

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

Dinamica nelle giunzioni Josephson a temperatura finita
tramite il funzionale di Ginzburg-Landau

Relatore

Prof. Luca Salasnich

Laureando

Sidi Benamar

Anno Accademico 2024/2025

Sommario

Le giunzioni Josephson furono studiate estensivamente negli anni '60 da Brian D. Josephson. Egli infatti teorizza gli omonimi effetti, che studiano il comportamento della corrente all'interno di una giunzione composta da due superconduttori separati da un materiale isolante. Applicando un potenziale costante, infatti, la corrente risulta oscillante (AC effect), mentre in assenza di potenziale si osserva una corrente che non diminuisce di intensità (DC effect). In questa tesi si studierà il comportamento di queste giunzioni evidenziando la dipendenza dell'evoluzione del sistema nel tempo dalla temperatura. Questo sfruttando il potenziale di Ginzburg-Landau insieme con una metodologia risolutiva proposta da Feynman.

Indice

1	Superconduttori	1
1.1	Teoria Bardeen–Cooper–Schrieffer	1
1.2	Proprietà principali dei superconduttori	2
1.2.1	Altre proprietà	2
1.3	Superconduttori di tipo I e II	2
2	Formalismo di Ginzburg-Landau	5
2.1	Teoria della transizioni di fase di Landau	5
2.2	Teoria di Ginzburg-Landau	6
2.3	Ginzburg-Landau nei superconduttori	7
3	Giunzioni Josephson	9
3.1	Temperatura finita	9
3.1.1	Effetti Josephson	11
3.1.2	Oscillazioni Josephson	11
4	Conclusioni	13
5	Bibliografia	15

1 Superconduttori

Nel 1911 il fisico olandese Heike Kamerlingh Onnes, studiando il mercurio, si accorse che raffreddandolo ad una temperatura inferiore ai 4.2 K esso perdeva completamente la propria resistività statica. Questo fenomeno è chiamato superconduttività e si verifica quando un conduttore è portato al di sotto della propria temperatura critica T_c (la temperatura critica è caratteristica di ciascun elemento e può essere ricavata dalla teoria BCS che vedremo più avanti). La resistività in un normale metallo invece diminuisce al calare della temperatura ma satura ad un dato valore diverso da zero per $T \rightarrow 0$.

I superconduttori presentano due proprietà principali:

- Resistenza elettrica nulla, ovvero gli elettroni sono liberi di fluire nel materiale senza dispersione di energia.
- Effetto Meissner, per cui il materiale passa da essere un normale conduttore (sopra la temperatura critica) ad essere un diamagnete nel suo stato superconduttivo, espellendo quindi qualsiasi campo magnetico.

Sono presenti 53 elementi puri che presentano superconduttività sotto certe condizioni. In seguito furono scoperti anche i cosiddetti HTS (high temperature superconductors) ovvero dei composti di materiali complessi e ceramici costituiti da diversi elementi come i cuprati, i gli HTS a base di ferro o a base di carbonio. Questi particolari superconduttori, come dice il nome, sono caratterizzati da una temperatura critica T_c molto alta rispetto a quelli classici (tra i 77K e i 135K a pressione atmosferica, ancora maggiori ad alte pressioni). I superconduttori e le loro proprietà sono discussi nei testi ([1],[2]).

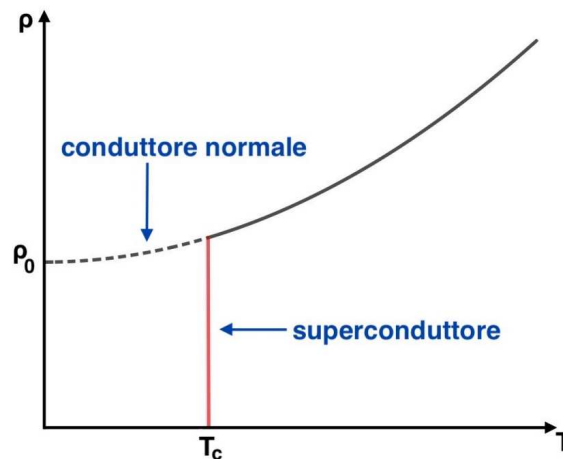


Figura 1: resistività ρ in funzione della temperatura T nei conduttori e nei superconduttori

1.1 Teoria Bardeen–Cooper–Schrieffer

La teoria BCS fu la prima teoria microscopica formulata sulla superconduttività grazie al lavoro dei fisici John Bardeen, Leon Cooper e John Robert Schrieffer nel 1957.

