Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Tesi di Laurea in Fisica

Teorema di de Finetti e Meccanica Quantistica. Un'interpretazione bayesiana della probabilità quantistica.

Laureando:
Giorgio Nicoletti

Relatore:
Prof. Pieralberto Marchetti

Anno Accademico 2016/2017

Indice

Introduzione e motivazioni

Lo scopo della tesi è di presentare ed esplorare le conseguenze fisiche del teorema di de Finetti, la cui formulazione ha dato origine all'interpretazione bayesiana della probabilità. In questa interpretazione essa non è più vista come oggettiva, quanto piuttosto come una rappresentazione di un grado di fiducia soggettivo.

Il primo capitolo intende porre le basi matematiche e concettuali di tale formulazione, cercando anche di darne una giustificazione fisica a livello classico. La condizione centrale che permette di ricavare la rappresentazione di de Finetti è quella di scambiabilità: un insieme costituito da un numero arbitrario di misure è scambiabile se l'ordine in cui vengono fatte tali misure è irrilevante. In questo caso il teorema di de Finetti garantisce la possibilità di scrivere la probabilità come probabilità condizionata, a partire da una media su delle "probabilità oggettive" $\boldsymbol{p}$ pesate da una "probabilità sulle probabilità" $P(\boldsymbol{p})$: è quest'ultimo oggetto a costituire il cuore della teoria bayesiana.

Poiché la Fisica Classica è una teoria deterministica, il teorema di de Finetti in questo ambito rappresenta uno strumento utile nella comprensione del ruolo delle probabilità nel caso di un'informazione incompleta, ma non essenziale. È una sua eventuale estensione quantistica che, grazie alla natura probabilistica della Fisica Quantistica, può invece ottenere un ruolo centrale nei fondamenti della teoria: i due successivi capitoli della tesi si concentrano sugli strumenti necessari per tale estensione, e su parte delle conseguenze che essa comporta.

Il secondo capitolo è dedicato in particolare alla dimostrazione del teorema di de Finetti quantistico, che richiede l'introduzione del formalismo degli operatori densità e della generalizzazione delle misure proiettive alle *positive operator valued measures*, o POVM. In questo contesto matematico è possibile ottenere una rappresentazione di de Finetti per gli stati ρ, i quali divengono non stati oggettivi del sistema ma piuttosto oggetti che codificano l'informazione, intesa come grado soggettivo di conoscenza sul sistema. Il teorema di de Finetti quantistico dà dunque spazio ad una particolare interpretazione della Meccanica Quantistica, di natura bayesiana.

Nonostante sia passato quasi un secolo dall'assiomatizzazione della Meccanica Quantistica, non esiste ancora un accordo universale su quale sia il suo significato fisico: anzi, vi sono innumerevoli interpretazioni proposte, da quella di Copenaghen alla meccanica Bohmiana, dall'interpretazione a molti mondi di Everett a quella modale di Van Fraassen, per citarne solo alcune. In questa tesi vogliamo esporre, per quanto detto, la possibilità di considerare le probabilità quantistiche da un punto di vista bayesiano, possibilità garantita in primis dall'estensione del teorema di de Finetti.

Nel corso della tesi, in particolare, ci concentreremo sulla possibilità di interpretare lo stato quantistico non come uno "stato di natura", ma come piuttosto un oggetto che codifica l'informazione sul sistema. Tale idea non è molto differente dall'interpretazione ortodossa di Copenaghen: il pregio dell'interpretazione bayesiana, tuttavia, è quello fornire una possibilità di caratterizzare tale informazione, e precisamente come *informazione soggettiva*.

Il terzo capitolo è pertanto dedicato ad esplorare alcune delle conseguenze che un simile paradigma impone. In particolare, già nel corso della dimostrazione del teorema di de Finetti emerge come l'interpretazione bayesiana sia intimamente legata agli spazi di Hilbert complessi: invertendo la logica storica, sembra quasi fornire un motivo per il quale la Fisica Classica faccia uso unicamente del campo reale $\mathbb{R}$, mentre gli operatori quantistici debbano chiudere la loro algebra su $\mathbb{C}$. Questo fatto è, appunto, una richiesta generale affinché si possano portare molte costruzioni bayesiane in Meccanica Quantistica.

Dopo aver mostrato come sia possibile generalizzare il teorema di Bayes nell'ambito quantistico e come il cosiddetto collasso della funzione d'onda si riformuli nell'interpretazione bayesiana, la tesi si conclude con una breve esposizione sul QBism (da *Quantum Bayesianism*), che costituisce il quadro formale generale nel quale trovano posto le considerazioni fatte. In particolare, ci concentreremo su quali strade sono intraprese nella ricerca odierna per trovare dei *parametri oggettivi* all'interno di un contesto di probabilità soggettive.

Il Qbism, infatti, non ha come fine quello di ridurre la Meccanica Quantistica ad una teoria completamente bayesiana: anzi, l'idea di base è proprio quella di escludere tutti quei fenomeni che possono essere ricondotti ad una struttura soggettiva, con il fine individuare quali oggetti matematici rappresentano invece dei parametri fisici nuovi, che distinguono così profondamente la teoria quantistica dalla Fisica Classica.

Capitolo 1

L'interpretazione bayesiana della probabilità

In questo capitolo vogliamo esporre brevemente i concetti generali e le motivazioni dell'interpretazione bayesiana della probabilità. Il risultato principale sarà il teorema della rappresentazione di de Finetti, del quale daremo una dimostrazione euristica. Nel farlo, introdurremo i concetti principali della formulazione bayesiana, accennando ad esempio nel paragrafo 1.2.1 a come ogni misura sia correlata a tutte le precedenti: cade dunque il concetto frequentista di indipendenza, e la misura diventa un processo *informativo*. Un simile cambiamento di paradigma fu tale da portare de Finetti ad affermare che *la probabilità non esiste* (prefazione di [5]).

Come analizzeremo in dettaglio nei prossimi capitoli, le conseguenze di tale paradigma rivelano la loro potenza nel contesto della Meccanica Quantistica, dove la stessa natura dello stato quantistico dipende attraverso la regola di Born dal concetto di probabilità.

1.1 Motivazioni per una probabilità bayesiana

È noto come il teorema di Bayes possa essere derivato dalla costruzione standard della probabilità, che qui riteniamo essere l'ipotesi frequentista. In tale formulazione la probabilità è considerata come un elemento oggettivo della realtà, indipendente dallo *stato di conoscenza* soggettivo di chi sta effettivamente compiendone l'assegnazione.

Nel corso di questa tesi ci riferiremo spesso a tale soggetto come *agente* - un concetto privo di valore nel modello frequentista che diviene invece centrale in quello bayesiano.

La definizione classica di probabilità può essere riassunta nel noto limite frequentista

$$p(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_x}{N} \tag{1.1}$$

dove N è il numero totale di prove e n_x il numero di volte in cui è stato ottenuto il risultato x.

È chiaro come una simile definizione di $p(x)$ sia empirica e risulti mal definita nel momento in cui consideriamo l'impossibilità pratica di osservare una serie infinita di eventi. Nel paradigma frequentista diviene dunque necessario assumere che la probabilità $p(x)$ sia una proprietà oggettiva della realtà, ma non osservabile se non in maniera asintotica. Da un punto di vista sperimentale, $p(x)$ va trattato come un valore non noto da stimare con procedimenti statistici. È difficile, dunque, intendere la probabilità come un oggetto al quale assegnare una realtà oggettiva, quanto piuttosto uno strumento per codificare l'informazione, come sostenuto anche da Feynman [4]:

An experimental physicist usually says that an "experimentally determined" probability has an "error," and writes $P(H) = N_H/N \pm 1/2\sqrt{N}$. There is an implication in such an expression that there is a "true" or "correct" probability which could be computed if we knew enough, and that the observation may be in "error" due to a fluctuation. There is, however, no way to make such thinking logically consistent. It is probably better to realize that the probability concept is in a sense subjective, that it is always based on uncertain knowledge, and that its quantitative evaluation is subject to change as we obtain more information.

1.1.1 Le probabilità come grado di fiducia

La chiave dell'interpretazione bayesiana risiede nel teorema di Bayes, che ci dà un primo indizio del motivo per cui la probabilità possa essere pensata non come uno stato oggettivo, quanto come un'inferenza soggettiva e *condizionata*.

Teorema 1.1 (Teorema di Bayes)**.** Se $p(A)$ e $p(B)$ sono le probabilità di osservare singolarmente gli eventi A e B, e se $p(A|B)$ e $p(B|A)$ sono rispettivamente le probabilità di osservare A avendo osservato B e viceversa, allora

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)} \tag{1.2}$$

dove chiamiamo *probabilità a posteriori* la probabilità condizionata $p(A|B)$, mentre la probabilità $p(A)$ è la *probabilità a priori* o *prior*.

Il teorema di Bayes ci permette di pensare lo stesso concetto di probabilità in maniera differente. La prior $p(A)$ contenuta nell'Equazione (1.2) rappresenta l'informazione derivante esclusivamente dall'evento A: allora possiamo supporre che l'agente bayesiano abbia, per qualsivoglia motivo, qualche informazione a priori riguardo ad A. Diremo che $p(A)$ codifica il *grado di fiducia* che l'agente ripone in A, sul quale non possiamo porre vincoli di alcun tipo.

Vogliamo sottolineare in maniera particolare che nell'interpretazione bayesiana $p(A)$ rappresenta un giudizio personale dell'agente, nel senso che non esistono criteri esterni che possano determinare se sia coretto o meno. $p(A)$ è la conoscenza a priori che l'agente ha di A, e non ha di per sé importanza quanto tale conoscenza corrisponda effettivamente alla realtà fisica. È infatti il teorema di Bayes ad esprimere la regola che l'agente deve seguire per aggiornare il suo grado di fiducia alla luce di un ulteriore evento B. Ecco perché abbiamo chiamato $p(A|B)$ probabilità a posteriori: rappresenta la nuova probabilità che l'agente assegna affinché rimanga consistente con le nuove informazioni fornitegli da B. Notiamo che la probabilità a posteriori dipende sia da B, sia dalla conoscenza a priori dell'agente $p(A)$.

Quanto detto finora è di immediata comprensione nel contesto del test d'ipotesi per una teoria fisica. Assumiamo che un agente abbia un certo grado di fiducia riguardo una teoria fisica, espresso dalla prior $p(T)$. Dopo un esperimento, per tenere conto dei dati sperimentali D l'agente dovrà aggiornare tale grado di fiducia attraverso il teorema di Bayes,

$$p(T|D) = \frac{p(D|T)p(T)}{p(D)}$$

dove $p(T|D)$ resta in ogni caso l'espressione di un giudizio personale, poiché dipende da $p(T)$, ma è tale da essere perfettamente consistente con i suddetti dati sperimentali.

Alla luce di queste considerazioni, possiamo ora definire esplicitamente cosa intendiamo per probabilità bayesiana. In tale approccio, non ha senso pretendere di stimare una probabilità assoluta: ogni probabilità è soggettiva e deriva dall'informazione che un agente ha a priori indipendentemente da ogni criterio esterno. In particolare, la prior sarà una distribuzione di probabilità nello spazio delle ipotesi che dovrà essere aggiornata attraverso il teorema di Bayes per rimanere coerente con le evidenze sperimentali.

È chiaro come non abbia più senso parlare di una probabilità oggettiva $p(x)$: per il teorema di Bayes la probabilità in sé è definita *condizionatamente* alla probabilità a priori, la quale a sua volta è per definizione è un'assegnazione soggettiva. Ne segue pertanto che ogni probabilità $p(x)$ debba essere una rappresentazione del grado di fiducia dell'agente.

Nel paragrafo successivo descriviamo brevemente come sia possibile un approccio semi-assiomatico nella derivazione del concetto di probabilità bayesiana, esaminato in dettaglio nei primi due capitoli di [13]. Successivamente ci interesseremo di un problema fondamentale che finora abbiamo ignorato: come può funzionare l'approccio frequentista se le probabilità non sono oggettive, ma anzi dipendono direttamente dalla scelta della prior? In altri termini, è possibile, almeno in linea di principio, derivare il paradigma frequentista dai medesimi concetti di quello bayesiano?

1.1.2 Un modello generale per una teoria bayesiana

Come formulato in [13] e rielaborato in [18], piuttosto che postulare l'esistenza della probabilità è più conveniente ed intuitivo muovere da un concetto diverso: la necessità di assegnare un *grado di plausibilità* ad ogni proposizione. Postuliamo tre proprietà di base per la plausibilità.

1. I gradi di plausibilità sono rappresentati da numeri reali. La plausibilità di una proposizione A noto che la proposizione B è vera è indicata con $A|B$, di modo che dipenda dall'informazione che abbiamo relativamente alla proposizione.

2. La plausibilità deve essere in accordo qualitativo con la logica.

3. Le plausibilità devono essere consistenti: due stati equivalenti di conoscenza devono essere rappresentati dai medesimi numeri reali.

Da queste assunzioni molto generali, in [13] è esplicitamente mostrato come dall'equazione funzionale per la congiunzione $AB|C$,

$$(AB|C) = F[(B|C), (A|BC)]$$

sia possibile derivare l'esistenza di una funzione che traduca la plausibilità in una nuova misura p. In particolare, la plausibilità di $x \equiv A|B$ è un'arbitraria funzione monotona di p, dove $0 \leq p \leq 1$. È allora sempre possibile *riscalare* la plausibilità per ottenere la definizione standard di probabilità[1].

La possibilità di ricavare formalmente la teoria della probabilità da un set di assiomi di natura bayesiana rappresenta un passo cruciale nel giustificare la possibilità stessa di una probabilità di tipo bayesiano. Nel resto della tesi, ci riferiremo sistematicamente alla teoria della probabilità come una teoria di tipo logico: con questo

[1] A questo punto è possibile rendere gli assiomi sopra enunciati più precisi: 1) $p(A|B) \geq 0$, 2) $p(\bar{A}|B) = 1 - p(A|B)$, 3) $p(A \cup B|C) = p(A|C) + p(B|C) - p(A \cap B|C)$. Da questi si può mostrare che gli assiomi di Kolmogorov della probabilità seguono da quelli per la plausibilità.

intendiamo che non descrive delle proprietà oggettive della natura, ma piuttosto ci fornisce un insieme di regole che impongono un modo per processare l'informazione sulla realtà fisica.

Consideriamo ad esempio un'assegnazione probabilistica riguardante il gioco della roulette (si veda [3]). Se un giocatore ritiene che il gioco sia imparziale, assegnerà una certa probabilità equivalente per ogni risultato. Supponiamo però che, dopo che la palla è stata lanciata, un secondo giocatore ottenga delle informazioni circa la posizione e la velocità della palla rispetto alla ruota. Per lui il gioco non è più imparziale e la probabilità che assegna ad ogni risultato è differente, dato che ha un diverso stato di conoscenza.

Nella situazione descritta è complesso definire un concetto di probabilità oggettiva. Da un punto di vista bayesiano, invece, entrambi i giocatori hanno ragione: non esiste una probabilità per il gioco in sé, perché ogni agente assegna una probabilità *relativa* alle informazioni in proprio possesso.

