert del sistema misurato e della sonda, rispettivamente. Lo stato finale è dato da

$$\hat{\rho}(\tilde{q}) = \frac{1}{w(\tilde{q})} \langle \tilde{q}| \hat{U} \hat{\rho}_{obj} \hat{\rho}_{probe} \hat{U}^\dagger |\tilde{q}\rangle. \quad (1.29)$$

Scrivendo esplicitamente lo stato iniziale della sonda come

$$\hat{\rho}_{probe} = \sum_j |\psi_j\rangle w_j \langle \psi_j| \quad (1.30)$$

e sostituendo nella (1.29) lo stato finale si può riscrivere come

$$\hat{\rho}(\tilde{q}) = \frac{1}{w(\tilde{q})} \sum_j w_j \hat{\Omega}_j(\tilde{q}) \hat{\rho}_{obj} \hat{\Omega}_j^\dagger(\tilde{q}) \quad (1.31)$$

con

$$\hat{\Omega}_j(\tilde{q}) \equiv \langle \tilde{q}| \hat{U} |\psi_j\rangle. \quad (1.32)$$

Se assumiamo che inizialmente la sonda si trovi in uno stato puro  $|\psi\rangle$  anziché uno stato misto (il che aggiungerebbe ulteriori incertezze non fondamentali al risultato finale della misura), lo stato finale è quindi

$$\hat{\rho}(\tilde{q}) = \frac{1}{w(\tilde{q})} \hat{\Omega}(\tilde{q}) \hat{\rho}_{obj} \hat{\Omega}^\dagger(\tilde{q}), \quad (1.33)$$

ritroviamo cioè l'espressione (1.17) del paragrafo precedente.

La condizione per le misure "quantum non-demolition" è quindi

$$[\hat{q}, \hat{\Omega}(\tilde{q})] = 0, \quad (1.34)$$

che sostituendo l'espressione esplicita di  $\hat{\Omega}(\tilde{q})$  si traduce in

$$\langle \tilde{q}| [\hat{q}, \hat{U}] |\psi\rangle = 0. \quad (1.35)$$

Poiché tale condizione deve essere soddisfatta per ogni possibile valore di  $\tilde{q}$ , possiamo scrivere semplicemente

$$[\hat{q}, \hat{U}] |\psi\rangle = 0, \quad (1.36)$$



e moltiplicando a sinistra per l'operatore  $\hat{U}^\dagger$  otteniamo

$$(\hat{U}^\dagger \hat{q} \hat{U} - \hat{q}) |\psi\rangle = 0. \quad (1.37)$$

Notiamo che  $\hat{U}^\dagger \hat{q} \hat{U}$  è esattamente l'evoluzione dell'osservabile  $\hat{q}$  nella visuale di Heisenberg.

La condizione per una misura QND può quindi essere soddisfatta in due modi:

- Facendo in modo che alla fine dell'evoluzione unitaria l'osservabile  $\hat{q}$  ritorni al valore iniziale
- Facendo in modo che lo stato della sonda  $|\psi\rangle$  sia un autostato con autovalore nullo della differenza  $\hat{U}^\dagger \hat{q} \hat{U} - \hat{q}$ .

Solitamente per ragioni pratiche viene considerato solo il primo metodo come criterio per le misure QND, e anzi, per soddisfarlo si fa in modo che l'osservabile  $\hat{q}$  sia proprio un integrale del moto, in modo che la misura sia QND a prescindere dallo stato iniziale della sonda. La condizione si traduce quindi nell'annullarsi del commutatore tra l'osservabile e l'Hamiltoniana di interazione con la sonda:

$$[\hat{O}, \hat{H}_{int}] = 0 \quad (1.38)$$

## 1.4 Criteri

In generale, stabilire se una determinata misura sia di tipo QND è un compito difficile. In particolare la descrizione matematica dei paragrafi precedenti è utile per dare una definizione precisa, ma il calcolo esplicito dell'evoluzione temporale del sistema è solitamente complicato. Per questo motivo si sceglie come osservabile un integrale del moto, e ci si affida a dei criteri generali piuttosto che a condizioni matematiche rigorose. Possiamo infatti riassumere le caratteristiche delle misure QND nelle seguenti tre condizioni:

- Non esiste nessun limite fondamentale alla precisione della misura.
- Non avviene nessuna perturbazione dell'osservabile misurata.
- L'osservabile canonicamente coniugata viene perturbata in accordo con il principio di indeterminazione di Heisenberg.

La seconda condizione, in particolare, è quella più importante, ed è il motivo per cui queste misure vengono dette "non-demolition".

## 1.5 La sonda ponderomotrice

Il primo esempio di misura QND che discuteremo è un esperimento più mentale che pratico a causa della sua difficoltà di esecuzione, ma è molto utile per la sua semplicità come modello di misura "quantum non-demolition". L'esperimento consiste in un risonatore elettromagnetico con frequenza  $\omega$  e di cui una delle pareti è mobile: dalla forza esercitata su tale parete si può dedurre la pressione elettromagnetica e quindi l'energia del risonatore. Se l'inerzia della parete è sufficientemente grande, la fase dell'oscillatore è ininfluente. La forza esercitata sulla parete è quindi proporzionale all'energia contenuta nella cavità, con costante di proporzionalità  $\frac{1}{d}$  ( $d$  ha le dimensioni di una lunghezza):

$$F = \frac{E}{d} \quad (1.39)$$

Dopo il tempo  $\tau$  (il tempo di misura) il momento della parete sarà cambiato di

$$\delta P = \frac{E \tau}{d}. \quad (1.40)$$

Se, quindi,  $\Delta P$  è l'incertezza iniziale sul momento, l'energia della cavità potrà essere misurata con una precisione minima

$$\Delta E = \frac{\Delta P d}{\tau}. \quad (1.41)$$

L'incertezza iniziale  $\Delta X$  sulla posizione della parete produce invece un'incertezza  $\Delta\omega$  sulla frequenza  $\omega$  dell'onda elettromagnetica

$$\Delta\omega = \omega \frac{\Delta X}{d} \quad (1.42)$$

e di conseguenza un'incertezza  $\Delta\phi$  sulla fase  $\phi$  di tale onda:

$$\Delta\phi = \omega \tau \frac{\Delta X}{d}. \quad (1.43)$$

Utilizzando le equazioni (1.41) e (1.43), e sostituendole nel principio di indeterminazione  $\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$  otteniamo

$$\Delta E \Delta\phi \geq \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (1.44)$$

ovvero la relazione di indeterminazione tra energia e fase per un oscillatore armonico. Si può dimostrare che, se  $\Delta E_{in}$  è l'incertezza iniziale sull'energia, l'errore minimo sulla misura sarà

$$\Delta E = \sqrt{\frac{\Delta E_{in} \hbar}{\tau}}. \quad (1.45)$$

Se si ripete nuovamente la misura, l'incertezza minima finale sull'energia sarà

$$\Delta E = (\Delta E_{in})^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\hbar}{\tau}\right)^{\frac{3}{4}} \quad (1.46)$$

e di conseguenza con misure ripetute, grazie al fatto che sono di tipo QND, con un numero arbitrariamente grande di misure si può arrivare alla precisione di

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\tau} \quad (1.47)$$

quindi aumentando il tempo di misura si può raggiungere qualsiasi precisione desiderata. Questo esperimento mostra come, in linea di principio, essendo in grado di "ignorare" la fase dell'oscillatore, si può misurare con precisione arbitraria l'energia, che rimane invece costante. Tuttavia mostra anche il tipico problema degli esperimenti QND: è necessario misurare la forza prodotta dalla pressione elettromagnetica generata da pochi quanti di energia, ed è una forza molto debole. In generale, poiché la sonda deve essere un sistema quantistico, e avere un'interazione particolare con il sistema che vogliamo misurare, tale da non perturbare l'osservabile misurata, le forze che entrano in gioco devono essere deboli.