Nei normali conduttori la resistenza elettrica è causata dagli urti degli elettroni contro impurità o ioni del reticolo cristallino in cui si muovono trasportando corrente elettrica. Come abbiamo visto i superconduttori hanno resistenza nulla e per spiegare questo fenomeno la teoria BCS propone che sotto la temperatura critica gli elettroni non siano più indipendenti tra loro ma formino delle cosiddette coppie di Cooper. Esse sono coppie di elettroni, si potrebbe pensare che dovrebbero respingersi a causa della forza elettromagnetica ma negli anni trenta-quaranta del XX secolo Leon Cooper formulò l'omonima teoria che spiega il fenomeno. Un elettrone muovendosi attraverso il reticolo cristallino di un dato materiale e in determinate condizioni, quali temperature basse per esempio, la forza elettrostatica generata da esso è sufficientemente intensa da distorcere localmente il reticolo (polarizzazione del reticolo). Ciò genera un fonone, ovvero una vibrazione quantizzata del reticolo, che può attirare un secondo elettrone di spin opposto al primo grazie alla carica positiva generata dalla deformazione. Il

secondo elettrone si muoverà quindi in maniera correlata al primo anche se la distanza che li separa è considerevole, si viene così a formare una coppia di Cooper.

1.2 Proprietà principali dei superconduttori

Si analizzano ora più in dettaglio le proprietà sopraelencate. In regime superconduttivo si ha resistività $\rho = 0$ per cui, secondo la relazione

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \quad (1)$$

dove \vec{J} è la densità di corrente superficiale ed \vec{E} il campo elettrico, si conclude che $\vec{E} = 0$. La densità di corrente risulta quindi avere un valore finito.

Si osserva per esempio che la corrente indotta su un anello superconduttivo da una *f.e.m.* rimane costante anche dopo che quest'ultima viene spenta. Chiaramente nella realtà c'è pur sempre una diminuzione di corrente, anche se minima, dato che la resistività non può essere zero. Assumendo però un decadimento esponenziale della corrente del tipo $I(t) = I_0 e^{t/\tau}$ si trova il limite inferiore del tempo di decadimento τ , da cui si ricava poi il limite superiore per la resistività, ovvero $\rho \lesssim 10^{-26}$ che è trascurabile rispetto ai valori della dei normali metalli (per esempio l'alluminio ha resistività $\rho_{Al} \approx 2,75 \cdot 10^{-8}$).

Fondamentale anche l'effetto Meissner, osservato nel 1933 dai fisici W. Meißner e R. Ochsenfeld: il superconduttore non solo non permette a un campo magnetico di entrare, ma lo espelle attivamente dal proprio interno. Ciò si spiega notando che nel momento in cui un superconduttore viene immerso in un campo magnetico \vec{B} di intensità modesta si verifica un variazione di flusso ϕ_B che genera una forza elettromotrice secondo la legge di Lenz:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (2)$$

Nel superconduttore si viene quindi a generare una corrente che, data la resistività nulla, sarà molto forte anche se indotta da campi magnetici modesti. Questa corrente genera a sua volta un campo magnetico uguale e opposto a quello iniziale. Il campo magnetico risultante dalla somma dei due sarà quindi $\vec{B}_{tot} = 0$ all'interno del superconduttore.

Ricordando che nei materiali il campo magnetico è definito dalla relazione:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3)$$

Dove \vec{H} è il campo magnetizzante mentre la permeabilità magnetica è definita come $\mu = 1 + 4\pi\chi$ (con χ suscettibilità magnetica). Dato che $\vec{B}_{tot} = 0$ allora per coerenza avremo che $\mu = 0$ e quindi $\chi = -1/(4\pi)$. Dal momento che $\chi < 0$ il materiale è perfettamente diamagnetico.

1.2.1 Altre proprietà

I superconduttori presentano anche altre proprietà:

- Esistenza della corrente critica, ovvero una corrente massima che può scorrere nel superconduttore, pur avendo resistività nulla. Se viene superata questa corrente di soglia, il materiale torna ad essere un conduttore normale con tutte le sue proprietà.
- Effetto Josephson, di cui parleremo in dettaglio più avanti. Avviene nelle giunzioni Josephson, che sono formate da due superconduttori separati da un materiale isolante. Tale effetto permette il passaggio di corrente nella giunzione anche senza una differenza di potenziale applicata ai capi della stessa.

1.3 Superconduttori di tipo I e II

Si è visto come si comportano i superconduttori se il campo magnetico in cui sono immersi è piccolo, all'aumentare dell'intensità di quest'ultimo si possono distinguere due casi.

Nei superconduttori di tipo I, tra cui il piombo, mercurio, stagno e alluminio, il campo magnetico

è espulso solo se ha valore inferiore al campo critico $B_c(T)$. Se vi è un campo magnetico maggiore, perdono le proprietà superconduttive.