Se ogni assegnazione probabilistica rappresenta uno stato di conoscenza, è altresì vero che un particolare stato di conoscenza è arbitrario e dunque non deve esserci necessariamente accordo a priori. Tuttavia, alla luce di nuove informazioni la teoria delle probabilità ci fornisce uno strumento matematicamente rigoroso che fissa l'aggiornamento dello stato di conoscenza. Come vedremo nel resto di questa prima parte, in tale contesto il teorema di de Finetti costituisce la giustificazione del problema primo dell'assegnazione probabilistica, ossia la rappresentazione di uno stato di conoscenza attraverso una distribuzione a priori.

1.2 Il teorema della rappresentazione di de Finetti

Uno degli aspetti principali in cui l'approccio bayesiano differisce da quello frequentista è nel modo in cui vengono trattati i valori non noti. Consideriamo un esperimento fisico come esempio.

Supponiamo di voler misurare il valore di aspettazione di una certa osservabile X nello stato Σ, $\langle X\rangle_\Sigma$. Per trattare il problema in maniera frequentista, dobbiamo introdurre un certo "valore vero" $\langle X\rangle_\Sigma^*$, per definizione ignoto.

Non serve specificare che, per come è definito, è impossibile accedere al valore vero per mezzo di qualsiasi processo fisico, seppure sia necessario assumerne l'esistenza per rendere sensata l'idea stessa della misura di X. L'approccio standard non può quindi riguardare il valore vero, ma piuttosto la costruzione di estimatori per $\langle X\rangle_\Sigma^*$ che convergono ad esso al limite di un numero infinito di misure. Semplificando, la miglior conclusione alla quale possiamo arrivare nell'ipotesi frequentista è

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}\left[\langle X\rangle_\Sigma\right]_n = \langle X\rangle_\Sigma^*$$

dove $\mathcal{E}\left[\langle X\rangle_\Sigma\right]$ è un estimatore *unbiased*.

Sottolineiamo che i valori veri sono trattati come valori oggettivi, e quindi non è possibile fare su di essi alcun tipo di inferenza statistica. Anche nel paradigma bayesiano i valori non noti continuano ovviamente ad esistere, altrimenti non avrebbe senso parlare di probabilità. Tuttavia la differenza fondamentale è che ora deve esistere un grado di fiducia anche per tali parametri non noti e pertanto non possono più esistere i valori veri nel senso frequentista: dobbiamo tenere conto della nostra conoscenza a priori anche riguardo ai valori veri, che perdono così la loro oggettività. La stessa nozione di costante non nota diventa una contraddizione in termini, poiché deve esistere una prior ad essa assegnata.

1.2.1 La scambiabilità e l'enunciato del teorema

L'assunzione di base dell'approccio frequentista è che i valori osservati siano indipendenti e identicamente distribuiti (IID), condizionatamente rispetto a qualche parametro non noto. È chiaro che, per quanto detto finora, il diverso modo di pensare a tali parametri porta, nell'ambito delle due interpretazioni della probabilità, a risultati molto differenti riguardo la relazione fra i valori osservati: ad esempio, un agente bayesiano può e deve ritenere che ogni misura non sia indipendente da tutte le precedenti, poiché queste hanno cambiato il suo stato di conoscenza[2]. Una discussione approfondita a riguardo si trova in [15].

Ispirati da queste considerazioni, vogliamo deviare da questa derivazione standard: invece di postulare valori IID, poniamo alla base un'assunzione più legata al senso fisico della misura, quella di *scambiabilità*.

Definizione 1.1 (Scambiabilità)**.** Sia $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ una successione infinita numerabile di valori reali, e $\boldsymbol{x}_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ per un certo $k \in \mathbb{N}$.

Se la misura di probabilità per $\boldsymbol{x}_k$ è invariante sotto permutazioni degli elementi di $\boldsymbol{x}_k$, ossia se

$$p(x_1, x_2, \dots, x_k) = p(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(k)}) \tag{1.3}$$

per ogni permutazione π dell'insieme $\{1, \dots, k\}$, diremo che $\boldsymbol{x}_k$ è *scambiabile*. Se $\boldsymbol{x}_k$ è scambiabile per ogni k, diremo che anche $\boldsymbol{x}$ è scambiabile. Se $\boldsymbol{x}_k$ può essere inclusa in una successione scambiabile $\boldsymbol{x}$, diremo che $\boldsymbol{x}_k$ è *estendibile e scambiabile all'infinito*[3].

La condizione di invarianza che impone la scambiabilità corrisponde al fatto fisico che l'ordine con cui compiamo le osservazioni sia irrilevante: si tratta di un'assunzione molto più legata all'idea di misura di quanto non lo sia la richiesta di avere variabili IID, che da questo punto di vista risulta in qualche modo ingiustificata.

Ci serve ora definire la *funzione di ripartizione empirica* associata alla misura sperimentale del campione $\boldsymbol{x}_k$, che utilizzeremo nella dimostrazione del teorema.

Definizione 1.2 (Funzione di ripartizione empirica)**.** Per ogni $k \in \mathbb{N}$, la funzione di ripartizione empirica associata a $\boldsymbol{x}_k$ è

$$F_k(t) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} I(x_i \leq t) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

dove $I(x_i \leq t)$ è la funzione indicatrice, definita come

$$\begin{cases} I(x_i) = 1 & \text{if } x_i \leq t \\ I(x_i) = 0 & \text{if } x_i > t \end{cases}$$

[2]Un esempio banale può essere quello del lancio della moneta: nell'approccio frequentista in cui ogni misura è indipendente da tutte le altre, dopo 999 teste su 1000 lanci la probabilità al lancio successivo sarà ancora $p = 1/2$. Nel caso bayesiano, l'agente avrà aggiornato dopo ogni lancio il suo stato di conoscenza, e sarà in grado di fare un'assegnazione probabilistica in grado di tenere conto del risultato dei 999 lanci precedenti.

[3]Spesso useremo semplicemente scambiabile, per brevità.

in modo che il valore di $F_k(t)$ ad un dato t sia la frazione dei valori osservati tali da essere minori o uguali a t.

Il motivo per cui abbiamo introdotto tale funzione è che è possibile mostrare che la funzione di ripartizione empirica tende asintoticamente alla distribuzione cumulativa esatta $p(\boldsymbol{x})$ dei punti del campione, e pertanto $F_k(t)$ è direttamente legata alla probabilità (cumulativa) su $\boldsymbol{x}_k$.

Similmente, $F_{\boldsymbol{x}}$ è la funzione di ripartizione empirica di $\boldsymbol{x}$

$$F_{\boldsymbol{x}}(t) = \lim_{k \to \infty} F_k(t) \tag{1.5}$$

con un'opportuna definizione di limite, affinché esista sempre. Per ogni scopo fisico conviene considerare $F_{\boldsymbol{x}}$ come descritta da un generico parametro ϑ, di modo che

$$F_{\boldsymbol{x}}(x_i) = p(x_i|\vartheta)$$

che è espressa direttamente come una probabilità condizionata e rappresenta la probabilità cumulativa di ottenere il valore x_i nella sequenza $\boldsymbol{x}$. Nell'approccio bayesiano, ϑ sarà un parametro non noto che segue una distribuzione a priori, mentre in quello frequentista sarà trattato come una costante non nota.

Possiamo ora enunciare il teorema di de Finetti.

Teorema 1.2 (Rappresentazione di de Finetti)**.** Se $\boldsymbol{x}$ è scambiabile e la sua funzione di ripartizione empirica è descritta tramite un parametro ϑ, allora la probabilità di ottenere una sequenza $\boldsymbol{x}_k$ è data da

$$p(\boldsymbol{x}_k) = \int \prod_{i=1}^{k} p(x_i|\vartheta) dQ(\vartheta) \tag{1.6}$$

dove $dQ(\vartheta)$ è una misura di probabilità sullo spazio di probabilità $\mathcal{S}$, ossia lo spazio dei possibili valori che può assumere ϑ.

Diamo una dimostrazione euristica del teorema in 1.2.3. Ricordiamo in particolare che una misura di probabilità è una misura a somma unitaria a valori reali e positivi, tale da poter essere esplicitata nei termini del parametro ϑ come

$$\int dQ(\vartheta) = \int_{\mathcal{S}} P(\vartheta) d\vartheta = 1$$

per una qualche misura $d\vartheta$ e una qualche densità di probabilità P a valori in $\mathcal{S}$ che, come vedremo, rappresenta la prior rispetto al parametro non noto ϑ.

1.2.2 Il teorema di de Finetti come fondamento della probabilità

Il teorema di de Finetti rappresenta il cardine dell'interpretazione della teoria delle probabilità espressa sinora. È immediato riscrivere la rappresentazione in una forma più esplicita se ci restringiamo al caso in cui ogni variabile casuale della successione possa assumere esattamente n valori discreti,

$$p(\boldsymbol{x}_k) = p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \int_{\mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^{k} p_{x_i} P(\boldsymbol{p}) d\boldsymbol{p} = \int_{\mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^{n} p_i^{n_i} P(\boldsymbol{p}) d\boldsymbol{p}$$

dove n_i è il numero di volte che si è presentato l'i-esimo degli n valori consentiti, e

$$\mathcal{S}_n = \left\{ \boldsymbol{p} : p_j \geq 0 \, \forall j \quad : \quad \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\}$$

è lo spazio di probabilità relativo. In questa forma diviene evidente che un agente può procedere *come se* il suo stato di conoscenza derivasse da una probabilità **p** oggettiva e a lui ignota, uguale per ognuna delle prove ripetute. La sua prior è rappresentata da $P(\mathbf{p})$ e descrive il suo stato di conoscenza soggettivo rispetto a **p**, sulla quale poi vanno mediate le varie probabilità p_i.

In questo senso l'approccio frequentista rimane operativamente sensato anche nell'ambito di una teoria bayesiana: il teorema di de Finetti ci garantisce l'equivalenza logica fra i due. Vale infatti anche il viceversa: l'ipotesi che l'idea frequentista di avere un certo valore vero non noto ϑ^* equivale ad una prior $P(\vartheta) = \delta(\vartheta - \vartheta^*)$, di modo che

$$p(\boldsymbol{x}_k) = \prod_{i=1}^{k} p(x_i | \vartheta = \vartheta^*)$$

che è esattamente il risultato che ci aspettiamo in un modello frequentista. Possiamo quindi affermare che il teorema di de Finetti e l'assunzione di scambiabilità siano alla base della deduzione della teoria delle probabilità.

La forma generale del teorema nella sua struttura matematica ci dice però qualcosa di più profondo: nel momento in cui in una successione di variabili casuali non conta l'ordine degli elementi, qualsiasi probabilità $p(\boldsymbol{x}_k)$ può essere generata attraverso (1.6) a partire da una probabilità $P(\vartheta)$, che acquista dunque il significato di probabilità a priori. Per una discussione dettagliata si può vedere il Capitolo 18 di [13]; per quanto ci riguarda, il punto principale è che il teorema di de Finetti dà un fondamento matematico alla posizione primaria dello stato di conoscenza soggettivo, dal quale si espande poi tutta la teoria bayesiana.

1.2.3 Una dimostrazione euristica del teorema

Consideriamo dapprima la seguente identità,

$$\begin{aligned}
[F_k(t) - F_{k+m}(t)]^2 = & \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i=1}^{k} I_i^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j \neq i}^{k} I_i I_j \right) + \frac{1}{(k+m)^2} \left(\sum_{i=1}^{k+m} I_i^2 + \sum_{i=1}^{k+m} \sum_{j \neq i}^{k+m} I_i I_j \right) \\
& - 2 \frac{1}{k} \frac{1}{k+m} \left(\sum_{i=1}^{k} I_i^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j \neq i}^{k+m} I_i I_j \right)
\end{aligned}$$

dove abbiamo indicato $I_i = I(x_i \leq t)$. Si noti in particolare che per definizione $I_i^2 = I_i$, e che

$$E(I_i) = 0 \cdot p(x_i > t) + 1 \cdot p(x_i \leq t) = p_i \qquad E(I_i I_j) = p(x_i \leq t, x_j \leq t)$$

ma d'altra parte se le x_i sono parte di una sequenza scambiabile esisterà sempre una permutazione che porta a $i = 1$ nel primo caso e a $i = 1$, $j = 2$ nel secondo. Non è pertanto restrittivo scrivere

$$E[(F_k - F_{k+m})^2] = \left(\frac{k}{k^2} + \frac{k+m}{(k+m)^2} - \frac{2k}{k(k+m)}\right) p(x_1 \leq t)$$
$$- \left(\frac{k(k-1)}{k^2} + \frac{(k+m)(k+m-1)}{(k+m)^2} - \frac{2k(k+m-1)}{k(k+m)}\right) p(x_1 \leq t, x_2 \leq t)$$

dove abbiamo semplicemente considerato il numero di termini in ogni sommatoria.

Otteniamo quindi

$$E[F_k(t) - F_{k+m}(t))^2] = \frac{m}{k+m}\frac{1}{k}\left[p(x_1 \leq t) - p(x_1 \leq t, x_2 \leq t)\right] \leq \frac{1}{k}$$

che ci permette di mostrare che la successione F_1, F_2, $\ldots$ è una successione di Cauchy sullo spazio delle distribuzioni di probabilità, che è completo. Pertanto diremo che tale successione converge in probabilità (i.e. converge con probabilità 1) a $F_x = \lim_{k\to\infty} F_k$. Possiamo quindi scrivere

$$\int \prod_{i=1}^{k} F_{\boldsymbol{x}}(x_i) dP(F_x) = \lim_{m\to\infty} \int \prod_{i=1}^{k} F_{k+m}(x_i) dP(F_{k+m})$$

e in particolare se introduciamo l'indicatore $I_\alpha = I(x_{\alpha_1} \leq x_1, \ldots, x_{\alpha_k} \leq x_k)$ sulle k-uple α vale l'identità

$$\prod_{j=1}^{k} F_{k+m}(x_j) = \left(\frac{1}{k+m}\right)^k \prod_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k+m} I(x_i \leq x_j) = \frac{1}{(k+m)^k} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_{k+m}^k} I_\alpha(x_k)$$

dove $\mathbb{N}_{k+m} = \{1, 2, 3, \ldots, k+m-1\}$.

Sia ora $\mathcal{N}_{k,m} = \{\alpha \in \mathbb{N}_{k+m}^k : \forall i \neq j \quad \alpha_i \neq \alpha_j\}$, in modo da poter definire le due funzioni

$$B(m) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_{k+m}^k - \mathcal{N}_{k,m}} I_\alpha(x_k) \qquad \text{e} \qquad B^*(m) = \sum_{\alpha\in\mathcal{N}_{k,m}} I_\alpha(x_k)$$

da cui

$$\prod_{j=1}^{k} F_{k+m}(x_j) = \frac{B(m) + B^*(m)}{(k+m)^k}$$

Le cardinalità dei due insiemi sono date da

$$\text{card}(\mathbb{N}_{k+m}^k) = (k+m)^k \qquad \text{card}(\mathcal{N}_{k,m}) = \prod_{j=1}^{k}(m+j) = (k+m)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{m+j}{k+m}$$

e possiamo pertanto scrivere il seguente limite superiore per $B(m)$,

$$B(m) \leq \text{card}(\mathbb{N}_{k+m}^k - \mathcal{N}_{k,m}) \leq (k+m)^k \left(1 - \prod_{j=1}^{k} \frac{m+j}{k+m}\right)$$

che ci permette di valutare il limite $\lim_{m\to\infty} B(m)/(k+m)^k = 0$.

