

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE DEI SISTEMI INDUSTRIALI
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCATRONICA

Progettazione, implementazione e validazione di un sistema di controllo del momento d'imbardata per una vettura Formula SAE elettrica

Relatrice

Prof.ssa Giulia Michieletto

Laureando

Alberto Marconato

Correlatore

Prof. Mattia Bruschetta

ANNO ACCADEMICO 2025-2026

*A tutte le persone che amo e che hanno creduto in me
chi prima, chi dopo, chi sempre*

*"Vinca dunque la perseveranza,
perché, se la fatica è tanta, il premio non sarà mediocre.
Tutte le cose preziose son poste nel difficile."*

Giordano Bruno

Sommario

La presente tesi si inserisce nel contesto del progetto Formula Student e descrive lo sviluppo di un sistema di controllo della dinamica laterale per la monoposto elettrica SGe-08, realizzata dal team Race UP dell'Università di Padova durante la stagione 2024/2025. L'obiettivo del lavoro è analizzare e migliorare il comportamento dinamico del veicolo attraverso l'impiego di una strategia di controllo in grado di intervenire sulla sua dinamica d'imbardata, sfruttando le possibilità offerte dalla propulsione elettrica. A partire dallo studio della dinamica del veicolo e delle principali strategie di controllo utilizzate in questo campo, viene definito e progettato il sistema di controllo proposto, supportato da un'adeguata modellazione matematica del veicolo. Il sistema viene implementato su un modello virtuale del veicolo, il quale è successivamente sfruttato per svolgere una campagna di simulazioni finalizzata a valutarne il comportamento assieme all'efficacia della tecnica di controllo introdotta in differenti condizioni di guida.

I risultati ottenuti permettono di analizzare l'influenza del sistema di controllo sulla dinamica del veicolo e di valutarne il potenziale contributo al miglioramento delle prestazioni. I test svolti, assieme ai dati raccolti, permettono inoltre di definire una taratura ottimale del controllore, utilizzata per implementare il sistema progettato sul veicolo reale. I test effettuati sul prototipo reale dal team Race UP permettono infine di validare l'impatto che l'algoritmo di controllo ha sulle performance del veicolo in pista.

L'attività svolta rappresenta quindi un'applicazione delle tecniche di controllo della dinamica del veicolo all'interno del contesto Formula SAE, in cui gli obiettivi principali sono il massimo sfruttamento delle caratteristiche del veicolo e la continua ricerca del miglioramento prestazionale.

Indice

1	Introduzione	15
1.1	La Formula SAE	15
1.1.1	Struttura di un evento di Formula SAE	16
1.1.2	Prove dinamiche	17
1.2	Il team Race UP	19
1.2.1	La monoposto SGe-08	20
1.3	Obiettivi e struttura della tesi	21
1.4	Controllo della dinamica laterale per veicoli elettrici	22
1.4.1	Architettura di controllo	24
1.4.2	Tecniche di controllo	25
1.5	Strategia di controllo adottata	27
2	Modellazione del veicolo	31
2.1	Dinamica laterale del veicolo	31
2.1.1	Sistema di riferimento e convenzioni	31
2.1.2	Caratteristiche cinematiche	33
2.1.3	Caratteristiche dinamiche	34
2.1.4	Equazioni della dinamica	38
2.2	Modello monotraccia del veicolo	39
2.3	Modellizzazione degli pneumatici	41
2.3.1	Modello linearizzato	42
2.3.2	Modello non linearizzato	43
2.3.3	Magic Formula	43
2.4	Modello in spazio di stato del veicolo	45
2.4.1	Riscrittura delle equazioni della dinamica	45
2.4.2	Formulazione in spazio di stato	46
2.5	Caratteristiche tecniche del veicolo	48
2.5.1	Dimensioni e parametri inerziali	48

2.5.2	Caratteristiche degli pneumatici	50
2.5.3	Caratteristiche del powertrain	54
3	Progettazione del sistema di controllo	57
3.1	Caratteristiche del sistema in spazio di stato	57
3.2	Funzioni di trasferimento del sistema	58
3.2.1	Sviluppo della matrice di trasferimento	58
3.2.2	Analisi delle funzioni di trasferimento	60
3.3	Controllo basato sul momento di imbardata	63
3.3.1	Generazione del riferimento	64
3.3.2	Architettura del sistema di controllo	66
3.3.3	Sintesi del regolatore PI	68
3.4	Analisi della funzione di trasferimento SISO	71
4	Implementazione e validazione	75
4.1	Generazione del momento di imbardata correttivo	75
4.2	Distribuzione delle coppie	77
4.3	Validazione del sistema di controllo	79
4.3.1	Simulazioni offline open-loop	80
4.3.2	Simulazione offline closed-loop	87
4.3.3	Simulazioni online	90
4.4	Implementazione sul prototipo SGe-08	94
5	Conclusioni	97

Elenco delle figure

1.1	Foto panoramica - Formula Student Germany 2023/2024	16
1.2	Layout del tracciato di Skidpad	18
1.3	La vettura MG20-25H - FS Austria 2025	19
1.4	La vettura SGe-08 - Formula ATA 2025	20
1.5	La vettura RGe-07 - Formula Student Germany 2024	21
1.6	Architettura di controllo per un sistema TVC [3]	24
1.7	Architettura di controllo basata su regolatore PID [11]	25
1.8	Architettura di controllo basata su controllore ottimo [3]	26
1.9	Architettura di controllo basata su controllore predittivo [3]	27
2.1	Definizione delle grandezze cinematiche del veicolo [8]	32
2.2	Rappresentazione delle forze agenti sul veicolo [10]	35
2.3	Rappresentazione dell'angolo di deriva dello pneumatico	36
2.4	Rappresentazione del modello monotraccia del veicolo	40
2.5	Immagine del prototipo SGe-08 impegnato in un test in pista	48
2.6	Prove sperimentali per la determinazione dei parametri inerziali del veicolo . .	49
2.7	Immagine Hoosier FSAE 16.0X7.5-10 LC0 - 43075LC0	50
2.8	Dati sperimentali forniti dal TTC	51
2.9	Interpolazione dei dati <i>TTC</i> tramite <i>Magic Formula</i>	52
2.10	Approssimazione della funzione $F_y(\alpha, F_z)$	53
2.11	Approssimazione del comportamento degli assali del veicolo	53
2.12	Curve di coppia del motore AMK DD5-14-10-POW	55
3.1	Andamento di $P_\delta(s)$ in funzione di v_x	61
3.2	Andamento di $P_{M_C}(s)$ in funzione di v_x	62
3.3	Stati di transizione di un veicolo in curva [7]	63
3.4	Risposta reale (A) e ideale (B) del veicolo in curva [7]	64
3.5	Diagramma funzionale del veicolo	67
3.6	Anello di controllo interno del sistema	68

3.7	Taratura del regolatore PI in funzione di banda passante e velocità	69
3.8	Risposte in catena aperta/chiusa dell'anello di controllo per $\omega_B = 1$ Hz	70
3.9	Risposte dinamiche del sistema nella sua rappresentazione <i>SISO</i>	72
4.1	Generazione del momento di imbardata correttivo sull'assale posteriore [7] . . .	76
4.2	Modello Simulink del veicolo e del controllore	80
4.3	Risposta del veicolo al gradino di sterzo a bassa velocità	82
4.4	Andamento dei contributi di coppia comandati ($\delta_D = 60^\circ$, $v_x = 20$ km/h) . . .	83
4.5	Risposta del veicolo al gradino di sterzo a media velocità	84
4.6	Andamento dei contributi di coppia comandati ($\delta_D = 40^\circ$, $v_x = 50$ km/h) . . .	85
4.7	Risposta del veicolo al gradino di sterzo ad alta velocità	86
4.8	Andamento dei contributi di coppia comandati ($\delta_D = 20^\circ$, $v_x = 80$ km/h) . . .	87
4.9	Modello simulink dedicato alla co-simulazione con VI-CarRealTime	88
4.10	Risposta del veicolo durante curva a raggio costante ($R = 20$ m, $v_x = 50$ km/h) .	89
4.11	Coppie comandate ai motori elettrici ($R = 20$ m, $v_x = 50$ km/h)	90
4.12	Setup sperimentale utilizzato presso il laboratorio NAVLAB	91
4.13	Layout del circuito di test ricreato all'interno di <i>VI-DriveSim</i>	91
4.14	Grafico g-g per confronto prestazionale	93

Elenco delle tabelle

1.1	Punteggi massimi ottenibili secondo il regolamento Formula Student	17
2.1	Caratteristiche cinematiche del prototipo SGe-08	49
2.2	Dimensioni Hoosier FSAE 16.0X7.5-10 LC0 - 43075LC0	50
2.3	Caratteristiche motore AMK DD5-14-10-POW	54
4.1	Risultati delle simulazioni Skidpad	95

Capitolo 1

Introduzione

Il presente capitolo introduce il contesto all'interno del quale si sviluppa il lavoro presentato. In particolare, dopo una breve descrizione del progetto Formula SAE e della struttura degli eventi che lo caratterizzano, vengono illustrate le motivazioni alla base dello sviluppo di un sistema di controllo della dinamica laterale per la monoposto elettrica SGe-08, realizzata dal team Race UP dell'Università degli Studi di Padova durante la stagione 2024/2025. A partire dalle caratteristiche del prototipo in esame e dagli obiettivi del progetto, vengono quindi descritte le principali tecniche di controllo applicabili a questo ambito, sulla base della letteratura scientifica analizzata. Infine, considerando i requisiti progettuali individuati e i vincoli imposti dal contesto applicativo, viene definita l'architettura di controllo sulla quale si concentra il contributo della presente tesi.

1.1 La Formula SAE

La *Formula SAE* (FSAE) è una competizione internazionale rivolta agli studenti universitari, i quali competono in eventi internazionali con veicoli da corsa in stile monoposto. Istituita nel 1981, con lo scopo di permettere agli studenti universitari di confrontarsi e mettere in pratica quanto appreso durante il proprio percorso di studi, la competizione è diffusa in tutto il mondo, con svariati eventi annuali, organizzati direttamente dalla SAE (*Society of Automotive Engineers*) o dalle varie associazioni nazionali di ingegneri e tecnici del settore automotive. L'idea posta alla base della Formula SAE è che un'azienda fittizia ingaggi il team affinché realizzi un prototipo di auto da corsa con determinate caratteristiche definite da uno specifico regolamento tecnico. Ogni team di studenti deve progettare, costruire, testare e promuovere il prototipo, il quale viene valutato in diverse tipologie di prove pensate per mettere in luce sia le performance del veicolo in pista, sia il lavoro che è stato svolto dagli studenti per progettarlo, presentarlo e promuoverlo [13].



Figura 1.1: Foto panoramica - Formula Student Germany 2023/2024

A partire dal 2017 la *Formula Student Germany*, attiva come evento ufficiale di Formula SAE tedesco dal 2005, ha proposto la propria versione della competizione, rinominandola *Formula Student*, sulla base dello stesso concept pensato dalla SAE, ma con qualche piccola variazione nel regolamento tecnico [Figura 1.1].

Attualmente all'interno delle competizioni FSAE sono previste tre categorie distinte:

1. **Classe CV:** riservata ai veicoli con motore a combustione interna alimentati a benzina.
2. **Classe HY:** riservata ai veicoli con motorizzazione ibrida.
3. **Classe EV:** riservata ai veicoli con motorizzazione puramente elettrica.

Nel caso in cui un veicolo sia dotato di un sistema di guida autonoma ha la possibilità di partecipare ad una competizione parallela che viene svolta all'interno di alcuni eventi di Formula Student, la *Driverless Cup* (DC). I veicoli partecipanti a questa competizione vengono inseriti in una classe a parte, denominata classe DV, e possono appartenere a qualsiasi categoria di motorizzazione (CV, HY o EV).

1.1.1 Struttura di un evento di Formula SAE

Un evento di Formula SAE si struttura in più giorni, solitamente una settimana, in cui i team partecipano a diverse prove, che vengono suddivise in due macro-categorie: prove statiche e prove dinamiche. Nelle prove statiche vengono valutati aspetti non legati alla performance pura

del veicolo, vengono giudicate le scelte progettuali, il design della vettura e l'utilizzo delle risorse economiche a disposizione del team. Nelle prove dinamiche, invece, vengono valutate le prestazioni del veicolo in pista e comparate con quelle degli altri team, attraverso diverse discipline. Ad ogni evento è possibile totalizzare un massimo di 1000 punti, i quali vengono assegnati in base alle prestazioni ottenute nelle singole prove svolte durante l'evento.

In tabella 1.1 vengono riportati a titolo di esempio i punteggi massimi assegnati per ogni prova secondo il regolamento Formula Student Germany [6], oramai diventato la base di riferimento per tutte le competizioni Formula SAE.

	CV & EV	DC
Prove statiche		
Business Plan Presentation	75	-
Cost and Manufacturing	100	-
Engineering Design	150	150
Prove dinamiche		
Skidpad	50	-
Driverless Skidpad	75	75
Acceleration	50	-
Driverless Acceleration	75	75
Autocross	100	-
Driverless Autocross	-	100
Endurance	250	-
Efficiency	75	-
Trackdrive	-	200
Punteggio totale	1000	600

Tabella 1.1: Punteggi massimi ottenibili secondo il regolamento Formula Student

I team che totalizzano il punteggio più alto alla fine dell'evento, all'interno delle rispettive categorie, vengono dichiarati vincitori di tali classi. Solitamente viene assegnato un ulteriore premio al team che totalizza il punteggio più alto in assoluto, indipendentemente dalla categoria di appartenenza, il quale viene dichiarato vincitore assoluto dell'evento.

1.1.2 Prove dinamiche

Poiché tali prove saranno successivamente rinominate, è opportuno introdurre brevemente le principali prove dinamiche alle quali sono sottoposte le vetture di Formula SAE. In particolare, l'attenzione sarà rivolta alle prove svolte in modalità di guida *Manual*, ovvero con il pilota (che deve necessariamente essere uno studente membro del team) a bordo del veicolo.

- **Skidpad:** in cui il veicolo deve percorrere un tracciato a forma di otto, delimitato da coni, di carreggiata 3 metri e raggio di curvatura medio di 9.125 metri [Figura 1.2]. Vengono

cronometrati i tempi impiegati per effettuare il secondo giro del cerchio di sinistra e il secondo giro del cerchio di destra, e il tempo finale conseguito nella prova è la media dei due tempi.

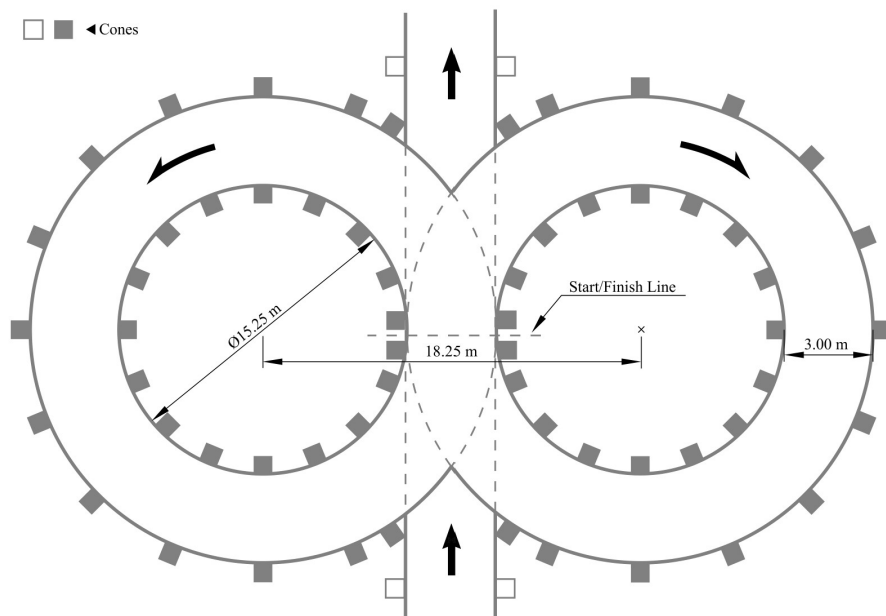


Figura 1.2: Layout del tracciato di Skidpad

- **Acceleration:** in cui il veicolo, partendo da fermo, deve percorrere un tratto rettilineo di lunghezza 75 metri e larghezza 3 metri nel minor tempo possibile.
- **Autocross:** in cui il veicolo deve percorrere un tracciato con un layout prestabilito (solitamente di lunghezza 1.2 km con carreggiata minima di 3 metri). L'obiettivo è completare il percorso nel minor tempo possibile.
- **Endurance & Efficiency:** si tratta di due prove che vengono svolte in contemporanea, in cui il veicolo deve percorrere una distanza di 22 km all'interno di un tracciato con le stesse caratteristiche di quello utilizzato nelle prove di Autocross. La prova è suddivisa in due stint distinti da 11 km con cambio pilota alla fine del primo. Il punteggio della prova di Endurance si basa sul tempo impiegato per completare il percorso, mentre il punteggio di Efficiency si basa sulla quantità netta di energia consumata durante la prova (in termini di consumo di carburante per le vetture di classe CV e di consumo di energia elettrica per le vetture di classe EV).

1.2 Il team Race UP

L'Università degli studi di Padova è presente nelle competizioni di Formula SAE a partire dal 2006 con il team Race UP. Inizialmente concentrato sullo sviluppo di un prototipo FSAE di classe CV, a partire dal 2017 il team partecipa anche alla categoria EV. Da quel momento vi è stata la creazione di due divisioni distinte del team: quella *Combustion* dedicata allo sviluppo della monoposto di classe CV e quella *Electric* che si occupa del prototipo di classe EV.

A partire dalla stagione 2023/2024 la divisione *Combustion* si è evoluta in *Hybrid* partecipando alle competizioni di classe HY, sviluppando una vettura ibrida basata sulla propria monoposto CV di vecchia generazione. Un altro grande cambiamento per il team è avvenuto a partire dalla stagione 2024/2025, con la prima partecipazione della divisione *Electric* alla classe DV, questo è avvenuto grazie all'integrazione di un sistema di guida autonoma all'interno della monoposto EV.



Figura 1.3: La vettura MG20-25H - FS Austria 2025

Nella stagione 2024/2025, la divisione *Hybrid* del team ha partecipato alle competizioni FS Austria e FS Alpe Adria con il prototipo MG20-25H (nella classe HY) [Figura 1.3]. Nella stessa stagione la divisione *Electric* ha partecipato agli eventi FS Alpe Adria e Formula ATA con la vettura SGe-08 (nelle classi EV e DV) [Figura 1.4].



Figura 1.4: La vettura SGe-08 - Formula ATA 2025

1.2.1 La monoposto SGe-08

Il prototipo SGe-08 rappresenta l'ottava iterazione di monoposto elettrica realizzata dal team Race UP ed è l'evoluzione diretta della RGe-07, con cui il team ha gareggiato negli eventi Formula Student Germany e Formula ATA nella stagione 2023/2024 [Figura 1.5]. Le caratteristiche del veicolo seguono le specifiche tecniche indicate dal regolamento *Formula Student* [6] e verranno descritte nel dettaglio nella sezione 2.5. Tra le principali evoluzioni della vettura rispetto alla sua precedente iterazione vi sono un pacchetto aerodinamico migliorato, una cinematica delle sospensioni rivisitata e l'implementazione di un sistema di guida autonoma che permette alla vettura di competere anche nelle prove di categoria DV.

Dalle caratteristiche delle prove dinamiche di un evento FSAE menzionate precedentemente in 1.1.2, appare evidente come, dal punto di vista della dinamica del veicolo, la progettazione di una vettura di questo tipo debba essere finalizzata a mantenere dimensioni e pesi sufficientemente contenuti, oltre ad ottenere prestazioni dinamiche elevate in termini di accelerazione/decelerazione sviluppabili, reattività di sterzata e velocità nelle fasi di percorrenza in curva.

La necessità di soddisfare questi requisiti e di massimizzare le prestazioni del veicolo, rende fondamentale l'implementazione di sistemi di controllo in grado di migliorarne il comportamento dinamico, specialmente per una vettura EV, dove l'impatto prestazionale di questi sistemi e le possibilità di controllo offerte dalla trazione elettrica sono notevoli.



Figura 1.5: La vettura RGe-07 - Formula Student Germany 2024

Questi sistemi possono essere sfruttati non solo per migliorare la trazione del prototipo durante le fasi di accelerazione/decelerazione, ma anche per intervenire attivamente sul suo comportamento in curva attraverso la modifica della distribuzione delle forze longitudinali tra le ruote.

1.3 Obiettivi e struttura della tesi

Dalle considerazioni precedenti nasce l'interesse del team Race UP verso lo sviluppo di un sistema di controllo della dinamica laterale per la monoposto SGe-08, in grado di contribuire al miglioramento delle prestazioni dinamiche del veicolo sfruttando le possibilità offerte dalla propulsione elettrica. Il presente lavoro di tesi si inserisce in questo contesto e ha come oggetto la progettazione, l'implementazione e la validazione di tale sistema di controllo.

Partendo da questa premessa, verranno analizzati i vantaggi offerti dai sistemi di controllo per la dinamica laterale dei veicoli elettrici, sia nell'ambito FSAE che più in generale in quello automotive, unitamente alle motivazioni che ne determinano lo sviluppo e la sempre maggiore rilevanza. Successivamente verranno descritte le principali strategie di controllo note nella letteratura scientifica per implementare un sistema di controllo di questo tipo a bordo di una vettura elettrica, fornendo un quadro dell'attuale stato dell'arte. Questa trattazione fornirà gli strumenti necessari per comprendere le scelte progettuali effettuate e la direzione di sviluppo intrapresa.

Fatto ciò, nei capitoli successivi l'elaborato tratterà dettagliatamente tutto il processo di sviluppo, implementazione e validazione del sistema di controllo. Questo sarà fatto comprendendo la modellazione matematica utilizzata per descrivere la dinamica del veicolo, la progettazione del controllore, il testing delle sue performance attraverso appropriati strumenti e modalità di simulazione, per poi concludere con l'analisi dei risultati ottenuti dall'implementazione del controllo progettato sulla monoposto SGe-08.