I superconduttori di tipo II invece sono caratterizzati da due campi critici $B_{c1}(T)$ e $B_{c2}(T)$:

- se $B < B_{c1}(T)$ si dice fase di Meissner e si osserva completa espulsione del campo magnetico dal materiale.
- se $B_{c1}(T) < B < B_{c2}(T)$ si dice fase mista e il campo può penetrare sotto forma di tubi di flusso. In questa fase si formano infatti dei vortici magnetici quantizzati ciascuno dei quali trasporta un quantum di flusso pari a $\phi = \hbar/2e \approx 2.07 \cdot 10^{-15} \text{Wb}$. Al centro di questi vortici si forma una regione non superconduttiva in cui è quindi presente un campo magnetico che decresce esponenzialmente allontanandosi dal nucleo. Intorno al vortice scorre una corrente che genera il campo nel nucleo di quest'ultimo, stabilizzandolo. All'aumentare dell'intensità del campo elettrico esterno aumenta il numero di vortici.

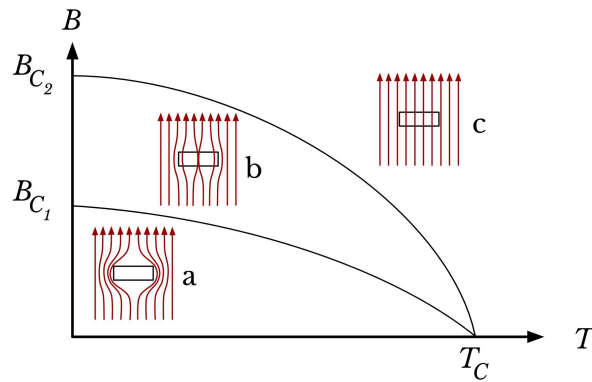


Figura 2: Comportamento dei superconduttori di tipo II in funzione del campo magnetico e della temperatura

Sono superconduttori di tipo II leghe superconduttive come piombo-indio, niobio-titanio e niobio-stagno.

2 Formalismo di Ginzburg-Landau

La superconduttività è una proprietà che è associata a una transizione termodinamica del secondo ordine (anche detta transizione continua). Infatti nel passaggio dal regime normale a quello superconduttivo alla temperatura critica non si osserva un salto nell'energia libera, bensì una variazione continua. Questa teoria è estensivamente trattata in ([3] e [4]).

2.1 Teoria della transizioni di fase di Landau

Landau ([5]), per descrivere le transizioni di fase, introduce il parametro d'ordine ψ : una variabile termodinamica che assume valore nullo a temperature $T > T_c$ mentre sarà diversa da zero in fase superconduttiva ($T < T_c$). Landau assume questo parametro come costante nello spazio e nel tempo, si parla quindi di teoria di campo medio (vedremo poi come nella teoria di Ginzburg-Landau verrà superata aggiungendo la dipendenza dal tempo). Il parametro d'ordine è assunto complesso in modo da poter rappresentare sia l'ampiezza che la fase. Ciò permette di descrivere esaustivamente sia l'intensità a livello collettivo, che nel nostro caso corrisponde alla densità dei portatori di carica, che la fase complessiva.

Secondo la classificazione di Ehrenfest, le transizioni sono caratterizzate dall'energia libera, in particolare l'ordine è dato dalla prima derivata discontinua di quest'ultima. Le transizioni del secondo ordine infatti corrispondono a una discontinuità della derivata seconda dell'energia libera. Tale energia dipende dal parametro d'ordine e dalle altre variabili termodinamiche (pressione e temperatura per esempio).

F è una funzione reale quindi può dipendere soltanto dal modulo del parametro d'onda, essendo quest'ultimo complesso, e possiamo espandere in serie di Taylor per temperature prossime a quella critica dato che $\psi(T < T_c) = 0$. Risulta quindi:

$$F(T) = a(T)|\psi|^2 + \frac{b(T)}{2}|\psi|^4 + O(|\psi|^6) \quad (4)$$

Le potenze dispari non sono differenziabili in $\psi = 0$ quindi non compaiono. $a(T)$ e $b(T)$ sono dei coefficienti fenomenologici che dipendono dalla temperatura. Si considera $b(T) > 0$ e costante per i superconduttori, questo in modo da garantire un limite inferiore per F , rendendo stabile lo stato superconduttore. Il parametro a invece ha due possibili casi:

- se $a(T) \geq 0$ allora $F(T)$ ha un minimo in $\psi = 0$, questo è il caso di un normale metallo.
- se $a(T) < 0$ allora $F(T)$ ha un cerchio di minimi con uguale ampiezza $|\psi|$ e fase arbitraria. Osserviamo infatti che:

$$\frac{\partial F}{\partial |\psi|} = 2a(T)|\psi| + 2b(T)|\psi|^3 = 0 \quad (5)$$

Risolvendo questa equazione differenziale si trova un massimo per $|\psi| = 0$ e la condizione di minimo $|\psi| = \sqrt{-a/b}$