Ci serve un'ultima identità: notiamo che

$$\begin{aligned}\int I_\alpha(x_k)dP(F_{k+m}) &= \int I(x_\alpha \leq x_1, \ldots, x_{\alpha_k} \leq x_k)dP(F_{k+m}) \\ &= p(x_\alpha \leq x_1, \ldots, x_{\alpha_k} \leq x_k)\end{aligned}$$

dove il passaggio dall'integrale alla probabilità segue dalla scambiabilità di $\boldsymbol{x}_k$, e indicheremo per brevità $p(x_\alpha \leq x_1, \ldots, x_{\alpha_k} \leq x_k) = F(\boldsymbol{x}_k)$.

Possiamo ora usare i risultati trovati per derivare il teorema di de Finetti.

$$\begin{aligned}\int \prod_{i=1}^{k} F_{\boldsymbol{x}}(x_i)dP(F_x) &= \lim_{m\to\infty} \int \prod_{i=1}^{k} F_{k+m}(x_i)dP(F_{k+m}) \\ &= \lim_{m\to\infty} \int \frac{B(m)+B^*(m)}{(k+m)^k} dP(F_{k+m}) \\ &= \lim_{m\to\infty} \int \frac{B^*(m)}{(k+m)^k} dP(F_{k+m}) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{\mathcal{N}_{k,m}} \frac{1}{(k+m)^k} \int I_\alpha(x_k)dP(F_{k+m}) \\ &= \lim_{m\to\infty} F(\boldsymbol{x}_k)\frac{\text{card}(\mathcal{N}_{k,m})}{(k+m)^k} = F(\boldsymbol{x}_k) \lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{k} \frac{m+j}{m+k}\end{aligned}$$

ma nell'ultimo termine il limite vale 1, e pertanto basta scegliere un parametro ϑ che indicizzi la funzione di ripartizione empirica per poter scrivere

$$\int \prod_{i=1}^{k} F_{\boldsymbol{x}}(x_i)dP(F_{\boldsymbol{x}}) = F(\boldsymbol{x}_k) \quad \Longrightarrow \quad p(\boldsymbol{x}_k) = \int \prod_{i=1}^{k} p(x_i|\vartheta)dP(\vartheta)$$

che è la rappresentazione cercata.

Capitolo 2

Il teorema di de Finetti quantistico

2.1 Sulla realtà fisica dello stato quantistico - I

Gli stati quantistici sono l'elemento centrale della formulazione matematica della Meccanica Quantistica: eppure tutt'oggi non esiste un accordo universale su quale sia la natura *fisica* di tali stati. Si pensi al paradosso EPR come riportato ad esempio da Bohm [1] e il relativo dibattito sulle teorie a variabili nascoste, o ai *no-go theorems* formulati nel corso degli anni.

Similmente a quanto fatto nel capitolo precedente, vogliamo riassumere alcune delle considerazioni che possono indicare la possibilità di un'interpretazione di natura bayesiana dello stato quantistico. Arriveremo in particolare alla formulazione del teorema di de Finetti nella sua versione quantistica, la cui differenza concettuale risiede nel fatto che ora le probabilità non emergono da un'incertezza riguardo ad una realtà deterministica, ma sono un elemento imprescindibile della teoria. Le conseguenze della rappresentazione di de Finetti, pertanto, giocano un ruolo molto più profondo in Meccanica Quantistica e possono essere annoverate fra le basi della sua interpretazione bayesiana.

2.1.1 Stati puri e stati misti in Meccanica Quantistica

Al fine di porci in un formalismo più generale, riportiamo brevemente come sia possibile esprimere sia stati puri, sia stati misti nei termini di un operatore densità ρ (cfr. [16]).

È noto che ad ogni osservabile è associato un operatore autoaggiunto $\mathcal{O}$ sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_d$ del sistema, che assumiamo per semplicità di dimensione finita d, il cui valore medio in uno stato puro $|\psi\rangle$ è espresso da

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\psi = \langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle \,.$$

Indichiamo con $|i\rangle$ gli autovettori di $\mathcal{O}$. Allora, poiché i proiettori Π_i relativi a $|i\rangle$ formano una decomposizione dell'identità, possiamo scrivere

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \psi | \left(\mathcal{O} \sum_i |i\rangle \langle i| \right) |\psi\rangle = \sum_i \langle i|\psi\rangle \langle \psi| \mathcal{O} |i\rangle = \mathrm{tr}\big(|\psi\rangle\langle\psi| \, \mathcal{O}\big)$$

dove $|\psi\rangle\langle\psi|$ è il proiettore sullo stato puro ψ.

Il vantaggio di questa scrittura è che si può generalizzare immediatamente al caso di un ensemble di n stati puri $|\varphi_n\rangle$ ai quali associamo una probabilità w_n, ossia ad uno stato misto. In questo caso, l'incertezza statistica su quale sia effettivamente lo stato puro del sistema si riflette nella media di ensemble

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \sum_n w_n \langle \varphi_n | \mathcal{O} | \varphi_n \rangle$$

dove w_n sono le probabilità che il sistema sia nello stato puro $|\varphi_n\rangle$. Se $|b\rangle$ è una base di $\mathcal{H}_d$ possiamo utilizzare le decomposizioni dell'identità per scrivere

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O} \rangle &= \sum_n w_n \sum_{b'=1}^{d} \sum_{b''=1}^{d} \langle \varphi_n | b' \rangle \langle b' | \mathcal{O} | b'' \rangle \langle b'' | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_{b'=1}^{d} \sum_{b''=1}^{d} \left(\sum_n w_n \langle b'' | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | b' \rangle \right) \langle b' | \mathcal{O} | b'' \rangle\end{aligned}$$

ed introduciamo un *operatore densità* definito come

$$\rho = \sum_n w_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| \tag{2.1}$$

per cui il valore di aspettazione di $\mathcal{O}$ si scrive semplicemente

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \sum_{b'=1}^{d} \sum_{b''=1}^{d} \langle b'' | \rho | b' \rangle \langle b' | \mathcal{O} | b'' \rangle = \mathrm{tr}(\rho \mathcal{O})$$

che è del tutto analoga a prima.

Abbiamo quindi trovato un ente matematico generale che permette di descrivere nel medesimo formalismo sia stati misti, sia stati puri,

$$\text{puro} \mapsto \rho = |\psi\rangle\langle\psi| \qquad \text{misto} \mapsto \rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$$

ed entrambi soddisfano alla condizione di normalizzazione

$$\mathrm{tr}(\rho) = \sum_b \sum_n p_n \langle b | \psi_n \rangle \langle \psi_n | b \rangle = \sum_n w_n \langle \psi_n | \psi_n \rangle = \sum_n p_n = 1$$

che, insieme alla richiesta che ρ sia autoaggiunto e semidefinito positivo, definisce uno spazio $\mathcal{D}_d$ degli operatori densità agenti su $\mathcal{H}_d$.

È a questo punto immediato riformulare la regola di Born: se λ_i è l'autovalore di $\mathcal{O}$ relativo all'autovettore $|i\rangle$, la probabilità di ottenere λ_i come risultato di una misura di $\mathcal{O}$ nello stato ρ è data da

$$p_i = \mathrm{tr}(\rho \Pi_i) = \langle i | \rho | i \rangle \tag{2.2}$$

che nel caso di uno stato puro $|\psi\rangle$ si riduce alla nota espressione $p_i = \langle i | \Pi_\psi | i \rangle = |\langle \psi | i \rangle|^2$.

2.1.2 Stati di spin $1/2$ sulla sfera di Bloch e non unicità della decomposizione degli operatori densità

Gli stati misti, anche nell'interpretazione ortodossa della Meccanica Quantistica, non rappresentano stati oggettivi: codificano invece l'impossibilità di assegnare con certezza un unico stato puro al sistema. In questo paragrafo vogliamo brevemente mostrare questo fatto facendo uso di una particolare rappresentazione degli stati di spin $1/2$, la sfera di Bloch.

È noto come l'autostato di spin lungo una direzione arbitraria espressa in coordinate polari sferiche si possa scrivere come

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}$$

per cui possiamo costruire l'operatore densità

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\vartheta}{2} & e^{-i\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} & \sin^2\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ 1+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

dove siamo nuovamente passati in coordinate cartesiane. Si noti che tale espressione può essere scritta in termini delle matrici di Pauli $\boldsymbol{\sigma}$ come

$$\rho = \frac{1}{2}\big[\mathbb{I} + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\big] = |\boldsymbol{n}\rangle\langle\boldsymbol{n}|$$

dove $\boldsymbol{n}$ è un versore in $\mathbb{R}^3$. Esiste dunque una corrispondenza biunivoca fra gli stati puri di spin $1/2$ e il bordo $\partial\mathbb{S}_3$ della sfera unitaria nell'usuale spazio tridimensionale, per cui possiamo indicare uno stato di spin in $\mathcal{H}_2$ con il ket $|\boldsymbol{n}\rangle$.

Tale rappresentazione può essere immediatamente generalizzata a stati misti come

$$\rho = \frac{1}{2}\big[\mathbb{I} + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma}\big] \tag{2.3}$$

con $0 \leq |\boldsymbol{S}| \leq 1$, per cui possiamo considerare l'isomorfismo fra un generico stato, puro o misto, e $\mathbb{S}_3$[1]. Se in particolare $|\boldsymbol{S}| < 1$, esistono infiniti modi di scrivere $\boldsymbol{S}$ come

$$\boldsymbol{S} = \sum_j p_j \boldsymbol{n}_j, \qquad |\boldsymbol{n}_j| = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \rho = \sum_j p_j\,|\boldsymbol{n}_j\rangle\langle\boldsymbol{n}_j|$$

il che significa che non può essere unica neanche la decomposizione dell'operatore densità ρ associato. Uno stato misto non è pertanto univocamente determinato in termini degli stati puri: al contrario, lo stesso operatore densità corrisponde ad un'infinità non numerabile di possibili decomposizioni. Per tale motivo gli stati misti non possono essere pensati come stati oggettivi della realtà, in qualsivoglia interpretazione della Meccanica Quantistica.

Un'interpretazione ontologica degli stati quantistici dunque sarebbe limitata unicamente agli stati puri, poiché per quanto appena detto non può esistere un accordo univoco sulla decomposizione dell'operatore densità associato ad uno stato misto. Se adottiamo un punto di vista bayesiano questo fatto trova spiegazione in un contesto naturale: se le probabilità sono soggettive nel già citato senso di Feynman [4], lo sarà anche uno stato misto che come tale diviene uno *stato di conoscenza* sul sistema.

Nei successivi paragrafi vogliamo però mostrare come possa essere trovata una dicotomia tale da giungere ad un'interpretazione di natura bayesiana *anche* per gli stati puri, seppure non sia un passaggio così immediato nel formalismo standard della

[1] Si noti che l'insieme $\{\mathbb{I}, \boldsymbol{\sigma}\}$ è una base per lo spazio degli operatori su $\mathbb{C}_2$, e pertanto la rappresentazione ricavata non è altro che l'espansione di ρ in tale base naturale. Il coefficiente $\frac{1}{2}$ garantisce che $\mathrm{tr}(\rho) = 1$, mentre poiché $\det\rho = \frac{1}{4}(1 - S^2)$ la condizione su $|\boldsymbol{S}|$ fornisce autovalori non negativi.

Meccanica Quantistica[2]. Parallelamente a quanto fatto nel paragrafo 1.2.2, sarà innanzitutto necessario costruire un analogo dello schema delle misure ripetute in una teoria classica. Come vedremo, in questo ambito sarà naturale un'estensione quantistica del teorema di de Finetti e la sua diretta interpretazione.

2.1.3 L'interpretazione bayesiana degli stati e la tomografia quantistica

L'interpretazione bayesiana degli stati quantistici ([6], [7], [12]) deriva dall'assunzione della probabilità in sé come stato di conoscenza soggettivo, ossia condizionato da una prior non giustificabile mediante criteri oggettivi.

L'idea di partenza è l'inversione della gerarchia logica fra operatori e probabilità che nasce nella formulazione assiomatica della Meccanica Quantistica, secondo la quale gli stati quantistici sono utilizzati per calcolare probabilità attraverso la regola di Born (2.2). Vorremmo poter equivalentemente sostenere che assegnare le probabilità corrispondenti ad un determinato insieme di misure equivalga ad assegnare uno stato quantistico [9]. Tale affermazione è resa precisa nel corso della sezione 2.2, ma intuitivamente è sufficiente pensare alla rappresentazione sulla sfera di Bloch: lo stato quantistico è completamente specificato a partire dalle proiezioni lungo i tre assi, che corrispondono esattamente alle probabilità delle relative misure.

Se a questo punto la probabilità è soggettiva, tale dovrà essere anche lo stato quantistico, nella misura in cui due agenti con un diverso grado di conoscenza hanno sempre la possibilità di assegnare diverse probabilità. Gli stati quantistici dunque *codificano* l'informazione (di un agente) riguardo ad un sistema quantistico. In un approccio bayesiano alle probabilità quantistiche il fatto che non esista un risultato della misura prima della misura stessa [6] diviene naturale: la probabilità di ottenere un particolare risultato deriva da uno stato di conoscenza soggettiva, lo stato quantistico ρ, ed è pertanto soggettiva anch'essa in quanto priva di alcun valore ontologico.

Un primo ed immediato problema che sorge di fronte a questo tipo di interpretazione è il seguente: se la Meccanica Quantistica incorpora un principio bayesiano, e quindi soggettivo, perché la Meccanica Classica è invece deterministica? Qual è la fondamentale differenza fra le due teorie? Una possibilità, esplorata in [2] e in [9], è che in Meccanica Quantistica l'informazione massimale, corrispondente all'assegnazione di un unico operatore densità, non sia completa e non possa essere completata. Il problema fisico dunque non è eliminato, ma piuttosto è codificato nella domanda *perché non è possibile ottenere un'informazione massimale e completa?* piuttosto che in *come si può completare lo stato quantistico?*. In questo senso l'interpretazione bayesiana, come sarà meglio esplorato nel prossimo capitolo della tesi, non è volta a ridurre l'intera teoria ad un grado soggettivo di un agente. L'accento è posto proprio sulla necessità di trovare dei parametri fisici oggettivi all'interno di un formalismo che in questa interpretazione include, senza una netta distinzione, anche oggetti di natura informazionale come lo stato quantistico.

La distinzione fra uno stato oggettivo e uno stato soggettivo emerge immediatamente nel contesto della tomografia quantistica, che può essere considerato l'analogo delle prove ripetute classiche. Qualitativamente [3], la tomografia quantistica è una

[2]Ci riferiamo qui all'immediata necessità di introdurre le *Positive Operator-Valued Measures* per generalizzare il contesto delle misure proiettive e poter dimostrare il teorema di de Finetti quantistico. Si tratta però di un fatto che, per gli stati puri in generale, si ripete: ad esempio il collasso della funzione d'onda può essere scomposto per ricalcare un processo di aggiornamento bayesiano e la stessa regola di Born può essere riformulata in termini di sole probabilità, come discusso nel corso del Capitolo 3, ma è necessario costruire enti matematici che di per sé non sono utilizzati nel formalismo canonico della Meccanica Quantistica. Il caso dell'immediata possibilità di un'interpretazione bayesiana che avviene per gli stati misti non troverà dunque analogo per gli stati puri.

procedura di misura nella quale un dispositivo prepara N copie di un sistema, ognuno in un determinato stato quantistico ρ, puro o misto. Lo stato congiunto degli N sistemi, che indichiamo con $\rho^{(N)}$, non è noto a priori.