Il contributo fornito dal presente elaborato è quindi un esempio di applicazione delle tecniche di controllo della dinamica del veicolo all'interno del contesto Formula SAE, orientato ad un effettivo utilizzo in pista a bordo delle vetture elettriche realizzate dal team Race UP.

1.4 Controllo della dinamica laterale per veicoli elettrici

I veicoli elettrici stanno diventando un'alternativa sempre più popolare rispetto a quelli dotati delle tradizionali motorizzazioni a combustione interna e il loro sviluppo sta acquistando un ruolo sempre più importante all'interno del settore automobilistico. Negli ultimi anni sono stati stanziati grandi investimenti da parte dei governi e dell'industria di molti paesi per portare avanti la ricerca in questo campo, determinando una grande evoluzione dei principali componenti che influiscono sulle performance e sull'impatto ambientale di questi autoveicoli, come ad esempio le batterie e i motori elettrici. L'importanza della ricerca in questo settore è tangibile anche all'interno del mondo Formula SAE, dove le competizioni svolte in tutto il mondo stanno spostando il loro focus principale sulle vetture completamente elettriche e le università stanno indirizzando il lavoro dei loro team verso la stessa direzione. L'esempio migliore di questa tendenza è la scelta della competizione *Formula Student Germany*, una delle più prestigiose nel panorama della Formula SAE, che ha scelto di ammettere all'evento unicamente prototipi di categoria EV a partire dall'anno 2024.

Il progressivo affinamento nella realizzazione dei powertrain elettrici, unito alle crescenti performance che i motori elettrici sono in grado di garantire, rendono sempre più importante, sia in ambito stradale che FSAE, lo sviluppo di tecniche di controllo avanzate per gestire la coppia e la potenza erogata dai veicoli elettrici durante la guida. Queste vengono comunemente denominate nella letteratura scientifica come *Torque Vectoring Control* (TVC), o *Yaw Moment Control* (YMC), e hanno lo scopo di permettere un controllo indipendente della coppia/potenza erogata sui diversi assali o sulle differenti ruote del veicolo (in base al tipo di trazione montata sul veicolo).

Alcuni dei principali vantaggi offerti da tali tecniche di controllo sono:

- **Miglioramento dell'erogazione di coppia/potenza:** il controllo indipendente della coppia erogata da ogni attuatore permette di migliorare la trazione del veicolo nelle fasi di accelerazione e frenata. La coppia richiesta ad ogni assale/ruota può infatti essere adattata in funzione dei limiti di aderenza degli pneumatici, o dei loro slittamenti longitudinali e laterali, grazie all'integrazione nell'algoritmo di sistemi di *Traction Control System* (TCS) e *Anti-Block System* (ABS).
- **Incremento dell'efficienza del powertrain elettrico:** l'opportunità di intervenire sulle coppie comandate ai motori permette di integrare all'interno del sistema di controllo degli algoritmi di ottimizzazione in grado di distribuire il carico totale richiesto su ogni assale/ruota. Questi possono essere implementati per raggiungere diversi scopi, ad esempio minimizzare il consumo energetico, a vantaggio dell'autonomia del veicolo, oppure minimizzare lo sforzo richiesto su ogni motore, riducendo l'usura delle componenti elettromeccaniche del powertrain e spostando il punto di lavoro dei motori verso regioni a maggiore efficienza.
- **Controllo della dinamica laterale del veicolo:** la possibilità di controllare singolarmente le coppie erogate da ogni motore ha un grande impatto sul comportamento dinamico del veicolo, specialmente sul suo comportamento in curva. L'azione di controllo indotta può essere progettata per migliorare la stabilità della vettura e il confort di guida, nel caso di un'applicazione stradale, oppure per incrementarne le massime performance raggiungibili dal veicolo nel caso di un contesto di utilizzo competitivo.

Le potenzialità di sistemi di questo tipo sono notevoli e il potenziale miglioramento delle prestazioni dinamiche del veicolo è importante al punto che strategie di *Torque Vectoring* vengono realizzate anche su veicoli ibridi o completamente privi di trazione elettrica. Per farlo vengono utilizzati differenziali attivi o semi-attivi, o in alternativa freni a disco controllati elettronicamente, in modo da attuare l'azione di controllo sul veicolo meccanicamente [9]. Tuttavia questo tipo di soluzione risulta meno efficace a causa della dinamica più lenta delle componenti meccaniche, della minore efficienza, della minore flessibilità nell'utilizzo e della maggiore complessità di realizzazione.

1.4.1 Architettura di controllo

Con riferimento ai contributi raccolti in [3], la tipica architettura di un sistema di *Torque Vectoring* riportata in letteratura è mostrata in Figura 1.6

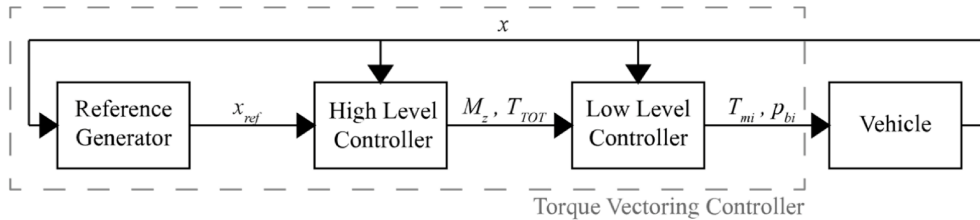


Figura 1.6: Architettura di controllo per un sistema TVC [3]

Lo schema è composto da una catena di controllo formata da tre elementi principali:

- **Generatore del riferimento di controllo (Reference Generator):** a partire dagli input di guida del pilota e dalle misurazioni delle grandezze che definiscono lo stato del veicolo x , viene generato il valore di riferimento x_{ref} che il sistema deve seguire per controllare la dinamica del veicolo. Per controllare la dinamica laterale del veicolo viene solitamente generato un valore di riferimento per la velocità di imbardata e/o l'angolo assetto (*sideslip angle*) della vettura.
- **Controllore di alto livello (High level controller):** utilizzando gli input del pilota, lo stato del veicolo e lo stato di riferimento calcolato precedentemente, questo stadio del sistema definisce il momento di imbardata M_z insieme alla coppia di trazione totale T_{TOT} da imporre al veicolo. Queste due quantità possono essere calcolate in modalità diverse in base al tipo di controllo implementato (ad esempio controllo PID, controllo ottimo o controllo predittivo).
- **Controllore di basso livello (Low level controller):** dall'azione di controllo comandata dal controllore di alto livello, questo blocco genera i comandi di coppia per i motori elettrici T_{mi} oppure di pressione per i freni p_{bi} se necessario. Questo stadio di controllo garantisce che le coppie attuate dai motori rispettino precisi vincoli di progetto, come ad esempio la distribuzione di coppia tra gli assali, o criteri di ottimizzazione. In quest'ultimo caso i controllori di basso e alto livello sono integrati in un unico elemento.

Ognuno degli stadi che compongono il sistema lascia grande libertà di progettazione e di approccio al problema di controllo, tuttavia l'elemento che influenza maggiormente la tecnica di controllo implementata è il controllore di alto livello, il quale definisce il meccanismo di generazione dell'azione di controllo. Pertanto è importante specificare quali tecniche di controllo sono le più utilizzate.

1.4.2 Tecniche di controllo

Come già detto, lo scopo del controllore di alto livello è definire il momento di imbardata da imporre al veicolo per permettere di controllarne la dinamica laterale. Dalla letteratura è possibile seguire numerosi approcci, partendo dai metodi di controllo più classici fino a quelli più sofisticati e moderni. Nella maggior parte dei casi il controllo è realizzato tramite un anello di retroazione con l'aggiunta in alcuni casi di un contributo in catena aperta, in modo da velocizzare la risposta del sistema. Il contributo in catena aperta viene solitamente progettato sulla base di simulazioni svolte sul modello matematico del veicolo considerato. Nel caso più semplice il momento di imbardata generato in catena aperta è definito come una funzione dell'angolo volante imposto durante la guida, mentre un approccio più sofisticato consiste nel definire il contributo di feedforward come funzione di più parametri, quali l'angolo volante, la velocità del veicolo, le accelerazioni laterali e longitudinali che sta subendo o il coefficiente d'attrito degli pneumatici con l'asfalto. Verranno ora descritte alcune delle principali tecniche di controllo utilizzate per realizzare un sistema di *Torque Vectoring Control*.

Controllo PID

Il metodo più semplice per realizzare un sistema di TVC si basa sull'utilizzo di regolatori PID (Proporzionale-Integrale-Derivativo) che hanno lo scopo di far seguire al veicolo una certa velocità di imbardata di riferimento, raggiungendo un errore di inseguimento nullo a regime. Il principale vantaggio di questa tecnica risiede nella facilità di implementazione e di taratura dei regolatori PID. Inoltre, i regolatori PID garantiscono un'ottima robustezza del sistema rispetto agli errori di misura e ai disturbi. Lo svantaggio principale dei regolatori PID è la sensibilità rispetto alle variazioni delle caratteristiche del veicolo dal momento che la loro taratura si basa su rappresentazioni del veicolo in forma di sistemi lineari tempo-invarianti.

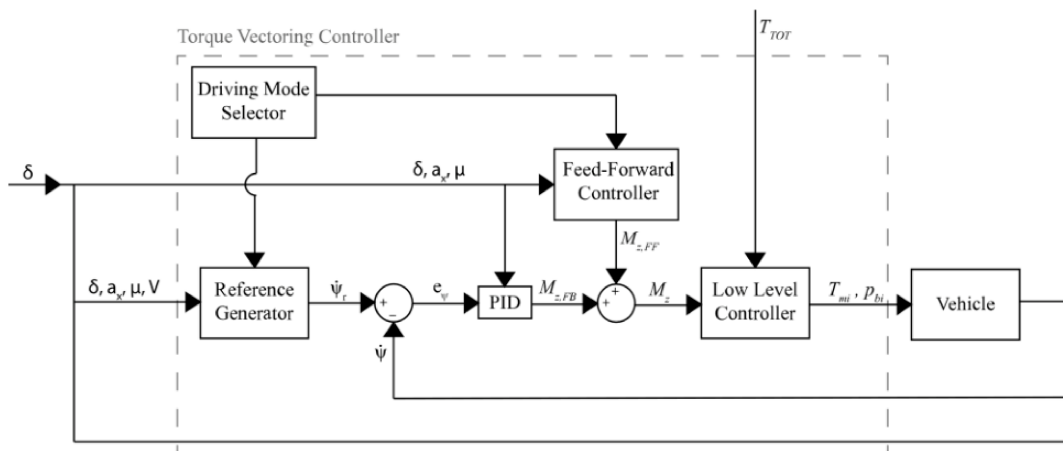


Figura 1.7: Architettura di controllo basata su regolatore PID [11]

Un esempio di questa tecnica di controllo è riportato in Figura 1.7, dove viene mostrato il sistema sviluppato in [11]. Nello specifico, il sistema proposto sfrutta una logica di controllo basata sulla somma di un termine in catena aperta, implementato tramite una mappatura multidimensionale del valore ottimale per il momento di imbardata del veicolo, con un termine in retroazione generato da un regolatore PID, i cui guadagni sono dipendenti dalla velocità del veicolo. Il sistema dispone inoltre di un selettore di modalità di guida in grado di modificare il valore del termine in feedforward assieme alla velocità d'imbardata di riferimento per il veicolo.

Controllo ottimo

I controllori ottimi, contrariamente ai regolatori PID, basano il loro funzionamento sulla modellazione matematica del veicolo e richiedono la stima dello stato in cui si trova la vettura (in termini di velocità di imbardata e/o angolo di assetto). La rappresentazione matematica del sistema utilizzata è di norma espressa tramite una formulazione in spazio di stato. Un esempio di controllore ottimo è rappresentato dagli LQR (*Linear Quadratic Regulator*) il cui obiettivo è la minimizzazione di una funzione di costo quadratica, dove solitamente quest'ultima include termini legati alla deviazione dello stato del veicolo rispetto a quello di riferimento assieme a dei termini legati allo sforzo di controllo richiesto al sistema di *Torque Vectoring Control*.

Uno schema rappresentativo di questa tecnica di controllo è riportato in Figura 1.8.

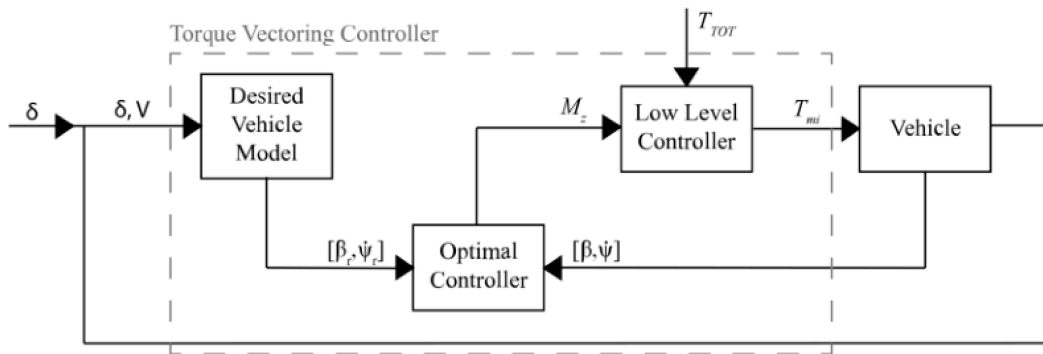


Figura 1.8: Architettura di controllo basata su controllore ottimo [3]

I principali vantaggi del controllo ottimo risiedono nella capacità di considerare contemporaneamente, nel calcolo dell'azione di controllo, tutte le variabili che definiscono lo stato del sistema, unitamente alla possibilità di incorporare scelte progettuali che definiscono il rapporto tra le prestazioni raggiunte dal sistema e lo sforzo di controllo necessario. Il principale svantaggio sta invece nella sensibilità rispetto alle incertezze di misura, ai disturbi e alla variazione dei parametri della vettura, che può impattare significativamente sulle prestazioni del controllo e sulla sua stabilità. Per garantire il corretto funzionamento del controllo è quindi necessaria un'accurata modellazione del sistema e un'elevata precisione nella misura dei suoi parametri.

Controllo predittivo

Analogamente ai controllori ottimi, i controllori predittivi vengono utilizzati per raggiungere un compromesso ottimale tra le prestazioni del sistema nell'inseguimento dello stato di riferimento e lo sforzo di controllo richiesto. In particolare, le architetture MPC (*Model Predictive Controller*) permettono, basandosi su un'opportuna modellazione della dinamica del veicolo, di ottimizzare e prevedere la risposta della vettura agli input di controllo entro un certo orizzonte temporale di controllo. Ad ogni ciclo di funzionamento l'algoritmo predittivo stabilisce i valori assunti dagli input di controllo durante l'orizzonte di controllo, applicando solamente quelli calcolati per l'istante attuale. L'operazione viene eseguita iterativamente ad ogni istante di controllo, basandosi sull'evoluzione dello stato del sistema e sulle misurazioni provenienti dai sensori del veicolo. La similitudine con i controllori ottimi appare anche nello schema di implementazione nei sistemi di *Torque Vectoring Control* [Figura 1.9].

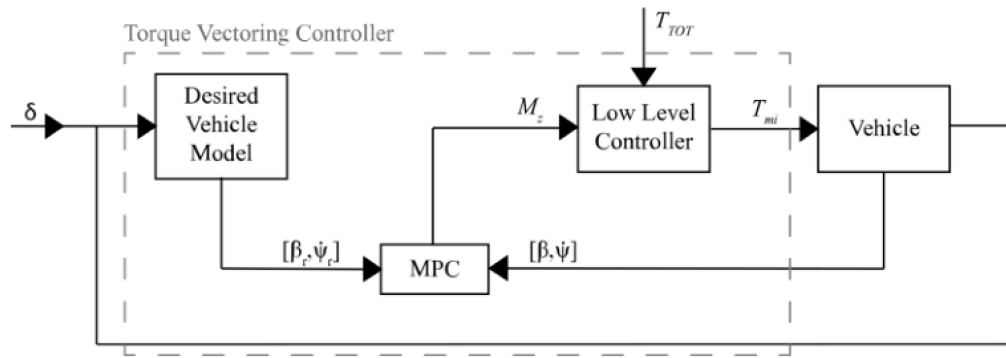


Figura 1.9: Architettura di controllo basata su controllore predittivo [3]

La limitazione principale per questo tipo di controllori è legata alla maggiore capacità computazionale richiesta per l'esecuzione dell'algoritmo predittivo, il quale deve essere eseguito in tempo reale per poter seguire correttamente le variazioni del comportamento dinamico del veicolo. Tuttavia, i recenti sviluppi tecnologici dei microprocessori e degli algoritmi di calcolo stanno facilitando sempre di più l'utilizzo di questa tecnica di controllo.

1.5 Strategia di controllo adottata

Considerando le potenzialità dei sistemi di TVC nel contesto delle competizioni Formula SAE, assieme ai vantaggi e agli svantaggi delle tecniche di controllo appena descritte, con la collaborazione del team Race UP è stata effettuata una valutazione per determinare l'approccio da seguire nella progettazione di un controllore della dinamica laterale per la monoposto prototipo SGe-08.

I requisiti imposti per la progettazione del sistema sono:

- **Miglioramento delle prestazioni dinamiche del veicolo:** il sistema deve consentire un miglioramento delle prestazioni dinamiche del veicolo, con l'obiettivo di incrementare il punteggio ottenuto dal team nelle prove dinamiche degli eventi FSAE.
- **Miglioramento della guidabilità del veicolo:** il sistema deve contribuire al miglioramento della guidabilità della vettura, garantendo, oltre al beneficio prestazionale, un comportamento del veicolo in grado di fornire al pilota sensazioni di guida dirette e prevedibili.
- **Facilità di realizzazione e implementazione:** il sistema deve essere progettato in modo da consentirne la realizzazione, l'implementazione e la validazione nel rispetto delle tempistiche di progetto imposte ai diversi reparti del team, mantenendo al contempo una metodologia di sviluppo precisa e rigorosa.
- **Robustezza ad incertezze di misura e variazioni parametriche:** il sistema deve garantire un adeguato livello di robustezza rispetto alle incertezze associate alle misure e alle variazioni dei parametri del veicolo. Questo va considerato dal momento che i dati disponibili per la modellazione della dinamica e la progettazione del controllore possono essere limitati o inficiati da disturbi e incertezze non trascurabili.
- **Possibilità di sviluppo:** il sistema deve essere strutturato in modo da consentire successivi sviluppi e affinamenti dell'algoritmo di controllo, con l'obiettivo di incrementare progressivamente il guadagno prestazionale ottenibile dalle vetture elettriche realizzate dal team.

A partire dagli obiettivi precedentemente definiti e tenendo conto degli strumenti e delle risorse a disposizione del team, il lavoro è stato orientato alla progettazione di un sistema di controllo della dinamica laterale del veicolo basato su un controllo di tipo PI (Proporzionale-Integrale). Le tecniche di controllo ottimo e predittivo sono state scartate a causa della loro maggiore complessità di realizzazione e setup, della loro elevata sensibilità rispetto agli eventuali errori nella modellazione del veicolo e della maggiore capacità computazionale richiesta, specialmente dagli algoritmi predittivi.

In questa prima fase, la strategia di controllo è stata implementata mediante il solo contributo di retroazione, generato tramite un regolatore PI opportunamente tarato in funzione delle caratteristiche del sistema e degli obiettivi prestazionali prefissati. L'eventuale introduzione di un termine di feedforward sarà valutata sulla base delle prestazioni ottenute con questa configurazione iniziale e dei margini di miglioramento osservabili. Tuttavia, la progettazione di tale contributo non rientra negli obiettivi del presente lavoro.

Queste scelte permettono di sviluppare una soluzione coerente con i vincoli progettuali individuati, caratterizzata da una struttura semplice e affidabile, ponendo al contempo le basi per eventuali successive evoluzioni e affinamenti del sistema progettato.

Capitolo 2

Modellazione del veicolo

Per sviluppare un sistema di controllo come quello descritto nel capitolo precedente è necessario disporre di un modello matematico del veicolo in grado di descriverne il comportamento dinamico con un livello di accuratezza adeguato agli obiettivi del controllo. La modellazione della dinamica di un veicolo rappresenta un problema complesso, poiché esso costituisce un sistema caratterizzato da numerosi gradi di libertà, spesso fortemente interconnessi tra loro. Inoltre, molti dei parametri che ne descrivono il comportamento risultano difficili da stimare e richiedono campagne sperimentali dedicate, non sempre realizzabili in tutti i contesti di studio. L'obiettivo del presente capitolo è sviluppare un modello matematico capace di descrivere i principali aspetti della dinamica del veicolo rilevanti per l'implementazione di un sistema di controllo della dinamica laterale basato sul momento d'imbardata. Dopo aver introdotto i principali parametri del veicolo e definito le ipotesi semplificative adottate, verrà ricavato il *modello monotraccia* (comunemente chiamato *bicycle model*), dal quale sarà successivamente ottenuta una rappresentazione del sistema in spazio di stato, utile per svolgere successivamente la progettazione del sistema di controllo.

2.1 Dinamica laterale del veicolo

Il primo passo per descrivere matematicamente il comportamento dinamico di un veicolo è quello di definire il sistema di riferimento all'interno del quale viene descritto assieme ai suoi principali parametri geometrici e fisici.

2.1.1 Sistema di riferimento e convenzioni

Si introduce un sistema di riferimento solidale alla vettura costituito da una terna cartesiana destrorsa avente origine nel baricentro del veicolo, rappresentato dal punto G [Figura 2.1].

In particolare:

- l'asse X è parallelo al piano stradale e orientato secondo la direzione longitudinale del veicolo, dall'assale posteriore verso quello anteriore;
- l'asse Y è parallelo al piano stradale, perpendicolare all'asse X e orientato verso il lato sinistro del veicolo;
- l'asse Z è perpendicolare al piano individuato dagli assi X e Y ed è orientato verso l'alto.