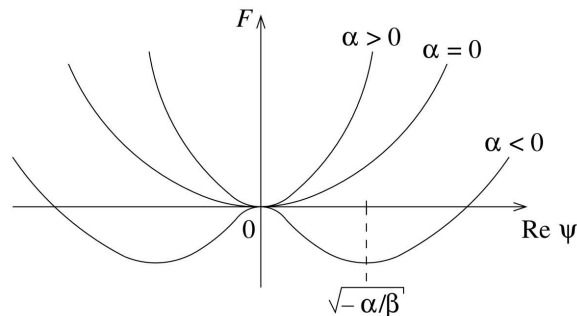


Figura 3: andamento di F al variare di α (potenziale a sombrero) [6]

Si nota che nella teoria di Landau le transizioni di fase avvengono per $a(T) = 0$, possiamo quindi dire che $a(T_c) = 0$. Espandendo quindi in serie di Taylor i coefficienti fenomenologici $a(T)$ e $b(T)$

otteniamo:

$$a(T) \simeq \alpha k_B (T - T_c) + \dots \text{ con } \alpha > 0 \quad (6)$$

$$b(T) \simeq b(T_c) + \dots \quad (7)$$

Per semplicità d'ora in poi non si esplicherà la dipendenza da T_c nel parametro b . Sostituendo si può scrivere il parametro d'ordine $|\psi|$ in funzione della temperatura:

$$|\psi| = \begin{cases} \sqrt{\frac{\alpha k_B (T - T_c)}{b}} & \text{se } T < T_c \\ 0 & \text{se } T > T_c \end{cases}$$

Dal momento che il parametro d'ordine è complesso possiamo scriverlo come $\psi = |\psi|e^{i\phi}$. L'energia libera dipende solo dal modulo quindi è minimizzata per infiniti valori di ϕ dato un $|\psi|$. Tuttavia in un esperimento solo un valore arbitrario di ψ minimizza l'energia libera, a cui corrisponde uno specifico valore della fase. Si dice quindi che la simmetria $U(1)$, ovvero per rotazioni del tipo $e^{i\phi}$, è stata rotta spontaneamente poiché l'energia libera F possiede questa simmetria, ma lo stato di equilibrio particolare no.

2.2 Teoria di Ginzburg-Landau

Ginzburg e Landau nella loro teoria ([7]) cercano di superare il limite che era sorto considerando il parametro d'ordine costante, definiscono quindi una funzione d'onda $\psi(\vec{r})$ per il condensato macroscopico e scrivono il funzionale di Ginzburg-Landau ([6]):

$$F[\psi] = \int d^3r \left[a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \gamma(\nabla\psi)^* \cdot \nabla\psi \right] \quad (8)$$

con a e b definiti diversamente dai parametri precedentemente visti e $\gamma > 0$ in modo tale da evitare che il sistema diventi spontaneamente non uniforme. Questo funzionale rappresenta l'energia libera del sistema solo quando $F[\psi]$ è al suo minimo, nel resto dei casi sarebbe improprio chiamarlo in tale modo. Estremizzando questo funzionale si trova:

$$-\gamma\nabla^2\psi + a\psi + b|\psi|^2\psi = 0 \quad (9)$$

Questa è chiamata *equazione di Ginzburg-Landau*. Si nota che è molto simile ad un'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo ma con un termine non lineare aggiuntivo che rappresenta l'interazione tra le particelle. E' naturale allora porre

$$\gamma = \frac{\hbar^2}{2m^*} \quad (10)$$

dove m^* è la massa efficace del problema, che risulta essere pari a due volte la massa dell'elettrone (come dimostrato da Gorkov nel 1959).

Si assume che la soluzione dipenda solo dalla coordinata x così da poter imporre la condizione $\psi(0) = 0$, considerando lo spazio $x > 0$ riempito dal superfluido e il resto vuoto. Si ottiene un'equazione per il superfluido vicino alla superficie del tipo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\ddot{\psi}(x) + a\psi(x) + b|\psi(x)|^2\psi(x) = 0 \quad (11)$$

Che ha soluzioni reali, dal momento che lo sono anche tutti i coefficienti. Si osserva ora cosa succede all'interno del materiale per $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi = \sqrt{-\frac{a}{b}} \quad (12)$$

Inserendo quindi $\psi(x) = \sqrt{-a/b} f(x)$ nell'equazione precedente si ottiene:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*a}\ddot{f}(x) + f(x) - f^3(x) = 0 \quad (13)$$

Si nota che il coefficiente della derivata seconda è positivo, può quindi essere definita la cosiddetta *lunghezza di scala di Ginzburg-Landau* $\xi > 0$:

$$\xi^2 := -\frac{\hbar^2}{2m^*a} \simeq \frac{\hbar^2}{2m^*\alpha(T - T_c)} > 0 \quad (14)$$

Che dipende da T . Risolvendo quindi l'equazione si trova:

$$f(x) = \tanh\left(\frac{x}{\xi\sqrt{2}}\right) \quad (15)$$

Che diverge per $T \rightarrow T_c$ come si può osservare in figura.