Lo scopo della tomografia quantistica è di ricostruire lo stato ρ a partire da una successione di misure sui vari sistemi così preparati, ossia a partire dalle distribuzioni di probabilità ricavate dalle misure. Nell'ambito dell'interpretazione bayesiana, diviene difficile identificare un agente che stia effettuando l'assegnazione dello stato $\rho^{(N)}$, che per definizione non è noto a priori. Il teorema di de Finetti mostra come sia possibile rappresentare $\rho^{(N)}$ attraverso una media sui singoli stati oggettivi[3] ρ, il cui peso è dato da una distribuzione di probabilità a priori su ρ stesso.

2.2 Misure generalizzate in Meccanica Quantistica

Per dimostrare il teorema di de Finetti quantistico, e per giustificare quanto asserito all'inizio del paragrafo 2.1.3, faremo uso di una generalizzazione del concetto di misura in Meccanica Quantistica introducendo le cosiddette POVM (*positive operator-valued measures*).

La regola di Born (2.2) mostra che la probabilità associata ad una misura di $\mathcal{O}$ di ottenere come risultato l'i-esimo autovalore λ_i discende direttamente dal proiettore $\Pi_i = |i\rangle\langle i|$ relativo all'i-esimo autovettore $|i\rangle$. Sono proprio le proprietà dei proiettori di essere operatori semidefiniti positivi e formare una decomposizione dell'identità $\sum_{i=1}^{d} \Pi_j = \mathbb{I}$ che garantiscono

$$p_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{d} p_i = 1$$

ossia che i risultati di (2.2) possano essere interpretati come probabilità. Vogliamo ora slegare la misura dai proiettori in sé mantenendo unicamente le proprietà che la caratterizzano.

Questa necessità, oltre che per costruire un apparato formale più completo, è dettata anche dal fatto fisico che i proiettori semplicemente non possono descrivere tutte le procedure fisiche di misura: si pensi all'esempio dato in [14] della misura della posizione di un fotone nella quale il fotone viene distrutto, per cui non vi è alcun autostato sul quale proiettare il sistema[4]. In questa sezione discuteremo la definizione delle POVM, mentre il problema della misura in sé indotta da una POVM è trattato nei paragrafi 3.1.2 e 3.1.3, dove discuteremo da un punto di vista bayesiano le misure ripetute quantistiche e il collasso della funzione d'onda.

2.2.1 *Positive Operator-Valued Measures*

A partire dalle considerazioni riportate sopra, al fine di generalizzare il concetto di misura in Meccanica Quantistica possiamo dare la seguente definizione.

[3]Intendiamo qui che $\rho^{(N)}$ può essere pensato *come se* emergesse a partire da stati oggettivi ρ; ma è solo *come se*, poiché la prior non è definita univocamente e di conseguenza non lo è neanche $\rho^{(N)}$.

[4]In generale, il problema è che le misure proiettive sono necessariamente ripetibili: Π_i fa collassare il sistema in $|i\rangle$, per cui una qualsiasi misura successiva della medesima grandezza fisica continuerà a dare come risultato i. È riduttivo pensare che tutte le procedure di misura possano essere pensate in questo formalismo.

Definizione 2.1 (POVM)**.** Un insieme $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}$ è detto una *positive operator-valued measure* se i suoi elementi sono operatori autoaggiunti semidefiniti positivi su $\mathcal{H}_d$ che formano una decomposizione dell'identità, ossia tali che

$$\langle\psi|E_\alpha|\psi\rangle \geq 0 \qquad \forall\,|\psi\rangle \in \mathcal{H}_d \tag{2.4}$$

e

$$\sum_\alpha E_\alpha = \mathbb{I} \tag{2.5}$$

Ogni indice α corrisponde ad un possibile risultato della misura, e la regola di Born generalizzata

$$p_\alpha = \mathrm{tr}(\rho E_\alpha) \tag{2.6}$$

dà la probabilità di ottenere tale risultato.

A differenza della definizione standard di misura, in una POVM non ci sono limitazioni ai valori che può assumere α, che può essere superiore alla dimensione dello stesso spazio di Hilbert. Inoltre, gli operatori E_α non devono necessariamente essere ortogonali fra loro, dato che in $\mathcal{H}_d$ possono esistere al più d stati ortogonali.

In generale una POVM su $\mathcal{H}_d$ può essere rappresentata da un numero arbitrario di operatori E_α. Di particolare interesse sono però quelle POVM tali che la conoscenza dell'insieme delle probabilità p_α sia sufficiente per definire un unico operatore ρ su $\mathcal{H}_d$: in tal caso la regola di Born (2.6) ci garantisce l'equivalenza fra l'assegnazione di ρ e l'assegnazione dell'insieme p_α.

Definizione 2.2 (POVM completa)**.** Sia $O(\mathcal{H}_d)$ lo spazio degli operatori su $\mathcal{H}_d$. Se gli elementi di una POVM E_α generano al variare di α lo spazio $O(\mathcal{H}_d)$, diremo che $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}$ è completa e la indicheremo con IC-POVM (*informationally complete positive operator-valued measure*).

Se consideriamo d nel senso del campo su cui $\mathcal{H}_d$ è definito, vale $\dim[O(\mathcal{H}_d)] = d^2$ e ne segue che una IC-POVM deve avere almeno d^2 elementi. Si noti in particolare che in Meccanica Quantistica questa uguaglianza, intesa sui reali, è mantenuta anche per lo spazio degli operatori autoaggiunti $\mathcal{D}_d$, ossia lo spazio delle osservabili fisiche. Infatti un operatore autoaggiunto in $\mathcal{H}_d$ sul campo complesso ha un numero di elementi reali indipendenti pari a

$$2\underbrace{\frac{d(d-1)}{2}}_{\text{fuori diagionale}} + \underbrace{d}_{\text{diagonale}} = d^2 \tag{2.7}$$

poiché ricordiamo che gli operatori in $\mathcal{D}_d$ possono essere rappresentati da matrici hermitiane. Una costruzione della Meccanica Quantistica con spazi di Hilbert sul campo reale fa sì che non compaia il primo fattore 2 in (2.7)[5] e, come vedremo in dettaglio nel paragrafo 3.1.1, tale fatto impedisce la possibilità di una rappresentazione quantistica di de Finetti.

Note p_α, per specificare un unico operatore A tale che $p_\alpha = \mathrm{tr}(AE_\alpha)$ è sufficiente che $\alpha = 1, \ldots, d^2$, ossia che tutti gli elementi di $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}$ siano proprio elementi di una base. Diremo allora che una IC-POVM è anche *minima* se è composta esattamente da d^2 elementi, e la chiameremo MIC-POVM.

[5] Nel campo complesso ogni elemento fuori diagonale $x + iy$ di un operatore autoaggiunto ha infatti due componenti reali x, y indipendenti, ma questo ovviamente non avviene nel campo reale.

Teorema 2.1 (esistenza delle MIC-POVM)**.** Dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_d$ e lo spazio $O(\mathcal{H}_d)$ degli operatori che vi agiscono, esiste sempre un insieme $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}$, con $\alpha = 1, \ldots, d^2$, tale che $\mathcal{E}$ sia una POVM e che $\{E_\alpha\}$ sia una base per $O(\mathcal{H}_d)$.

Tale teorema è cruciale nella dimostrazione del teorema di de Finetti quantistico, ma è anche fondamentale da un punto di vista concettuale: abbiamo reso matematicamente precisa la corrispondenza biunivoca fra stati quantistici e probabilità supposta nel paragrafo 2.1.3, perché esiste sempre una MIC-POVM in grado di soddisfare tale richiesta. Siamo ora legittimati ad affermare, come già fatto, che la Meccanica Quantistica possa essere costruita a partire dalle probabilità, e non dagli stati; non esistono proprietà matematiche incorporate in un generico stato quantistico, ossia in un operatore densità ρ, che non siano altresì incorporate nel relativo insieme di probabilità p_α risultanti da una MIC-POVM.

La dimostrazione del teorema è data nel prossimo paragrafo, dove mostriamo esplicitamente come sia possibile costruire una MIC-POVM in un generico spazio $\mathcal{H}_d$.

2.2.2 Costruzione di una MIC-POVM

Dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_d$, consideriamone la base canonica $|e_j\rangle$, $j = 1, \ldots, j$.

Introduciamo il simbolo $\Gamma_{jk} = |e_j\rangle\langle e_k|$, e definiamo la famiglia di operatori Π_α nel seguente modo.

$$\begin{aligned}
\alpha = 1, \ldots, d \qquad &\Longrightarrow \qquad \Pi_\alpha = \Gamma_{jj} \\
\alpha = d+1, \ldots, \frac{1}{2}d(d+1) \qquad &\Longrightarrow \qquad \Pi_\alpha = \frac{1}{2}(\Gamma_{jj} + \Gamma_{kk} + \Gamma_{jk} + \Gamma_{kj}) \qquad (j < k) \\
\alpha = \frac{1}{2}d(d+1)+1, \ldots, d^2 \qquad &\Longrightarrow \qquad \Pi_\alpha = \frac{1}{2}(\Gamma_{jj} + \Gamma_{kk} - i\Gamma_{jk} + i\Gamma_{kj}) \qquad (j < k)
\end{aligned}$$

Per costruzione, Π_α sono un insieme di d^2 operatori linearmente indipendenti. Definiamo ora l'operatore

$$G = \sum_{\alpha=1}^{d^2} \Pi_\alpha$$

è mostriamo che è semidefinito positivo. Dato $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_d$, vale

$$\begin{aligned}
\langle\psi|G|\psi\rangle = &\sum_{\alpha=1}^{d^2} |\langle\psi|e_j\rangle|^2 + \sum_{\alpha=d+1}^{d^2} |\langle\psi|e_k\rangle|^2 \\
&+ \sum_{\alpha=d+1}^{\frac{1}{2}d(d+1)} [\langle\psi|e_j\rangle\langle e_k|\psi\rangle + \langle\psi|e_k\rangle\langle e_j|\psi\rangle] \\
&+ \sum_{\alpha=\frac{1}{2}d(d+1)+1}^{d^2} [-i\langle\psi|e_j\rangle\langle e_k|\psi\rangle + i\langle\psi|e_k\rangle\langle e_j|\psi\rangle]
\end{aligned}$$

e se per brevità indichiamo con A e B rispettivamente il numero di termini nella penultima e nell'ultima sommatoria, gli ultimi due addendi si scrivono

$$(A - iB)\langle\psi|e_j\rangle\langle e_k|\psi\rangle + (A + iB)\langle\psi|e_k\rangle\langle e_j|\psi\rangle = z + z^*, \qquad z \in \mathbb{C}$$

che sono l'uno il complesso coniugato dell'altro. Poiché $\mathrm{sign}(z + z^*) = \mathrm{sign}(\mathrm{Re}\, z) = \mathrm{sign}(A) > 0$, possiamo concludere che

$$\langle\psi|G|\psi\rangle \geq 0 \qquad \forall\, |\psi\rangle \in \mathcal{H}_d$$

ed in particolare G è invertibile.

Definiamo ora la mappa lineare $\zeta : O(\mathcal{H}_d) \mapsto O(\mathcal{H}_d)$ data da[6]

$$\zeta(X) = G^{-1/2}\, X\, G^{-1/2}$$

per cui possiamo mappare G in

$$\zeta(G) = \sum_{\alpha=1}^{d^2} G^{-1/2}\, \Pi_\alpha\, G^{-1/2}$$

ma d'altra parte G stesso è anche mappato in $\zeta(G) = G^{-1/2}\, G\, G^{-1/2} = \mathbb{I}$, per cui abbiamo trovato una decomposizione di $\mathbb{I}$.

Possiamo allora introdurre la famiglia di operatori

$$E_\alpha = G^{-1/2}\, \Pi_\alpha\, G^{-1/2} \tag{2.8}$$

che sappiamo già formare una decomposizione dell'identità. Se i vari E_α fossero anche semidefiniti positivi, avremmo ottenuto un insieme di d^2 elementi linearmente indipendenti tale da formare un POVM, e il teorema 2.1 sarebbe dimostrato. Poiché G è semidefinito positivo, lo è anche la radice del suo inverso, e ci basta mostrare che lo sono anche i vari Π_α. In particolare, mostriamo che Π_α è un proiettore su $\mathcal{H}_d$ per ogni α.

Notiamo innanzitutto che

$$\Pi_\alpha^2 = \Pi_\alpha$$

banale per $\alpha = 1, \ldots, d$. D'altra parte vale $\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_{\sigma\rho} = \delta_{\nu\sigma}\, |e_\mu\rangle\, \langle e_\rho|$, e se ricordiamo che per costruzione $j \neq k$ possiamo considerare non nulli solo i termini della forma $\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_{\nu\sigma}$. Allora per $\alpha = d+1, \ldots, \frac{1}{2}d(d+1)$ otteniamo

$$\begin{aligned}\Pi_\alpha^2 &= \frac{1}{4}\left[\Gamma_{jj} + \delta_{jk}\Gamma_{jk} + \Gamma_{jk} + \delta_{jk}\Gamma_{jj} + \ldots\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\Gamma_{jj} + \Gamma_{jk} + \Gamma_{kk} + \Gamma_{kj} + \Gamma_{jk} + \Gamma_{jj} + \Gamma_{kj} + \Gamma_{kk}\right] = \Pi_\alpha\end{aligned}$$

e analogamente per i restanti valori di α.

Resta solo da mostrare che Π_α è autoaggiunto. Notato che $\Gamma^\dagger_{\mu\nu} = |e_\nu\rangle\, \langle e_\mu| = \Gamma_{\nu\mu}$, è immediato notare che i vari Π_α sono invarianti per scambio di indici $j \to k$ e simultanea coniugazione, ossia

$$\Pi_\alpha^\dagger = \frac{1}{2}[\Gamma_{jj} + \Gamma_{kk} + \Gamma_{kj} + \Gamma_{jk}] = \Pi_\alpha$$

e

$$\Pi_\alpha^\dagger = \frac{1}{2}[\Gamma_{jj} + \Gamma_{kk} + i\Gamma_{kj} - i\Gamma_{jk}] = \Pi_\alpha$$

mentre per $\alpha = 1, \ldots, d$ è banale.

[6] Ricordiamo che la radice quadrata di un operatore limitato A è definita come quell'operatore $M := A^{1/2}$ tale che $A = M^\dagger M$.

È noto che un operatore è idempotente e autoaggiunto se e solo se è un proiettore, e che ogni proiettore è semidefinito positivo. Pertanto ne segue che anche gli operatori E_α definiti in (2.8) sono definiti positivi, e per quanto detto formano una MIC-POVM. Poiché l'unica assunzione alla base della dimostrazione è l'esistenza della base canonica, possiamo concludere che in ogni spazio di Hilbert $\mathcal{H}_d$ esiste almeno una MIC-POVM.