L'orientazione di tali assi viene descritta rispettivamente dai versori i , j , k , i quali sono rappresentabili matematicamente come i vettori:

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \quad j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \quad k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \quad (2.1)$$

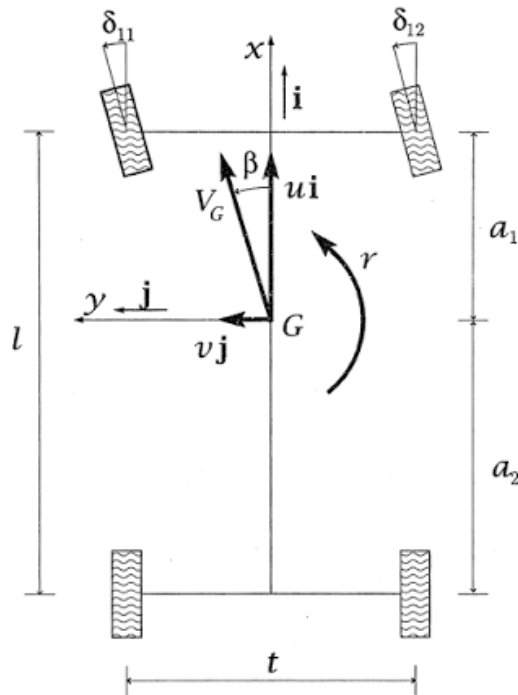


Figura 2.1: Definizione delle grandezze cinematiche del veicolo [8]

2.1.2 Caratteristiche cinematiche

In prima approssimazione, il veicolo può essere modellato come un corpo rigido avente massa complessiva m , comprensiva di tutte le sue componenti, e momento d'inerzia baricentrico rispetto all'asse Z pari a J_z . I contributi di massa ed inerzia dovuti alle ruote del veicolo, due per ogni assale, sono inglobati all'interno dei termini m e J_z . Questa semplificazione risulta accettabile poiché la rotazione dovuta all'azione di sterzo o a fenomeni di scuotimento del veicolo non influenzano la posizione del baricentro G e il valore dell'inerzia baricentrica J_z .

Il moto del veicolo è assunto piano, ovvero vengono trascurati gli spostamenti lungo l'asse Z assieme ai fenomeni di beccheggio e rollio. Di conseguenza, esso può essere descritto come il moto di un corpo rigido su un piano geometrico, caratterizzato da tre gradi di libertà: le traslazioni lungo gli assi X e Y e la rotazione attorno all'asse Z , considerata positiva in senso antiorario secondo la convenzione adottata. Inoltre, questa assunzione permette di ritenere trascurabili i trasferimenti di carico che si verificherebbero normalmente, permettendo quindi di ritenere costanti i carichi verticali agenti sulle ruote.

Una volta descritte le proprietà fisiche del veicolo, si possono definire i seguenti parametri geometrici:

- il **semipasso anteriore** a_1 , pari alla distanza longitudinale tra l'assale anteriore e il baricentro della vettura.
- il **semipasso posteriore** a_2 , pari alla distanza longitudinale tra l'assale posteriore e il baricentro.
- il **passo della vettura** $l = a_1 + a_2$, pari alla distanza longitudinale tra l'assale anteriore e quello posteriore.
- la **carreggiata anteriore** t_1 , pari alla distanza tra i centri delle ruote anteriori.
- la **carreggiata posteriore** t_2 , pari alla distanza tra i centri delle ruote posteriori.
- gli **angoli delle ruote** δ_{ij} rispetto all'asse longitudinale del veicolo. In cui i e j indicano rispettivamente l'assale ($i = 1$ per l'assale anteriore, $i = 2$ per l'assale posteriore) e il lato ($i = 1$ per il lato sinistro, $i = 2$ per il lato destro) di appartenenza di ciascuno pneumatico. Tale notazione verrà utilizzata anche durante la definizione delle altre grandezze.

Il moto del veicolo nel piano è descritto dal vettore velocità del baricentro $\mathbf{v}_G$, scomponibile nelle componenti longitudinale v_x e laterale v_y . I moduli di tali componenti sono espressi dalle relazioni:

$$v_x = |\mathbf{v}_G| \cos(\beta) \quad v_y = |\mathbf{v}_G| \sin(\beta) \quad (2.2)$$

dove l'angolo β rappresenta l'angolo formato dal vettore velocità $\mathbf{v}_G$ con l'asse $\mathbf{X}$, comunemente noto come **angolo di assetto** (o *sideslip angle*) del veicolo.

$$\beta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \quad (2.3)$$

Assieme al vettore $\mathbf{v}_G$ viene anche definita la velocità di rotazione del veicolo attorno all'asse $\mathbf{Z}$, ovvero la sua velocità di imbardata (*yaw rate*), denominata r .

2.1.3 Caratteristiche dinamiche

Il movimento del veicolo avviene grazie all'azione delle forze di attrito generate dal contatto asfalto-pneumatico rappresentabili attraverso dei vettori applicati nei punti di contatto delle ruote con il terreno, solitamente supposti coincidenti con i centri delle impronte a terra degli pneumatici [Figura 2.2]. Per rappresentare queste forze attraverso dei vettori è quindi necessario definire, per ogni ruota, un nuovo sistema di riferimento la cui origine coincide con il punto di punto di contatto asfalto-pneumatico e gli assi con la terna destrorsa formata da:

- l'asse $\mathbf{X}_{ij}$, parallelo al piano stradale, orientato secondo la direzione longitudinale dello pneumatico e con orientamento positivo verso il lato anteriore.
- l'asse $\mathbf{Y}_{ij}$, parallelo al piano stradale, orientato secondo la direzione trasversale dello pneumatico e con orientamento positivo verso il lato sinistro.
- l'asse $\mathbf{Z}_{ij}$, perpendicolare agli altri due e diretto verso l'alto.

La forza sviluppata da ciascun pneumatico è rappresentata da un vettore $\mathbf{F}_{ij}$ che comprende l'effetto delle forze di attrito che vengono sviluppate dallo stesso sia secondo la sua direzione longitudinale ($\mathbf{F}_{x_{ij}}$) che trasversale ($\mathbf{F}_{y_{ij}}$) all'interno del piano definito dagli assi $\mathbf{X}_{ij}$ e $\mathbf{Y}_{ij}$. Pertanto, ogni forza può essere espressa all'interno del proprio sistema di riferimento come:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{11} &= \mathbf{F}_{x_{11}} + \mathbf{F}_{y_{11}} \\ \mathbf{F}_{12} &= \mathbf{F}_{x_{12}} + \mathbf{F}_{y_{12}} \\ \mathbf{F}_{21} &= \mathbf{F}_{x_{21}} + \mathbf{F}_{y_{21}} \\ \mathbf{F}_{22} &= \mathbf{F}_{x_{22}} + \mathbf{F}_{y_{22}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

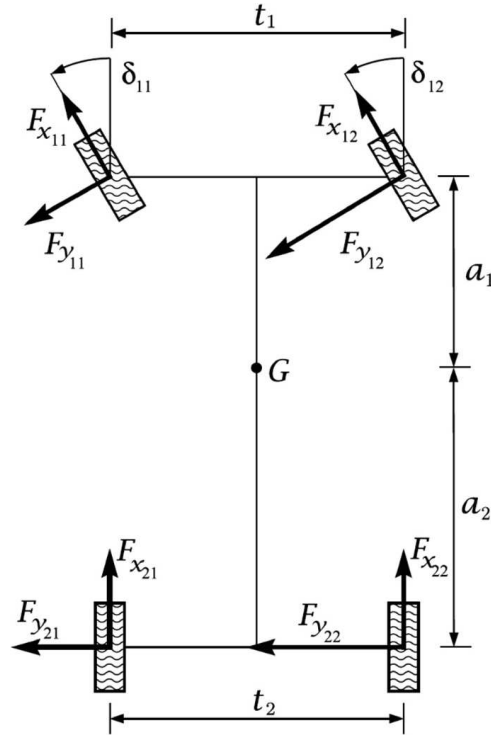


Figura 2.2: Rappresentazione delle forze agenti sul veicolo [10]

Tali vettori possono essere ricondotti nel sistema di riferimento del veicolo $G(X, Y, Z)$ attraverso le relazioni che esprimono rispettivamente le forze longitudinali:

$$\begin{aligned}
 F_{x,11} &= F_{x11} \cos(\delta_{11}) - F_{y11} \sin(\delta_{11}) \\
 F_{x,12} &= F_{x12} \cos(\delta_{12}) - F_{y12} \sin(\delta_{12}) \\
 F_{x,21} &= F_{x21} \cos(\delta_{21}) - F_{y21} \sin(\delta_{21}) \\
 F_{x,22} &= F_{x22} \cos(\delta_{22}) - F_{y22} \sin(\delta_{22})
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

e le forze laterali:

$$\begin{aligned}
 F_{y,11} &= F_{x11} \sin(\delta_{11}) + F_{y11} \cos(\delta_{11}) \\
 F_{y,12} &= F_{x12} \sin(\delta_{12}) + F_{y12} \cos(\delta_{12}) \\
 F_{y,21} &= F_{x21} \sin(\delta_{21}) + F_{y21} \cos(\delta_{21}) \\
 F_{y,22} &= F_{x22} \sin(\delta_{22}) + F_{y22} \cos(\delta_{22})
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Le forze sviluppate dallo pneumatico lungo la propria direzione longitudinale, nell'ipotesi di *aderenza perfetta* degli pneumatici con l'asfalto, sono approssimabili a:

$$F_{xij} = T_{ij}/R \quad i, j \in \{1,2\} \tag{2.7}$$

In cui T_{ij} corrisponde alla coppia applicata sulla ruota j -esima dell' i -esimo asse ed R è il raggio dello pneumatico supposto costante.

Le forze sviluppate lateralmente possono invece essere espresse come una funzione:

$$F_{y_{ij}} = f(\alpha_{ij}, F_{z_{ij}}) \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (2.8)$$

In cui le variabili coinvolte sono rispettivamente:

- l'**angolo di deriva dello pneumatico** (*slip angle*) α_{ij} , definito come l'angolo tra la direzione del suo asse longitudinale e la direzione del vettore velocità del punto di contatto con il piano stradale [Figura 2.3].

$$\alpha_{ij} = \arctan\left(\frac{v_{y_{ij}}}{v_{x_{ij}}}\right) \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (2.9)$$

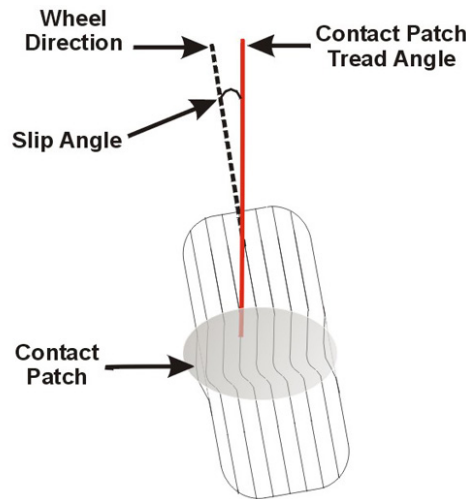


Figura 2.3: Rappresentazione dell'angolo di deriva dello pneumatico

- il **carico verticale agente sullo pneumatico** $F_{z_{ij}}$. Dal momento che non vengono considerati i fenomeni di trasferimento di carico, le forze agenti verticalmente sugli pneumatici sono ritenute costanti e pari a:

$$F_{z_{11}} = F_{z_{12}} = mg \cdot \frac{a_2}{2l} \quad F_{z_{21}} = F_{z_{22}} = mg \cdot \frac{a_1}{2l} \quad (2.10)$$

Ovvero pari alla quota di peso del veicolo che si ripartisce sulla singola ruota in condizioni statiche.

Tale rappresentazione, che verrà discussa con maggior dettaglio successivamente nel paragrafo 2.3.2, rappresenta una semplificazione del comportamento reale dello pneumatico, il quale

dipenderebbe da molti più parametri tra cui ad esempio la temperatura e pressione, gli angoli di assetto impostati, come convergenza e campanatura, o il coefficiente d'attrito asfalto-pneumatico. Avendo schematizzato il veicolo come un unico corpo rigido, la velocità del baricentro $\mathbf{v}_G$ e la velocità di imbardata r determinano univocamente la velocità di un qualunque altro suo punto, e quindi, ricordando l'equazione (2.9) gli angoli di deriva α_{ij} delle quattro ruote. Conoscendo tali parametri è inoltre possibile calcolare gli angoli di assetto di ogni ruota β_{ij} , intesi come gli angoli formati dai vettori velocità di ogni singola ruota ($\mathbf{v}_{ij}$) con l'asse longitudinale del veicolo X .

I vettori $\mathbf{v}_{ij}$ sono ottenibili tramite la relazione fondamentale della cinematica dei corpi rigidi:

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_G + r\mathbf{k} \times G\mathbf{P}_{ij} \quad (2.11)$$

Dove con $G\mathbf{P}_{ij}$ si indica il vettore posizione del punto P_{ij} rispetto al baricentro.

I vettori posizione relativi ai quattro punti di contatto asfalto-pneumatico possono essere espressi come:

$$\begin{aligned} G\mathbf{P}_{11} &= a_1\mathbf{i} + \frac{t_1}{2}\mathbf{j} \\ G\mathbf{P}_{12} &= a_1\mathbf{i} - \frac{t_1}{2}\mathbf{j} \\ G\mathbf{P}_{21} &= -a_2\mathbf{i} + \frac{t_2}{2}\mathbf{j} \\ G\mathbf{P}_{22} &= -a_2\mathbf{i} - \frac{t_2}{2}\mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.12)$$

sviluppando la relazione (2.11) per esempio per la ruota anteriore sinistra si ottiene:

$$\mathbf{v}_{11} = (v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}) + \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & r \\ a_1 & \frac{t_1}{2} & 0 \end{bmatrix} = (v_x - r\frac{t_1}{2})\mathbf{i} + (v_y + ra_1)\mathbf{j} \quad (2.13)$$

e operando analogamente per gli altri punti si giunge alle espressioni

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{11} &= \left(v_x - r\frac{t_1}{2}\right)\mathbf{i} + \left(v_y + ra_1\right)\mathbf{j} = v_{x,11}\mathbf{i} + v_{y,11}\mathbf{j} \\ \mathbf{v}_{12} &= \left(v_x + r\frac{t_1}{2}\right)\mathbf{i} + \left(v_y + ra_1\right)\mathbf{j} = v_{x,12}\mathbf{i} + v_{y,12}\mathbf{j} \\ \mathbf{v}_{21} &= \left(v_x - r\frac{t_2}{2}\right)\mathbf{i} + \left(v_y - ra_2\right)\mathbf{j} = v_{x,21}\mathbf{i} + v_{y,21}\mathbf{j} \\ \mathbf{v}_{22} &= \left(v_x + r\frac{t_2}{2}\right)\mathbf{i} + \left(v_y - ra_2\right)\mathbf{j} = v_{x,22}\mathbf{i} + v_{y,22}\mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Gli angoli di assetto β_{ij} sono legati agli angoli di sterzo δ_{ij} e dagli angoli di deriva α_{ij} dalla relazione:

$$\beta_{ij} = \delta_{ij} - \alpha_{ij} \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (2.15)$$

Seguono subito le relazioni che esprimono gli angoli di assetto dei centri di ciascuna ruota:

$$\begin{aligned} \delta_{11} - \alpha_{11} = \beta_{11} &= \arctan \left(\frac{v_y + ra_1}{v_x - rt_1/2} \right) \\ \delta_{12} - \alpha_{12} = \beta_{12} &= \arctan \left(\frac{v_y + ra_1}{v_x + rt_1/2} \right) \\ \delta_{21} - \alpha_{21} = \beta_{21} &= \arctan \left(\frac{v_y - ra_2}{v_x - rt_2/2} \right) \\ \delta_{22} - \alpha_{22} = \beta_{22} &= \arctan \left(\frac{v_y - ra_2}{v_x + rt_2/2} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.1.4 Equazioni della dinamica

Una volta definite le grandezze coinvolte nella modellizzazione del sistema è possibile scrivere le equazioni di equilibrio delle forze agenti sul veicolo, assieme all'equazione di equilibrio delle coppie che si sviluppano attorno all'asse $\mathbf{Z}$:

$$m \cdot a_x = \sum_{i,j=1}^{i,j=2} F_{x,ij} \quad m \cdot a_y = \sum_{i,j=1}^{i,j=2} F_{y,ij} \quad 0 = \sum_{i,j=1}^{i,j=2} F_{z,ij} \quad J_z \cdot \dot{r} = \sum_{i,j=1}^{i,j=2} M_{z,ij} \quad (2.17)$$

è importante specificare che le componenti di accelerazione longitudinale e laterale (a_x e a_y), essendo espresse nel sistema di riferimento solidale al veicolo, sono ottenute derivando la velocità $\mathbf{V}_G = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$ rispetto al tempo t . Durante tale operazione occorre tener presente che i versori cambiano direzione durante il moto, ovvero:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = r \mathbf{j} \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = -r \mathbf{i} \quad (2.18)$$

ottenendo quindi

$$\mathbf{a}_G = \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \dot{v}_x \mathbf{i} + v_x r \mathbf{j} + \dot{v}_y \mathbf{j} - v_y r \mathbf{i} = (\dot{v}_x - v_y r) \mathbf{i} + (\dot{v}_y + v_x r) \mathbf{j} \quad (2.19)$$

Da cui risultano immediate le espressioni delle due componenti di accelerazione:

$$a_x = \dot{v}_x - v_y r \quad a_y = \dot{v}_y + v_x r \quad (2.20)$$

Una volta determinate le espressioni delle componenti di accelerazione longitudinale e laterale del veicolo è possibile sviluppare le equazioni (2.17) ed ottenere:

$$\begin{cases} m \cdot (\dot{v}_x - r v_y) = F_{x,11} + F_{x,12} + F_{x,21} + F_{x,22} \\ m \cdot (\dot{v}_y + r v_x) = F_{y,11} + F_{y,12} + F_{y,21} + F_{y,22} \\ 0 = F_{z,11} + F_{z,12} + F_{z,21} + F_{z,22} - mg \\ J_z \cdot \dot{r} = \frac{t_1}{2}(-F_{x,11} + F_{x,12}) + \frac{t_2}{2}(-F_{x,21} + F_{x,22}) + a_1(F_{y,11} + F_{y,12}) - a_2(F_{y,21} + F_{y,22}) \end{cases} \quad (2.21)$$

Le equazioni di equilibrio appena riportate costituiscono la base per descrivere il comportamento dinamico del veicolo. Tuttavia, è possibile semplificarle ulteriormente tramite alcune assunzioni, per ottenere una rappresentazione *monotraccia* del veicolo.

2.2 Modello monotraccia del veicolo

In normali condizioni di esercizio si ha preponderanza della velocità di avanzamento v_x su tutte le altre componenti, ossia:

$$v_x \gg v_y \quad v_x \gg |r|a_i \quad v_x \gg |r|t_i/2 \quad i \in \{1,2\} \quad (2.22)$$

In tali condizioni, ricordando la (2.3), risulta lecito scrivere:

$$\beta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \approx \frac{v_y}{v_x} \quad (2.23)$$

Attraverso tale approssimazione è consuetudine semplificare le relazioni (2.16) che diventano

$$\beta_{11} \approx \frac{v_y + r a_1}{v_x} \quad \beta_{12} \approx \frac{v_y + r a_1}{v_x} \quad \beta_{21} \approx \frac{v_y - r a_2}{v_x} \quad \beta_{22} \approx \frac{v_y - r a_2}{v_x} \quad (2.24)$$

Da cui si ricava che le due ruote di uno stesso assale hanno angoli di assetto quasi uguali. Vengono quindi definiti gli angoli di assetto per l'assale anteriore e posteriore come:

$$\beta_1 = \frac{v_y + r a_1}{v_x} \quad \beta_2 = \frac{v_y - r a_2}{v_x} \quad (2.25)$$

Il sistema di sterzo è di norma costruito in modo che gli angoli di sterzo delle ruote anteriori siano fra loro molto simili, soprattutto per angoli modesti, come quelli utilizzati durante la guida a velocità sostenuta. Si ha quindi $(\delta_{i1} \approx \delta_{i2}) = \delta_i$, che permettono di ottenere, in base alle

equazioni (2.25), le relazioni

$$\alpha_1 = \delta_1 - \frac{v_y + r a_1}{v_x} = (\alpha_{11} \approx \alpha_{12}) \quad \alpha_2 = \delta_2 - \frac{v_y - r a_2}{v_x} = (\alpha_{21} \approx \alpha_{22}) \quad (2.26)$$

da cui emerge che le due ruote di uno stesso assale lavorano con angoli di deriva *quasi uguali*. Pertanto è lecito indicare con α_1 l'angolo di deriva di entrambe le ruote anteriori e con α_2 l'angolo di deriva delle ruote posteriori.

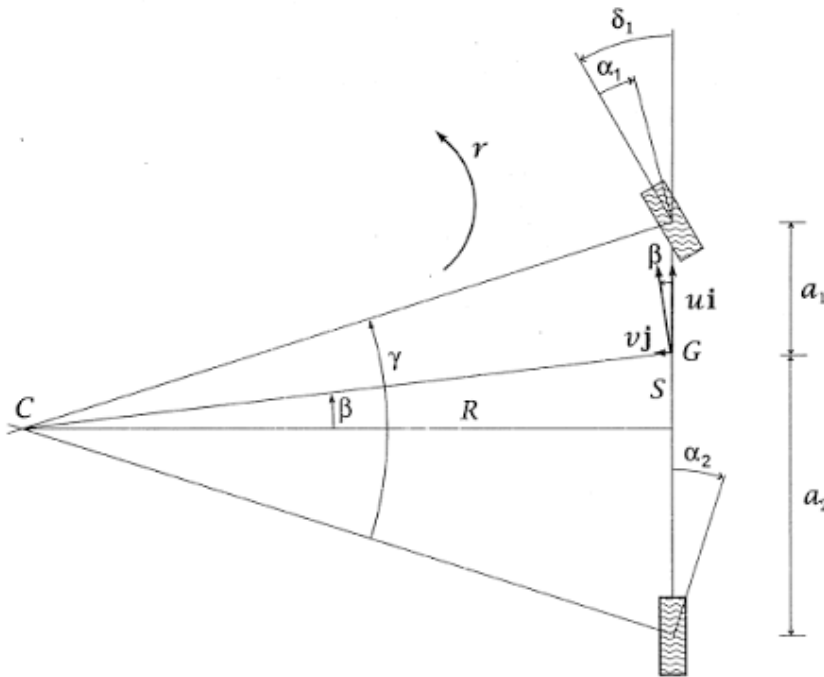


Figura 2.4: Rappresentazione del modello monotraccia del veicolo

Un'altra importante assunzione da fare riguarda gli angoli di sterzo δ_1 e δ_2 . Si suppone infatti che gli angoli di sterzo delle ruote anteriori dipendano dall'angolo di rotazione δ_v del volante, secondo un certo rapporto di trasmissione, mentre gli angoli delle ruote posteriori sono considerati nulli dal momento che non vengono modificati dall'azione del volante o da fenomeni di scuotimento del veicolo, che sono trascurati in questa trattazione. Il risultato finale è il *modello monotraccia* del veicolo rappresentato in Figura 2.4.