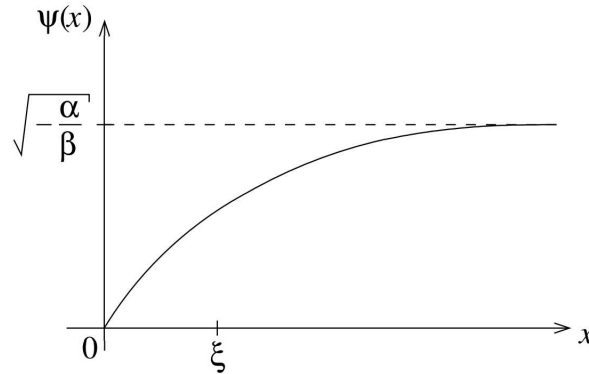


Figura 4: Andamento della funzione d'onda $\psi(x)$ [6]

2.3 Ginzburg-Landau nei superconduttori

Quando si studiano i semiconduttori si deve tener conto anche delle cariche q che formano il condensato in esame, che non sarà più neutro ma carico. Se il materiale è immerso in un campo magnetico dovremo quindi tenerne conto considerando la densità di energia del campo magnetico $B^2/8\pi$ e sfruttando la sostituzione minimale per riscrivere il momento canonico:

$$\frac{\hbar}{i}\nabla \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A} \quad (16)$$

Considerando il caso più semplice, che è valido però per la maggior parte dei superconduttori, in cui i portatori di carica (ovvero le coppie di Cooper) hanno spin totale nullo, possiamo scrivere il funzionale di GL come:

$$F[\psi, \vec{A}] \simeq \int d^3r \left[a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A} \right) \right|^2 + \frac{B^2}{8\pi} \right] \quad (17)$$

Dalla quale, dopo aver sviluppato i conti e minimizzato il funzionale rispetto a ψ si ottiene la seguente equazione di Ginzburg-Landau:

$$\frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A} \right)^2 \psi + a\psi + b|\psi|^2\psi = 0 \quad (18)$$

Si ottiene poi, sfruttando il teorema di Gauss e il fatto che $\nabla \times \vec{A}_0 = \vec{B}_0$, la seguente equazione:

$$-i\frac{q\hbar}{2m^*c}([\nabla\psi^*]\psi - \psi^*\nabla\psi) + \frac{q^2}{m^*c^2}|\psi|^2\vec{A} + \frac{1}{4\pi}\nabla \times \vec{B} = 0 \quad (19)$$

Utilizzando la legge di Amperé poi si ottiene la seconda equazione di Ginzburg-Landau:

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\nabla \times \vec{B} = i\frac{q\hbar}{2m^*}([\nabla\psi^*]\psi - \psi^*\nabla\psi) - \frac{q^2}{m^*c}|\psi|^2\vec{A} \quad (20)$$

3 Giunzioni Josephson

Nel 1962 il fisico Brian D. Josephson teorizza le omonime giunzioni ([8]) che verranno poi realizzate nell'anno seguente da Philip Warren Anderson e John Martin Rowell. Esse consistono in due superconduttori separati da un materiale dielettrico e si basano sull'effetto tunnel delle coppie di Cooper attraverso il dielettrico. Questi componenti sono impiegati in tecnologie all'avanguardia come i computer quantistici, i rivelatori di radiazioni, i simulatori quantistici e molto altro. In questo capitolo sviluppiamo una descrizione fenomenologica delle giunzioni Josephson che utilizza il formalismo di Ginzburg-Landau ed anche l'accorgimento proposto da Feynman per tenere conto dell'energia di tunneling.

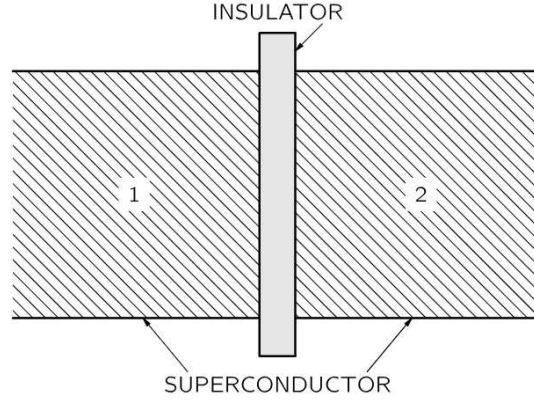


Figura 5: Due superconduttori separati da uno strato isolante

3.1 Temperatura finita

Si studia ora il comportamento delle giunzioni Josephson a temperatura finita, in particolare concentrandosi sulla temperatura critica T_c e in un suo intorno. Le equazioni che determinano l'evoluzione temporale del sistema partendo dal seguente sistema possono essere scritte come:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi_1(t)}{\partial t} = U_1 \psi_1(t) + K \psi_2(t) + a(T) \psi_1(t) + b |\psi_1(t)|^2 \psi_1(t) \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2(t)}{\partial t} = U_2 \psi_2(t) + K \psi_1(t) + a(T) \psi_2(t) + b |\psi_2(t)|^2 \psi_2(t) \end{cases} \quad (21)$$