## Capitolo 2

# Misure QND in ottica quantistica

### 2.1 Criteri

Come accennato nell'introduzione, negli anni '80 lo studio delle misure QND si spostò all'applicazione negli esperimenti di ottica quantistica, soprattutto grazie alla qualità delle sorgenti ottiche e dei rivelatori, che permetteva di raggiungere in precisione le incertezze di natura quantistica. In linea di principio, in meccanica quantistica è possibile eseguire delle misure perfettamente "quantum non-demolition", ma nella pratica è necessario tener conto della non idealità degli esperimenti. Per questo motivo nel corso degli anni sono stati sviluppati dei criteri quantitativi per stabilire se tali esperimenti si possano ritenere di tipo QND o meno. Tali criteri sono simili a quelli del paragrafo 1.4, ma sono adattati agli esperimenti di ottica quantistica e di carattere quantitativo, quindi verificabili sperimentalmente. In generale da una "buona" misura quantistica ci possiamo aspettare che abbia le seguenti tre caratteristiche:

- La prima naturalmente è che sia possibile distinguere autovalori diversi dell'osservabile misurata nel caso discreto, mentre nel caso continuo o quasi-continuo si può specificare il livello di precisione richiesto.
- La seconda è che misure immediatamente successive diano lo stesso risultato. Tale caratteristica è comunemente detta "quantum-state preparation" (QSP), poiché un apparato di misura che la soddisfa è quindi in grado di produrre stati ben definiti.
- La terza, infine, è appunto quella "non-demolition", ovvero che l'evoluzione dell'osservabile misurata non sia perturbata in alcun modo dalla misura stessa. Questo ad esempio permette di monitorare l'azione di una forza esterna che agisce sul sistema.

Consideriamo ad esempio il famoso esperimento di Stern-Gerlach, (figura 2.1a) in cui tramite un campo magnetico si cerca di misurare lo spin di una particella. Questa viene deflessa in direzione del campo magnetico e nel verso corrispondente alla proiezione del suo momento di spin lungo tale direzione,  $\hat{J}_z$ , che nel caso dei fermioni vale  $+\hbar/2$  o  $-\hbar/2$ . A questo punto basta mettere uno schermo sensibile all'arrivo della particella per distinguere i due autovalori. La prima caratteristica citata in precedenza è quindi soddisfatta, ma la particella è "distrutta" e non possiamo ripetere misure su di essa. Consideriamo invece una serie di apparati di Stern-Gerlach uno dopo l'altro, ma in modo che le particelle con spin  $-\hbar/2$  vengano bloccate, mentre le altre continuano a passare (filtro di Stern-Gerlach, figura 2.1b)). In questo caso abbiamo un perfetto apparato QSP, poiché le particelle prodotte saranno nello stato  $|+\hbar/2\rangle$ , tuttavia manca ancora la caratteristica "non-demolition", perché tutte le particelle nello stato  $|-\hbar/2\rangle$  vengono appunto demolite. Per ottenere questa proprietà è necessario che la nostra particella interagisca con un'altra particella con un momento magnetico intrinseco (la sonda), in modo da formare un cosiddetto stato "entangled" in cui i momenti delle due particelle sono correlati, poiché l'evoluzione dello stato della sonda durante l'interazione dipende dallo stato della

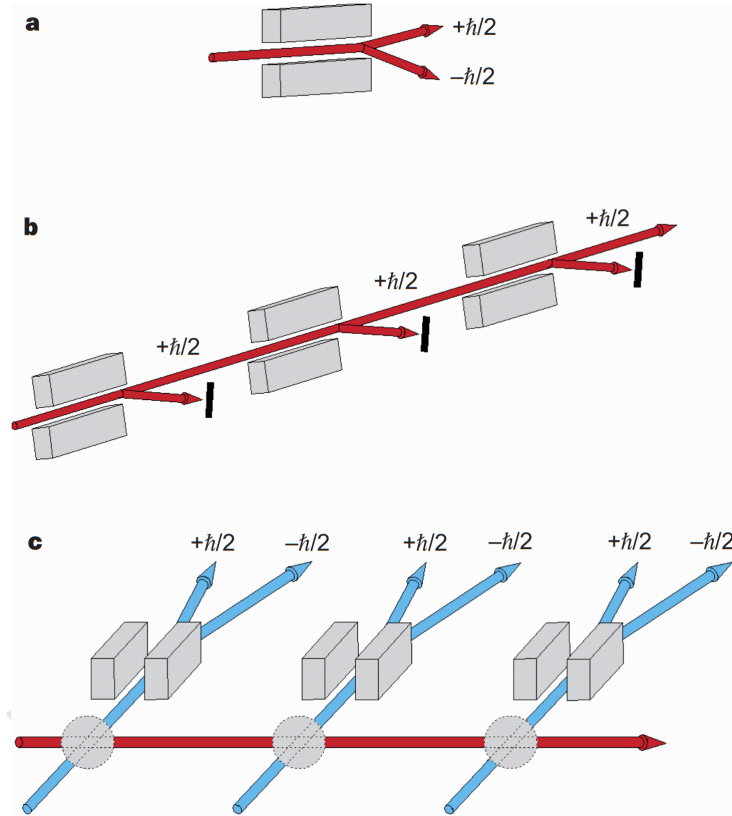


Figura 2.1: Tre versioni dell'esperimento di Stern-Gerlach: semplice (a), QSP (b) e QND (c). Nella prima versione la traiettoria della particella viene semplicemente deviata dal campo magnetico. Nella seconda, i magneti sono disposti in modo che le particelle con spin  $-\hbar/2$  vengano bloccate. Nella terza la particella non incontra magneti, ma lungo la traiettoria interagisce con delle altre particelle che fanno da "sonda" raccogliendo l'informazione sullo spin ed essendo poi misurate con un apparato di Stern-Gerlach classico. Tratta da [2].

particella iniziale (figura 2.1c). Misurando lo spin della sonda possiamo dedurre quello della particella iniziale, senza perturbarne lo stato con delle misure dirette.