In questo modello, attraverso le assunzioni appena descritte, i contributi delle ruote di uno stesso assale vengono raggruppati in un singolo elemento, come se il veicolo fosse dotato di un'unica ruota per ogni assale (da qui la denominazione *bicycle model*). Si tratta di un utile strumento per semplificare la descrizione della dinamica laterale del veicolo, soprattutto nei contesti in cui i fenomeni di trasferimento di carico, la cinematica delle sospensioni e le differenze tra le ruote di uno stesso assale non influenzano il comportamento del sistema.

Seguendo tale rappresentazione è conveniente sommare i contributi delle componenti relative alle due ruote di uno stesso assale ponendo:

$$\begin{aligned} F_{x,1} &= F_{x,11} + F_{x,12} & F_{x,2} &= F_{x,21} + F_{x,22} \\ F_{y,1} &= F_{y,11} + F_{y,12} & F_{y,2} &= F_{y,21} + F_{y,22} \\ F_{z,1} &= F_{z,11} + F_{z,12} & F_{z,2} &= F_{z,21} + F_{z,22} \end{aligned} \quad (2.27)$$

dove ogni termine è stato definito precedentemente nelle equazioni (2.5), (2.6) e (2.10). Tenuto conto che l'angolo δ_2 è considerato nullo e che gli angoli anteriori (δ_{11} e δ_{12}) sono normalmente inferiori ai 15° , è lecito porre

$$\begin{aligned} \cos(\delta_1) &\approx 1 & \sin(\delta_1) &\approx \delta_1 \\ \cos(\delta_2) &= 1 & \sin(\delta_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

In base alle considerazioni fatte, le equazioni di equilibrio (2.17) possono essere riscritte come:

$$\begin{cases} m \cdot (\dot{v}_x - r v_y) = F_{x,1} + F_{x,2} \\ m \cdot (\dot{v}_y + r v_x) = F_{y,1} + F_{y,2} \\ 0 = F_{z,1} + F_{z,2} - mg \\ J_z \cdot \dot{r} = a_1 F_{y,1} - a_2 F_{y,2} \end{cases} \quad (2.29)$$

Tale modello rappresenta un'importante semplificazione rispetto a quello ricavato precedentemente. Tuttavia, per studiarlo con maggior dettaglio, e quindi procedere verso una rappresentazione utile per la progettazione del sistema di controllo, è necessaria una descrizione più dettagliata del modello matematico utilizzato per rappresentare gli pneumatici.

2.3 Modellizzazione degli pneumatici

Per completare il modello matematico del veicolo resta da definire il comportamento di ciascun pneumatico. Come già accennato nel paragrafo 2.1.3, la forza laterale $F_{y_{ij}}$ esercitata dalla strada su ciascuna ruota, dipende dal corrispondente angolo di deriva α_{ij} e dal carico verticale $F_{z_{ij}}$. Tuttavia, il valore assunto dipende anche da altri fattori, quali per esempio l'angolo di campanatura della ruota, il coefficiente di attrito e la forza longitudinale $F_{x_{ij}}$. Tener conto di tutti questi fattori non è facile e non esiste una soluzione ottimale, ma vari compromessi fra semplicità e completezza.

Per quanto riguarda l'influenza dell'angolo di campanatura, la presunta trascurabilità del moto di rollio rende trascurabili anche le variazioni di tali angoli. Inoltre, dal momento che il veicolo è considerato simmetrico, le due ruote di un assale hanno angoli di campanatura opposti e quindi

il loro contributo si annulla nel momento in cui si considera la somma delle forze laterali di uno stesso assale F_{y_i} . Considerando il moto del veicolo a velocità quasi costante è possibile inoltre assumere che gli effetti delle forze longitudinali $F_{x_{ij}}$ siano molto modesti e che non influiscano in modo significativo sul valore della forza laterale sviluppata dal contatto asfalto-pneumatico. Considerando tali assunzioni è possibile modellizzare con relativa semplicità il comportamento degli pneumatici. Per completezza verranno ora brevemente descritte le due rappresentazioni principali possibili all'interno delle ipotesi appena menzionate.

2.3.1 Modello linearizzato

Si tratta del modello più semplice perché ipotizza un legame lineare fra la forza laterale e l'angolo di deriva

$$F_{y_{ij}} = C_{\alpha_{ij}} \alpha_{ij} \quad (2.30)$$

Il parametro $C_{\alpha_{ij}}$ che lega la forza laterale all'angolo di deriva, prende il nome di rigidezza di deriva (*cornering stiffness*) dello pneumatico. Quest'ultima corrisponde di fatto al coefficiente angolare della retta con cui si approssima l'andamento della forza in funzione dell'angolo α_{ij} . Una definizione più generale, valida per qualunque rappresentazione dello pneumatico è

$$C_{\alpha_{ij}} = \frac{dF_{y_{ij}}}{d\alpha_{ij}} \quad (2.31)$$

in cui la rigidezza di deriva corrisponde alla derivata della forza laterale sviluppata rispetto all'angolo di deriva dello pneumatico.

Dall'equazione (2.30), ricordando che si considera $\alpha_{i1} \approx \alpha_{i2}$, si ottiene

$$F_{y_i} = (C_{\alpha_{i1}} + C_{\alpha_{i2}}) \alpha_i = C_{\alpha_i} \alpha_i \quad (2.32)$$

In cui viene definita la forza laterale sviluppata da ogni assale F_{y_i} e il termine C_{α_i} assume il significato di rigidezza di deriva dell'assale. Il campo di impiego di questo modello è solitamente limitato a quei casi in cui gli angoli di deriva sono molto piccoli (solitamente intorno ai $\pm 2^\circ$). Per utilizzare questo modello si suppone che il carico verticale agente sullo pneumatico coincida con il *carico statico* (già definito nell'equazione (2.10)) che si sviluppa mentre il veicolo è in moto rettilineo uniforme a velocità v_x . Definendo con $C_{\alpha_{ij}}^0$ la rigidezza di deriva che lo pneumatico assume in corrispondenza del carico statico, e considerando che le ruote di ogni assale sono identiche e sottoposte allo stesso sforzo verticale, la rigidezza di deriva d'assale diventa

$$C_{\alpha_i} = 2C_{\alpha_{i1}}^0 = 2C_{\alpha_{i2}}^0 \quad (2.33)$$

e pari quindi al doppio della rigidezza di deriva di una singola ruota dell'assale sotto carico statico.

2.3.2 Modello non linearizzato

Questo modello rappresenta un'estensione del modello lineare utile quando si vogliono studiare situazioni in cui gli angoli di deriva possono raggiungere valori elevati, ovvero quando non è più possibile ipotizzare un legame lineare. Come già mostrato nell'equazione (2.8), la forza laterale sviluppata dallo pneumatico viene supposta rappresentabile come una funzione del tipo

$$F_{y_{ij}} = f_i(\alpha_{ij}, F_{z_{ij}}) \quad i, j \in \{1, 2\}$$

in cui anche i carichi verticali $F_{z_{ij}}$ agenti sulle singole ruote sono ritenuti variabili, assieme agli angoli di deriva α_{ij} . L'andamento di questa funzione viene ricostruito solitamente utilizzando delle formule empiriche (come ad esempio la Magic Formula, che verrà descritta in sottosezione 2.3.3) oppure memorizzando su una LUT (*look up table*) i dati ottenuti tramite rilevazioni sperimentali svolte sullo pneumatico.

In questo modo, la forza laterale esercitata da ciascun assale può essere espressa come una funzione non lineare del tipo

$$F_{y_i} = f_i(\alpha_{i1}, F_{z_{i1}}) + f_i(\alpha_{i2}, F_{z_{i2}}) \quad (2.34)$$

in cui si sommano i contributi dei due pneumatici di ogni assale. Tale rappresentazione risulta più precisa ma allo stesso tempo più complessa da utilizzare, soprattutto quando i dati a disposizione sono limitati e si vuole mantenere una formulazione semplice della dinamica del veicolo. Tuttavia, adoperando alcune semplificazioni, risulta essere molto utile per analizzare le caratteristiche dello pneumatico ed estrarre parametri importanti per modellizzare correttamente il comportamento del veicolo.

2.3.3 Magic Formula

Col termine *Magic Formula* ci si riferisce ad una delle formule empiriche più utilizzate per rappresentare il comportamento non lineare degli pneumatici. Lo sviluppo di questa formulazione nasce negli anni '80 grazie al contributo del ricercatore Hans B. Pacejka [4], e si è aggiornata nel tempo fino a diventare uno standard nel settore automobilistico. La formula permette di approssimare l'andamento della forza laterale, attraverso una interpolazione dei dati ottenuti

tramite specifici test sperimentali, come la funzione trascendente

$$F_y(\alpha) = D \sin \left(C \arctan \left(B\alpha - E [B\alpha - \arctan(B\alpha)] \right) \right) \quad (2.35)$$

In cui i paramtri B , C , D ed E sono di fatto dei coefficienti di forma che stabiliscono il tipo di andamento della funzione. In particolare, il parametro D può essere approssimato come $D = F_z \mu_p$, dove con μ_p ci si riferisce al coefficiente di aderenza massimo dello pneumatico [8]. Pertanto, l'equazione (2.35) può essere riscritta come

$$F_y(\alpha, F_z) = F_z \mu_p \sin \left(C \arctan \left(B\alpha - E [B\alpha - \arctan(B\alpha)] \right) \right) \quad (2.36)$$

rendendo esplicita la dipendenza della funzione sia dall'angolo di deriva dello pneumatico α che dal carico verticale F_z . Fissato un certo carico verticale $\bar{F}_z$, la funzione dipende solamente dall'angolo di deriva α e possiede alcune importanti caratteristiche:

- è una funzione dispari: $F_y(-\alpha, \bar{F}_z) = -F_y(\alpha, \bar{F}_z)$. Pertanto si ha sempre $F_y(0, \bar{F}_z) = 0$.
- la pendenza nell'origine è una semplice funzione di tre parametri

$$\left. \frac{dF_y(\alpha, F_z)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0, F_z=\bar{F}_z} = BCD = BC\bar{F}_z \mu_p \quad (2.37)$$

Questo permette di stimare agevolmente la rigidezza di deriva dello pneumatico $C_{\alpha_{ij}}$ per piccoli valori dell'angolo di deriva α .

- dato che la funzione è sinusoidale con ampiezza pari a D , si ha che $|F_y(\alpha, \bar{F}_z)| \leq D = \bar{F}_z \mu_p$
- per $\alpha \rightarrow \infty$ ha sempre un asintoto orizzontale il cui valore dipende dai coefficienti di forma D , C ed E .

2.4 Modello in spazio di stato del veicolo

La rappresentazione in spazio di stato consente di esprimere in forma compatta le equazioni del modello e di analizzarne analiticamente il comportamento dinamico. In questa sezione vengono quindi definite le variabili di stato, gli ingressi e le uscite del sistema, ricavando le corrispondenti matrici della rappresentazione in spazio di stato. Tale formulazione costituirà la base per la successiva progettazione del sistema di controllo.

2.4.1 Riscrittura delle equazioni della dinamica

Supponendo che gli pneumatici del veicolo lavorino con piccoli valori degli angoli di deriva α_{ij} , e considerando i carichi verticali agenti su di essi costanti e pari ai carichi statici descritti nell'equazione (2.10), è possibile riscrivere le equazioni di equilibrio (2.29) come:

$$\begin{cases} m \cdot (\dot{v}_x - r v_y) = F_{x,1} + F_{x,2} \\ m \cdot (\dot{v}_y + r v_x) = C_{\alpha_1} \alpha_1 + C_{\alpha_2} \alpha_2 \\ 0 = F_{z,1} + F_{z,2} - mg \\ J_z \cdot \dot{r} = C_{\alpha_1} \alpha_1 a_1 - C_{\alpha_2} \alpha_2 a_2 \end{cases} \quad (2.38)$$

Dove le forze laterali sviluppate dagli assali F_{y_i} sono riscritte utilizzando l'espressione (2.32). Ricordando le relazioni (2.26), e considerando angoli di sterzo per le ruote anteriori e posteriori rispettivamente $\delta_1 = \delta$ e $\delta_2 = 0$, l'equazione relativa all'equilibrio dei momenti diventa

$$J_z \cdot \dot{r} = C_{\alpha_1} \left(\delta - \frac{v_y + r a_1}{v_x} \right) a_1 - C_{\alpha_2} \left(- \frac{v_y - r a_2}{v_x} \right) a_2 \quad (2.39)$$

Che sviluppata ulteriormente porta a

$$\begin{aligned} J_z \cdot \dot{r} &= C_{\alpha_1} \left(\delta - \frac{v_y}{v_x} - \frac{r a_1}{v_x} \right) a_1 - C_{\alpha_2} \left(- \frac{v_y}{v_x} + \frac{r a_2}{v_x} \right) a_2 \\ &= C_{\alpha_1} \delta a_1 - C_{\alpha_1} \frac{v_y}{v_x} a_1 - C_{\alpha_1} \frac{r a_1^2}{v_x} + C_{\alpha_2} \frac{v_y}{v_x} a_2 - C_{\alpha_2} \frac{r a_2^2}{v_x} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Si ottiene quindi l'espressione dell'accelerazione di imbardata (*yaw acceleration*) del veicolo $\dot{r}$

$$\dot{r} = v_y \left(\frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{J_z \cdot v_x} \right) + r \left(- \frac{C_{\alpha_1} a_1^2 + C_{\alpha_2} a_2^2}{J_z \cdot v_x} \right) + \delta \left(\frac{C_{\alpha_1} a_1}{J_z} \right) \quad (2.41)$$

Dipendente dalla velocità laterale del veicolo v_y , dalla velocità di imbardata r e dall'angolo di sterzo delle ruote anteriori δ .

L'azione di un sistema di controllo per il momento di imbardata del veicolo può essere rappresentata come una coppia esterna M_C sviluppata attorno all'asse Z del sistema di riferimento solidale al veicolo. Considerando anche questo contributo, l'equazione 2.41 diventa

$$\dot{r} = v_y \left(\frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{J_z \cdot v_x} \right) + r \left(- \frac{C_{\alpha_1} a_1^2 + C_{\alpha_2} a_2^2}{J_z \cdot v_x} \right) + \delta \left(\frac{C_{\alpha_1} a_1}{J_z} \right) + M_C \left(\frac{1}{J_z} \right) \quad (2.42)$$

In modo del tutto analogo si può riconsiderare l'equazione che esprime l'equilibrio delle forze laterali e riscriverla come:

$$\begin{aligned} m \cdot (\dot{v}_y + r v_x) &= C_{\alpha_1} \alpha_1 + C_{\alpha_2} \alpha_2 \\ &= C_{\alpha_1} \left(\delta - \frac{v_y}{v_x} - \frac{r a_1}{v_x} \right) + C_{\alpha_2} \left(- \frac{v_y}{v_x} + \frac{r a_2}{v_x} \right) \\ &= v_y \left(- \frac{C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{v_x} \right) + r \left(\frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{v_x} \right) + \delta (C_{\alpha_1}) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Che permette di ottenere l'espressione della derivata temporale della velocità laterale v_y

$$\dot{v}_y = v_y \left(- \frac{C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{m \cdot v_x} \right) + r \left(\frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{m \cdot v_x} - v_x \right) + \delta \left(\frac{C_{\alpha_1}}{m} \right) \quad (2.44)$$

2.4.2 Formulazione in spazio di stato

Considerando il sistema costituito dalle equazioni (2.42) e (2.44) si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{v}_y = v_y \left(- \frac{C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{m \cdot v_x} \right) + r \left(\frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{m \cdot v_x} - v_x \right) + \delta \left(\frac{C_{\alpha_1}}{m} \right) \\ \dot{r} = v_y \left(\frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{J_z \cdot v_x} \right) + r \left(- \frac{C_{\alpha_1} a_1^2 + C_{\alpha_2} a_2^2}{J_z \cdot v_x} \right) + \delta \left(\frac{C_{\alpha_1} a_1}{J_z} \right) + M_C \left(\frac{1}{J_z} \right) \end{cases} \quad (2.45)$$

con cui è possibile esprimere l'evoluzione della dinamica laterale di un veicolo rappresentato tramite un modello monotraccia, con comportamento dello pneumatico linearizzato, e su cui può agire un'azione di controllo in grado di modificare il momento d'imbardata.

Il sistema riformulato in forma matriciale pone

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \frac{C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{m \cdot v_x} & \frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{m \cdot v_x} - v_x \\ \frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{J_z \cdot v_x} & - \frac{C_{\alpha_1} a_1^2 + C_{\alpha_2} a_2^2}{J_z \cdot v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_{\alpha_1}}{m} & 0 \\ \frac{C_{\alpha_1} a_1}{J_z} & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ M_C \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Che coincide con la rappresentazione in spazio di stato del sistema, ovvero con una rappresentazione del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u} \quad (2.47)$$

In cui il vettore degli stati del sistema $\mathbf{x}$ e quello relativo agli ingressi $\mathbf{u}$ sono:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_y \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta \\ M_C \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \quad (2.48)$$

E le matrici $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ coincidono rispettivamente con la matrice di stato e la matrice di ingresso.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\frac{C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{m \cdot v_x} & \frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{m \cdot v_x} - v_x \\ \frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{J_z \cdot v_x} & -\frac{C_{\alpha_1} a_1^2 + C_{\alpha_2} a_2^2}{J_z \cdot v_x} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{C_{\alpha_1}}{m} & 0 \\ \frac{C_{\alpha_1} a_1}{J_z} & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (2.49)$$

La dinamica laterale del veicolo è descritta da uno stato formato dalla velocità laterale v_y e dalla sua velocità d'imbardata r , mentre gli ingressi del sistema sono l'angolo di sterzo delle ruote anteriori δ , fornito dal pilota agendo sul volante, e un *momento d'imbardata correttivo* M_C attuato dal sistema di controllo.

Per completare la formulazione matematica in spazio di stato è necessario definire la matrice di uscita $\mathbf{H}$ e la matrice di trasmissione diretta $\mathbf{J}$. Dal momento che per controllare l'imbardata del veicolo è necessario tracciare la velocità di imbardata r si può scrivere

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{J}\mathbf{u} \quad (2.50)$$

In cui

$$\mathbf{y} = r \in \mathbb{R} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \quad (2.51)$$

In questo modo si è giunti alla completa formulazione del sistema in spazio di stato su cui si baserà la progettazione del controllore.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{m \cdot v_x} & \frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{m \cdot v_x} - v_x \\ \frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{J_z \cdot v_x} & -\frac{C_{\alpha_1} a_1^2 + C_{\alpha_2} a_2^2}{J_z \cdot v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_{\alpha_1}}{m} & 0 \\ \frac{C_{\alpha_1} a_1}{J_z} & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ M_C \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ M_C \end{bmatrix}$$

2.5 Caratteristiche tecniche del veicolo

Verranno ora descritte le principali caratteristiche tecniche della vettura prototipo SGe-08, realizzata dalla divisione elettrica del team Race UP per la stagione 2024/2025 del progetto Formula SAE [Figura 2.5]. Con tali dati sarà possibile ottenere tutti i parametri utili per la progettazione e implementazione del sistema di controllo a bordo del veicolo.



Figura 2.5: Immagine del prototipo SGe-08 impegnato in un test in pista

2.5.1 Dimensioni e parametri inerziali

Le dimensioni del prototipo SGe-08 seguono le direttive del regolamento tecnico FSAE [6]. I principali parametri cinematici del veicolo sono riportati in tabella 2.1. Nella tabella vengono riportati anche i simboli con cui i parametri sono stati definiti precedentemente durante la trattazione analitica.

Parametro	Simbolo	Valore	Unità di misura
Massa veicolo	m_v	197	kg
Massa pilota	m_p	75	kg
Massa veicolo (con pilota)	m	272	kg
Bilanciamento di peso (anteriore)	λ	0.45	–
Inerzia d'imbardata	J_z	112.4	kgm ²
Passo	l	1535	mm
Semipasso anteriore	a_1	844.25	mm
Semipasso posteriore	a_2	690.75	mm
Carreggiata anteriore	t_1	1230	mm
Carreggiata posteriore	t_2	1200	mm

Tabella 2.1: Caratteristiche cinematiche del prototipo SGe-08

Il passo l e le carreggiate t_1/t_2 sono stati selezionati in fase di progettazione, pertanto sono assunti noti. La massa totale del veicolo m è pari alla somma della massa del veicolo *a secco* m_v , determinata una volta completata la produzione della vettura, e della massa di riferimento m_p scelta per rappresentare il pilota. Per ricavare il semipasso anteriore e posteriore (a_1 e a_2) è necessario conoscere la posizione del baricentro della vettura. Per questo motivo è stato svolto un test dedicato presso il laboratorio di dinamica del veicolo del dipartimento DII dell'Università di Padova [Figura 2.6a]. Tramite questo test è stato possibile misurare il bilanciamento di peso tra l'assale anteriore e posteriore λ , che permette di determinare i semipassi del veicolo come:

$$a_1 = l(1 - \lambda) \quad a_2 = l\lambda \quad (2.53)$$



(a) Test per la determinazione del baricentro



(b) Test per la determinazione dell'inerzia

Figura 2.6: Prove sperimentali per la determinazione dei parametri inerziali del veicolo

Anche per ottenere il valore dell'inerzia d'imbardata baricentrica J_z è stato necessario svolgere un test dedicato in laboratorio [Figura 2.6b]. Il valore ottenuto approssima quello dell'inerzia totale del veicolo attorno al proprio asse verticale.