2.3 La rappresentazione quantistica di de Finetti

La costruzione della rappresentazione quantistica di de Finetti procede in maniera analoga al caso classico. Sarà innanzitutto necessario definire cosa si intende per uno stato scambiabile per poter enunciare il teorema. La dimostrazione qui proposta [3] fa uso delle MIC-POVM sopra introdotte e mostra immediatamente una peculiarità del teorema, come vedremo nel paragrafo 3.1.1: vale in spazi di Hilbert complessi ma fallisce, ad esempio, per gli spazi reali.

2.3.1 Scambiabilità per un sistema quantistico

Facendo riferimento alla descrizione qualitativa della tomografia quantistica introdotta nel paragrafo 2.1.3, uno stato congiunto di N sistemi $\rho^{(N)}$ è detto simmetrico se è invariante rispetto una qualsiasi permutazione dei suddetti sistemi. Formalmente, diamo la seguente definizione.

Definizione 2.3 (Stato simmetrico)**.** Sia $|i_1\rangle\,|i_2\rangle\ldots|i_N\rangle$ una base ortonormale per il prodotto tensore $\mathcal{H}_d^{\otimes N}$ degli spazi di Hilbert dei singoli sistemi. Sia $R^{(N)}_{i_1,\ldots,i_N;j_1,\ldots,j_N}$ la matrice densità nella rappresentazione indotta da $|i_1\rangle\,|i_2\rangle\ldots|i_N\rangle$,

$$\rho^{(N)} = \sum_{i_1,\ldots,i_N;j_1,\ldots,j_N} R^{(N)}_{i_1,\ldots,i_N;j_1,\ldots,j_N} \; |i_1\rangle\ldots|i_N\rangle\,\langle j_1|\ldots\langle j_N|$$

Diremo che lo stato $\rho^{(N)}$ è simmetrico se è invariante rispetto ad una qualsiasi permutazione π di $\{1,\ldots,N\}$, ossia se lo è la sua matrice densità

$$R^{(N)}_{i_{\pi(1)},\ldots,i_{\pi(N)};j_{\pi(1)},\ldots,j_{\pi(N)}} = R^{(N)}_{i_1,\ldots,i_N;j_1,\ldots,j_N} \tag{2.9}$$

indipendentemente dalla rappresentazione scelta.

La richiesta di simmetria è analoga alla scambiabilità finita per le variabili classiche, e coinvolge unicamente la matrice densità poiché la base di $\mathcal{H}_d^{\otimes N}$ è banalmente invariante per permutazioni. Possiamo ora dare la definizione generale di scambiabilità.

Definizione 2.4 (Scambiabilità)**.** Uno stato $\rho^{(N)}$ è detto scambiabile se è simmetrico e se per ogni $M \in \mathbb{N}$ esiste uno stato simmetrico $\rho^{(N+M)}$ di $N+M$ sistemi tale che

$$\rho^{(N)} = \mathrm{tr}_M(\rho^{(N+M)}) \tag{2.10}$$

dove tr_M denota la traccia parziale, ossia

$$\rho^{(N)} = \sum_{i_1,\ldots,i_N;j_1,\ldots,j_N} \left(\sum_{i_{N+1},\ldots,i_{N+M}} R^{(N+M)}_{i_1,\ldots,i_N,i_{N+1},\ldots,i_{N+M};j_1,\ldots,j_N,i_{N+1},\ldots,i_{N+M}} \right) \cdot |i_1\rangle \ldots |i_N\rangle \langle j_1| \ldots \langle j_N|$$

è la richiesta in termini di matrici densità.

In analogia al caso classico, un operatore densità scambiabile $\rho^{(N)}$ può essere pensato come descrittivo di un sottosistema di un'infinita successione di sistemi il cui ordine non è rilevante. Il caso della tomografia quantistica è un'immediata realizzazione di tali condizioni.

2.3.2 Il teorema di de Finetti quantistico

Possiamo ora enunciare e dimostrare il teorema di de Finetti quantistico. In particolare, faremo uso del teorema classico nel considerare le distribuzioni di probabilità che seguono da una serie ripetuta di misure generalizzate su un sistema quantistico, rappresentato da un operatore densità complessivo $\rho^{(N)}$. L'interpretazione fisica del teorema di de Finetti quantistico è esplorata nel prossimo capitolo, dove delineeremo le basi di un'interpretazione bayesiana per la Meccanica Quantistica.

Teorema 2.2 (rappresentazione quantistica di de Finetti)**.** Uno stato scambiabile di N sistemi può sempre essere scritto nella forma

$$\rho^{(N)} = \int_{\mathcal{D}_d} P(\rho)\rho^{\otimes N}\, d\rho \tag{2.11}$$

dove $\mathcal{D}_d$ è lo spazio degli operatori densità su $\mathcal{H}_d$, e

$$\int_{\mathcal{D}_d} P(\rho)\, d\rho = 1 \tag{2.12}$$

per cui $P(\rho)$ è una densità di probabilità su $\mathcal{D}_d$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}$ una MIC-POVM, la quale rappresenta una misura su ognuno degli N sistemi. Tale insieme di misure può essere equivalentemente descritto da una singola POVM su $\mathcal{H}_d^{\otimes N}$, che denotiamo con $\mathcal{E}^{\otimes N}$ e i cui $(d^2)^N$ elementi sono dati da $E_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes E_{\alpha_N}$. Pensiamo alla POVM $\mathcal{E}$ applicata ad ognuno degli N sistemi, per i quali il risultato può essere α_n con $n = 0, 1, \ldots, N$.

Se $\rho^{(N)}$ è lo stato congiunto degli N sistemi, la probabilità di ottenere un'arbitraria successione di N risultati $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ è data dalla regola di Born

$$p^{(N)}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{tr}\left(\rho^{(N)} E_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes E_{\alpha_N}\right) \tag{2.13}$$

D'altra parte se $\rho^{(N)}$ è scambiabile, per il teorema classico possiamo scrivere la probabilità $p^{(N)}(\boldsymbol{\alpha})$ come

$$p^{(N)}(\boldsymbol{\alpha}) = \int_{\mathcal{S}_{d^2}} P(\boldsymbol{p})\, p_{\alpha_1} \ldots p_{\alpha_N} d\boldsymbol{p} \tag{2.14}$$

ed è a questo punto che utilizziamo la particolare scelta di una MIC-POVM, che ricordiamo esistere sempre in ogni spazio $\mathcal{H}_d$.

Infatti, poiché $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}$ è una base per $\mathcal{D}_d$,

$$\exists!\, A_{\boldsymbol{p}} : \quad \operatorname{tr}(A_{\boldsymbol{p}} E_\alpha) = p_\alpha \quad \alpha = 1, \ldots, d^2$$

che rappresentano le d^2 equazioni lineari che specificano unicamente $A_{\boldsymbol{p}}$.

Poiché il prodotto tensore è tale che $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ e $\operatorname{tr}(A \otimes B) = (\operatorname{tr} A) \operatorname{tr}(B)$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
p^{(N)}(\boldsymbol{\alpha}) &= \int_{\mathcal{S}_{d^2}} P(\boldsymbol{p}) \prod_{n=1}^{N} \operatorname{tr}(A_{\boldsymbol{p}} E_{\alpha_n})\, d\boldsymbol{p} \\
&= \int_{\mathcal{S}_{d^2}} P(\boldsymbol{p}) \operatorname{tr}\left(\bigotimes_{n=1}^{N} A_{\boldsymbol{p}} E_{\alpha_n} \right) d\boldsymbol{p} \\
&= \int_{\mathcal{S}_{d^2}} P(\boldsymbol{p}) \operatorname{tr}\left[A_{\boldsymbol{p}}^{\otimes N} \bigotimes_{n=1}^{N} E_{\alpha_n} \right] d\boldsymbol{p} \\
&= \operatorname{tr}\left[\left(\int_{\mathcal{S}_{d^2}} P(\boldsymbol{p}) A_{\boldsymbol{p}}^{\otimes N}\, d\boldsymbol{p} \right) E_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes E_{\alpha_N} \right]
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato anche la linearità della traccia.

Confrontando il risultato appena ottenuto a partire da (2.14) con (2.13) per una qualsiasi sequenza $\boldsymbol{\alpha}$ di misure, otteniamo

$$\rho^{(N)} = \int_{\mathcal{S}_{d^2}} P(\boldsymbol{p}) A_{\boldsymbol{p}}^{\otimes N}\, d\boldsymbol{p} \tag{2.15}$$

poiché $E_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes E_{\alpha_N}$ è una base per lo spazio vettoriale degli operatori su $\mathcal{H}_d^{\otimes N}$.

Notiamo che l'operatore $A_{\boldsymbol{p}}$ è autoaggiunto, poiché

$$\operatorname{tr}\Big(E_\alpha A_{\boldsymbol{p}}^\dagger\Big) = \operatorname{tr}\Big[(A_{\boldsymbol{p}} E_\alpha)^\dagger\Big] = [\operatorname{tr}(A_{\boldsymbol{p}} E_\alpha)]^* = p_\alpha^* = p_\alpha = \operatorname{tr}(A_{\boldsymbol{p}} E_\alpha)$$

ed essendo E_α una base vale $A_{\boldsymbol{p}}^\dagger = A_{\boldsymbol{p}}$. Inoltre,

$$1 = \sum_\alpha p_\alpha = \sum_\alpha \operatorname{tr}(A_{\boldsymbol{p}} E_\alpha) = \operatorname{tr}\left(A_{\boldsymbol{p}} \sum_\alpha E_\alpha \right) = \operatorname{tr}(A_{\boldsymbol{p}})$$

mostra come gli autovalori di $A_{\boldsymbol{p}}$ sommino all'unità.

Questa rappresentazione non è, tuttavia, quella cercata, poiché le due proprietà appena elencate non sono sufficienti: $A_{\boldsymbol{p}}$ non è in generale un operatore densità dato che non è a priori semidefinito positivo, per cui non avrà neanche autovalori sempre positivi. L'idea generale da cui muoviamo per dimostrare il teorema è di trovare una condizione ulteriore al fine di eliminare gli elementi $\boldsymbol{p} \in \mathcal{S}_{d^2}$ che non possono essere generati applicando la misura $\mathcal{E}$ a qualsivoglia stato quantistico, ossia quelle probabilità $\boldsymbol{p}$ che non hanno alcun significato fisico e che derivano da tali autovalori negativi.

Per mostrare che tali $\boldsymbol{p}$ esistono, facciamo uso di uno stato puro di spin $\frac{1}{2}$ nella rappresentazione della sfera di Bloch $|\boldsymbol{n}_\alpha\rangle \in \mathcal{H}_2$. In particolare, scegliamo quattro versori $\boldsymbol{n}_\alpha$ tali da poter costruire una MIC-POVM considerando i quattro proiettori associati. Se A è una costante,

$$\mathbb{I} = \sum_{\alpha=1}^{4} E_\alpha = A \sum_{\alpha=1}^{4} |\boldsymbol{n}_\alpha\rangle\langle\boldsymbol{n}_\alpha| = \frac{A}{2} \sum_{\alpha=1}^{4} [\mathbb{I} + \boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma}] = 2A\mathbb{I} + \sum_{\alpha=1}^{4} \boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

per cui dovrà essere $A = \frac{1}{2}$. Se poi scegliamo i versori $\boldsymbol{n}_\alpha$ corrispondenti ai vertici di un tetraedro regolare con uno spigolo di base parallelo all'asse x,

$$\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma_x(n_x - n_x) + \sigma_y(n_y - \frac{1}{2}n_y - \frac{1}{2}n_y) + \sigma_z(3n_z - n_z - n_z - n_z) = 0$$

per cui gli E_α soddisfano le condizioni degli elementi di una MIC-POVM, ed in particolare sono tali che $p_\alpha = \mathrm{tr}(\rho E_\alpha) \leq \frac{1}{2}$. A questo punto abbiamo costruito una MIC-POVM che non potrà mai dare origine ad un elemento arbitrario di $\mathcal{S}_{d^2}$, ad esempio $\boldsymbol{p} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right)$. Dunque la rappresentazione (2.15) costituisce una media su operatori $A_{\boldsymbol{p}}$ che non rappresentano nessun tipo di misura e, senza ulteriori richieste, non ha alcun significato fisico.

Per eliminare tali elementi è necessario imporre esplicitamente la condizione che $\rho^{(N)}$ sia un operatore densità, ed in particolare mostreremo che tale proprietà è mantenuta se e solo se ad ogni $A_{\boldsymbol{p}}$ non fisico corrisponde un peso $P(\boldsymbol{p})$ nullo: stiamo dunque ponendo delle condizioni sulla prior.

Sia $A_{\boldsymbol{q}}$ tale che

$$A_{\boldsymbol{q}} |\psi\rangle = (-\lambda) |\psi\rangle , \qquad -\lambda < 0$$

ossia sia $\boldsymbol{q}$ uno degli elementi di $\mathcal{S}_{d^2}$ non fisici. Consideriamo la POVM

$$\tilde{\Pi} = |\psi\rangle\langle\psi| , \qquad \Pi = \mathbb{I} - \tilde{\Pi}$$

per cui

$$\mathrm{tr}\left(A_{\boldsymbol{q}}\tilde{\Pi}\right) = -\lambda < 0, \qquad \mathrm{tr}(A_{\boldsymbol{q}}\Pi) = 1 + \lambda > 1$$

poiché i due autovalori devono avere somma unitaria, dato che i due operatori costituiscono una POVM.

Ipotizziamo ora di ripetere N volte la misura. Si noti in particolare che $\mathrm{tr}(A_{\boldsymbol{p}}\Pi) = p_\Pi$ è lineare e continua in $\boldsymbol{p}$, di modo che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \qquad |\,\mathrm{tr}(A_{\boldsymbol{p}}\Pi) - \mathrm{tr}(A_{\boldsymbol{q}}\Pi)| < \varepsilon \quad \forall |\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}| \leq \delta$$

e definiamo la palla chiusa $B_\delta(\boldsymbol{q})$ nella quale è contenuto $\boldsymbol{p}$. Sia poi

$$B^*_\delta(\boldsymbol{q}) = B_\delta(\boldsymbol{q}) \cap \mathcal{S}_{d^2}$$

e scegliamo in particolare $\varepsilon < \lambda$, di modo che

$$\mathrm{tr}(A_{\boldsymbol{p}}\Pi) \geq 1 + \lambda - \varepsilon > 1 \qquad \forall \boldsymbol{p} \in B^*_\delta(\boldsymbol{q})$$

A questo punto possiamo utilizzare la rappresentazione trovata e la linearità della traccia per scrivere

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left(\rho^{(N)}\Pi^{\otimes N}\right) &= \int_{\mathcal{S}_{d2}} P(\boldsymbol{p}) \left[\mathrm{tr}(A_{\boldsymbol{p}}\Pi)\right]^N \, d\boldsymbol{p} \\
&= \int_{\mathcal{S}_{d^2} - B^*_\delta} P(\boldsymbol{p}) \left[\mathrm{tr}(A_{\boldsymbol{p}}\Pi)\right]^N \, d\boldsymbol{p} + \int_{B^*_\delta} P(\boldsymbol{p}) \left[\mathrm{tr}(A_{\boldsymbol{p}}\Pi)\right]^N \, d\boldsymbol{p}
\end{aligned}$$

e, poiché non è restrittivo, scegliamo $N := 2N'$ pari di modo da poter scrivere la disuguaglianza

$$\mathrm{tr}\Big(\rho^{(2N')}\Pi^{\otimes 2N'}\Big) \geq \int_{B_\delta^*} P(\boldsymbol{p})\,[\mathrm{tr}(A_{\boldsymbol{p}}\Pi)]^{2N'}\; d\boldsymbol{p}$$

ricordando che $P(\boldsymbol{p})$ sono densità di probabilità per il teorema classico e quindi sono semidefinite positive, e che con la scelta di $2N'$ anche l'altro termine è positivo. Possiamo quindi concludere che

$$\mathrm{tr}\Big(\rho^{(2N')}\Pi^{\otimes 2N'}\Big) \geq (1+\lambda-\varepsilon)^{2N'} \int_{B_\delta^*} P(\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p} \tag{2.16}$$

il che è assurdo nel momento in cui richiediamo che $\rho^{(2N')}$ sia un operatore densità. Infatti da (2.16) segue che per $2N' \to \infty$ anche $\mathrm{tr}\Big(\rho^{(2N')}\Pi^{\otimes 2N'}\Big)$ diverge e non rappresenta più una probabilità.