Feynman ([9]) per tenere conto dell'energia di tunneling aggiunge il contributo di accoppiamento inserendo "a mano" la costante K all'interno delle equazioni. $U_{1,2}$ sono i potenziali associati ai due lati della giunzione che sono supposti essere connessi a una differenza di potenziale V . Le equazioni possono essere riscritte sostituendo rispettivamente:

$$U_{1,2} = \pm \frac{qV}{2} \quad (22)$$

Le funzioni d'onda nei due superconduttori ψ_1 e ψ_2 sono del tipo:

$$\begin{cases} \psi_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\theta_1} \\ \psi_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\theta_2} \end{cases} \quad (23)$$

dove $\rho_{1,2}$ sono le densità di elettroni nei due lati della giunzione e $\theta_{1,2}$ le rispettive fasi.

Si sostituiscono le funzioni d'onda nel sistema (21), si separa poi parte reale e parte immaginaria e dopo alcuni conti si ottengono le seguenti equazioni:

$$\dot{\rho}_1 = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \theta \quad (24)$$

$$\dot{\rho}_2 = -\frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \theta \quad (25)$$

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{K}{\hbar} \cos\theta \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} - \frac{1}{\hbar} \left(a(T) + \frac{qV}{2} + b\rho_1 \right) \quad (26)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{K}{\hbar} \cos\theta \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} - \frac{1}{\hbar} \left(a(T) - \frac{qV}{2} + b\rho_2 \right) \quad (27)$$

Si nota che la variazione della densità totale di elettroni è nulla, dal momento che:

$$\dot{\rho}_{tot} = \dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_2 = 0 \quad (28)$$

Conseguentemente la densità totale ρ_{tot} sarà costante nel tempo con valore $\rho_{tot} = \rho_1(t) + \rho_2(t)$. Si impongono quindi delle condizioni iniziali sul sistema, al tempo $t = 0^-$ infatti si considerano i due superconduttori lontani tra loro (quindi il termine di interazione è nullo $K = 0$), e il potenziale è posto a zero $V = 0$. In queste condizioni vale la seguente equazione:

$$0 = a(T) + b|\psi_{1,2}^{eq}(T)|^2 \quad (29)$$

È possibile ricavare inoltre il valore della densità elettronica all'equilibrio notando che:

$$\rho_1^{eq}(T) = |\psi_1^{eq}(T)|^2 = -\frac{a(T)}{b} = \frac{\alpha k_B (T_c - T)}{b} \quad (30)$$

Si giunge quindi alla conclusione che la densità elettronica totale sia costante nel tempo scrivendo:

$$\rho_{tot}(T) = \rho_{tot}^{eq}(T) = \rho_1^{eq}(T) + \rho_2^{eq}(T) = \frac{2\alpha k_B (T_c - T)}{b} \quad (31)$$

Perciò $\rho_{tot}(T)$ dipende solo dalla temperatura T . Le equazioni di Josephson-Smerzi ([10]) descrivono l'andamento, rispetto al tempo, di due nuove quantità che sono definite come:

$$\begin{cases} z(t) = \frac{\rho_1(t) - \rho_2(t)}{\rho_{tot}(T)} & \text{sbilancio di popolazione} \\ \theta(t) = \theta_2(t) - \theta_1(t) & \text{differenza di fase} \end{cases} \quad (32)$$

Si trova quindi la variazione della differenza di fase:

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t) = -\frac{K}{\hbar} \cos\theta(t) \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{qV}{\hbar} + b z \rho_{tot}(T) \quad (33)$$

Con qualche ulteriore calcolo si giunge alla relazione per la variazione di sbilancio di popolazione:

$$\dot{z}(t) = \frac{\dot{\rho}_1 - \dot{\rho}_2}{\rho_{tot}(T)} = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{1-z^2(t)} \sin\theta(t) \quad (34)$$

Abbiamo così ricavato le equazioni di Josephson-Smerzi, che riscriviamo evidenziando la dipendenza della fase dalla temperatura:

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = -\frac{K}{\hbar} \cos(\theta(t)) \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{qV}{\hbar} + 2\alpha k_B (T_c - T) z(t) \\ \dot{z}(t) = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{1-z^2(t)} \sin(\theta(t)) \end{cases} \quad (35)$$