2.5.2 Caratteristiche degli pneumatici



Figura 2.7: Immagine Hoosier FSAE 16.0X7.5-10 LC0 - 43075LC0

Gli pneumatici che solitamente vengono montati sul veicolo sono gli *Hoosier FSAE 16.0X7.5-10 LC0 - 43075LC0* [Figura 2.7]. Sono delle gomme *slick* che vengono utilizzati spesso nel mondo Formula Student poiché possiedono le caratteristiche adatte per essere sfruttate su veicoli di questo tipo. I principali parametri dimensionali, ripresi dai dati di catalogo disponibili, sono riportati in Tabella 2.2.

Parametro	Valore	Unità di misura
Massa	3.63	kg
Raggio	203.2	mm
Circonferenza	411.5	mm
Larghezza	213.4	mm

Tabella 2.2: Dimensioni Hoosier FSAE 16.0X7.5-10 LC0 - 43075LC0

Il parametro più importante da determinare per poter modellare correttamente il veicolo rimane la rigidità di deriva dello pneumatico C_{α} . Per ottenerne una stima sufficientemente accurata è stata eseguita una interpolazione dei dati resi disponibili dal *TTC (Tire Test Consortium)* [1], un'organizzazione volontaria che si occupa di eseguire test sperimentali sulla maggior parte degli pneumatici che vengono utilizzati in ambito Formula Student, per poi rendere disponibili i risultati a tutti i team. In particolare, i dati analizzati derivano da test eseguiti per caratterizzare il comportamento dello pneumatico in condizione di *pure cornering*. In tali condizioni lo pneumatico è soggetto esclusivamente a un angolo di deriva, mentre lo slittamento longitudinale viene mantenuto nullo. In questo modo è possibile studiare separatamente la relazione tra la forza laterale sviluppata e l'angolo di deriva, senza che intervengano gli effetti dell'accoppiamento tra forze longitudinali e laterali. Durante la prova lo pneumatico viene montato su un apposito banco prova, in cui il carico verticale, la velocità di rotolamento e il coefficiente di aderenza vengono

mantenuti costanti. Successivamente l'angolo di deriva α viene fatto variare progressivamente, misurando per ogni valore la forza laterale F_y .

I dati disponibili per lo pneumatico in analisi sono riportati in Figura 2.8.

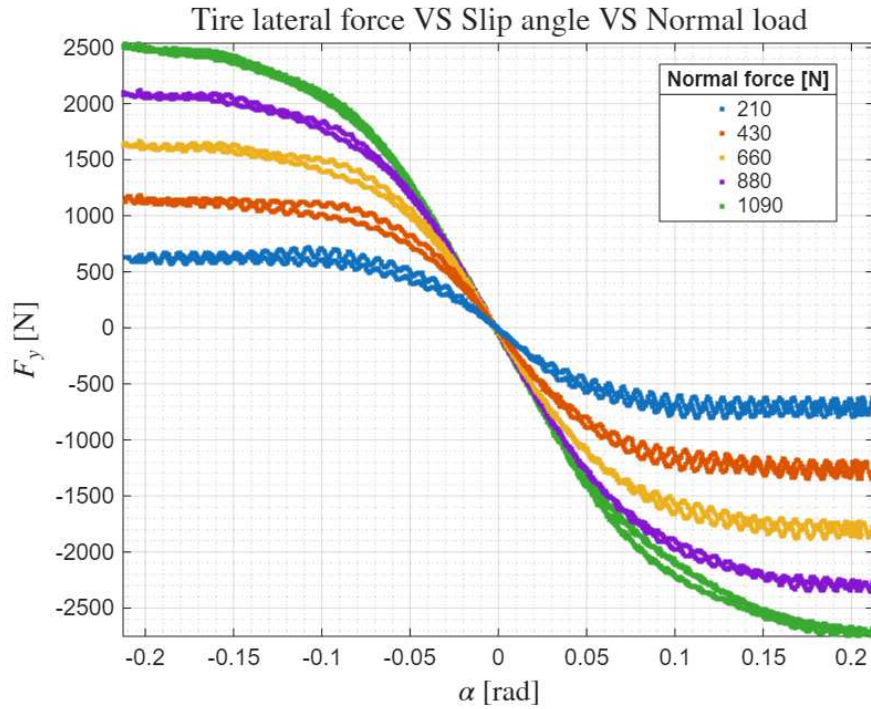


Figura 2.8: Dati sperimentali forniti dal TTC

Il grafico mostra l'andamento della forza laterale F_y sviluppata dallo pneumatico in funzione dell'angolo di deriva α (con convenzione opposta che verrà riadattata successivamente) e il carico verticale imposto. Il range di angoli di deriva analizzati è ± 0.2 radianti (coincidente con $\pm 11.45^\circ$), mentre il carico verticale viene fatto variare in maniera discreta all'interno dell'intervallo [210,1090] N. La famiglia di curve rappresenta di fatto l'andamento della funzione espressa dall'equazione (2.36). Per ottenere i valori dei parametri B , C , E e μ_p è possibile eseguire una interpolazione dei dati con una funzione custom coincidente con la *Magic Formula* [Figura 2.9].

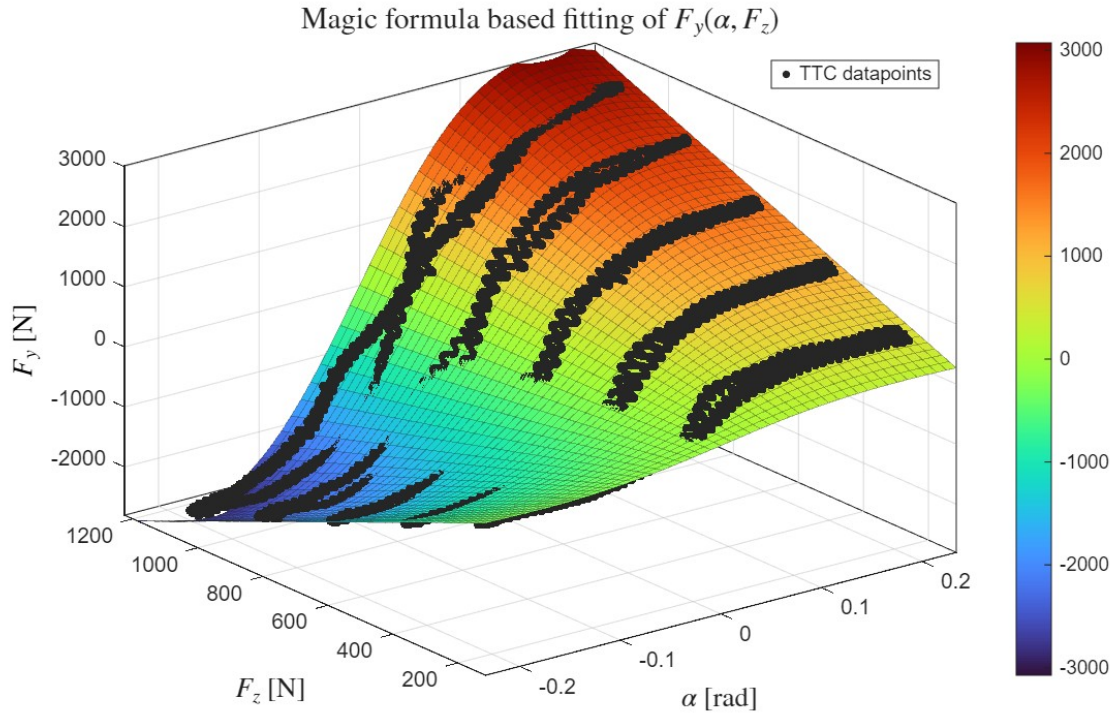


Figura 2.9: Interpolazione dei dati *TTC* tramite *Magic Formula*

Il risultato del fitting è un'approssimazione della funzione $F_y(\alpha, F_z)$. I valori ottenuti per i coefficienti di forma sono:

$$B = 3.375 \quad C = 2.907 \quad E = 0.1248 \quad \mu_p = 2.508$$

Questi non vanno considerati come una ricostruzione perfetta della funzione $F_y(\alpha, F_z)$, che avrebbe richiesto un'analisi più approfondita svolta in molteplici condizioni di lavoro dello pneumatico. Tuttavia, i valori sono coerenti con quelli che ci si attende da un'analisi di questo tipo e forniscono una rappresentazione sufficientemente dettagliata del comportamento dello pneumatico.

Conoscendo il fattore di bilanciamento dei pesi tra assale anteriore e posteriore λ è possibile calcolare il carico verticale statico agente su ogni ruota come:

$$F_{z_{11}} = F_{z_{12}} = \frac{mg\lambda}{2} = 600.372 \text{ N} \quad F_{z_{21}} = F_{z_{22}} = \frac{mg(1-\lambda)}{2} = 733.788 \text{ N} \quad (2.54)$$

Pertanto i carichi agenti sugli assali sono

$$F_{z_1} = F_{z_{11}} + F_{z_{12}} = 1200.744 \text{ N} \quad F_{z_2} = F_{z_{21}} + F_{z_{22}} = 1467.576 \text{ N} \quad (2.55)$$

Questi risultati permettono di ottenere una stima della funzione $F_y(\alpha, F_z)$ sia per gli pneumatici anteriori che posteriori in condizioni di carico statico [Figura 2.10].

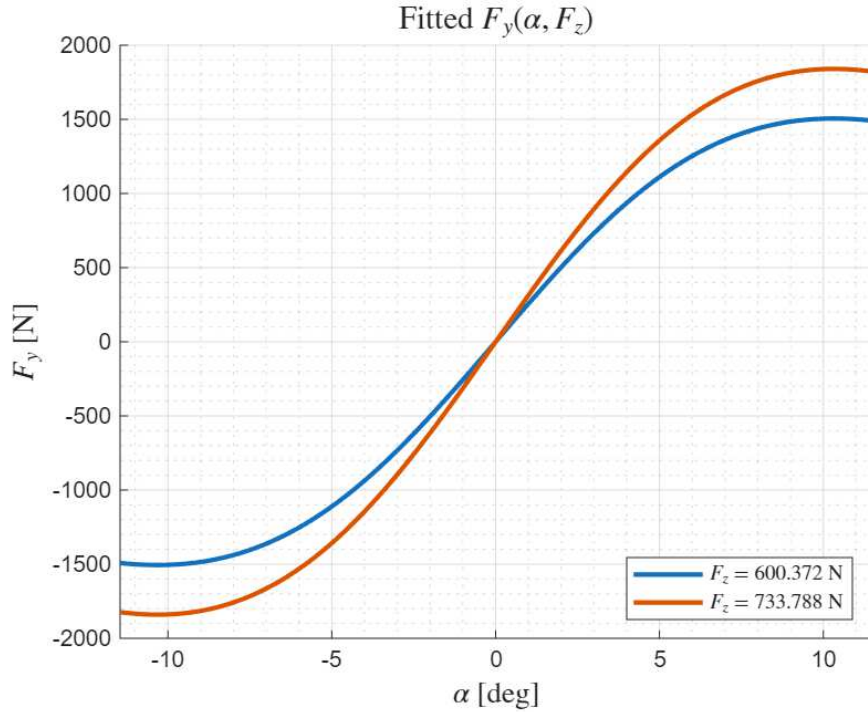
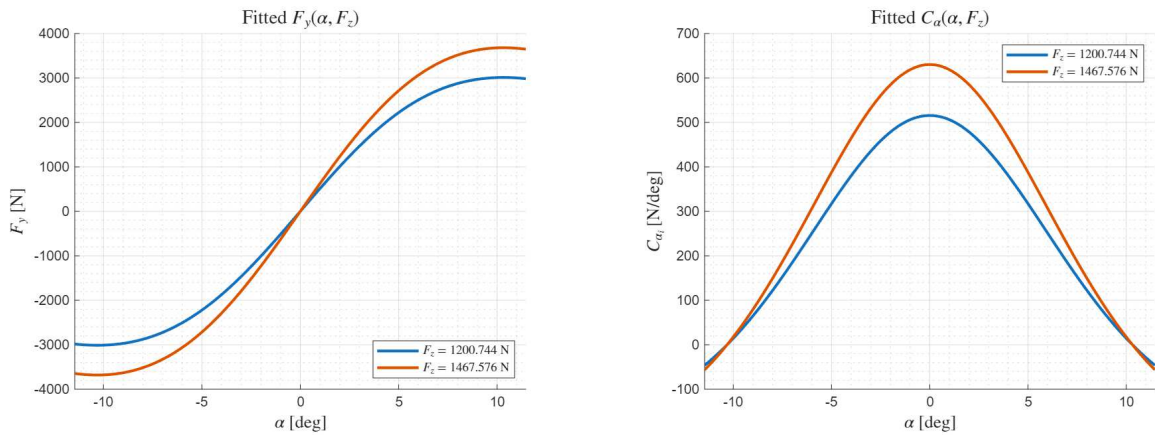


Figura 2.10: Approssimazione della funzione $F_y(\alpha, F_z)$

Con queste funzioni è possibile determinare l'andamento delle forze laterali sviluppate da ogni assale (in condizione di carico statico) utilizzando l'equazione (2.34) [Figura 2.11a]. Inoltre derivando le funzioni $F_{y_i}(\alpha, F_{z_i})$ secondo l'angolo di deriva α si ottiene una stima della rigidità di deriva di ogni assale $C_{\alpha_i}(\alpha, F_{z_i})$ [Figura 2.11b].



(a) Forze laterali sviluppate dagli assali

(b) Rigidità di deriva degli assali

Figura 2.11: Approssimazione del comportamento degli assali del veicolo

Dalla Figura 2.11 si nota facilmente che le funzioni ottenute rispettano le proprietà citate in 2.3.3. In particolare, si osserva che l'andamento delle forze laterali risulta pressoché lineare per valori di α compresi nell'intervallo $\pm 2^\circ$. Questo è confermato anche dal fatto che il valore della rigidezza di deriva C_α varia di poco all'interno di quel range di angoli di deriva.

Utilizzando la relazione 2.37 risulta quindi possibile stimare la rigidezza di deriva di ogni assale in condizioni di carico verticale pari al carico statico e angolo di deriva compreso nell'intervallo $\pm 2^\circ$. Si ottiene:

$$C_{\alpha_1} = BCF_{z_1}\mu_p = 515.703 \text{ N/}^\circ \quad C_{\alpha_2} = BCF_{z_2}\mu_p = 630.303 \text{ N/}^\circ \quad (2.56)$$

Anche questo risultato non va inteso come una rappresentazione perfetta del comportamento dello pneumatico per i motivi già citati in precedenza. I valori numerici ottenuti si riferiscono infatti ad una particolare condizione di lavoro dello pneumatico, in cui il carico verticale è vicino al carico statico e l'angolo di deriva assume valori limitati. Tuttavia, aver quantificato i valori delle rigidzze di deriva permette lo studio analitico del comportamento del veicolo in analisi, oltre alla sintesi del regolatore PI alla base del sistema di controllo progettato.

2.5.3 Caratteristiche del powertrain

Il veicolo è completamente elettrico, dotato di un sistema di trazione integrale attraverso quattro motori elettrici *AMK DD5-14-10-POW* (di tipologia *IPMSM-Internal Permanent Magnet Synchronous Motor*), ciascuno dei quali accoppiato ad una ruota del veicolo tramite un riduttore epicycloidale. I principali parametri dei motori, disponibili sul relativo datasheet [2], sono raccolti nella Tabella 2.3, mentre in Figura 2.12 sono riportate le curve di coppia continuativa e di picco che il motore è in grado di sviluppare.

Parametro	Valore	Unità di misura
Massa	3.55	kg
Inerzia	2.74	kgcm ²
Tensione nominale	350	V
Corrente nominale	41	Arms
Potenza meccanica nominale	12.3	kW
Coppia nominale	9.8	Nm
Velocità nominale	12000	rpm
Coppia continuativa di stallo	13.8	Nm
Potenza meccanica massima	35	kW
Coppia massima	21	Nm
Velocità massima	20000	rpm

Tabella 2.3: Caratteristiche motore AMK DD5-14-10-POW

In particolare, la curva relativa alla massima coppia sviluppabile si riferisce alle prestazioni che il motore è in grado di fornire utilizzando una opportuna tecnica di deflussaggio del motore alle velocità più elevate.

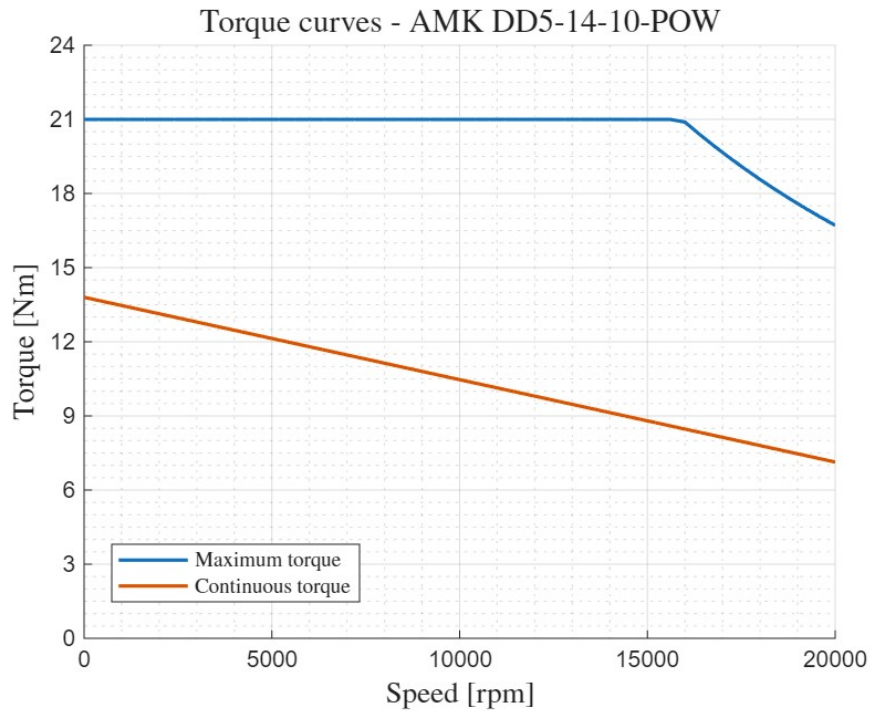


Figura 2.12: Curve di coppia del motore AMK DD5-14-10-POW

Grazie a questo powertrain, il veicolo è in grado di sviluppare una potenza di picco di 140 kW (pari a circa 190 CV), tuttavia il regolamento FSAE impone di limitare la potenza di ogni vettura a 80 kW (pari a circa 109 CV) [6]. L'accoppiamento dei motori con le ruote avviene mediante l'utilizzo di riduttori epicicloidali con rapporto di riduzione 1 : 12.667, in questo modo il tipo di carico che agisce sulle ruote è adattato alle caratteristiche del motore. Con questa scelta il veicolo è in grado di sviluppare una coppia massima di trazione pari a 1064 Nm e raggiungere una velocità massima di 120 km/h.

Capitolo 3

Progettazione del sistema di controllo

La trattazione matematica sviluppata precedentemente ha permesso di ottenere una rappresentazione in spazio di stato del veicolo. L'obiettivo del seguente capitolo è quello di analizzare nel dettaglio tale sistema matematico, in modo da comprenderne le sue caratteristiche fondamentali e utilizzarlo per poter sviluppare un sistema di controllo in grado di ottimizzare il comportamento dinamico del veicolo in curva. In particolare, la tecnica di controllo utilizzata è stata sviluppata a partire dalle considerazioni raccolte nei contributi [3] [7] e si basa sulla generazione di un momento di imbardata correttivo tramite l'utilizzo di un regolatore PI opportunamente tarato in funzione dei parametri del sistema.

3.1 Caratteristiche del sistema in spazio di stato

Riportando nuovamente il modello in spazio di stato ottenuto per rappresentare la dinamica laterale del veicolo

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{m \cdot v_x} & \frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{m \cdot v_x} - v_x \\ \frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{J_z \cdot v_x} & -\frac{C_{\alpha_1} a_1^2 + C_{\alpha_2} a_2^2}{J_z \cdot v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_{\alpha_1}}{m} & 0 \\ \frac{C_{\alpha_1} a_1}{J_z} & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ M_C \end{bmatrix}$$
$$r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ M_C \end{bmatrix}$$

riassumendo, il sistema è caratterizzato da:

- **Due variabili di stato** v_y e r , che descrivono rispettivamente la velocità laterale e la velocità di imbardata del veicolo.
- **Due variabili di ingresso** δ ed M_C , le quali rappresentano rispettivamente l'azione di sterzo delle ruote anteriori, imposta dal pilota tramite il volante, e il momento di imbardata aggiuntivo applicato attraverso un sistema di controllo agente sul veicolo.

- **Una variabile di uscita r .** Coincidente con una delle variabili di stato del sistema tale da permettere di tracciare il comportamento in curva del veicolo.

Il sistema è lineare a tempo continuo ed è stato ottenuto considerando il veicolo in una condizione di lavoro in cui la velocità longitudinale è pari ad un generico valore v_x , e le rigidezze di deriva degli pneumatici C_{α_i} vengono considerate costanti durante il moto. Gli altri parametri presenti all'interno del modello descrivono le proprietà inerziali (m, J_z) e geometriche (a_1, a_2) del veicolo e sono ritenuti costanti. Dal momento che si desidera utilizzare tale rappresentazione per studiare il comportamento reale del veicolo, non si può ritenere la velocità di avanzamento costante. Il parametro v_x rappresenta infatti un grado di libertà del sistema, generalmente descrivibile come una funzione del tempo $v_x(t)$, che andrà a modificare i coefficienti della matrice di stato $\mathbf{F}$, rendendo anch'essa dipendente dal tempo. Il sistema appartiene quindi alla categoria *lineare tempo-variante*, in cui la dinamica che lega le variabili di ingresso δ, M_C all'uscita r varia con il valore assunto dalla velocità longitudinale in ogni istante temporale. Tale rappresentazione assume significato fintanto che viene rispettata la condizione $v_x \neq 0$, pertanto, considerando la velocità positiva nel senso di marcia del veicolo, l'analisi va posta all'interno del range di velocità $v_x \in (0, +\infty)$.