Quindi affinché $\rho^{(N)} \in \mathcal{D}_d$ deve valere

$$\int_{B_\delta^*} P(\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p} = 0 \quad \text{q.o.} \tag{2.17}$$

che è una condizione sulla prior, che deve annullarsi quasi ovunque $A_{\boldsymbol{p}}$ non sia un operatore densità. Con questa ulteriore richiesta, ci siamo ricondotti al caso $A_{\boldsymbol{p}} = \rho_{\boldsymbol{p}} \in \mathcal{D}_d$.

A questo punto $\mathrm{tr}(\rho_{\boldsymbol{p}} E_\alpha) = p_\alpha$ permette di identificare lo spazio degli operatori densità $\mathcal{D}_d$ con lo spazio di probabilità $\mathcal{S}_{d^2}$. Otteniamo quindi da (2.15)

$$\rho^{(N)} = \int_{\mathcal{S}_{d^2}} P(\boldsymbol{p})\rho_{\boldsymbol{p}}^{\otimes N}\, d\boldsymbol{p} \qquad \stackrel{\mathrm{tr}(\rho_{\boldsymbol{p}}E_\alpha)=p_\alpha}{\Longrightarrow} \qquad \rho^{(N)} = \int_{\mathcal{D}_d} P(\rho)\rho^{\otimes N}\, d\rho$$

che è la rappresentazione quantistica di de Finetti. □

Capitolo 3

Un'interpretazione bayesiana della probabilità quantistica

3.1 Sulla realtà fisica dello stato quantistico - II

Nell'interpretazione bayesiana della Meccanica Quantistica delineata nel paragrafo 2.1.3, il teorema di de Finetti quantistico fornisce una chiave interpretativa dell'idea stessa di stato quantistico.

Abbiamo già mostrato nel corso della sezione 2.2 come sia possibile abbandonare il concetto di misura proiettiva per pensare agli stati quantistici non come operatori densità, quanto come assegnazioni probabilistiche riguardo i risultati di una MIC-POVM. Il teorema di de Finetti permette di caratterizzare in senso bayesiano tali probabilità: la rappresentazione

$$\rho^{(N)} = \int_{\mathcal{D}_d} P(\rho)\rho^{\otimes N}\, d\rho$$

stabilisce che una qualsiasi sequenza scambiabile di operatori densità $\rho^{(N)}$ può sempre essere generata da una densità di probabilità $P(\rho)$, la prior che un agente assegna ad un ipotetico stato ρ di ogni singolo sistema.

La tomografia quantistica introdotta qualitativamente nel paragrafo 2.1.3 permette di visualizzare immediatamente le conseguenze concettuali del teorema di de Finetti: un agente può agire *come se* esistesse uno stato quantistico a lui non noto ρ (ossia uno stato oggettivo e indipendente) nel quale si trova ogni singolo sistema. Si tratta tuttavia solo di una rappresentazione: lo stato quantistico degli N sistemi è $\rho^{(N)}$, e dipende dalla probabilità $P(\rho)$ che l'agente assegna a tale ρ.

Il teorema di de Finetti fornisce dunque la possibilità di scrivere uno stato *soggettivo* $\rho^{(N)}$ come una media su uno stato *oggettivo* ρ e può pertanto essere considerato il punto di partenza concettuale per la costruzione di un'interpretazione di natura bayesiana della probabilità quantistica.

3.1.1 Perché spazi di Hilbert complessi?

Una caratteristica estremamente interessante del teorema di de Finetti risponde alla domanda posta dagli autori in [3]: "*was this theorem not inevitable?*". In altri termini, dato che la teoria quantistica incorpora naturalmente le probabilità nel suo formalismo non è altresì naturale che il teorema classico di de Finetti abbia una sua versione quantistica?

Il passaggio non è tuttavia così banale, poiché il teorema di de Finetti quantistico è valido solamente se l'algebra delle osservabili quantistiche è complessa: uno spazio di Hilbert sul campo reale (o quaternionico, ad esempio) non ammette una rappresentazione di de Finetti.

La dimostrazione data in 2.3.2 mostra immediatamente la sua perdita di validità nel caso reale, dove gli stati e in generale gli elementi delle POVM sono rappresentate da matrici reali simmetriche. La differenza fondamentale è nella dimensione dello spazio di tali operatori: non d^2, come avviene nel caso hermitiano, bensì[1] $\frac{1}{2}d(d+1)$, che è anche il numero di elementi di una MIC-POVM.

Abbiamo in particolare utilizzato il fatto che una base $\{E_1, \ldots, E_{d^2}\}$ per lo spazio degli operatori su $\mathcal{H}_d$ può essere utilizzata per generare una base $E_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes E_{\alpha_N}$ per lo spazio degli operatori su $\mathcal{H}_d^{\otimes N}$, ed è un fatto che vale in generale. Questo permette ad una MIC-POVM su $\mathcal{H}_d^{\otimes N}$ di specificare univocamente un operatore autoaggiunto $\rho^{(N)}$ nel passaggio

$$p^{(N)}(\boldsymbol{\alpha}) = \operatorname{tr}\left[\left(\int_{\mathcal{S}_{d^2}} P(\boldsymbol{p}) A_{\boldsymbol{p}}^{\otimes N} \, d\boldsymbol{p}\right) E_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes E_{\alpha_N}\right] \implies \rho^{(N)} = \int_{\mathcal{S}_{d^2}} P(\boldsymbol{p}) A_{\boldsymbol{p}}^{\otimes N} \, d\boldsymbol{p}$$

perché lo spazio degli operatori hermitiani su cui è definito $\rho^{(N)}$ è $(d^2)^N$ dimensionale sui reali.

Questa tecnica non funziona per operatori reali simmetrici, per cui $\rho^{(N)}$ sarebbe definito su uno spazio vettoriale di dimensione $\frac{1}{2}d^N(d^N+1)$ sui reali, che è strettamente maggiore della dimensione del relativo prodotto tensore

$$\frac{1}{2}d^N(d^N+1) > \left(\frac{1}{2}d(d+1)\right)^N$$

per cui diviene impossibile ottenere un unico operatore simmetrico $\rho^{(N)}$ a partire da $\mathcal{H}_d^{\otimes N}$.

Queste considerazioni mostrano perché la particolare dimostrazione che abbiamo dato fallisca nel caso di una Meccanica Quantistica su spazi reali, ma in linea di principio non dimostrano che il teorema di de Finetti in sé fallisca. Tuttavia, è immediato trovare un controesempio:

$$\rho^{(N)} = \frac{1}{2}\rho_+^{\otimes N} + \frac{1}{2}\rho_-^{\otimes N} \tag{3.1}$$

dove

$$\rho_+ = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \sigma_2) \qquad \rho_- = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \sigma_2)$$

e σ_2 è una delle matrici di Pauli.

Nella Meccanica Quantistica standard su spazi di Hilbert complessi, $\rho^{(N)}$ soddisfa chiaramente le proprietà di un operatore densità e corrisponde ad un ensemble equiprobabile di N particelle di spin up e N particelle di spin down lungo y. È banale notare che si tratta di una sequenza scambiabile, e la decomposizione (3.1) è un esempio di rappresentazione di de Finetti.

Si consideri ora lo stato $\rho^{(N)}$ come un operatore su spazi di Hilbert reali. La dipendenza dall'unità immaginaria di σ_2 infatti è solo fittizia, poiché se espandiamo il prodotto tensore ad esempio dei primi due membri

$$\rho_\pm^{\otimes N} = \frac{1}{2^N}\left[(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \sigma_2 \otimes \sigma_2 \pm 2\mathbb{I} \otimes \sigma_2) \otimes (\mathbb{I} \pm \sigma_2) \otimes \cdots \otimes (\mathbb{I} \pm \sigma_2)\right]$$

ed è evidente che in $\rho^{(N)}$ scompaiono i termini con un numero dispari di σ_2, per cui non saranno presenti quantità immaginarie. Quindi l'operatore (3.1) continua ad essere un operatore densità scambiabile anche per spazi reali. Tuttavia, gli operatori $\rho_\pm^{\otimes N}$

[1] Si veda (2.7) nel paragrafo 2.2.1.

non possono rappresentare operatori densità reali poiché contengono σ_2, che è una matrice antisimmetrica e non è un'osservabile in questa formulazione della Meccanica Quantistica.

Abbiamo dunque trovato un operatore densità scambiabile su uno spazio di Hilbert reale, la cui rappresentazione di de Finetti non può essere scritta in termini di operatori simmetrici: quindi il teorema di de Finetti in questo caso non vale.

È interessante notare, dunque, che solo una Meccanica Quantistica complessa può rendere conto della possibilità di una rappresentazione di de Finetti: se invertiamo la logica e ci poniamo in un'interpretazione bayesiana della teoria, potremmo quindi arrivare ad affermare che sia per tale motivo cha la Meccanica Quantistica è formulata in spazi di Hilbert su $\mathbb{C}$, e non su $\mathbb{R}$, come effettivamente accade.

3.1.2 Il teorema di Bayes quantistico e la convergenza delle prior nella rappresentazione di de Finetti

Vogliamo ora affrontare il problema della convergenza delle prior nella rappresentazione di de Finetti. In una formulazione bayesiana delle probabilità quantistiche due agenti con delle prior arbitrariamente diverse dovranno, alla luce dei dati sperimentali, convergere verso la medesima assegnazione probabilistica, ossia il medesimo stato quantistico. Dobbiamo dunque cercare un analogo del teorema di Bayes.

Al fine di affrontare la problematica dell'*aggiornamento* degli stati quantistici, è necessario dapprima introdurre un postulato di misura che non riguardi più solo le misure proiettive, ma anche le POVM. Seguendo la strada proposta in [14], il postulato proiettivo standard può essere rielaborato non a partire dalle POVM stesse, ma da operatori arbitrari: il motivo sarà chiaro nel momento in cui ricaveremo l'operatore densità in cui si trova un sistema dopo una POVM.

Postulato 3.1 (Misura quantistica)**.** Una misura quantistica è descritta da un insieme di operatori $\{M_m\}$ tali che

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{I}.$$

Se nell'istante precedente la misura il sistema è nello stato puro $|\psi\rangle$, la probabilità di ottenere il risultato m-esimo è data da

$$p_m = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle \tag{3.2}$$

e

$$|\psi_m\rangle = \frac{M_m\,|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}} \tag{3.3}$$

è lo stato del sistema dopo la misura.

Il vantaggio di questa formulazione è di includere misure proiettive e POVM nella medesima struttura, e di poter essere facilmente generalizzata al caso degli operatori densità. Infatti, la forma dell'equazione (3.3) suggerisce subito[2]

$$\rho_m = \frac{1}{\mathrm{tr}\Big(\rho M_m^\dagger M_m\Big)} \sum_i M_{mi}\rho M_{mi}^\dagger \tag{3.4}$$

[2]È infatti sufficiente combinare l'Equazione 3.3 con il rispettivo bra $\langle\psi_m|$ per costruire l'operatore densità $|\psi_m\rangle\langle\psi_m|$ associato allo stato puro.

che rappresenta l'operatore densità dopo una misura di risultato m-esimo su un sistema descritto da ρ, e la sommatoria compare dal momento che stiamo in generale considerando ensemble di stati puri.

È immediato notare che per una misura proiettiva per uno stato puro si ottengono i risultati noti se $M_m = \Pi_m$,

$$|\psi_m\rangle = \frac{\Pi_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\Pi_m|\psi\rangle}} = |m\rangle \qquad \rho_m = \frac{1}{\mathrm{tr}(\rho\Pi_m)}\,\Pi_m\rho\Pi_m = |m\rangle\langle m|$$

dato che i proiettori sono operatori idempotenti e autoaggiunti. A questo punto, il caso più generale di una POVM $\{E_\alpha\}$ è suggerito dalla struttura della probabilità (3.2). Se ci restringiamo per brevità al caso in cui l'Equazione (3.4) si sviluppa su un unico indice i, otteniamo

$$E_\alpha = M_\alpha^\dagger M_\alpha, \qquad \rho_\alpha = \frac{1}{\mathrm{tr}(\rho E_\alpha)}\,M_m\rho M_m^\dagger \tag{3.5}$$

che si generalizza immediatamente al caso di più indici, anche se non ne faremo qui uso. Notiamo che $M_\alpha = (E_\alpha)^{1/2}$, che esiste sempre poiché E_α è un operatore semidefinito positivo. Dunque il formalismo appena presentato che muove da generici operatori M piuttosto che dalla POVM in sé resta algebricamente coerente. Tuttavia, formulare il postulato di misura come abbiamo fatto mette subito in luce che ρ_m non dipende banalmente da E_α, ma dalla sua radice quadrata[3].