Solitamente le due osservabili oggetto di misure QND in ottica quantistica sono l'operatore legato al numero di fotoni  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  ( $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  sono gli operatori di annichilazione e di creazione), e le ampiezze in quadratura del campo elettrico, che definiremo in seguito. Queste due quantità sono entrambe integrali del moto, e dunque buone osservabili QND. Si distinguono, inoltre, due diversi regimi in cui questi esperimenti avvengono, a seconda della quantità di fotoni coinvolti. Nel primo si ha a che fare con pochi quanti di energia, solitamente meno di 10 fotoni. Questi vengono intrappolati in delle cavità ottiche, e il loro numero viene sondato tramite degli atomi di Rydberg. Gli atomi di Rydberg sono atomi in cui un'elettrone si trova in un livello energetico eccitato con un grande numero quantico principale  $n$ : avendo una grande energia, questi elettroni si trovano su orbitali molto ampi, e quindi in una visuale di particella singola quasi tutta la carica del nucleo viene schermata da quella dei restanti elettroni, facendo sì che l'elettrone eccitato abbia livelli simili a quelli dell'atomo di idrogeno. Questi atomi, inizialmente nello stato corrispondente a un livello energetico  $|g\rangle$ , vengono preparati in una sovrapposizione coerente con un altro livello energetico  $|g\rangle + |i\rangle$  tramite un laser in risonanza tra tali livelli. La cavità invece è in risonanza con una transizione ausiliaria tra i livelli  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ . Attraversando la cavità lo stato dell'atomo subisce quindi un cambiamento di fase proporzionale al numero di questi fotoni:  $|\psi_2\rangle = e^{i\phi} |g\rangle + |i\rangle$ . Questa fase può essere misurata, tramite l'interferometria di Ramsey, cioè facendo interagire nuovamente l'atomo con il laser iniziale: se non ha subito nessun cambiamento di fase tornerà allo stato iniziale  $|g\rangle$ , altrimenti avrà una probabilità di trovarsi nello stato  $|i\rangle$ . Se si vuole misurare la presenza di un solo fotone, si può fare in modo che il cambio di fase dello stato sia massimo, altrimenti bastano pochi di questi atomi per far collassare la funzione d'onda in un autostato di  $\hat{N}$ , quindi con un numero di fotoni ben definito. Esistono altri metodi simili, che però utilizzano sempre

degli atomi come sonde quantistiche per misurare il numero di fotoni. Questo tipo di esperimenti si avvicina molto all'idea originale di misura QND dell'energia di un oscillatore armonico.

Il secondo regime, invece, è quello di raggi laser intensi, in cui il numero di fotoni è dell'ordine di  $10^{10}$ , per cui la fluttuazione standard  $\sqrt{N}$  (il cosiddetto limite di shot-noise) è molto inferiore rispetto a  $N$ , contrariamente al regime precedente in cui è invece comparabile. Questo permette di linearizzare le fluttuazioni rispetto al valor medio, per cui al primo ordine possiamo scrivere

$$\delta\hat{N} = \delta(\hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hat{a}^\dagger(\delta\hat{a}) + \hat{a}(\delta\hat{a}^\dagger) = \langle\hat{a}\rangle(\delta\hat{a} + \delta\hat{a}^\dagger) \quad (2.1)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che all'ordine zero possiamo identificare gli operatori con i loro valori medi, e con una scelta opportuna della fase assumere  $\langle\hat{a}^\dagger\rangle = \langle\hat{a}\rangle$ . Definendo l'ampiezza in quadratura  $\delta\hat{X} := \delta\hat{a} + \delta\hat{a}^\dagger$ , otteniamo  $\delta\hat{N} = \langle\hat{a}\rangle\delta\hat{X} = \sqrt{\langle\hat{N}\rangle}\delta\hat{X}$ , quindi in questa approssimazione le fluttuazioni del campo elettrico corrispondono alle fluttuazioni del numero di fotoni, e  $\delta\hat{Y} := -i(\delta\hat{a} - \delta\hat{a}^\dagger)$  corrisponde invece alla fase. Notiamo che con queste definizioni il livello di shot-noise, cioè  $\Delta N \equiv \sqrt{\langle\delta\hat{N}^2\rangle} = \sqrt{\langle\hat{N}\rangle}$ , corrisponde a  $\langle\delta\hat{X}^2\rangle = \frac{\langle\delta\hat{N}^2\rangle}{\langle\hat{N}\rangle} = 1$ .

I tre criteri descritti prima possono ora essere resi quantitativi in diversi modi, e il primo consiste nel considerare i coefficienti di correlazione tra i vari segnali. L'efficienza della misura, infatti, può essere valutata tramite la correlazione tra il segnale osservato e la sonda,

$$C_m^2 = \frac{|\langle\delta\hat{X}_{in} \delta\hat{M}_{out}\rangle_{sim}|^2}{\langle\delta\hat{X}_{in}^2\rangle \langle\delta\hat{M}_{out}^2\rangle}, \quad (2.2)$$

dove  $\delta\hat{X}_{in}$  e  $\delta\hat{M}_{out}$  sono rispettivamente le fluttuazioni del segnale osservato in ingresso e di quello ausiliario, la "sonda", in uscita (vedi figura 2.2) e  $\langle\delta\hat{X}_{in} \delta\hat{M}_{out}\rangle_{sim} := \frac{1}{2}(\langle\delta\hat{X}_{in} \delta\hat{M}_{out}\rangle + \langle\delta\hat{M}_{out} \delta\hat{X}_{in}\rangle)$  (indichiamo con "δM" la quadratura  $\delta\hat{X}$  della sonda per semplificare la notazione, e per estendere all'idea che si possano utilizzare altri mezzi come sonda). Tale coefficiente varrà 1 nel caso in cui il segnale in ingresso e la sonda siano massimamente correlati, e quindi una misura della sonda fornirà la massima informazione possibile sul segnale, e 0 nel caso in cui non ci sia nessuna correlazione e una misura della sonda non fornirà alcuna informazione sul segnale. Il criterio QSP, invece, è descritto dal coefficiente di correlazione tra il segnale in uscita e la sonda,

$$C_{s|m}^2 = \frac{|\langle\delta\hat{X}_{out} \delta\hat{M}_{out}\rangle_{sim}|^2}{\langle\delta\hat{X}_{out}^2\rangle \langle\delta\hat{M}_{out}^2\rangle}, \quad (2.3)$$

che è legato alla varianza condizionale

$$V_{s|m} = \langle\delta\hat{X}_{out}^2\rangle (1 - C_{s|m}^2), \quad (2.4)$$

infatti maggiore è la correlazione tra sonda e segnale in uscita, maggiore sarà la precisione con cui tale segnale sarà conosciuto. Il criterio QND infine, è dato da

$$C_s^2 = \frac{|\langle\delta\hat{X}_{in} \delta\hat{X}_{out}\rangle_{sim}|^2}{\langle\delta\hat{X}_{in}^2\rangle \langle\delta\hat{X}_{out}^2\rangle}. \quad (2.5)$$