3.2 Funzioni di trasferimento del sistema

Per analizzare nel dettaglio la dinamica del sistema e comprendere come questa venga influenzata dalla variazione della velocità di avanzamento v_x è necessario estrarre la *funzione di trasferimento* che lega le variabili di ingresso (δ, M_C) a quella d'uscita (r). Tale funzione di trasferimento sarà multi-input dal momento che entrambi gli ingressi del sistema contribuiscono alla rotazione del veicolo.

3.2.1 Sviluppo della matrice di trasferimento

Partendo dalla formulazione sviluppata in 2.4.2, è possibile calcolare la matrice di trasferimento nel dominio della frequenza $\mathbf{W}(s)$ come

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{H} \left(s\mathbf{I} - \mathbf{F} \right)^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{J} \quad \text{con } s = j\omega = j2\pi f, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (3.1)$$

Gli elementi di tale matrice rappresentano le funzioni di trasferimento che legano ogni ingresso del sistema alle variabili di output. L'utilizzo della relazione (3.1) è solitamente relegato ai sistemi *lineari tempo-invarianti*, tuttavia, definendo la condizione di funzionamento del sistema istante per istante, caratterizzata da uno specifico valore di v_x , anche il modello adottato

può essere considerato istantaneamente *lineare tempo-invariante*. La matrice di trasferimento verrà pertanto ricavata considerando il veicolo ad una generica velocità v_x , rendendo così possibile caratterizzare la dinamica del sistema ad ogni velocità assunta dal veicolo. Sviluppando l'espressione (3.1) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{m \cdot v_x} & -\frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{m \cdot v_x} + v_x \\ -\frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{J_z \cdot v_x} & s + \frac{C_{\alpha_1} a_1^2 + C_{\alpha_2} a_2^2}{J_z \cdot v_x} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{C_{\alpha_1}}{m} & 0 \\ \frac{C_{\alpha_1} a_1}{J_z} & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + sB + C} \begin{bmatrix} s + \frac{C_{\alpha_1} a_1^2 + C_{\alpha_2} a_2^2}{J_z \cdot v_x} & \frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{m \cdot v_x} + v_x \\ \frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{J_z \cdot v_x} & s + \frac{C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{m \cdot v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{C_{\alpha_1}}{m} & 0 \\ \frac{C_{\alpha_1} a_1}{J_z} & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dove con il polinomio $s^2 + sB + C$ si indica il determinante della matrice $(s\mathbf{I} - \mathbf{F})$, che viene portato a denominatore durante le operazioni di inversione della matrice. I coefficienti B e C sono legati ai parametri presenti all'interno della matrice $\mathbf{F}$ e risultano essere pari a

$$B = \frac{J_z(C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}) + m(C_{\alpha_1} a_1^2 + C_{\alpha_2} a_2^2)}{m \cdot J_z \cdot v_x} \quad C = \frac{m \cdot v_x^2(C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1) + C_{\alpha_1} C_{\alpha_2}(a_1 + a_2)^2}{m \cdot J_z \cdot v_x^2} \quad (3.3)$$

La condizione $v_x > 0$ assicura che il denominatore non assuma mai valori nulli. Si può inoltre osservare che, dal momento che tutti i parametri coinvolti assumono valori positivi, il segno del coefficiente B sarà sempre positivo, mentre quello di C sarà determinato dal valore assunto dal termine a numeratore. Proseguendo con lo sviluppo dell'equazione (3.2) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(s) &= \frac{1}{s^2 + sB + C} \begin{bmatrix} \frac{C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1}{J_z \cdot v_x} & s + \frac{C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{m \cdot v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{C_{\alpha_1}}{m} & 0 \\ \frac{C_{\alpha_1} a_1}{J_z} & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + sB + C} \begin{bmatrix} s \frac{C_{\alpha_1} a_1}{J_z} + \frac{C_{\alpha_1} C_{\alpha_2}(a_1 + a_2)}{m \cdot J_z \cdot v_x} & s \frac{1}{J_z} + \frac{C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{m \cdot J_z \cdot v_x} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s \frac{C_{\alpha_1} a_1}{J_z} + \frac{C_{\alpha_1} C_{\alpha_2}(a_1 + a_2)}{m \cdot J_z \cdot v_x}}{s^2 + sB + C} & \frac{s \frac{1}{J_z} + \frac{C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{m \cdot J_z \cdot v_x}}{s^2 + sB + C} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

La matrice di trasferimento appena calcolata lega gli ingressi e l'uscita del sistema, espressi nel dominio della frequenza, secondo la relazione

$$\begin{aligned} r(s) = \mathbf{W}(s) \begin{bmatrix} \delta(s) \\ M_C(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{s \frac{C_{\alpha_1} a_1}{J_z} + \frac{C_{\alpha_1} C_{\alpha_2}(a_1 + a_2)}{m \cdot J_z \cdot v_x}}{s^2 + sB + C} & \frac{s \frac{1}{J_z} + \frac{C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{m \cdot J_z \cdot v_x}}{s^2 + sB + C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(s) \\ M_C(s) \end{bmatrix} \\ &= \frac{s \frac{C_{\alpha_1} a_1}{J_z} + \frac{C_{\alpha_1} C_{\alpha_2}(a_1 + a_2)}{m \cdot J_z \cdot v_x}}{s^2 + sB + C} \cdot \delta(s) + \frac{s \frac{1}{J_z} + \frac{C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{m \cdot J_z \cdot v_x}}{s^2 + sB + C} \cdot M_C(s) \end{aligned} \quad (3.5)$$

che mostra il legame tra l'azione di sterzata del pilota $\delta(s)$, il momento di imbardata correttivo comandato $M_C(s)$ e la velocità di imbardata del veicolo $r(s)$, espresse nel dominio della frequenza. Da quest'ultima equazione è possibile evidenziare due funzioni di trasferimento, $P_\delta(s)$ e $P_{M_C}(s)$, che esprimono il legame dinamico tra ciascun ingresso del sistema e la rotazione del veicolo. Tali funzioni sono

$$P_\delta(s) = \frac{r(s)}{\delta(s)} = \frac{s \frac{C_{\alpha_1} a_1}{J_z} + \frac{C_{\alpha_1} C_{\alpha_2} (a_1 + a_2)}{m \cdot J_z \cdot v_x}}{s^2 + sB + C} \quad P_{M_C}(s) = \frac{r(s)}{M_C(s)} = \frac{s \frac{1}{J_z} + \frac{C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{m \cdot J_z \cdot v_x}}{s^2 + sB + C} \quad (3.6)$$

Con questo risultato si è giunti ad una rappresentazione matematica della risposta del veicolo all'azione di sterzo e al momento di imbardata che viene imposto tramite il sistema di controllo.

3.2.2 Analisi delle funzioni di trasferimento

Ricordando la condizione imposta sulla velocità ($v_x > 0$) si può facilmente notare che entrambe le funzioni di trasferimento possiedono uno zero e due poli. Indicando con z_δ e z_{M_C} , rispettivamente, gli zeri delle funzioni $P_\delta(s)$ e $P_{M_C}(s)$ si ottiene

$$z_\delta = -\frac{C_{\alpha_2}(a_1 + a_2)}{m \cdot v_x \cdot a_1} \quad z_{M_C} = -\frac{C_{\alpha_1} + C_{\alpha_2}}{m \cdot v_x} \quad (3.7)$$

In entrambi i casi il segno è negativo e il loro valore tende a zero per $v_x \rightarrow +\infty$. Per quanto riguarda i poli, essi sono condivisi da entrambe le funzioni e coincidono con gli zeri del polinomio $s^2 + sB + C$, si giunge quindi a

$$p_{1,\delta} = p_{1,M_C} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad p_{2,\delta} = p_{2,M_C} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad (3.8)$$

La stabilità asintotica del sistema è garantita solo nel momento in cui i poli appena menzionati sono a parte reale negativa. Ricordando le espressioni (3.3), e che il valore assunto dal coefficiente B è sempre positivo per qualunque valore di velocità, si può definire la condizione di stabilità asintotica del sistema come

$$C = \frac{m \cdot v_x^2 (C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1) + C_{\alpha_1} C_{\alpha_2} (a_1 + a_2)^2}{m \cdot J_z \cdot v_x^2} > 0 \quad (3.9)$$

A partire dalla quale si definiscono due casistiche

1. $(C_{\alpha_2} a_2 - C_{\alpha_1} a_1) \geq 0$: in cui la condizione di stabilità asintotica è garantita per ogni valore assunto dalla velocità v_x .

2. $(C_{\alpha_2}a_2 - C_{\alpha_1}a_1) < 0$: in cui la stabilità asintotica del sistema è garantita per valori di v_x inferiori ad un certo valore di velocità limite v_{lim} pari a

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{C_{\alpha_1}C_{\alpha_2}(a_1 + a_2)^2}{m(C_{\alpha_1}a_1 - C_{\alpha_2}a_2)}} \quad (3.10)$$

La condizione di stabilità varia quindi in base alle proprietà geometriche del veicolo e alle rigidzze di deriva degli assali. Questo risultato permette di concludere che, a seconda del tipo di veicolo che si sta considerando, la condizione matematica che assicura la stabilità asintotica varia. Nel caso in esame, utilizzando i valori in Tabella 2.1 e le stime delle rigidzze di deriva degli assali riportate nell'equazione (2.56), si ottiene che il termine $(C_{\alpha_2}a_2 - C_{\alpha_1}a_1)$ è negativo ma con valore assoluto prossimo allo zero. Andando a valutare la velocità limite v_{lim} si ottiene un valore molto superiore rispetto alla velocità massima raggiungibile dal veicolo (pari 120 km/h). Il veicolo considerato è quindi stabile, nel senso matematico del termine, per qualunque valore di velocità raggiungibile poiché vale: $v_x \ll v_{lim} \forall v_x \in (0,120]$ km/h.

Una volta analizzate le caratteristiche delle funzioni di trasferimento è possibile rappresentarne gli andamenti in funzione del valore assunto dalla velocità v_x tramite dei diagrammi di Bode, riportati in Figura 3.1 e Figura 3.2.

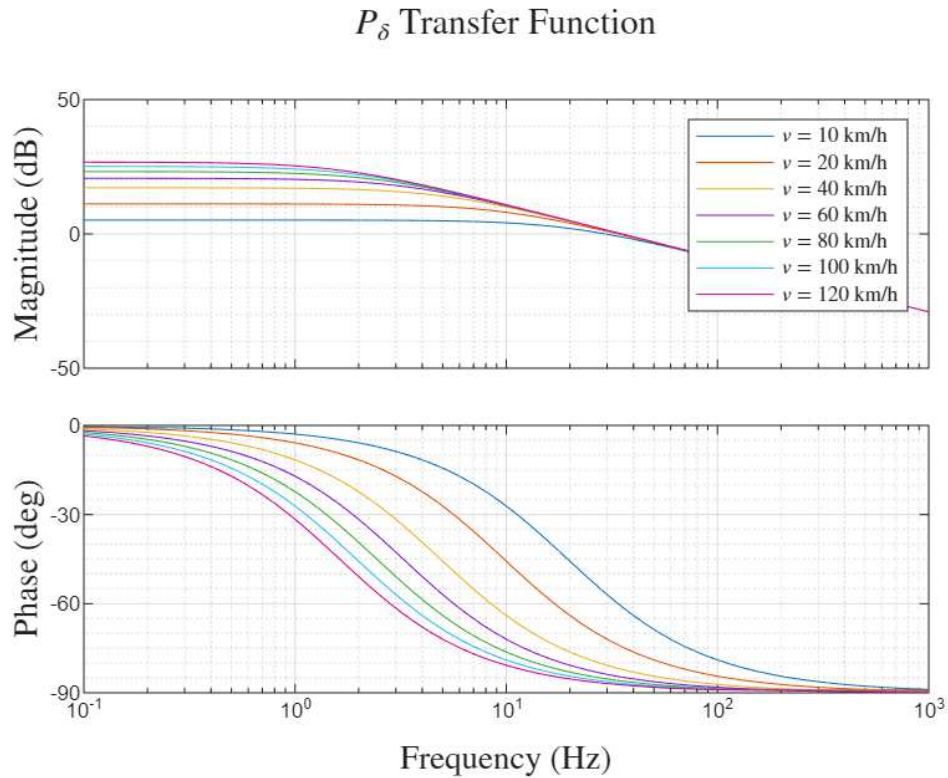


Figura 3.1: Andamento di $P_\delta(s)$ in funzione di v_x

P_{M_C} Transfer Function

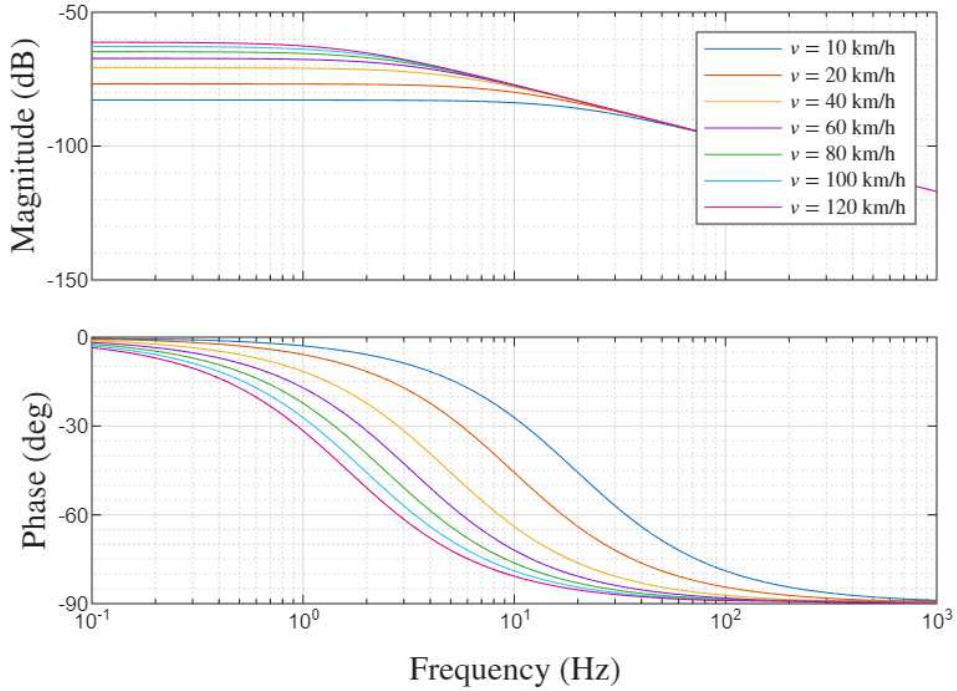


Figura 3.2: Andamento di $P_{M_C}(s)$ in funzione di v_x

I diagrammi sono stati rappresentati all'interno dell'intervallo di frequenze $[0.1, 1000]$ Hz e mostrano l'influenza della velocità longitudinale del veicolo v_x , discretizzata tra 10 km/h e 120 km/h, su modulo e fase delle due funzioni di trasferimento.

L'andamento del modulo mostra come sia il momento di imbardata imposto M_C che ovviamente l'azione di sterzo δ , abbiano effetto sulla velocità di imbardata r del veicolo e quindi sul suo comportamento in curva. Il guadagno si amplifica all'aumentare della velocità e il contributo più significativo è quello legato all'angolo di sterzata. Il comportamento ricalca quello di un sistema del primo ordine, questo è dovuto al fatto che gli zeri z_δ e z_{M_C} sono pressoché coincidenti con i poli $p_{1,\delta}$ e p_{1,M_C} , questo porta di fatto ad una cancellazione zero/polo che rende il comportamento assimilabile a quello di un sistema del primo ordine. Il diagramma della fase conferma le ipotesi fatte sulla stabilità del veicolo, infatti, in entrambi i casi la fase si limita a scendere asintoticamente fino a -90° , mantenendo quindi un margine di fase $m_\phi = 90^\circ$. Si osserva inoltre che l'aumento della velocità provoca uno spostamento dei poli dominanti del sistema ($p_{2,\delta}$ e p_{2,M_C}) verso frequenze minori.

3.3 Controllo basato sul momento di imbardata

Da un punto di vista puramente matematico, il moto di un veicolo che percorre una curva di raggio R a velocità v_x può essere inteso come l'inseguimento di una certa velocità di imbardata di riferimento r_{ref} da parte del veicolo e del pilota che lo sta guidando.

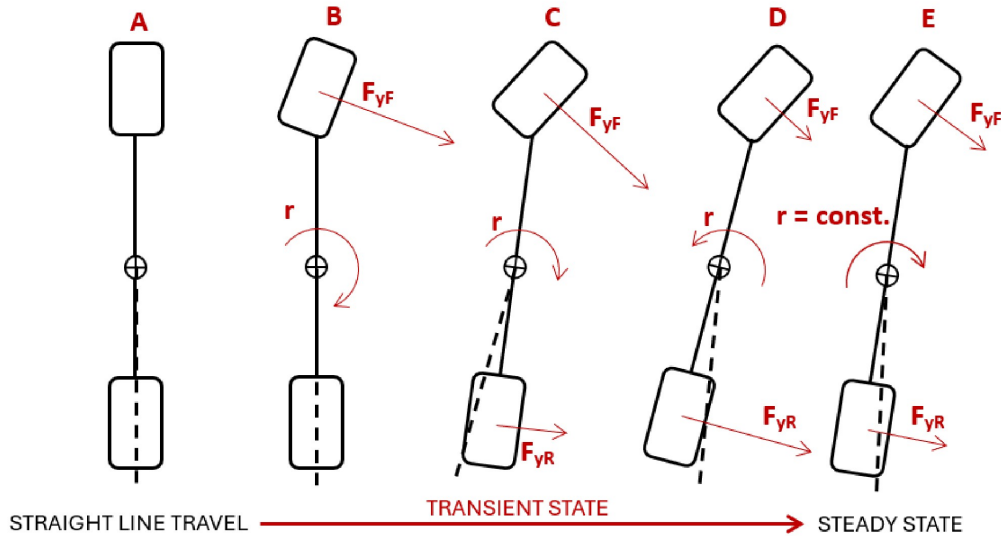


Figura 3.3: Stati di transizione di un veicolo in curva [7]

In Figura 3.3 è mostrata la transizione che il veicolo compie per passare da una condizione di moto rettilineo ad una di regime stazionario in curva. In ingresso curva, il pilota impone un certo angolo di sterzo δ tramite il volante, questo porta alla generazione di una forza laterale da parte degli pneumatici anteriori che genera un momento di imbardata sul veicolo e fa aumentare la velocità di imbardata della vettura. Nel momento in cui il veicolo si è stabilizzato, le forze laterali generate dai due assali sono in equilibrio, il momento di imbardata generato è nullo, e il pilota termina di correggere l'angolo di sterzo, il veicolo compie la curva in una nuova condizione di equilibrio, con velocità di imbardata r costante.

Per migliorare le prestazioni di un veicolo in curva, come nel caso delle vetture da competizione, l'obiettivo è quello di minimizzare il tempo che intercorre tra l'ingresso in curva e il raggiungimento della velocità di imbardata desiderata dal pilota r_{ref} [Figura 3.4]. Un sistema di controllo progettato in quest'ottica permette di aumentare le prestazioni dinamiche in curva della vettura e di migliorare la confidenza del pilota con il mezzo, andando a tarare opportunamente le caratteristiche del controllore in funzione delle sue particolari esigenze, preferenze o stile di guida.