Siamo ora in grado di costruire un analogo del teorema di Bayes per le probabilità quantistiche [17]. Supponiamo di avere N sottosistemi identici e scambiabili descritti dallo stato $\rho^{(N)}$, e di effettuare una misura su uno di essi mediante una POVM $\{E_\alpha\}$. La probabilità di ottenere l'α-esimo risultato è

$$p_\alpha = \mathrm{tr}\Big(E_\alpha\rho^{(N)}\Big)$$

e

$$\rho_\alpha = \frac{1}{p_\alpha} M_\alpha\rho M_\alpha^\dagger$$

è lo stato dopo la misura del singolo sistema su cui è stata compiuta. Lo stato dei rimanenti $N-1$ sistemi successivo alla misura si ottiene mediante la traccia parziale

$$\rho_\alpha^{(N-1)} = \mathrm{tr}_1(\rho_\alpha^{(N)}) \tag{3.6}$$

dove $\rho_\alpha^{(N)}$ è lo stato complessivo degli N sistemi dopo la misura. Poiché è sempre possibile rappresentare lo stato $\rho^{(N-1)}$ degli $N-1$ sistemi imperturbati attraverso la rappresentazione di de Finetti, vale

$$\rho_\alpha^{(N)} = \rho_\alpha \otimes \rho^{(N-1)} = \int d\rho\, P(\rho)\left[\rho_\alpha \otimes \rho^{\otimes(N-1)}\right].$$

A questo punto l'Equazione (3.6) si scrive

$$\rho_\alpha^{(N-1)} = \int d\rho\, P(\rho)\,\mathrm{tr}(\rho_\alpha)\rho^{\otimes(N-1)}$$

[3]È noto che la radice quadrata di un operatore non è unica, ma anzi è definita a meno di una qualsiasi trasformazione unitaria: per questo il postulato di misura può essere enunciato nei termini di operatori M_m generici.

ed è qui che utilizziamo l'espressione dello stato in cui si trova il singolo sistema dopo una POVM,

$$\rho_\alpha^{(N-1)} = \frac{1}{p_\alpha} \int d\rho\, P(\rho)\, \mathrm{tr}\Big(M_\alpha \rho M_\alpha^\dagger\Big) \rho^{\otimes(N-1)} = \int d\rho\, \frac{P(\rho)\, \mathrm{tr}(E_\alpha \rho)}{p_\alpha} \rho^{\otimes(N-1)}$$

per la ciclicità della traccia. A meno di identificare le probabilità condizionate, questa è già una forma del teorema di Bayes cercato. Possiamo infatti indicare con

$$\mathrm{tr}(E_\alpha \rho) := p(\alpha|\rho)$$

la probabilità di ottenere un risultato α condizionata dal trovarsi nello stato ρ, per cui

$$\rho_\alpha^{(N-1)} = \int d\rho\, \frac{P(\rho) p(\alpha|\rho)}{p_\alpha} \rho^{\otimes(N-1)} := \int d\rho\, p(\rho|\alpha) \rho^{\otimes(N-1)}$$

dove $p(\rho|\alpha)$ è la probabilità di assegnare uno stato ρ dato il risultato α.

Abbiamo quindi ottenuto il teorema di Bayes quantistico

$$p(\rho|\alpha) = \frac{p(\alpha|\rho)\, P(\rho)}{p_\alpha} \tag{3.7}$$

che rappresenta la regola di aggiornamento per lo stato ρ alla luce di una POVM di risultato α. Nello specifico, l'Equazione (3.7) permette anche di stabilire un'importante proprietà del teorema di de Finetti quantistico: per un numero sufficientemente alto di misure, dato che la richiesta di scambiabilità equivale ad un giudizio di indistinguibilità degli N sistemi, la probabilità $p(\rho|\alpha)$ diviene sempre più piccata su un particolare stato.

Nel limite di un numero k di misure infinito, per l'assunzione di scambiabilità dovrà valere

$$\lim_{k\to\infty} p(\rho|\gamma) = \delta(\rho_\gamma)$$

per un certo stato ρ_γ. D'altra parte, nella rappresentazione di de Finetti è proprio la prior $P(\rho)$ ad essere aggiornata mediante (3.7) dopo ogni misura, dove ora p_γ e $p(\gamma|\rho)$ sono pari a 1 in questo limite. Pertanto otteniamo

$$\rho^{(N)} = \int d\rho\, P(\rho) \rho^{\otimes N} \quad \longrightarrow \quad \int d\rho\, \delta(\rho_\gamma) \rho^{\otimes N} = \rho_\gamma^{\otimes N}$$

e dunque il teorema di Bayes quantistico garantisce la convergenza delle prior ad un unica distribuzione di probabilità coerente con i dati sperimentali.

In questo senso la tomografia quantistica è un processo di natura puramente bayesiana: non si tratta di caratterizzare uno stato quantistico sconosciuto ρ, ma della convergenza di prior arbitrariamente diverse ad un unico stato quantistico condiviso da qualsiasi agente, e che come tale rappresenta una descrizione fisica univoca. Questo particolare fatto è permesso dalla richiesta di scambiabilità, che si riflette nel trattare i sistemi come effettivamente identici fra loro: il teorema di de Finetti garantisce allora che sia *come se* ogni sistema possedesse uno stato quantistico ρ non noto che cattura il loro essere l'uno copia dell'altro. Ma da un punto di vista bayesiano si tratta solamente di una possibile rappresentazione della situazione fisica, che resta descritta nel suo complesso dallo stato complessivo $\rho^{(N)}$ come assegnazione di un agente, e non dai singoli stati.

3.1.3 Il collasso della funzione d'onda e il paradosso della misura

Nell'interpretazione bayesiana vi è un'ulteriore fenomeno quantistico nel quale gioca un ruolo fondamentale il teorema di Bayes: il cosiddetto collasso della funzione d'onda, ossia il postulato proposto all'inizio del paragrafo precedente.

Il postulato di misura prevede un cambiamento istantaneo dello stato quantistico, con effetti che possono anche divenire non locali in un'interpretazione ontologica di ρ. Vogliamo ora mostrare come la riduzione dello stato $\rho \mapsto \rho_d$ possa essere posta in una forma diversa, che richiama esplicitamente il teorema di Bayes [9]. L'aggiornamento della prior $P(h)$ nell'ambito della probabilità bayesiana può essere rappresentato nel seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} P(h) = \sum_d P(d) & \underbrace{P(h|d)}_{\downarrow} & \\ P(h) \quad \xrightarrow{d} & P(h|d) & \end{array} \tag{3.8}$$

dove abbiamo messo in evidenza che, alla luce dei risultati d di una misura, la prior $P(h)$ viene aggiornata ad uno degli elementi della sua decomposizione $P(h|d)$. In questo senso il processo di misura consiste in un affinamento delle assegnazioni probabilistiche, con il fine di rimanere coerente con i dati d, e consiste nella selezione di una delle probabilità condizionate già presenti nella prior.

Nel caso quantistico non esiste un analogo immediato di tale formulazione. Basti pensare che, nel caso proiettivo, un qualsiasi stato $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ diviene istantaneamente $\Pi_i = |i\rangle\langle i|$: non è vero che Π_i è contenuto in qualche senso in ρ, poiché $\rho \neq \sum_i P(i)\Pi_i$. Vogliamo affrontare il problema di una riformulazione del collasso che metta in luce le analogie con (3.8).

Poniamoci innanzitutto nel contesto generale delle POVM, e scriviamo l'identità

$$\rho = \rho^{1/2}\,\mathbb{I}\,\rho^{1/2} = \sum_d \rho^{1/2} E_d \rho^{1/2}$$

ed introduciamo l'operatore densità

$$\tilde{\rho}_d = \frac{1}{P(d)}\rho^{1/2} E_d \rho^{1/2} = \frac{1}{P(d)}\rho^{1/2} M_d^\dagger M_d \rho^{1/2} \tag{3.9}$$

dove ricordiamo che $M_d = E_d^{1/2}$. La peculiarità dell'operatore definito in (3.9) è che ha i medesimi autovalori di ρ_d: infatti se definiamo $X = M_d \rho^{1/2}$, vale

$$\tilde{\rho}_d = \frac{1}{P(d)} X^\dagger X, \qquad \rho_d = \frac{1}{P(d)} M_d \rho M_d^\dagger = \frac{1}{P(d)} X X^\dagger$$

e i due operatori $XX^\dagger$ e $X^\dagger X$ hanno gli stessi autovalori, poiché sono uno l'aggiunto dell'altro[4] e per definizione $XX^\dagger \propto \rho_d$ ha autovalori reali.

Abbiamo quindi trovato una decomposizione dello stato ρ che ricorda la decomposizione della prior sopra citata,

$$\rho = \sum_d P(d) \tilde{\rho}_d \tag{3.10}$$

[4] Si mostra immediatamente che l'aggiunto di un operatore ha come autovalori i complessi coniugati dell'operatore iniziale: se $A\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle \implies \langle\psi|\,A^\dagger = \lambda^*\,\langle\psi|$ e consideriamo gli autovalori dell'aggiunto $A^\dagger\,|\varphi\rangle = \eta\,|\varphi\rangle$, otteniamo subito $\langle\psi|\,A^\dagger\,|\varphi\rangle = \eta\,\langle\psi|\varphi\rangle = \lambda^*\,\langle\psi|\varphi\rangle$, che mostra quanto richiesto.

dato che $\tilde{\rho}_d$ è collegato allo stato successivo alla misura ρ_d. Per mettere in luce un aggiornamento di ρ analogo a quello bayesiano, è necessario scrivere M_d nella sua decomposizione polare[5]

$$\rho_d = \frac{1}{P(d)} M_d \rho M_d^\dagger = \frac{1}{P(d)} U_d E_d^{1/2} \, \rho \, E_d^{1/2} U_d^\dagger$$

dove U_d è un operatore unitario. Quindi

$$\rho_d = U_d \, \tilde{\rho}_d \, U_d^\dagger \tag{3.11}$$

è l'espressione esplicita che collega ρ_d con (3.9): $\tilde{\rho}_d$ non è altro che lo stato immediatamente successivo alla misura a meno di una trasformazione unitaria.

Abbiamo trovato un diagramma che descrive esplicitamente il collasso della funzione d'onda

$$\begin{array}{ccccc} \rho = \sum_d P(d) & \underbrace{\tilde{\rho}_d} & & \\ & \downarrow & & \\ \rho \quad \xrightarrow{d} & \tilde{\rho}_d & \xrightarrow{U_d} & \rho_d \end{array} \tag{3.12}$$

che nell'interpretazione bayesiana rappresenta il semplice aggiornamento dello stato ρ, visto come assegnazione di un agente, a seguito di una misura. Il collasso quindi può essere formalmente pensato come la realizzazione di due passaggi concettuali:

1. a seguito della misura, un agente modifica dapprima il suo stato di conoscenza scegliendo semplicemente il corrispondente termine $\tilde{\rho}_d$ contenuto nello stato ρ assegnato precedentemente alla misura;

2. l'agente modifica la sua assegnazione $\tilde{\rho}_d$ mediante una trasformazione unitaria U_d, che racchiude gli effetti del processo di misura sul sistema quantistico, arrivando all'usuale assegnazione dello stato ρ_d.

Anche se tale scomposizione del collasso può sembrare artificiosa, ha il pregio di mettere in evidenza la possibilità di una formulazione bayesiana: lo stato ρ_d deriva da $\tilde{\rho}_d$, che a sua volta è contenuto sin dall'inizio nello stato iniziale ρ. Anche da questo punto di vista, dunque, vi è una forte analogia fra ρ nella teoria quantistica e la prior $P(h)$ nella teoria bayesiana.

Non è pertanto presente alcuna discontinuità *fisica* nel processo di misura: la discontinuità è nelle assegnazioni probabilistiche di un agente riguardo ad un sistema quantistico, che naturalmente devono cambiare quando tale sistema interagisce con l'apparato di misura[6]. Questo approccio elimina del tutto il paradosso della misura: se il collasso è un processo di aggiornamento delle assegnazioni probabilistiche di un agente, non può avere neanche nessuna natura non locale.

Consideriamo infatti una versione del paradosso EPR adattata da [1] e interpretata in [3]. Ad un sistema di due particelle di spin $\frac{1}{2}$ un agente A, in corrispondenza di una

[5] Il teorema di decomposizione polare di un operatore afferma che un operatore limitato A può sempre essere scritto come $A = UP$, dove U è unitario e $P = (A^\dagger A)^{1/2}$.

[6] Sottolineiamo qui che il processo di misura modifica in un qualche senso fisico il sistema, ma non lo fa in maniera istantanea mediante il collasso; questo è invece una descrizione del cambiamento delle assegnazioni probabilistiche di un agente. Nell'interpretazione bayesiana qui proposta non è, dunque, il collasso quantistico a costituire uno di quei processi caratteristici e oggettivi della Meccanica Quantistica: si tratta di una conseguenza naturale nel momento in cui si postula che gli stati quantistici siano assegnazioni soggettive.

delle due particelle, assegna lo stato puro

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle\,|0\rangle + |1\rangle\,|1\rangle\,\big)$$

in $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$. Supponiamo che le particelle siano separate da una distanza arbitrariamente grande. Prima di una misura di spin, A assegna alla sua particella lo stato misto

$$\frac{1}{2}\big(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\,\big)$$

che riflette la sua ignoranza su quale sia effettivamente lo stato puro di singola particella da assegnare.

Se a questo punto B effettua una misura sull'altra particella ottenendo come risultato 0, assegna uno stato $|0\rangle\,|0\rangle$, ossia uno stato puro $|0\rangle$ anche alla particella di A. Ora quale dei due stati è corretto? Quando è avvenuto il collasso per lo stato della particella di A, e come fa A ad aggiornare il suo stato se B è ad una distanza in linea di principio superluminale, e dunque non può aver agito su A se non in maniera non locale? Paradossi di questo tipo non esistono nella formulazione bayesiana presentata. A e B hanno diverse informazioni e dunque diverse prior: pertanto le loro assegnazioni probabilistiche, ossia gli stati quantistici che assegnano alle due particelle, devono essere diversi. D'altra parte, quando B effettua una misura il collasso allo stato $|0\rangle$ descrive semplicemente il *suo* aggiornamento del *suo* stato di conoscenza. Le assegnazioni di A, dunque, non hanno motivo di cambiare, non finché A non effettua una misura o viene a contatto con B[7].

Concludiamo questa sezione mostrando come la nuova formulazione del postulato di misura si applichi ad uno stato puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, che rappresenta uno stato di informazione massimale. In linea di principio il passaggio (1) del collasso non ha ragione di avvenire, poiché la prior di tale assegnazione è unitaria e non ci sono altri stati possibili fra cui scegliere. Questo si riflette nel fatto matematico

$$\rho = M^\dagger M \implies M = \rho^{1/2} = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho$$

per cui una qualsiasi POVM E_d dà come risultato

$$\rho^{1/2} E_d \rho^{1/2} = |\psi\rangle\langle\psi|\, E_d\, |\psi\rangle\langle\psi| = P(d)\, |\psi\rangle\langle\psi|$$

da cui otteniamo proprio $\tilde{\rho}_d = \rho$. Uno stato puro infatti per definizione non può ammettere una scomposizione in termini di altri operatori densità con i quali affinare le proprie informazioni durante il processo di misura: è di per sé lo stato di informazione massima.

L'esempio di uno stato puro permette di mettere in luce il ruolo del secondo passaggio del collasso e della trasformazione unitaria U: è questa a tenere conto delle caratteristiche dell'osservabile che si sta misurando. Supponiamo di essere nel caso proiettivo $\Pi_i = |i\rangle\langle i|$. Allora i risultati canonici si ottengono supponendo che un agente modifichi la sua assegnazione attraverso la trasformazione unitaria

$$U_i = |i\rangle\,\langle\psi| \implies U_i \tilde{\rho}_d U_i^\dagger = |i\rangle\,\langle\psi|\psi\rangle\,\langle\psi|\psi\rangle\,\langle i| = |i\rangle\langle i|$$

poiché gli stati $|\psi\rangle$ sono normalizzati. Il risultato è analogo al collasso proiettivo standard, ma concettualmente introduce dei passaggi nuovi che in quest'interpretazione

[7] In linea di principio, l'assegnazione probabilistica di A riguarda la sua particella, la particella di B e B stesso: A quindi può far collassare il suo stato solo quando viene in contatto con B.

della Meccanica Quantistica permettono di mettere in luce le proprietà del processo di misura e di eliminarne del tutto i paradossi.