Importante notare la differenza rispetto al caso a $T = 0$, qui la dipendenza dalla temperatura non è immediata, però comunque presente. Infatti è stato visto in precedenza come ρ_{tot} non dipenda dal tempo ma dalla temperatura. A temperatura zero il sistema può essere assunto perfettamente ordinato, infatti non possiede energia termica, perciò non è necessario tener conto delle fluttuazioni termiche (le particelle non eseguono movimenti casuali o disordinati). Per studiare la dinamica di questo sistema si possono scrivere le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi_1(t)}{\partial t} = U_1 \psi_1(t) + K \psi_2(t) \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2(t)}{\partial t} = U_2 \psi_2(t) + K \psi_1(t) \end{cases} \quad (36)$$

Le relative equazioni di Josephson-Smerzi che ottenute da questo caso specifico a $T = 0$ sono:

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = -\frac{K}{\hbar} \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}} \cos(\theta) + \frac{qV}{\hbar} + \frac{\rho_{tot}(T)b}{\hbar} z \\ \dot{z}(t) = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{1-z^2} \sin(\theta) \end{cases} \quad (37)$$

Si nota quindi che non vi è dipendenza dalla temperatura.

3.1.1 Effetti Josephson

Partendo dalle equazioni di Josephson-Smerzi è possibile ricavare le relazioni che regolano gli effetti Josephson (AC e DC) di cui si è discusso nel capitolo 1. Sono necessarie delle approssimazioni, prendendo in esame le equazioni a temperatura finita, si considera piccolo lo sbilancio di popolazione, $|z(t)| \ll 1$. Con queste considerazioni le equazioni viste in precedenza possono essere riscritte come:

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \left(-\frac{2K}{\hbar} \cos(\theta(t)) + \frac{\rho_{tot}(T)b}{\hbar} \right) z + \frac{qV}{\hbar} \\ \dot{z}(t) = \frac{2K}{\hbar} \sin(\theta(t)) \end{cases} \quad (38)$$

Assumendo inoltre che $z(t)$ sia veramente molto piccolo la prima equazione diventa:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{qV}{\hbar} \quad (39)$$

che integrata risulta:

$$\theta(t) = \frac{qV}{\hbar} t + \theta_0 \quad (40)$$

Si nota quindi che annullando il potenziale ($V = 0$) la fase è costante nel tempo:

$$\theta(t) = \theta_0 \quad (41)$$

Si osserva poi che la variazione dello sbilancio di popolazione z è legata alla corrente dalla relazione:

$$q \dot{z}(t) = I(t) \quad (42)$$

Si ottiene quindi l'equazione per la corrente I in dipendenza dal tempo t moltiplicando entrambi i membri della seconda equazione per la carica delle coppie di Cooper $q = -2e$:

$$I(t) = \frac{2Kq}{\hbar} \sin(\theta(t)) \quad (43)$$

Definendo la corrente critica come $I_c = (2Kq)/\hbar$ e considerando che $\theta(t) = \theta_0$ per $V = 0$:

$$I(t) = I_c \sin(\theta_0) \quad (44)$$

Si nota, infatti, che la corrente è costante nel tempo se non viene applicata alcuna differenza di potenziale. Si parla in questi casi di effetto Josephson DC (*direct current*).

Applicando invece un potenziale costante non nullo $V = V_0 \neq 0$ la fase $\theta(t)$ aumenta linearmente nel tempo, sostituendo nell'equazione della corrente otteniamo la formulazione per l'effetto Josephson AC (*alternated current*):

$$I(t) = I_c \sin\left(\theta_0 + \frac{qV_0}{\hbar} t\right) \quad (45)$$

Si nota che in presenza di un potenziale costante si ottiene una corrente oscillante di frequenza $\omega = (qV_0)/\hbar$.

3.1.2 Oscillazioni Josephson

Studiando ora l'effetto Josephson AC con delle approssimazioni meno stringenti, ovvero considerando uno sbilancio di popolazione piccolo in modo tale da poter approssimare $\sqrt{1 - z^2} \approx 1$ e una fase piccola $|\theta(t)| \ll 1$, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \left(-\frac{2K}{\hbar} + \frac{\rho_{tot}(T)b}{\hbar} \right) z + \frac{qV}{\hbar} \\ \dot{z}(t) = \frac{2K}{\hbar} \theta(t) \end{cases} \quad (46)$$

Derivando si ottiene poi:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = \left(-\frac{2K}{\hbar} + \frac{\rho_{tot}(T)b}{\hbar} \right) \dot{z}(t) \\ \dot{z}(t) = \frac{2K}{\hbar} \dot{\theta}(t) \end{cases} \quad (47)$$