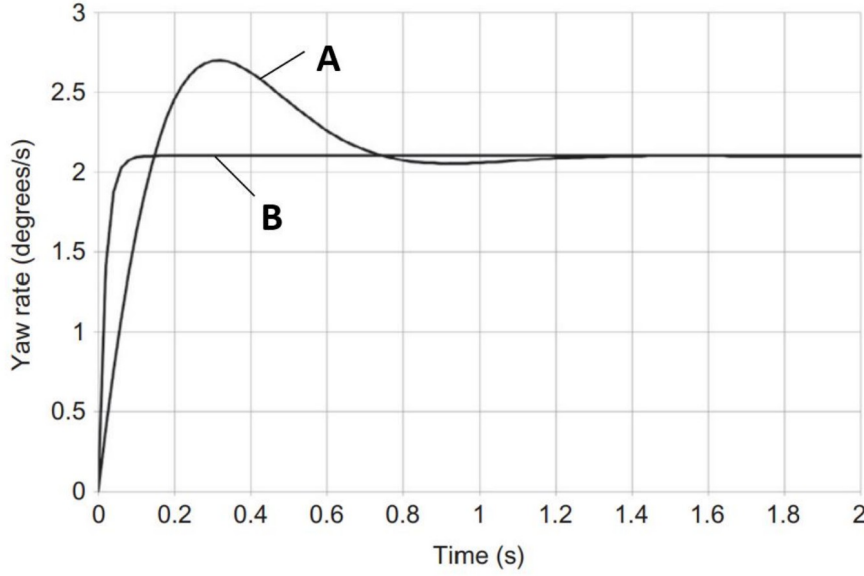


Figura 3.4: Risposta reale (A) e ideale (B) del veicolo in curva [7]

3.3.1 Generazione del riferimento

Per progettare il controllore è necessario definire matematicamente la velocità d'imbardata di riferimento r_{ref} che il veicolo deve raggiungere una volta terminato l'ingresso in curva. Per fare ciò è utile riconsiderare le equazioni della dinamica (2.29), in particolare, assumendo che la vettura stia percorrendo una traiettoria curvilinea, rappresentata da un arco di circonferenza di raggio R , con una velocità tangenziale approssimabile a v_x , si può scrivere

$$\frac{m \cdot v_x^2}{R} = F_{y,1} + F_{y,2} \quad (3.11)$$

mentre l'equazione relativa all'equilibrio dei momenti attorno all'asse verticale pone

$$F_{y,1}a_1 - F_{y,2}a_2 = 0 \rightarrow F_{y,1} = \frac{F_{y,2} \cdot a_2}{a_1} \quad (3.12)$$

Combinando le due equazioni si ottiene

$$\frac{m \cdot v_x^2}{R} = \frac{F_{y,2} \cdot a_2}{a_1} + F_{y,2} = F_{y,2} \frac{a_1 + a_2}{a_1} \rightarrow F_{y,2} = \frac{m \cdot v_x^2}{R} \cdot \frac{a_1}{l} \quad (3.13)$$

Che esprime la forza richiesta all'assale posteriore per compiere una curva di raggio R alla velocità v_x . In maniera analoga, si può esprimere la forza richiesta all'assale anteriore come

$$F_{y,1} = \frac{m \cdot v_x^2}{R} \cdot \frac{a_2}{l} \quad (3.14)$$

Valutando l'equilibrio dei momenti di beccheggio rispetto alle impronte a terra degli pneumatici anteriori e posteriori si giunge inoltre a

$$\frac{F_{z,1}}{g} = \frac{m \cdot a_1}{l} \quad \frac{F_{z,2}}{g} = \frac{m \cdot a_2}{l} \quad (3.15)$$

La risposta del veicolo all'angolo di sterzo delle ruote anteriori segue la relazione:

$$\delta = \frac{l}{R} + \alpha_1 - \alpha_2 = \delta_A + \alpha_1 - \alpha_2 \quad (3.16)$$

Dove con δ_A si indica l'angolo di Ackermann [8], ovvero l'angolo cinematicamente necessario per compiere la curva, mentre con α_1 e α_2 gli angoli di deriva degli assali. Combinando le relazioni, (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), e considerando una relazione lineare analoga alla (2.32) tra le forze laterali sviluppate da un assale $F_{y,i}$ e il corrispondente angolo di deriva α_i , si arriva a scrivere

$$\delta = \frac{l}{R} + \left(\frac{F_{z,1}}{C_{\alpha_1}} - \frac{F_{z,2}}{C_{\alpha_2}} \right) \cdot \frac{v_x^2}{g \cdot R} = \frac{l}{R} + K_U \cdot a_y \quad (3.17)$$

In cui K_U indica il *gradiente di sottosterzo* del veicolo [8]. Quest'ultimo è un parametro molto importante poiché misura come varia l'angolo di sterzo necessario per mantenere il veicolo su una traiettoria circolare a raggio costante, al variare dell'accelerazione laterale. Inoltre, il valore assunto da K_U permette di caratterizzare il comportamento del veicolo in curva secondo le seguenti casistiche

- **Veicolo sovrasterzante** se $K_U < 0$. In questo caso è necessario ridurre l'angolo di sterzo delle ruote anteriori al crescere dell'accelerazione laterale.
- **Veicolo neutro** se $K_U = 0$. Caso in cui il veicolo segue un comportamento ideale, dove l'angolo di sterzo necessario per mantenere la traiettoria in curva coincide con l'angolo di Ackermann δ_A a qualunque valore di accelerazione laterale.
- **Veicolo sottosterzante** se $K_U > 0$. In quest'ultimo caso, contrariamente a quello sovrasterzante, l'angolo di sterzo necessario al veicolo incrementa all'aumentare dell'accelerazione laterale.

Per un veicolo che percorre una curva, intesa come arco di circonferenza, di raggio R con velocità tangenziale approssimabile a v_x , la sua velocità di imbardata di riferimento per completare tale curva può essere approssimata a

$$r_{\text{ref}} = \frac{v_x}{R} \quad (3.18)$$

Riorganizzando l'equazione (3.17) e combinandola con la (3.18) si ottiene

$$R = \frac{l}{\delta - K_U \cdot a_y} \rightarrow r_{\text{ref}} = \frac{v_x}{R} = \frac{v_x(\delta - K_U \cdot a_y)}{l} \quad (3.19)$$

che definisce matematicamente la velocità di imbardata di riferimento r_{ref} che il veicolo dovrà raggiungere in curva. Il riferimento per il sistema di controllo è quindi generato unicamente attraverso quantità note (l), misurabili sulla vettura (v_x , a_y , δ) e parametri modificabili durante la taratura del sistema (K_U). Il valore del gradiente di sottosterzo è di fatto un parametro di setup, infatti può essere scelto liberamente in modo da modificare il valore target calcolato dal sistema di controllo in funzione del tipo di comportamento desiderato per il veicolo.

Solitamente nei veicoli da competizione si cerca di indurre un comportamento vicino a quello neutrale, in modo da assicurare una alta reattività, precisione e stabilità del veicolo in curva. Un valore ottimale per il gradiente di sottosterzo può quindi essere assunto inizialmente pari a $K_U^* = 0$, questa scelta porta ad una velocità d'imbardata di riferimento pari a

$$r_{\text{ref}} = \frac{v_x(\delta - K_U^* \cdot a_y)}{l} = \frac{v_x \cdot \delta}{l} \quad (3.20)$$

Con quest'ultima equazione si è giunti alla formulazione finale della velocità di imbardata desiderata per il veicolo. Si nota come essa sia collegata direttamente all'angolo di sterzo delle ruote anteriori imposto dal pilota, il quale coincide con uno degli ingressi del modello (2.52), e alla velocità v_x , assunta costante istante per istante.

3.3.2 Architettura del sistema di controllo

Come già accennato precedentemente, per permettere al veicolo di raggiungere la velocità d'imbardata target r_{ref} è necessario imporre un momento di imbardata M_C che corregga il comportamento del veicolo. In questa trattazione, esso viene generato attraverso l'implementazione di un regolatore PI dedicato a produrre, in funzione della differenza tra la velocità di imbardata target r_{ref} e quella misurata r , il momento di imbardata necessario.

Ricordando l'equazione (3.5), la velocità d'imbardata del veicolo del dominio di Laplace $r(s)$ coincide con

$$r(s) = P_\delta(s)\delta(s) + P_{M_C}(s)M_C(s) = r_\delta(s) + r_{M_C}(s) \quad (3.21)$$

Ovvero con la somma di due contributi differenti, uno legato all'azione di sterzo mentre l'altro legato al momento d'imbardata comandato. Ne segue che l'errore che il sistema deve correggere è pari a

$$e_r(s) = r_{\text{ref}}(s) - r(s) = r_{\text{ref}}(s) - r_\delta(s) - r_{M_C}(s) \quad (3.22)$$

e che il contributo del sistema di controllo è pari a

$$r_{M_C}(s) = r_{\text{ref}}(s) - r_\delta(s) - e_r(s) = r_{M_C,\text{ref}}(s) - e_r(s) \quad (3.23)$$

Dove con $r_{M_C,\text{ref}}$ si indica il contributo di velocità d'imbardata che deve produrre il controllore per consentire, in combinazione con il contributo dovuto all'azione di sterzo r_δ , il raggiungimento della velocità d'imbardata di riferimento r_{ref} .

Con le seguenti considerazioni, e ricordando l'equazione (3.20) è possibile definire lo schema a blocchi mostrato in Figura 3.5 che permette di rappresentare l'azione che il sistema di controllo svolge sul veicolo.

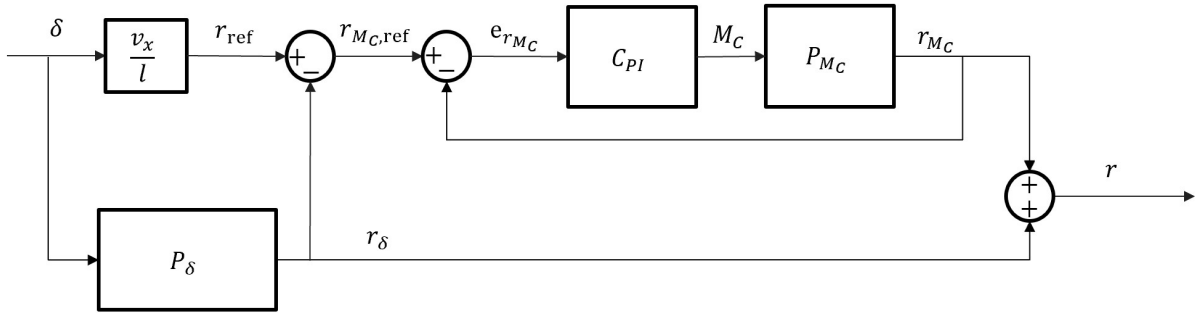


Figura 3.5: Diagramma funzionale del veicolo

L'ingresso del sistema veicolo è l'angolo di sterzo δ , comandato dal pilota, il quale impone una certa velocità di rotazione al veicolo r_δ e richiede un valore di velocità d'imbardata di riferimento r_{ref} . La differenza tra questi due valori determina il valore di riferimento per l'azione di controllo $r_{M_C,\text{ref}}$, esso viene inseguito tramite un anello di retroazione al cui interno agisce un regolatore PI (rappresentato dal blocco C_{PI}) che garantisce errore nullo a regime e quindi un corretto inseguimento della velocità di imbardata ottimale. L'elemento che chiude il controllo del veicolo è il pilota stesso che percependo la velocità di imbardata prodotta $r(s)$ regola di conseguenza l'angolo di sterzata δ agendo sul volante. Poiché il momento di imbardata correttivo M_C viene generato a partire dall'input di sterzo, si può concludere che, grazie alla architettura di controllo appena descritta, la velocità di imbardata della vettura dipende unicamente dall'input δ . Il risultato finale è quindi una rappresentazione *SISO* (*Single-Input-Single-Output*) del modello matematico sviluppato precedentemente, in cui i due ingressi del sistema originario (δ e M_C) vengono ricondotti al comando di sterzo imposto dal pilota.

3.3.3 Sintesi del regolatore PI

La funzione di trasferimento che rappresenta il regolatore PI utilizzato per la generazione del momento di imbardata correttivo è

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (3.24)$$

e l'anello di controllo a cui fare riferimento per la effettuare la sintesi del regolatore è quello rappresentata in Figura 3.6. Al suo interno compare anche la funzione di trasferimento $P_{M_C}(s)$ che è dipendente dalla velocità v_x . La taratura del controllore dovrà pertanto seguire una logica di *gain scheduling* che permetta di adattare i guadagni del regolatore in base alla velocità a cui sta viaggiando il veicolo.

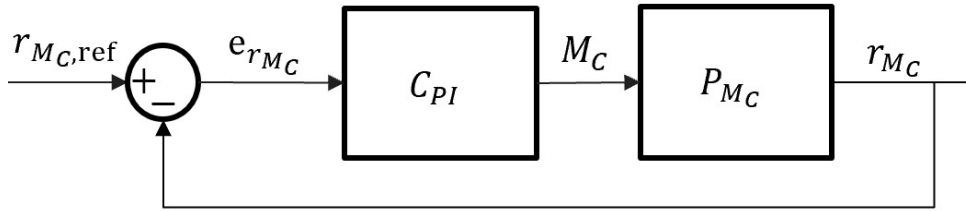


Figura 3.6: Anello di controllo interno del sistema

Il metodo utilizzato per tarare i guadagni K_p e K_i è quello di Bode. Questa tecnica permette, definendo una banda passante ω_B desiderata, un margine di fase target m_ϕ , e avendo nota la funzione di trasferimento $P_{M_C}(s)$, di calcolare i guadagni del regolatore imponendo le condizioni:

$$|L_{M_C}(j\omega_B)| = 1 \quad \phi(L_{M_C}(j\omega_B)) = -\pi + m_\phi \quad (3.25)$$

in cui $L_{M_C}(s) = C_{PI}(s) \cdot P_{M_C}(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento in catena aperta dell'anello di controllo e $\phi(L_{M_C}(s))$ rappresenta la sua fase. Le espressioni finali che si ottengono per i guadagni del regolatore sono

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1}{|P_{M_C}(j\omega_B)|} \cdot \cos \left(-\pi + m_\phi - \phi(P_{M_C}(j\omega_B)) \right) \\ K_i &= -\frac{\omega_B}{|P_{M_C}(j\omega_B)|} \cdot \sin \left(-\pi + m_\phi - \phi(P_{M_C}(j\omega_B)) \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

La scelta dei valori di banda passante e margine di fase è legata a due differenti motivazioni:

- **Filtraggio dell'azione di sterzo del pilota:** il segnale di riferimento per l'anello di controllo è generato attraverso la misura dell'angolo volante imposto dal pilota che determina l'angolo δ delle ruote anteriori. Per questo motivo la banda passante va selezionata in modo da filtrare tutte le componenti armoniche che sono legate al rumore di misura e alle microcorrezioni ad alta frequenza che il pilota effettua durante la guida.
- **Stabilità del veicolo:** il margine di fase va selezionato in modo da garantire la stabilità dell'azione di controllo a qualunque velocità e per tutto lo spettro di frequenze raggiungibili dall'input di sterzo.

Analizzando lo spettro in frequenza del segnale $\delta(s)$, misurato durante lo svolgimento di alcune prove dinamiche tipiche degli eventi FSAE, si è osservato che le componenti armoniche principali si collocano nelle frequenze inferiori ai 3 Hz. Da questo risultato deriva che, per assicurare una corretta risposta del sistema, la banda passante ω_B va mantenuta sotto ai 3 Hz, in modo che le componenti di disturbo del segnale $\delta(s)$ non si traducano in repentine oscillazioni del momento di imbardata applicato, che peggiorerebbero la guidabilità e le performance del veicolo.

Il margine di fase m_ϕ è stato imposto pari a 90° durante la prima taratura del sistema. Questa scelta assicura il maggior *margine di sicurezza* possibile per garantire la stabilità della vettura su strada, inoltre permette di compensare le approssimazioni e imprecisioni contenute nella stima dei parametri del veicolo, alcuni dei quali possono variare anche durante il funzionamento stesso del mezzo.

Considerando queste scelte progettuali, i guadagni del regolatore sono stati calcolati in funzione dei possibili valori di banda passante ω_B (discretizzata all'interno dell'intervallo [0.5,3] Hz) e della velocità del veicolo (considerata tra i 10 km/h e i 120 km/h) [Figura 3.7].

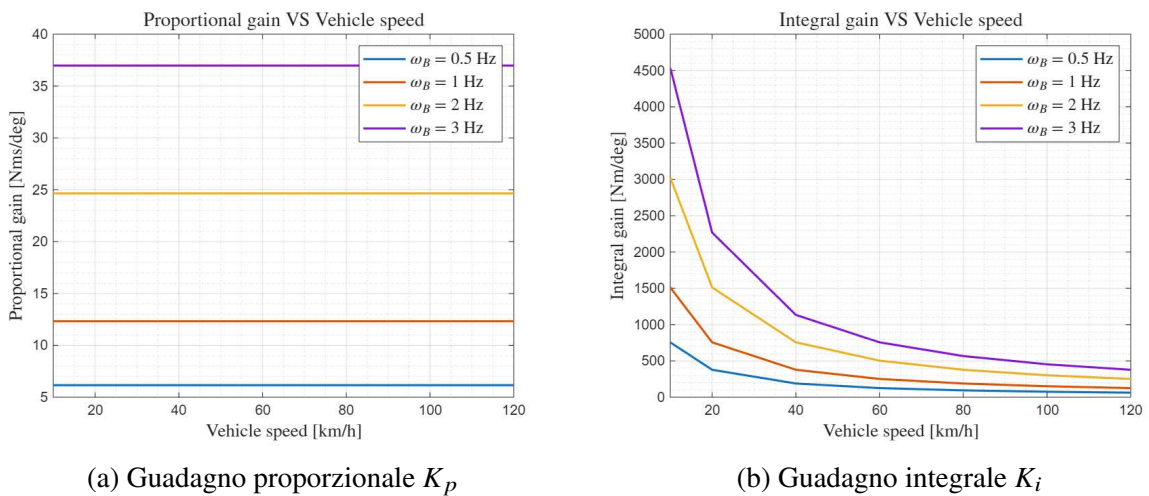


Figura 3.7: Taratura del regolatore PI in funzione di banda passante e velocità

Una volta mappati i possibili valori per i guadagni del regolatore è possibile tracciare la risposta dell'anello di controllo in catena aperta $L_{MC}(s)$ e in catena chiusa $G_{MC}(s) = \frac{C_{PI}(s)P_{MC}(s)}{1+C_{PI}(s)P_{MC}(s)}$.

In Figura 3.8 sono riportati i risultati ottenuti imponendo $\omega_B = 1$ Hz e $m_\phi = 90^\circ$.

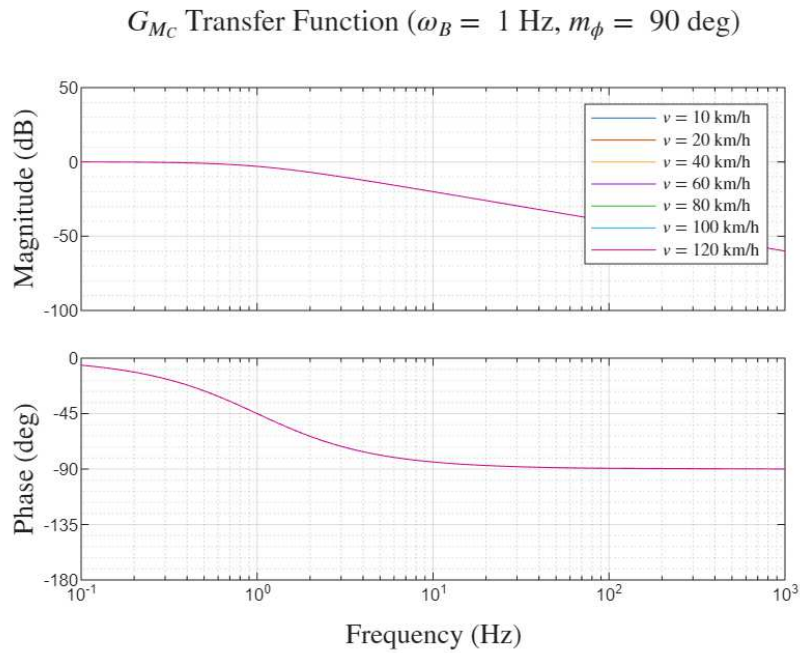
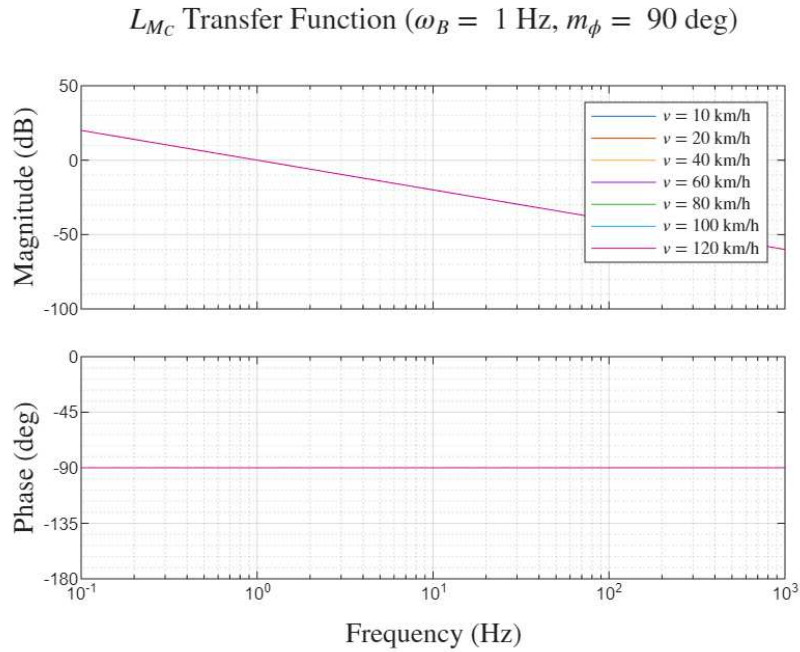


Figura 3.8: Risposte in catena aperta/chiusa dell'anello di controllo per $\omega_B = 1$ Hz

Dalla Figura 3.8a si può notare come le condizioni (3.25) imposte per la taratura vengano correttamente rispettate. Il modulo della risposta in catena aperta è unitario alla frequenza selezionata come banda passante e il suo andamento è decrescente con pendenza -20 dB per decade. La fase è pari a 90° per tutto il range di frequenze considerate, questo è dovuto al fatto che con la taratura del sistema precedentemente menzionata si ottiene un annullamento del polo dominante della funzione $P_{MC}(s)$ con lo zero introdotto dal regolatore PI,

$$z_{CPI} = -\frac{K_i}{K_p} \approx \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2} = p_{2,MC} \quad (3.27)$$

e di conseguenza rimane unicamente il contributo del polo nullo introdotto dalla funzione $C_{PI}(s)$. Tale proprietà si può verificare in maniera analoga per tutti i valori di banda passante presi in considerazione.

Sempre dalla Figura 3.8 si può notare come la risposta dell'anello di controllo diventi indipendente dalla velocità del veicolo. Anche questo è un risultato importante, poiché indica che il comportamento del sistema di controllo sarà più facilmente prevedibile e gestibile dal pilota che interagisce con esso durante la guida. In un contesto come quello della Formula Student, dove è richiesto uno stile di guida sportivo, il veicolo è soggetto a continue accelerazioni/decelerazioni, e i piloti non sono professionisti ma studenti con solitamente poca esperienza al volante di un'auto da corsa, questa caratteristica è desiderata e vantaggiosa.