Si ha, quindi, che tali correlazioni variano nell'intervallo  $[0, 1]$ , e sono pari a 1 in un esperimento perfetto. Tuttavia mentre la varianza condizionale può tranquillamente essere ottenuta misurando le correlazioni tra i segnali in uscita, gli altri due coefficienti sono più difficili da misurare sperimentalmente, poiché la conoscenza delle fluttuazioni del segnale in ingresso richiederebbe la produzione di tale segnale in un autostato di  $\hat{X}_{in}$ , o più realisticamente di un altro apparato QND o generando raggi laser identici, ma tali metodi verrebbero a loro volta compromessi dalla non idealità dei dispositivi. Per questo motivo è stato pensato da Grangier et al. [3] di trattare l'apparato come un amplificatore, e utilizzare quindi il concetto di "rumore in ingresso equivalente". Mantenendo la notazione precedente, possiamo quindi scrivere

$$\delta\hat{M}_{out} = g_m \delta\hat{X}_{in} + B, \quad (2.6)$$

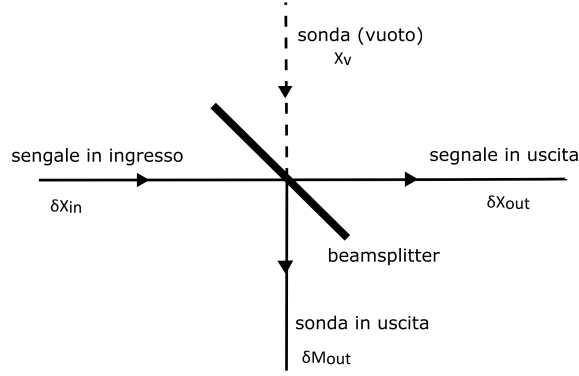


Figura 2.2: Schema della misura QND ma nel caso del beamsplitter

dove  $g_m$  è il "guadagno" dell'amplificatore e  $B$  è il rumore aggiunto, contenente a sua volta un termine intrinseco e uno prodotto dalla quadratura complementare di  $\delta\hat{X}$ , nel caso questa fosse correlata. I rumori equivalenti sono dunque

$$N_{eq,m} = \frac{\langle \delta\hat{M}_{out}^2 \rangle}{g_m^2} - \langle \delta\hat{X}_{in}^2 \rangle \quad (2.7)$$

per la sonda e

$$N_{eq,s} = \frac{\langle \delta\hat{X}_{out}^2 \rangle}{g_s^2} - \langle \delta\hat{X}_{in}^2 \rangle \quad (2.8)$$

per il segnale osservato, essendo  $g_s$  il guadagno di tale segnale tra ingresso e uscita. Per un'efficienza di misura perfetta si ha idealmente  $\delta\hat{M}_{out} = \delta\hat{X}_{in}$  e quindi  $N_{eq,m} = 0$ , mentre per una misura perfettamente "non-demolition"  $\delta\hat{X}_{out} = \delta\hat{X}_{in}$  e quindi  $N_{eq,s} = 0$ . Più grandi sono i valori di  $N_{eq,s}$  e  $N_{eq,m}$ , peggiore sarà l'esperimento. Queste quantità possono essere misurate sperimentalmente come si fa per gli amplificatori elettronici, con la differenza che qui il rumore in ingresso è di natura quantistica. Spesso, poi, vengono utilizzati i coefficienti di trasferimento, che nel caso in cui la fluttuazione in ingresso è al livello di shot-noise,  $\langle \delta\hat{X}_{in}^2 \rangle = 1$ , si riducono a

$$T_m = \frac{1}{1 + N_{eq,m}} \quad T_s = \frac{1}{1 + N_{eq,s}}. \quad (2.9)$$

Per un apparato QND ideale si ha quindi  $T_m = T_s = 1$ , e quindi  $T_m + T_s = 2$ . Infatti consideriamo al contrario come mezzo in cui avviene l'interazione un semplice beam-splitter, che non soddisfa le condizioni per una misura QND ma aiuta a chiarirne i principi e le difficoltà da considerare. Denotiamo i coefficienti di riflessione e trasmissione del beamsplitter con  $r^2$  e  $t^2$ , definiti come il rapporto tra l'intensità del segnale riflesso o trasmesso e l'intensità del segnale in ingresso. Considerando l'onda trasmessa come il segnale in uscita e l'onda riflessa come sonda si ha quindi

$$\begin{aligned} \delta\hat{X}_{out} &= t\delta\hat{X}_{in} + r\hat{X}_V = t\delta\hat{X}_{in} + \sqrt{1-t^2}\hat{X}_V \\ \delta\hat{M}_{out} &= r\delta\hat{X}_{in} - t\hat{X}_V = r\delta\hat{X}_{in} - \sqrt{1-r^2}\hat{X}_V \end{aligned} \quad (2.10)$$

indicando  $\hat{X}_V$  la quadratura del vuoto, per cui nella notazione precedente  $g_s \equiv t$  e  $g_m \equiv r$  (vedi figura 2.2). Si può calcolare il rumore equivalente in ingresso, ad esempio per il segnale

$$\begin{aligned} N_{eq,s} &= \frac{\langle \delta\hat{X}_{out}^2 \rangle}{t^2} - \langle \delta\hat{X}_{in}^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{t^2} (t^2 \langle \delta\hat{X}_{in}^2 \rangle + (1-t^2) \langle \hat{X}_V^2 \rangle + t\sqrt{1-t^2} \langle \delta\hat{X}_{in} \hat{X}_V \rangle) - \langle \delta\hat{X}_{in}^2 \rangle = \\ &= \frac{1-t^2}{t^2} \langle \hat{X}_V^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.11)$$

avendo usato nel secondo passaggio il fatto che il vuoto non sia correlato al segnale e dunque  $\langle \delta\hat{X}_{in} \hat{X}_V \rangle = \langle \delta\hat{X}_{in} \rangle \langle \hat{X}_V \rangle = 0$ . Inoltre, normalmente, per le fluttuazioni del vuoto si ha il solito livello di shot-noise,

per cui  $\langle X_V^2 \rangle = 1$ , e dunque

$$N_{eq,s} = \frac{1 - t^2}{t^2} \quad (2.12)$$

e con conti del tutto analoghi si trova

$$N_{eq,m} = \frac{1 - r^2}{r^2}. \quad (2.13)$$

Utilizzando le definizioni (2.9), risulta che i coefficienti di trasmissione valgono

$$T_m = r^2 \quad T_s = t^2 \quad (2.14)$$

e di conseguenza  $T_m + T_s = t^2 + r^2 = 1$ . Questo esempio mostra come normalmente sia necessario bilanciare la conservazione del segnale, in questo caso data da  $t^2$ , e l'efficienza della misura, data da  $r^2$ . Poiché per un beamsplitter la somma vale 1, viene data come condizione minima per una misura QND:  $T_m + T_s > 1$ . Calcoliamo ora, sempre nel caso del beamsplitter, la varianza condizionale (omettendo i passaggi algebrici). per prima cosa calcoliamo le fluttuazioni quadratiche utilizzando le equazioni (2.10) e come prima il fatto che  $\langle \delta \hat{X}_{in} \hat{X}_V \rangle = 0$ :