3.2 Conclusione: una prospettiva sul QBism

L'interpretazione bayesiana di alcuni fenomeni quantistici presentata in questo capitolo si pone all'interno di una costruzione più generale, detta QBism ([6], [7], [11], [12], da *Quantum Bayesianism*), della quale vogliamo brevemente rendere conto per concludere gli argomenti esplorati in questa tesi.

Il teorema di de Finetti è un primo, importante risultato che mostra come si possa realizzare una mappa fra la formulazione della Meccanica Quantistica sullo spazio degli operatori densità $\mathcal{D}_d$ e una formulazione che faccia uso semplicemente dello spazio di probabilità $\mathcal{S}_{d^2}$. Uno dei fini tecnici del QBism è quello di esplorare in un contesto più ampio questa relazione, derivando la struttura dello spazio degli stati quantistici a partire da considerazioni puramente probabilistiche. Nel corso di questa sezione daremo brevemente conto dei risultati principali ottenuti sinora.

Nel contesto dell'interpretazione della Meccanica Quantistica, è chiaro da quanto esposto finora che nel QBism gli stati quantistici non sono pensati come elementi fisici della realtà, ma come assegnazioni probabilistiche soggettive di un agente. La struttura formale della Meccanica Quantistica, a partire dalla regola di Born, viene pertanto vista come un insieme di regole necessarie affinché tali assegnazioni probabilistiche siano coerenti con la realtà fisica sulla quale vertono.

È d'altra parte evidente che un sistema quantistico debba essere profondamente diverso da un sistema classico: sarebbe dunque impensabile ridurre *tutta* la Meccanica Quantistica a una struttura di tipo bayesiano, poiché il semplice accordo con gli esperimenti dimostra che esiste qualche oggetto particolare della teoria che cattura delle proprietà fisiche della realtà che non possono essere presenti in Meccanica Classica. Lo scopo ultimo del QBism [7] è sì quello di individuare quali costrutti possono essere di natura bayesiana e non oggettiva (come abbiamo qui mostrato, ad esempio, per il collasso quantistico), ma con il fine di mettere in luce quei parametri che, proprio perché non possono essere riformulati in termini bayesiani, costituiscono quanto la Meccanica Quantistica descrive della realtà fisica oggettiva. In questo si differenzia da altre interpretazioni, che pur spiegando i fenomeni quantistici spesso non producono nuovi risultati a riguardo, come invece spera di fare il QBism.

3.2.1 Misure SIC e la regola di Born come probabilità totale

Lo strumento principale utilizzato nei tentativi di ricostruzione dello spazio degli stati quantistico a partire da considerazioni puramente probabilistiche è dato dalle *Simmetric Informationally Complete* POVM, o SIC.

Si consideri [11] un insieme di d^2 proiettori Π_i su $\mathcal{H}_d$ tali che

$$\mathrm{tr}(\Pi_i \Pi_j) = \frac{d\delta_{ij} + 1}{d+1}$$

dove d è la dimensione dello spazio di Hilbert. Si può mostrare che i d^2 operatori

$$E_i = \frac{1}{d}\Pi_i \tag{3.13}$$

sono gli elementi di una POVM, che chiameremo SIC-POVM o brevemente SIC.

Notiamo sin da subito, come discuteremo più in dettaglio alla fine di questa sezione, che tutt'oggi non esiste una dimostrazione dell'esistenza delle SIC per spazi di Hilbert complessi di dimensione arbitraria. Se esistono, tuttavia, un primo particolare vantaggio delle SIC è riassunto nella seguente.

Teorema 3.1. Un qualsiasi operatore densità può essere scritto mediante l'espansione

$$\rho = \sum_{i=1}^{d^2} \left((d+1)p(i) - \frac{1}{d} \right) \Pi_i \tag{3.14}$$

dove $p(i)$ sono le usuali probabilità date dalla regola di Born $p(i) = \mathrm{tr}(\rho E_i)$, e $E_i = \frac{1}{d}\Pi_i$ costituiscono una SIC.

Dimostrazione. Poiché $\{E_i\}$ è un insieme di d^2 operatori indipendenti, costituisce una base per $\mathcal{D}_d$ e potremo sempre scrivere

$$\rho = \sum_{i=1}^{d^2} \alpha_i E_i$$

per certi coefficienti complessi α_i. Una prima condizione è data da

$$\mathrm{tr}(\rho) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d^2} \alpha_i \sum_{j=1}^{d} \langle j|\Pi_i|j\rangle = 1 \implies \sum_{i=1}^{d^2} \alpha_i = d$$

poiché $\Pi_i \in \mathcal{D}_d$ e dunque hanno traccia unitaria. A questo punto possiamo scrivere la probabilità data dalla regola di Born come

$$\begin{aligned} p(i) = \mathrm{tr}(\rho E_i) = \frac{1}{d}\,\mathrm{tr}(\rho\Pi_i) = \frac{1}{d^2} \sum_{j=1}^{d^2} \alpha_j\, \mathrm{tr}(\Pi_i\Pi_j) = \sum_{j=1}^{d^2} \frac{\alpha_j}{d^2} \frac{d\delta_{ij}+1}{d+1} \\ = \frac{1}{d^2(d+1)} \sum_{j=1}^{d^2} [\delta_{ij}(d\alpha_j) + \alpha_j] = \frac{d\alpha_i + \sum_j \alpha_j}{d^2(d+1)} = \frac{\alpha_i + 1}{d(d+1)} \end{aligned}$$

da cui

$$\rho = \sum_{i=1}^{d^2} \frac{\alpha_i}{d} \Pi_i = \sum_{i=1}^{d^2} \left((d+1)p(i) - \frac{1}{d} \right) \Pi_i$$

che è quanto cercato. □

In un certo senso, le SIC realizzano elegantemente la possibilità di ricostruire qualsiasi stato ρ a partire dalle probabilità $p(i)$ che derivano dalla misura di una MIC-POVM, ossia come pura assegnazione probabilistica. Infatti, l'Equazione (3.14) è una rappresentazione di ρ in cui compaiono esplicitamente le probabilità che da esso derivano, ed invertendo la logica si può affermare che a partire dalle d^2 probabilità $p(i)$ possiamo ricostruire ρ utilizzando solamente la SIC associata allo spazio di Hilbert di dimensione d.

Consideriamo ora una misura di natura arbitraria, diciamola (1), con la possibilità di effettuare o meno una SIC, (2), prima di (1). Indichiamo con $r(j|i)$ la probabilità di ottenere il risultato j da (1) dopo aver ottenuto i da (2), e sia $p(i)$ la prior di un agente riguardo a (2). Denotiamo con $s(j)$ la probabilità di ottenere un risultato da (1) se anche (2) è stata effettuata, mentre $q(j)$ sono le probabilità che si ottengono se (2) non è stata effettuata. Lo schema è riassunto nel diagramma seguente.

$$\begin{tikzcd}
 & (2) \arrow[dr, "r(j|i)"] & \text{risultato (2) + (1)} & \\
\text{inizio} \arrow[ur, "p(i)"] \arrow[rr] & & (1) \arrow[u, "s(j)"] \arrow[r, "q(j)"'] & \text{risultato (1)}
\end{tikzcd}$$

Per la legge della probabilità totale, dovrà essere

$$s(j) = \sum_{i=1}^{d^2} p(i) r(j|i)$$

ma naturalmente $q(j) \neq s(j)$, ed in particolare $q(j)$ deriva dalla regola di Born come

$$q(j) = \mathrm{tr}(\rho F_j)$$

per una qualche POVM $\{F_j\}$. D'altra parte per (3.14) possiamo esprimere ρ nei termini della SIC ed ottenere

$$q(j) = \sum_{i=1}^{d^2} \left((d+1) p(i) - \frac{1}{d} \right) r(j|i) \tag{3.15}$$

che segue immediatamente una volta notato che $\mathrm{tr}(\Pi_i F_j) = r(j|i)$.

La struttura dell'Equazione (3.15) è particolarmente interessante, perché consiste di una semplice modifica della legge della probabilità totale per includere la dimensione dello spazio di Hilbert d. La regola di Born così formulata dunque riguarda unicamente le probabilità: non fa uso di operatori né delle ampiezze di probabilità della teoria canonica. Se d'altra parte le probabilità sono giudizi soggettivi di un agente, allora la regola di Born non può rappresentare uno di quei parametri oggettivi mediante il quale la Meccanica Quantistica si differenzia dalla Fisica Classica.

Anzi, in questo contesto la regola di Born non è altro che un'*aggiunta* alla probabilità classica e rappresenta una necessaria modifica per mantenere una coerenza bayesiana nel caso quantistico. È infatti interessante notare [7] che è possibile partire da una formulazione più generale, dove la (3.15) diviene

$$q(j) = \alpha \sum_{i=1}^{n} p(i) r(j|i) - \beta \sum_{i=1}^{n} r(j|i) \tag{3.16}$$

per qualche parametro reale non negativo α, β.

Sotto opportune richieste di coerenza [8], sulle quali non entreremo, si può mostrare che la (3.16) diventa

$$q(j) = \left(\frac{1}{2} q d + 1 \right) \sum_{i=1}^{n} p(i) r(j|i) - \frac{1}{2} q, \quad q = 0, 1, \ldots, \infty, \quad d = 2, \ldots, \infty$$

dove $n = \frac{1}{2} q d (d-1) + d$. In particolare, il caso $q = 2$ è quello quantistico; per $q = 0$ si ritrova invece la legge di probabilità classica. Progressivamente, $q = 1$ dà la regola di Born per spazi reali, $q = 4$ per spazi quaternionici, e via dicendo.

Concludiamo questo paragrafo notando che non esiste tuttora una dimostrazione dell'esistenza delle SIC in dimensione arbitraria, nonostante la loro importanza nell'ambito del QBism e della teoria dell'informazione quantistica. Vi sono prove analitiche in alcune dimensioni, e prove numeriche fino a $d = 151$. Sempre numericamente, sono state determinate SIC in dimensioni sparse fino a $d = 323$ [10]. È però interessante notare che siamo in una situazione analoga a quanto avvenuto per il teorema di de Finetti: seppure non vi sia una dimostrazione generale per l'esistenza delle SIC in spazi di Hilbert complessi, è certo che non esistono in dimensione arbitraria per spazi reali. Anche in questo caso, nell'ambito del QBism il fatto che la Meccanica Quantistica debba fare uso proprio di spazi su $\mathbb{C}$ sembra essere più di una coincidenza.

3.2.2 Cosa non è informazione?

L'analisi appena svolta mette in luce che, in un qualche senso, la dimensione dello spazio di Hilbert d gioca un ruolo fondamentale *anche* nella riformulazione bayesiana, ed è un parametro irriducibile che non dipende in alcun modo dal concetto di agente. Si pensi all'esempio di due particelle di spin $\frac{1}{2}$ dato in 3.1.3: se è possibile pensare agli stati quantistici che A e B assegnano come soggettivi, dato che non sono univoci, non è possibile dire altrettanto sulla dimensione assegnata allo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_2$ che descrive una particella di spin $\frac{1}{2}$.

Il caso può essere facilmente posto in un contesto più generale [7]. Se scriviamo la funzione d'onda ψ_{12} di un sistema entangled, dobbiamo necessariamente considerare il prodotto tensore $\mathcal{H}_{d_1} \otimes \mathcal{H}_{d_2}$, sul quale deve essere anche definita la misura $S = S_1 \otimes S_2$ che viene compiuta sul sistema. Nella formulazione bayesiana, ψ_{12} dipende dalla prior di un agente e dunque non è oggettiva; così come è in linea di principio arbitrario quale POVM scegliere per effettuare una misura S sul sistema. Tuttavia, non è possibile in alcun modo modificare la scelta di $\mathcal{H}_{d_1} \otimes \mathcal{H}_{d_2}$, così come per una particella di spin $\frac{1}{2}$ la dimensione di $\mathcal{H}_d$ dovrà necessariamente essere 2.

Anche la regola di Born può essere riformulata in (3.15), e divenire un analogo della legge di probabilità totale con una certa dipendenza dalla dimensione dello spazio di Hilbert. Data una SIC, uno stato quantistico può essere ricostruito mediante (3.14) a partire dalle probabilità della relativa misura, sfruttando unicamente la dimensione dello spazio di Hilbert.

La linea di ricerca attuale proposta dal QBism tende a chiedersi se d sia effettivamente uno di quei parametri oggettivi, non bayesiani, che caratterizzano la profonda differenza fra la Meccanica Quantistica e la Fisica Classica. Quale possa essere la sua interpretazione fisica, tuttavia, non è evidente a questo livello. La speranza è che una riformulazione della Meccanica Quantistica, tale da mettere in evidenza quali oggetti matematici corrispondono ad elementi della realtà oggettivi, possa non solo chiarire i paradossi emersi nell'ultimo secolo, ma produrre fenomeni nuovi ed una nuova comprensione del mondo fisico che la teoria quantistica descrive.

Bibliografia

[1] D. Bohm. *Quantum Theory*. Dover, 1989.

[2] C. M. Caves, C. A. Fuchs e R. Schack. «Quantum probabilities as Bayesian probabilities». In: *Physical Review A* 65.2 (2001).

[3] C. M. Caves, C. A. Fuchs e R. Schack. «Unknown Quantum States: The Quantum de Finetti Representation». In: *Journal of Mathematical Physics* 43.9 (2002).

[4] R. P. Feynman. *The Feynman Lectures on Physics*. Vol. 1. Addison–Wesley, 2005.

[5] B. de Finetti. *Theory of Probability. A critical introductory treatment*. Wiley, 1990.

[6] C. A. Fuchs. «An introduction to QBism with an application to the locality of quantum mechanics». In: *American Journal of Physics* 82.8 (2014).

[7] C. A. Fuchs. «QBism, the Perimeter of Quantum Bayesianism». In: *ArXiv e-prints* (2010). arXiv: `1003.5209 [quant-ph]`.

[8] C. A. Fuchs. «Quantum-Bayesian coherence». In: *Review of Modern Physics* 85.4 (2013).

[9] C. A. Fuchs. «Quantum mechanics as quantum information, mostly». In: *Journal of Modern Optics* 50.6-7 (2004).

[10] C. A. Fuchs, M. C. Hoang e B. C. Stacey. «The SIC Question: History and State of Play». In: *ArXiv e-prints* (2017). arXiv: `1703.07901 [quant-ph]`.

[11] C. A. Fuchs e R. Schack. «A Quantum-Bayesian Route to Quantum-State Space». In: *Foundation of Physics* 41.3 (2009).

[12] C. A. Fuchs e R. Schack. «QBism and the Greeks: Why a quantum state does not represent an element of physical reality». In: *Physica Scripta* 1.90 (2014).

[13] E. T. Jaynes. *Probability theory. The Logic of Science*. Cambridge University Press, 2003.

[14] M. A. Nielsen e I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.

[15] B. O'Neill. «Exchangeability, Correlation, and Bayes' Effect». In: *International Satistical Review* 77.2 (2009).

[16] J. J. Sakurai e J. J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics. Second Edition*. Pearson, 2010.

[17] R. Schack, T. A. Brun e C. M. Caves. «Quantum Bayes Rule». In: *Physical Review A* 64.1 (2000).

[18] G. Sjödin e S. Arnborg. «On the foundations of Bayesianism». In: *AIP Conference Proceedings* 568.61 (2001).