Che, dopo aver sostituito $\dot{\theta}(t)$ e $\dot{z}(t)$, diventano due equazioni differenziali di secondo grado di tipo armonico ([11]). Con qualche manipolazione algebrica si possono scrivere come:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) + \Omega^2 \theta(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) + \Omega^2 z(t) = \frac{2K}{\hbar^2} qV \end{cases} \quad (48)$$

Con la frequenza Ω , detta anche frequenza di Josephson, che corrisponde a

$$\Omega = \sqrt{\frac{2K}{\hbar} \left(\frac{2K}{\hbar} - b\rho_{tot}(T) \right)} \quad (49)$$

Fondamentale è notare che con queste approssimazioni è possibile considerare la dipendenza della frequenza Ω dalla temperatura. Nel caso precedente non era osservabile a cause delle approssimazioni più stringenti.

4 Conclusioni

In questa tesi sono stati trattati inizialmente dei superconduttori, spiegando brevemente cosa sono e come funzionano. Si è illustrato il concetto di temperatura critica T_c che si è visto essere dell'ordine dei pochi Kelvin per i superconduttori convenzionali fino ad arrivare anche al centinaio per quelli ad alta temperatura. Sono state illustrate diverse proprietà e la differenza tra conduttori di tipo I e II. Nel secondo capitolo invece si è esposto il formalismo proposto da Ginzburg e Landau che è utile per descrivere il comportamento dei superconduttori in prossimità della temperatura critica T_c in modo semplice. Tutto ciò grazie all'introduzione di un parametro d'ordine, ovvero una funzione complessa ψ che descrive la densità delle coppie di Cooper (coppie di elettroni) all'interno del superconduttore. Le equazioni di Ginzburg-Landau sono di fondamentale importanza per descrivere l'evoluzione del parametro d'ordine nel tempo e nello spazio.

Nell'ultimo capitolo si trova il cuore di questa tesi, infatti viene trattata la dinamica della giunzioni Josephson. Si trova spesso, in letteratura, che la dinamica di queste giunzioni viene studiata in dipendenza dal tempo o in dipendenza dalla temperatura, qui si è cercato di unire le due trattazioni osservando l'evoluzione temporale del sistema composto da due conduttori tenendo conto del contributo della temperatura. Sono state infatti ricavate le equazioni di Josephson-Smerzi, fondamentali per descrivere la dinamica del sistema, tenendo conto di un termine di accoppiamento K dovuto agli effetti di tunneling e considerando anche un potenziale applicato ai due superconduttori. Questo potenziale è dato da tensioni che sono dell'ordine di grandezza dei microvolt. Sono state quindi ricavate le relazioni che regolano gli effetti Josephson, notando che l'effetto DC non è influenzato dalla temperatura mentre l'effetto AC ha una dipendenza che può essere vista nella formulazione della frequenza Josephson.

Queste giunzioni hanno diverse possibilità di applicazione nel campo tecnologico, per esempio sono utilizzate nei dispositivi SQUID (Superconducting Quantum Interference Devices) per rilevare campi magnetici di piccola intensità e per misurarli con grande precisione. I qbit dei computer quantistici, inoltre, sono basati su tali giunzioni, che rendono quindi possibile processare le informazioni molto velocemente grazie alle proprietà quantistiche di cui godono.

5 Bibliografia

- [1] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, Dover Publications INC, New York (2004).
- [2] J. R. Waldram, *Superconductivity of Metals and Cuprates*, CRC Press, Boca Raton (1996).
- [3] I. K. Schuller, K. E. Gray, *Time-Dependent Ginzburg–Landau: From Single Particle to Collective Behavior*, **19**, 401, *Journal of Superconductivity and Novel Magnetism* (2006).
- [4] B. Zumino, D. A. Uhlirbrock, *Derivation of the Ginzburg-Landau theory for a local superconductor*, Dipartimento di Fisica Univerità di New York, New York, CERN, Ginevra (1964).
- [5] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Pergamon Press, Oxford (1980).
- [6] C. Timm, *Theory of Superconductivity*, Springer, Berlin (2010).
- [7] V. Ginzburg, L. Landau, *On the Theory of Superconductivity*, **20**, 1064, *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki* (1950).
- [8] B. D. Josephson, *Possible new effects in superconductive tunnelling*, vol. 1, **7**, 251, *Physics Letters* (1962).
- [9] P. R. Feynman, *The Schrödinger Equation in a Classical Context: A Seminar on Superconductivity*, cap. 31, *feynman lectures on physics* (1964).
- [10] A. Bardin, *Josephson junctions*, Università di Padova, presentazione PowerPoint per il corso *Quantum physics with atoms and ions*, Padova (2024).
- [11] L. Salasnich, *Path Integrals for Many-Body Quantum Systems Ultracold Atoms, Superfluids, and Superconductors*, (2024).