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{X}_{out}^2 \rangle &= t^2 \langle \delta \hat{X}_{out}^2 \rangle + r^2 \langle \hat{X}_V^2 \rangle \\ \langle \delta \hat{M}_{out}^2 \rangle &= r^2 \langle \delta \hat{X}_{out}^2 \rangle + t^2 \langle \hat{X}_V^2 \rangle \\ \langle \delta \hat{X}_{out} \hat{X}_V \rangle &= tr(\langle \delta \hat{X}_{in}^2 \rangle - \langle \hat{X}_V^2 \rangle) \end{aligned} \quad (2.15)$$

La varianza condizionale è allora

$$\begin{aligned} V_{s|m} &\equiv \langle \delta \hat{X}_{out}^2 \rangle (1 - C_{s|m}^2) = \\ &= \langle \delta \hat{X}_{out}^2 \rangle - \frac{|\langle \delta \hat{X}_{out} \hat{M}_{out} \rangle|^2}{\langle \delta \hat{M}_{out}^2 \rangle} = \\ &= t^2 \langle \delta \hat{X}_{in}^2 \rangle + r^2 \langle \hat{X}_V^2 \rangle - \frac{t^2 r^2 (\langle \delta \hat{X}_{in}^2 \rangle - \langle \hat{X}_V^2 \rangle)^2}{r^2 \langle \delta \hat{X}_{out}^2 \rangle + t^2 \langle \hat{X}_V^2 \rangle} = \\ &= \frac{\langle \delta \hat{X}_{in}^2 \rangle \langle \delta \hat{X}_V^2 \rangle}{r^2 \langle \delta \hat{X}_{out}^2 \rangle + t^2 \langle \hat{X}_V^2 \rangle} \end{aligned} \quad (2.16)$$

dove nell'ultimo passaggio è stato utilizzato il fatto che  $r^2 + t^2 = 1$ . Se come prima assumiamo quindi che il segnale in ingresso e il vuoto siano al livello di shot-noise,  $\langle \delta \hat{X}_{in}^2 \rangle = \langle \hat{X}_V^2 \rangle = 1$ , otteniamo  $V_{s|m} = 1$ . Per questo motivo viene imposta per gli esperimenti QND anche la condizione  $V_{s|m} < 1$ . In figura 2.3 possiamo vedere come spettro di  $T_m + T_s$  e  $V_{s|m}$  permette di classificare gli apparati. Per  $V_{s|m} < 1$  si ha una correlazione sufficiente tra segnale in uscita e sonda, che corrisponde alla proprietà QSP, poiché misurando la sonda il segnale in uscita sarà ben definito, mentre per  $T_m + T_s > 1$  si ha una buona conservazione del segnale e della "copia" prodotta, cioè la sonda (per  $T_s + TM = 2$  si ha una copia perfetta).

## 2.2 Onde non stazionarie

Per ottenere una misura QND dell'energia di un'onda non stazionaria è quindi necessario misurare una quantità che sia direttamente proporzionale all'energia e non ad esempio all'intensità del campo elettrico. In particolare la misura non deve contenere nessuna informazione sulla fase, che, in accordo con il principio di indeterminazione subisce una perturbazione arbitrariamente grande. Per questo motivo un buon metodo per eseguire queste misure è sfruttare le non-linearità dei materiali dielettrici, in particolare l'effetto Kerr, in cui l'indice di rifrazione di un materiale varia a seconda dell'intensità dell'onda elettromagnetica che lo attraversa:

$$n = n_{(0)} + n_{(2)} I \quad (2.17)$$

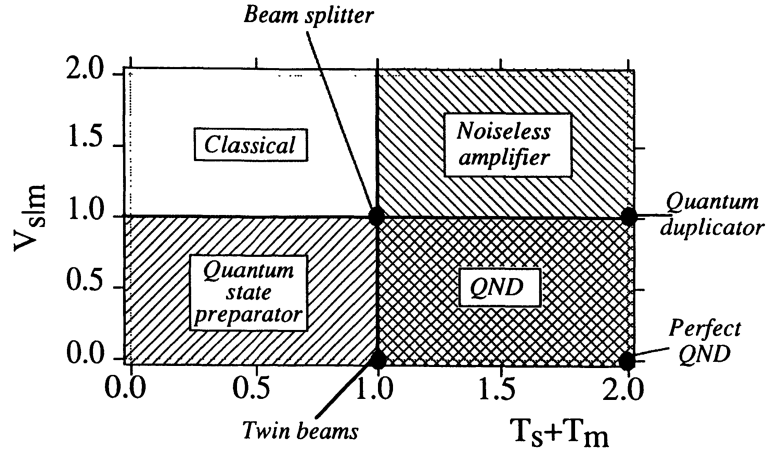


Figura 2.3: Diagramma che classifica gli apparati a seconda del valore di  $V_{s|m}$  e  $T_s + T_m$ . Tratta da [2].

dove  $n_{(2)}$  è l'indice non-lineare di Kerr, direttamente proporzionale a  $\chi^{(3)}$ , il coefficiente del terzo ordine della suscettibilità dielettrica del materiale. Utilizzando le quadrature definite in precedenza, si ha

$$\delta X_{s,out} = \delta X_{s,in} \quad \delta Y_{s,out} = \delta Y_{s,in} - g \delta X_{m,in} \quad (2.18)$$

$$\delta X_{m,out} = \delta X_{m,in} \quad \delta Y_{m,out} = \delta Y_{m,in} - g \delta X_{s,in} \quad (2.19)$$

dove "s" indica il segnale e "m" la sonda, mentre  $g$ , il "guadagno" dell'effetto Kerr, è dato da  $g = \sqrt{2\Phi_s \Phi_m}$ .  $\Phi_{s,m}$  sono i cambiamenti di fase che subiscono le due onde attraversando il dielettrico, pari a  $\Phi_{s,m} = k_{s,m} l n_{(2)s,m} I_{m,s}$ , con  $l$  la lunghezza del mezzo e  $k_{s,m}$  i vettori d'onda. Poiché  $\delta X_{s,m}$  rimangono inalterati, idealmente si ha che  $T_s = 1$  e  $V_{s|m} = 0$ , mentre  $T_m = \frac{g^2}{1+g^2}$ . Quindi per  $g \neq 0$  la misura soddisfa le condizioni QND  $V_{s|m} < 1$  e  $T_s + T_m > 1$ , tuttavia per avere una misura QND perfetta, con  $T_s + T_m = 2$ ,  $g$  dovrebbe essere arbitrariamente grande. L'idea è quindi quella di trovare dei mezzi con delle non-linearità abbastanza grandi ma che non disturbino la misura tramite altri effetti indesiderati, come perdite per assorbimento, aumento del rumore e altro. Osserviamo, inoltre, che mentre le equazioni (2.19) sono utili per la misura, le (2.18) descrivono l'inevitabile "back-action" sul sistema, che, come ci aspettavamo, perturba l'osservabile coniugata a quella che vogliamo misurare.

## 2.3 Energia di un risonatore

Per effettuare misure QND dell'energia di un'onda elettromagnetica stazionaria si potrebbero sfruttare diversi effetti dei materiali, come l'effetto inverso di Faraday, o la non-linearità quadratica della polarizzazione, tuttavia, nei materiali conosciuti questi effetti non sono sufficientemente intensi, tranne che per la non-linearità cubica dei dielettrici, come nel caso del paragrafo precedente per le onde non stazionarie. Tuttavia mentre per le onde stazionarie il problema è l'intensità della risposta del dielettrico, per i sistemi risonanti questa è molto grande ma causa una grande produzione spontanea di rumore. Per questo motivo la cosa migliore è utilizzare invece sistemi atomici a tre livelli, come accennato nel paragrafo 2.1 (il primo esperimento a soddisfare i criteri QND è infatti di questo tipo). Si possono utilizzare sistemi a tre livelli in configurazione "Λ" e "a cascata", con tre diverse energie  $E_2 > E_1 > E_0$ . Nella prima le transizioni sono permesse solo tra il livello |2⟩ (il più alto in energia) e i restanti due, mentre nella seconda le transizioni permesse sono tra |1⟩ e |2⟩ e tra |0⟩ e |1⟩. In entrambi i casi, il segnale intenso, oggetto della misura, corrisponde alla transizione, mentre la sonda (segnale debole), guida la transizione tra |0⟩ e |1⟩. Entrambi i segnali sono sfasati rispetto alla rispettiva transizione di un'energia sufficiente ad evitare assorbimenti ed emissioni spontanee (per rendere l'esperimento QND). Questo però comporta la necessità di una densità di atomi molto maggiore per compensare la scarsa interazione del sistema con il segnale. Grazie al segnale intenso, inoltre, il livello |2⟩ si divide in due livelli |+⟩ e |-⟩, di energia diversa ma vicina a quella di |2⟩. Sintonizzando quindi



la sonda con uno di questi due livelli, si può aumentare di molto la sensibilità di quest'ultima alle variazioni del segnale più intenso.

## 2.4 Stati anticorrelati in frequenza

Un esempio di stati "non-classici" di un'onda elettromagnetica che si possono ottenere tramite questo tipo di misure sono gli stati anticorrelati in frequenza, che fanno parte dei cosiddetti "squeezed states". Infatti mentre per un risonatore la frequenza è ben definita e può essere misurata in anticipo con precisione arbitraria, in un pacchetto d'onda di lunghezza temporale  $\tau$  la frequenza di ogni fotone può essere conosciuta con una precisione non minore di  $\Delta\omega = \frac{1}{2\tau}$ . Di conseguenza l'incertezza nell'energia di ciascun fotone sarà  $\Delta E = \frac{\hbar}{2\tau}$ . Supponiamo ora che l'energia di un risonatore sia stata misurata con una perfetta misura QND, e quindi il numero di fotoni sia ben definito. Se successivamente il risonatore viene accoppiato ad una guida ottica, dopo un tempo  $\tau$  gli  $n$  fotoni avranno lasciato la cavità e formato un pacchetto d'onda di lunghezza  $\tau$ , e l'incertezza nell'energia totale sarà

$$\Delta E_{tot} = \sqrt{n} \frac{\hbar}{2\tau}. \quad (2.20)$$

Tramite un'altra misura QND, l'energia del pacchetto può essere misurata con una precisione fino a  $\frac{\hbar}{2\tau}$ , cioè quella di un singolo fotone. La misura produce quindi un nuovo stato, in cui le fluttuazioni delle frequenze dei singoli fotoni non sono più indipendenti tra loro. Quando questi fotoni vengono misurati da uno spettrometro, se il primo fotone ha una frequenza più alta del valor medio, il fotone successivo avrà una probabilità maggiore di avere una frequenza minore della media, a differenza del caso classico in cui ogni fotone è indipendente dagli altri. Ad esempio con questi stati si possono eseguire misure di velocità tramite l'effetto Doppler molto più precise rispetto al caso classico. Per un pacchetto di luce coerente (cioè con indeterminazione nel numero di fotoni pari a  $\sqrt{n}$ ) il limite di precisione è infatti dato da

$$\Delta v_{lim} = \frac{c}{2} \frac{\Delta E}{E} = \frac{c}{2\sqrt{n}}, \quad (2.21)$$

che per un pacchetto di energia pari a 1 joule e lunghezza d'onda 600 nm darebbe  $\Delta v_{lim} \approx 10^{-1} m/s$ . Se invece questo pacchetto fosse anticorrelato in frequenza la massima precisione (per gli stessi valori) sarebbe invece pari a  $\Delta v_{lim} = \frac{\hbar c}{2\tau E} \approx 7 \cdot 10^{-23} m/s$ .

## Capitolo 3

# Misure QND e informazione quantistica

### 3.1 Criteri

Finora sono state considerate misure QND su variabili continue, ma si possono anche effettuare misure di questo tipo su sistemi discreti, come ad esempio la polarizzazione dei fotoni, che solitamente viene rappresentata tramite i due autovalori  $|h\rangle$  (orizzontale) e  $|v\rangle$  (verticale). Questo è di particolare interesse nel settore dell'informazione quantistica, in cui l'informazione viene rappresentata e manipolata utilizzando i cosiddetti qubit, sistemi quantistici binari come appunto la polarizzazione dei fotoni o lo spin dei fermioni. Per cui le unità di informazione invece che essere 0 o 1 possono essere  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  o una qualsiasi sovrapposizione coerente di questi due stati, e la loro composizione è data dal prodotto tensore. La parte conclusiva dei circuiti logici quantistici si conclude sempre con una misura proiettiva di almeno parte dei qubit utilizzati, facendo quindi collassare l'eventuale sovrapposizione coerente degli stati che si sono formati. Perché i circuiti siano efficaci, queste misure devono essere veloci, efficienti, e idealmente anche QND, in modo da poter riutilizzare i qubit misurati. È quindi necessario riformulare i criteri visti nei capitoli precedenti per caratterizzare le misure QND in quest'ambito. Per fare ciò utilizziamo la fidelity, una misura della "somiglianza" di due distribuzioni di probabilità, che nel caso classico di due distribuzioni  $p$  e  $q$  si può calcolare come

$$F(p, q) = \left( \sum_{i=1}^d \sqrt{p_i q_i} \right)^2 \quad (3.1)$$

dove  $\{p_i\}_{i=1}^d$   $\{q_i\}_{i=1}^d$  sono le probabilità dell' $i$ -esimo risultato. Osserviamo che  $F = 1$  nel caso di due distribuzioni identiche, mentre  $F = \frac{1}{d}$  nel caso di distribuzioni non correlate come  $\{1, 0, 0, \dots, 0\}$  e  $\{\frac{1}{d}, \frac{1}{d}, \frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d}\}$ , e nel caso bidimensionale si ha  $F = 0$  per distribuzioni anticorrelate ( $\{1, 0, \dots\}$  e  $\{0, 1, \dots\}$ ). Nel caso di due stati quantistici puri  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  si può generalizzare come  $F = |\langle\psi|\phi\rangle|^2$ ; mostriamolo in un caso particolarmente semplice. Sia  $\{|a_i\rangle\}$  l'insieme degli autostati dell'osservabile a cui siamo interessati, assumendo che i prodotti  $\langle a_i|\psi\rangle$  e  $\langle a_i|\phi\rangle$  siano positivi, possiamo scrivere i due stati puri come  $|\psi\rangle = \sum_i \langle a_i|\psi\rangle |a_i\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |a_i\rangle$  e  $|\phi\rangle = \sum_i \langle a_i|\phi\rangle |a_i\rangle = \sum_i \sqrt{q_i} |a_i\rangle$ , dove  $p_i$  e  $q_i$  sono le probabilità di ottenere il risultato  $i$ -esimo, e formano quindi le distribuzioni di probabilità  $p$  e  $q$ . Si ha

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 = \left| \sum_i \sum_j \sqrt{p_i} \sqrt{q_j} \langle a_i|a_j\rangle \right|^2 = \left| \sum_i \sum_j \sqrt{p_i} \sqrt{q_j} \delta_{ij} \right|^2 = \left| \sum_i \sqrt{p_i} \sqrt{q_i} \right|^2 = F(p, q) \quad (3.2)$$

Allora il primo criterio, cioè l'efficienza della misura, può essere quantificato tramite la fidelity tra la distribuzione di probabilità dello stato misurato  $p^{in}$  e quella della sonda  $p^m$ ,  $F_M = F(p^{in}, p^m)$ . Il criterio "non-demolition", cioè l'assenza di perturbazioni sull'osservabile misurata, è quantificato da  $F_{QND} = F(p^{in}, p^{out})$ , dove  $p^{out}$  è la distribuzione dello stato osservato dopo la misura. Infine il

criterio di "quantum state preparation", che garantisce che misure ripetute diano lo stesso risultato, è quantificato dalla fidelity condizionale

$$F_{QSP} = \sum_{i=1}^d p_i^m p_{|i\rangle}^{out} \quad (3.3)$$

dove  $p_{|i\rangle}^{out}$  indica la probabilità condizionale che lo stato in uscita sia  $|i\rangle$  quando la misura ha dato come risultato  $i$ .

Queste fidelity possono essere collegate ai coefficienti del capitolo precedente ((2.2), (2.3), (2.5)), considerando le osservabili continue come versioni infinito-dimensionali di quelle discrete, tramite le seguenti relazioni:

$$F_M = \sqrt{\frac{2T_m}{1+T_m}} \quad (3.4)$$

$$F_{QND} = \sqrt{\frac{2T_s}{1+T_s}}. \quad (3.5)$$

Per il criterio QSP, tuttavia, la fidelity  $F_{QSP}$  non può essere collegata direttamente alla varianza condizionale  $V_{s|m}$  a causa del fattore  $\langle \delta X_{out}^2 \rangle$  che la relaziona al livello di shot-noise, anche se nel caso di un singolo qubit si ha che  $C(O_m, O_s) = 2F_{QSP} - 1$ , essendo  $C(O_m, O_s)$  il coefficiente di correlazione tra l'osservabile del sistema osservato e quella del sistema ausiliario.

## 3.2 Il gate CNOT

Una delle componenti fondamentali dei circuiti in informazione quantistica è il gate CNOT ("control-not"). Esso rappresenta un'operazione logica in un sistema a due qubit in cui uno dei due qubit viene invertito (se è  $|0\rangle$  diventa  $|1\rangle$  e viceversa) solo se l'altro (il qubit di controllo) si trova nello stato  $|1\rangle$ . Se consideriamo come base gli stati  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$  e  $|11\rangle$  (in quest'ordine), con  $|ij\rangle := |i\rangle \otimes |j\rangle$ , e se il primo qubit è quello di controllo, questo gate può essere descritto in forma matriciale come

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Osserviamo che  $U$ , come tutte le porte logiche quantistiche, è rappresentato da un operatore unitario, poiché essendo il sistema isolato fino al momento della misura dei qubit (che solitamente avviene alla fine del circuito) non si possono eseguire operazioni irreversibili. Questo gate rappresenta la versione idealizzata e più semplice di una misura QND, in cui il qubit di controllo è quello oggetto della misura e l'altro (su cui agisce la parte "NOT") è la sonda ausiliaria. Più precisamente rappresentata la parte di interazione con la sonda, su cui viene poi eseguita una misura proiettiva. Supponiamo infatti che il primo qubit si trovi in un generico stato  $|\psi_{s,in}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , mentre il secondo si trovi nello stato iniziale  $|0\rangle$ , per cui complessivamente lo stato del sistema è  $|\psi_0\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|10\rangle$ . Dopo l'applicazione del gate lo stato risultante è  $|\psi_1\rangle = U|\psi_0\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ , che per  $\alpha$  e  $\beta$  entrambi diversi da zero è uno stato entangled. Prendendo la traccia sul primo qubit (s) dello stato  $|\psi_1\rangle \langle \psi_1|$ , otteniamo la matrice di densità

$$\rho_{m/s} = \text{Tr}_s \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & \beta^* \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^* \beta & 0 & 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

e lo stesso si ottiene prendendo la traccia sul secondo qubit (m). Sia misurando il qubit "m" che il qubit "s", otteniamo con probabilità  $|\alpha|^2$  il risultato "0" e con probabilità  $|\beta|^2$  il risultato "1", come per una

misura proiettiva direttamente sullo stato iniziale  $|\psi_{s,in}\rangle$ . Le tre distribuzioni di probabilità sono quindi uguali,  $p^{in} = p^{out} = p^m = \{|\alpha|^2, |\beta|^2\}$ , e le fidelity definite in precedenza sono tutte e tre pari al valore massimo,  $F_M = F_{QND} = F_{QSP} = 1$ . Questo semplice esempio rappresenta quindi il modello ideale di una misura QND, in cui si l'interazione tra i due sistemi è massima (per  $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$  si hanno i quattro stati di Bell, che sono massimamente entangled) per poter "trasferire" l'informazione ad un sistema ausiliario da cui viene poi estratta, senza dover agire direttamente sul sistema interessato.

È importante notare, però, che l'efficacia del procedimento dipende completamente anche dallo stato iniziale della sonda. Infatti se fosse stata preparata nello stato  $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$  anziché nello stato  $|0\rangle$ , l'azione del gate sul sistema sarebbe stata nulla:  $U|\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle$ . Per cui anche se il processo sarebbe stato comunque "non-demolition" ( $F_{QND} = 1$  poiché non è stata eseguita alcuna azione sul sistema) non avremmo ottenuto nessuna informazione dalla misura del qubit ausiliario. La distribuzione di probabilità di "m" sarebbe stata  $p^m = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ , per cui  $F_M = \frac{1}{2} + \sqrt{|\alpha|^2|\beta|^2}$ , che nel caso in cui  $\alpha = 0$  o  $\beta = 0$  ( $|\psi_{s,in}\rangle$  autostato) varrebbe  $\frac{1}{2}$ , cioè non ci sarebbe correlazione. Anche la fidelity condizionale  $F_{QSP} = \frac{1}{2}$  indica l'assenza di correlazione tra qubit "segnale" e qubit ausiliario. Questo evidenzia la necessità di un buon apparato di "quantum state preparation" solamente per lo stato iniziale della sonda, a cui è legata l'efficienza della misura.

### 3.3 Lettura QND di uno spin-qubit

Recentemente [7] è stato proposto un metodo per eseguire una misura QND di uno spin-qubit, cioè un qubit in cui gli autostati  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$  corrispondono alla base  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , utilizzando solamente l'interazione elettrica. Il sistema è composto da tre punti quantici ("quantum dot") allineati, di cui quello a sinistra costituisce il qubit oggetto della misura, e gli altri due costituiscono il qubit ausiliario (detto "ancilla"), la cui base è invece data dai due autostati di singoletto,  $|S\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$ , e di tripletto,  $|T\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$ . L'Hamiltoniana del qubit "target" è data da  $\hat{H}^S = -\frac{1}{2}E_z\hat{\sigma}_z$ , in cui  $\hat{\sigma}_z$  è l'operatore di Pauli e  $E_z$  è l'energia legata all'effetto Zeeman, mentre per il qubit ancilla si ha  $\hat{H}^A = -\frac{\Delta E_z}{2}\hat{\sigma}_z^A - \frac{J^A}{2}\hat{\sigma}_x^A$ , in cui  $\Delta E_z$  è il gradiente dell'energia di Zeeman,  $J^A$  è la costante di accoppiamento, e  $\hat{\sigma}_i^A$  (con  $i = x, y, z$ ) sono gli operatori di pseudo-spin, che nella base  $\{|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\}$  corrispondono alle matrici di Pauli. L'Hamiltoniana di interazione, infine, è data da  $\hat{H}^{int} = \frac{J}{4}(\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_z^A - 1)$ , con  $J$  costante di scambio tra i qubit, che dipende quindi dalla sovrapposizione delle funzioni d'onda del punto centrale e quello di sinistra. Dal punto di vista dell'ancilla, quindi, le energie dei livelli  $|\uparrow\downarrow\rangle$  e  $|\downarrow\uparrow\rangle$  vengono "splittate" di  $-\frac{J\sigma_z}{2}$ , e dipendono quindi dallo spin del target (vedi figura 3.1). La procedura è dunque la seguente:

- Il qubit target si trova nello stato iniziale  $|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ , mentre quello ancilla viene inizializzato (aumentando temporaneamente  $J^A$ ) nello stato  $|S\rangle$ .
- Viene modificato il potenziale tra i punti adiacenti in modo da azzerare  $J^A$  e aumentare  $J$ .
- Lo stato del qubit ancilla inizia quindi a precedere nella sfera di Bloch generata da  $|S\rangle$  e  $|T\rangle$ , cambiando quindi la fase relativa tra  $|\uparrow\downarrow\rangle$  e  $|\downarrow\uparrow\rangle$ .
- Dopo un tempo  $\tau$  la precessione viene interrotta da una misura proiettiva negli stati  $|S\rangle$  e  $|T\rangle$ . Con una scelta opportuna di  $\tau$ , a seconda dello stato del qubit target, la probabilità di ottenere  $|S\rangle$  sarà massima e quella di ottenere  $|T\rangle$  minima, oppure viceversa.

Poiché il processo non perturba l'osservabile target  $\hat{\sigma}_z$ , né durante l'evoluzione libera, poiché  $[\hat{\sigma}_z, \hat{H}^S] = 0$ , né durante l'interazione col qubit ancilla, poiché  $[\hat{\sigma}_z, \hat{H}^{int}] = 0$ , tale misura si può ritenere il QND, in base alla definizione (1.38).

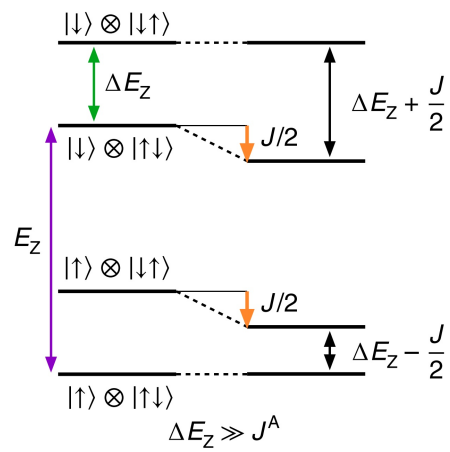


Figura 3.1: Schema energetico dei due qubit. A sinistra osserviamo i quattro stati che generano lo spazio di Hilbert dei due qubit separati in energia tramite l'effetto Zeeman, a destra con l'aggiunta del termine dell'interazione di scambio. Tratto da [7]

# Conclusioni

Le misure "quantum non-demolition" hanno applicazioni in diversi campi, partendo dalla rilevazione delle onde gravitazionali fino all'informazione quantistica. Questo è dovuto al fatto che, al di là dell'efficacia variabile della misura, il fatto che non perturbino l'osservabile misurata le rende quanto di più vicino esista a delle misure ideali, permettendo quindi non solo di eseguire misure ripetute sullo stesso sistema, e monitorarne quindi i cambiamenti dovuti a forze esterne, ma anche di raggiungere precisioni che altrimenti non sarebbero possibili. Tuttavia per essere eseguite è necessario che avvenga un'interazione con un sistema quantistico ausiliario, preparato in uno stato ben preciso. Quest'interazione deve essere sufficientemente forte da trasferire l'informazione necessaria, ma non deve appunto perturbare il sistema osservato. Il poter superare i limiti standard di precisione permette inoltre di produrre stati non classici, gli "squeezed states", i quali possono avere a loro volta diverse applicazioni. Esiste inoltre una stretta relazione tra informazione quantistica e misure QND, data dal fatto che queste sono idealmente rappresentate dal gate CNOT, una delle porte logiche fondamentali utilizzate nei circuiti quantistici, e dal fatto che in tali circuiti sia necessario avere un sistema di lettura efficace e che permetta di riutilizzare i qubit.

# Bibliografia

- [1] Braginsky, V. B. & Khalili, F. Y. *Quantum Measurement* (ed. Thorne, K. S.). Cambridge Univ. Press, Cambridge (1992)
- [2] Grangier, P., Levenson, J. & Poizat, J. *Quantum non-demolition measurements in optics*. Nature 396, 537–542 (1998).
- [3] J.-Ph. Poizat, J.-F. Roch & P. Grangier *Characterization of quantum non-demolition measurements in optics*. Ann. Phys. Fr., Vol. 19, N°3, pp. 265-297 (1994)
- [4] K. M. Gheri, P. Grangier, J.-P. Poizat, & D. F. Walls *Quantum-nondemolition measurements using ghost transitions* Phys. Rev. A 46, 4276 (1992).
- [5] Nogues, G., Rauschenbeutel, A., Osnaghi, S. et al. *Seeing a single photon without destroying it*. Nature 400, 239–242 (1999)
- [6] T. C. Ralph, S. D. Bartlett, J. L. O’Brien, G. J. Pryde, & H. M. Wiseman, *Quantum nondemolition measurements for quantum information*, Phys. Rev. A 73, 012113 (2006).
- [7] Nakajima, T., Noiri, A., Yoneda, J. et al. *Quantum non-demolition measurement of an electron spin qubit*. Nat. Nanotechnol. 14, 555–560 (2019).