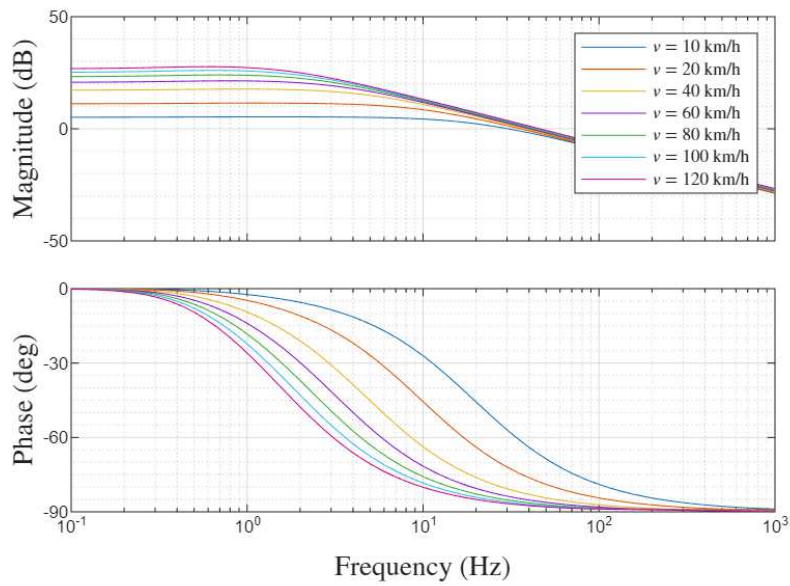
3.4 Analisi della funzione di trasferimento SISO

Una volta tarato il sistema di controllo è possibile analizzare la risposta del sistema veicolo nella sua rappresentazione *SISO*, dove l'unico ingresso dato al sistema è l'angolo di sterzata δ . A partire dalla riformulazione del sistema mostrata in sottosezione 3.3.2, la funzione di trasferimento $P(s)$ può essere riscritta come

$$P(s) = \frac{r(s)}{\delta(s)} = \left(\frac{v_x}{l} - P_\delta(s) \right) \cdot G_{MC}(s) + P_\delta(s) \quad (3.28)$$

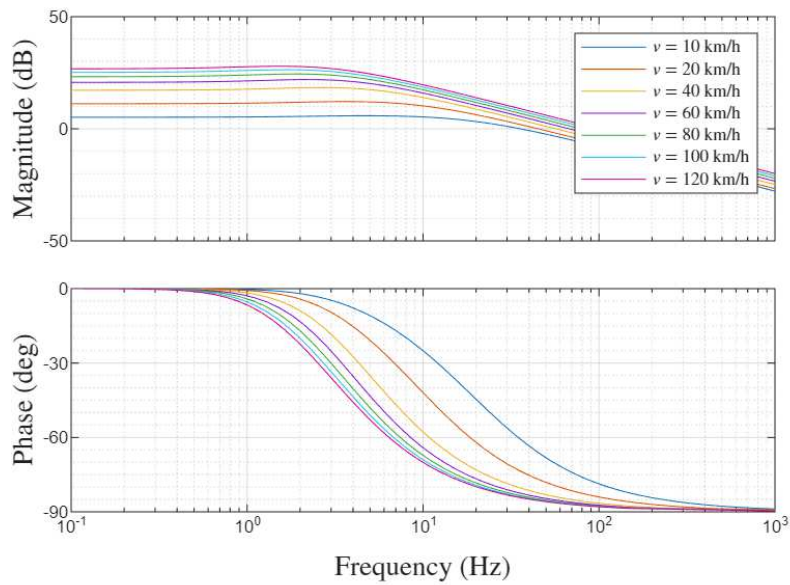
Quest'ultima espressione risulta essere dipendente da tutti i parametri menzionati precedentemente e rappresenta la risposta globale del veicolo all'input di sterzo del pilota. In Figura 3.9 è riportato l'andamento della funzione $P(s)$ considerando il valore massimo e minimo per la banda passante dell'anello di controllo ω_B , mentre la specifica sul margine di fase è mantenuta costante e pari a 90° .

$P(s)$ Transfer Function ($\omega_B = 0.5 \text{ Hz}$, $m_\phi = 90 \text{ deg}$)



(a) Andamento della funzione $P(s)$ con $\omega_B = 0.5 \text{ Hz}$

$P(s)$ Transfer Function ($\omega_B = 3 \text{ Hz}$, $m_\phi = 90 \text{ deg}$)



(b) Andamento della funzione $P(s)$ con $\omega_B = 3 \text{ Hz}$

Figura 3.9: Risposte dinamiche del sistema nella sua rappresentazione *SISO*

Sia in Figura 3.9a che in Figura 3.9b l'andamento di modulo e fase ricalca quello di un sistema del primo ordine. All'aumentare della velocità la posizione del polo dominante si sposta verso frequenze più basse, mentre il guadagno statico della funzione di trasferimento aumenta. La fase risulta essere sempre inferiore ai 90° , pertanto il veicolo è stabile dal punto di vista matematico.

Osservando le due figure è possibile inoltre notare come, all'aumentare della banda passante impostata per l'anello di controllo, la posizione del polo viene spostata verso frequenze più elevate, estendendo così il range di frequenze in cui la risposta del sistema segue il valore del guadagno statico.

Queste considerazioni mostrano l'effetto dell'integrazione di un sistema di controllo basato sulla correzione del momento di imbardata del veicolo. Dal punto di vista analitico, l'anello di controllo progettato permette di modificare la risposta dinamica della vettura all'input di sterzo, andando ad aumentare o diminuire la *frequenza di taglio* del sistema, preservandone la stabilità. Dal punto di vista fisico, quello che si ottiene è la possibilità di intervenire sulla reattività del veicolo agendo sulla taratura del regolatore PI e sulla scelta del gradiente di sottosterzo target K_U^* , rendendo in questo modo la vettura più sottosterzante o sovrasterzante in base alle preferenze del pilota e il tipo di prova che il veicolo deve affrontare.

Capitolo 4

Implementazione e validazione

Nel capitolo precedente è stato descritto come, a partire da una modellazione del veicolo in spazio di stato, sia possibile progettare un sistema di controllo in grado di correggerne il comportamento dinamico in curva. L'analisi dell'implementazione del sistema di controllo è stata, fino a questo momento, puramente analitica, priva di considerazioni sulla modalità in cui il momento di imbardata correttivo venga effettivamente applicato al veicolo. Un altro importante aspetto che non è stato ancora discusso riguarda la bontà dell'interazione tra il controllore progettato e gli input di guida del pilota, fondamentale per comprenderne l'effettiva applicabilità in un contesto come quello della Formula SAE.

Il seguente capitolo ha l'obiettivo di prendere in esame tutti gli aspetti di carattere pratico e implementativo non ancora trattati, in modo da tradurre la progettazione teorica in un'implementazione pratica a bordo del veicolo preso in analisi. Infine, verranno mostrati e discussi i risultati ottenuti tramite specifici test svolti sul modello del veicolo equipaggiato con il sistema di controllo studiato, attraverso molteplici metodi e strumenti di simulazione. Tutto questo permetterà di validare le prestazioni del controllore e di analizzare l'impatto che esso ha sulla dinamica del veicolo, oltre a individuare una taratura ottimale da poter utilizzare nel caso reale.

4.1 Generazione del momento di imbardata correttivo

Il momento di imbardata correttivo M_C da comandare sul veicolo coincide con l'uscita del regolatore PI dell'anello di controllo. Il valore così calcolato può essere applicato al veicolo andando ad agire sulle coppie erogate dai motori elettrici della vettura. Considerando che il prototipo in esame dispone di quattro motori, ciascuno dei quali gestisce una ruota, è possibile controllare in modo indipendente le coppie applicate su ciascuna ruota. Per questo motivo, a parità di momento di imbardata da applicare, è possibile definire diverse combinazioni di coppie erogate dai motori che generano una equivalente azione di controllo.

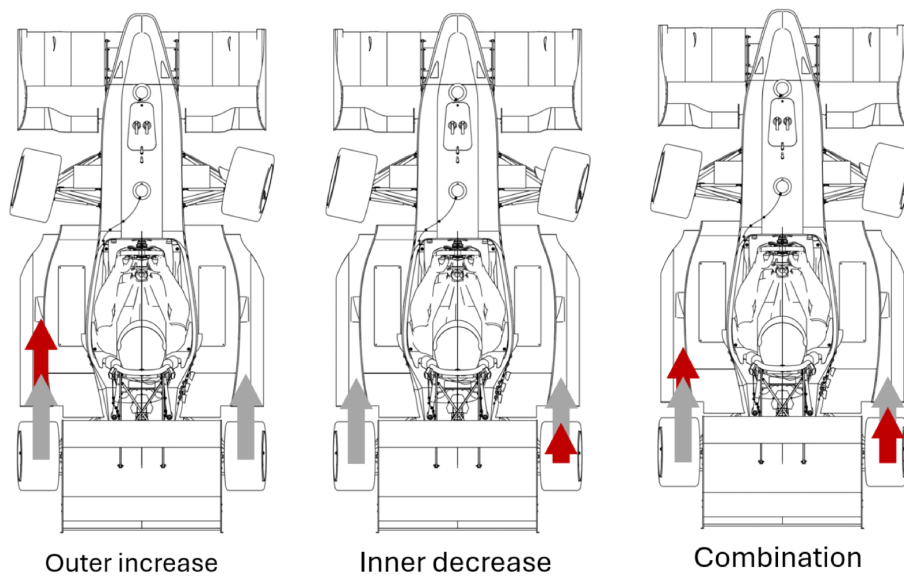


Figura 4.1: Generazione del momento di imbardata correttivo sull'assale posteriore [7]

A titolo di esempio, in Figura 4.1 viene mostrato come sia possibile generare il momento di imbardata correttivo agendo unicamente sulle coppie applicate dai motori dell'assale posteriore. Questa tecnica viene solitamente utilizzata in veicoli elettrici a trazione posteriore e ricalca l'effetto che si otterrebbe installando un differenziale meccanico sull'assale.

Più in generale, considerando un veicolo a trazione integrale, come il prototipo SGe-08, la stessa azione di controllo può essere applicata in tre diverse modalità:

- **Modifica delle coppie applicate alle ruote esterne**, in cui vengono modificati i comandi di coppia relativi ai motori che gestiscono la ruote più esterne alla curva.
- **Modifica delle coppie applicate alle ruote interne**, in cui vengono modificati i comandi di coppia relativi ai motori che gestiscono la ruote più interne alla curva.
- **Combinazione di coppie comandate alle ruote interne ed esterne**, dove vengono modificati i comandi di coppia di ogni singolo motore.

La soluzione migliore per il caso studio in esame è generare il momento d'imbardata correttivo M_C andando a gestire indipendentemente la coppia erogata da tutti e quattro i motori. Questa tecnica possiede infatti numerosi vantaggi, i cui principali sono:

- **Riduzione della coppia richiesta al singolo motore**: sfruttando le coppie erogabili da ogni assale viene ridotto lo sforzo che viene richiesto su ogni singolo motore.
- **Miglior sfruttamento della coppia erogabile dai motori**: riducendo la coppia richiesta ad ogni motore è possibile far operare ogni attuatore in condizioni di lavoro generalmente più efficienti e vicine a quelle nominali.

- **Recupero dell'energia in curva:** potendo utilizzare la coppia erogabile da tutti i motori è possibile ottenere il momento di imbardata correttivo anche attraverso l'applicazione di contributi di coppia negativi. Sfruttando le proprietà rigenerative dei motori elettrici si ha la possibilità di recuperare energia che può essere immagazzinata all'interno del pacco batteria per estendere l'autonomia del veicolo.
- **Miglior sfruttamento degli pneumatici:** sfruttando delle tecniche di distribuzione della coppia più avanzate, che implementano al loro interno degli ottimizzatori basati sui limiti di aderenza degli pneumatici, è possibile minimizzare gli effetti di slittamento degli pneumatici. Questo permette di migliorare sensibilmente la tenuta e la stabilità del veicolo anche nelle condizioni più critiche.

L'azione di controllo pertanto dovrà essere tradotta in quattro differenti contributi di coppia rappresentati dal vettore

$$\Delta \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{12} \\ \Delta T_{21} \\ \Delta T_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \quad (4.1)$$

in cui ogni elemento rappresenta il valore di coppia da aggiungere alla richiesta dal pilota comandata attraverso il pedale dell'acceleratore e del freno.

4.2 Distribuzione delle coppie

In condizioni di marcia normali, la distribuzione della coppia di trazione sviluppabile dal veicolo è pari al 30% sull'assale anteriore e al 70% sull'assale posteriore. Tale scelta è dovuta alla necessità di garantire una buona trazione nelle fasi di accelerazione andando a sfruttare maggiormente l'assale su cui agisce maggior carico verticale. Viceversa, durante le fasi di decelerazione, i motori sono utilizzati come freni e la frenata rigenerativa segue una distribuzione di coppie pari al 70% sull'assale anteriore e al 30% sull'assale posteriore. In questo caso l'obiettivo è sfruttare l'azione frenante di tutti i motori evitando fenomeni di bloccaggio degli pneumatici e utilizzando maggiormente l'assale più caricato.

Pertanto, dati gli input di acceleratore e freno forniti dal pilota è possibile definire il vettore

$$\mathbf{T}_D = \begin{bmatrix} T_{D,11} \\ T_{D,12} \\ T_{D,21} \\ T_{D,22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \quad (4.2)$$

che rappresenta le coppie comandate su ogni singolo motore dal pilota durante la guida. In condizioni di guida normale va garantita la simmetria tra le coppie comandate su ogni assale, si ha quindi:

$$(T_{D,11} = T_{D,12}) = T_{D,1} \quad (T_{D,21} = T_{D,22}) = T_{D,2} \quad (4.3)$$

Considerando ora anche l'azione del sistema di controllo, rappresentata dalla relazione (4.1), il vettore delle coppie comandate ai motori elettrici sarà pari a

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_D + \Delta \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{D,1} + \Delta T_{11} \\ T_{D,1} + \Delta T_{12} \\ T_{D,2} + \Delta T_{21} \\ T_{D,2} + \Delta T_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \quad (4.4)$$

La tecnica utilizzata per definire i termini ΔT_{ij} si basa sul calcolo di due contributi di coppia positivi per un lato del veicolo e due contributi di coppia negativi sull'altro. In base al segno del momento di imbardata richiesto M_C l'applicazione delle coppie positive e negative verrà effettuata su differenti lati del veicolo. Considerando il sistema di riferimento e le convenzioni di segno utilizzate precedentemente, il momento di imbardata correttivo può essere riscritto come

$$M_C = -\frac{\Delta T_{11} R \cdot t_1}{2\tau_R} + \frac{\Delta T_{12} R \cdot t_1}{2\tau_R} - \frac{\Delta T_{21} R \cdot t_2}{2\tau_R} + \frac{\Delta T_{22} R \cdot t_2}{2\tau_R} \quad (4.5)$$

in cui R indica il raggio nominale dello pneumatico, t_1 e t_2 i valori di carreggiata anteriore e posteriore, mentre τ_R il rapporto di trasmissione dei riduttori epicicloidali che accoppiano i motori elettrici con le ruote. Un requisito importante è quello di garantire che i contributi ΔT_{ij} non vadano ad alterare la richiesta di coppia totale comandata dal pilota, pari alla somma degli elementi del vettore $\mathbf{T}_D$. Pertanto, ricordando le relazioni (4.2) e (4.4), va imposto

$$(\Delta T_{12} = -\Delta T_{11}) = \Delta T_1 \quad (\Delta T_{22} = -\Delta T_{21}) = \Delta T_2 \quad (4.6)$$

che combinate con l'equazione (4.5) pongono

$$M_C = \frac{\Delta T_1 R \cdot t_1}{\tau_R} + \frac{\Delta T_2 R \cdot t_2}{\tau_R} = M_{C,1} + M_{C,2} \quad (4.7)$$

dove il momento di imbardata da applicare è pari alla somma di due termini che esprimono i contributi generati da ogni assale.

Per completare il calcolo delle coppie da applicare rimane necessario definire il rapporto tra M_C e le quantità $M_{C,1}$, $M_{C,2}$. Si introduce quindi il parametro ξ_{M_C} , che indica la distribuzione della generazione del momento di imbardata correttivo tra i due assali.

Tale variabile, selezionabile liberamente durante il setup del sistema, può assumere valori compresi tra 0 e 1 e permette di selezionare liberamente la percentuale di momento di imbardata correttivo che ogni asse deve generare. Si giunge quindi alle relazioni

$$M_{C,1} = M_C \cdot \xi_{M_C} \quad M_{C,2} = M_C \cdot (1 - \xi_{M_C}) \quad (4.8)$$

Unendo queste equazioni alle (4.7) si ottengono le formule che permettono di calcolare i termini ΔT_1 e ΔT_2

$$\Delta T_1 = \frac{M_C \cdot \xi_{M_C} \cdot \tau_R}{R \cdot t_1} \quad \Delta T_2 = \frac{M_C \cdot (1 - \xi_{M_C}) \cdot \tau_R}{R \cdot t_2} \quad (4.9)$$

e definire quindi il calcolo dei singoli contributi di coppia ΔT_{ij} da comandare a ciascun motore.

$$\begin{aligned} \Delta T_{12} &= \frac{M_C \cdot \xi_{M_C} \cdot \tau_R}{R \cdot t_1} = -\Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} &= \frac{M_C \cdot (1 - \xi_{M_C}) \cdot \tau_R}{R \cdot t_2} = -\Delta T_{21} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Poiché i contributi di coppia ΔT_{11} e ΔT_{12} agenti sull'assale anteriore hanno segno opposto, le coppie prodotte dai motori anteriori non sono più simmetriche. L'effetto di questa asimmetria è una differenza tra le forze applicate longitudinalmente sulle ruote anteriori del veicolo, che viene trasmessa al sistema di sterzo sotto forma di un momento torcente sulla colonna sterzo e quindi come un aumento della coppia percepita dal pilota sul volante. Per evitare di introdurre un eccessivo sforzo, che risulterebbe controproducente e di disturbo durante la guida, il parametro ξ_{M_C} è stato fissato inizialmente ad un valore di 0.3. Questo garantisce che la maggior parte del momento di imbardata correttivo venga generato dall'assale posteriore, in modo da ridurre il possibile disturbo che inficerebbe la guida del pilota.

4.3 Validazione del sistema di controllo

Il sistema di controllo progettato è stato testato tramite diverse simulazioni, svolte in differenti modalità e utilizzando ambienti software in grado di simulare il comportamento del veicolo e l'interazione che quest'ultimo ha con il pilota durante la guida. I test effettuati si possono suddividere in:

- **Simulazioni offline open-loop:** in cui la risposta del veicolo e del controllo è valutata imponendo specifiche condizioni di lavoro e input al sistema. Il termine *offline* indica il fatto che la simulazione è svolta interamente dal software, senza considerare l'azione di un vero pilota alla guida.

- **Simulazioni offline closed-loop:** in cui la simulazione è nuovamente svolta interamente dal software. In questo caso però le manovre di test richieste al veicolo sono svolte in catena chiusa, ovvero tramite un algoritmo in grado di simulare le azioni che un pilota eseguirebbe durante la guida sugli input di acceleratore, freno e sterzo.
- **Simulazioni online:** dove il modello del veicolo e il sistema di controllo vengono testati in modalità *online*, ovvero in un ambiente di simulazione che permette alla vettura di essere effettivamente guidata dagli input di un pilota umano. Questa modalità di simulazione viene normalmente denominata anche *Driver-in-the-loop*.

Gli obiettivi principali della campagna di test effettuati sono quelli di validare le considerazioni progettuali presentate fino ad ora, testare la sua interazione con il pilota alla guida e valutare i potenziali incrementi di performance del veicolo nelle condizioni di lavoro analizzate.

4.3.1 Simulazioni offline open-loop

Le prime simulazioni del sistema sono state svolte in ambiente MATLAB-Simulink tramite il modello rappresentato in Figura 4.2. Il modello Simulink implementa al suo interno la rappresentazione matematica del veicolo contenuta nell'equazione (2.52), discussa nel Capitolo 2, l'algoritmo di controllo progettato nel Capitolo 3 e la tecnica di distribuzione della coppia appena definita.

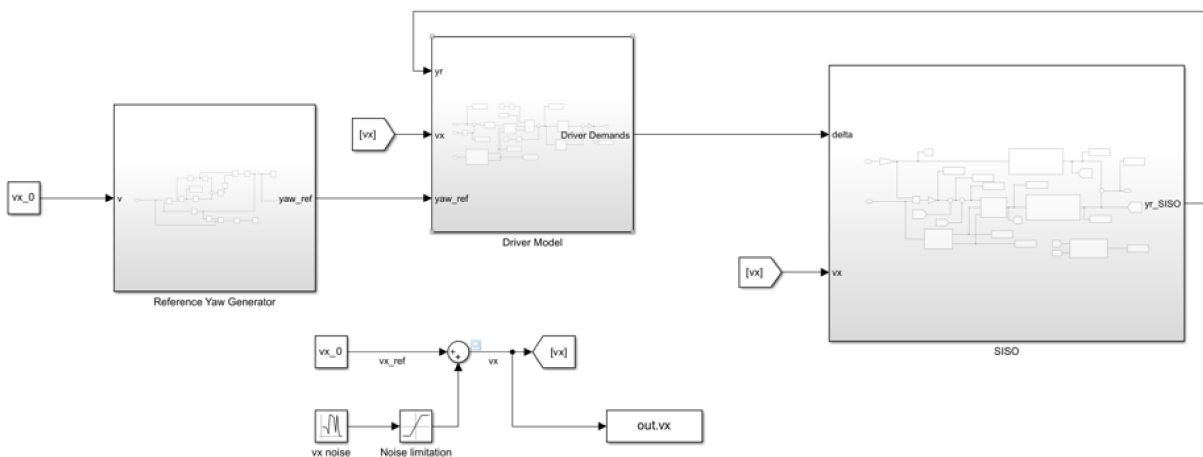


Figura 4.2: Modello Simulink del veicolo e del controllore

L'approccio utilizzato per testare il sistema in modalità *open loop* è stato valutarne la risposta ad un gradino di sterzo a velocità di avanzamento costante. Questo test viene chiamato solitamente *Step Steer* e permette di valutare la risposta del sistema ad una repentina azione di sterzo del

pilota sul volante, la cui ampiezza è scelta a priori. La prova è stata effettuata imponendo tre diversi angoli volante a tre differenti velocità, in modo da verificare il comportamento del veicolo e del controllore in curve a bassa, media ed alta velocità. Le combinazioni di angolo volante δ_D e velocità v_x considerate sono:

- **Gradino di sterzo a bassa velocità:** $v_x = 20$ km/h e $\delta_D = 60^\circ$
- **Gradino di sterzo a media velocità:** $v_x = 50$ km/h e $\delta_D = 40^\circ$
- **Gradino di sterzo ad alta velocità:** $v_x = 80$ km/h e $\delta_D = 20^\circ$

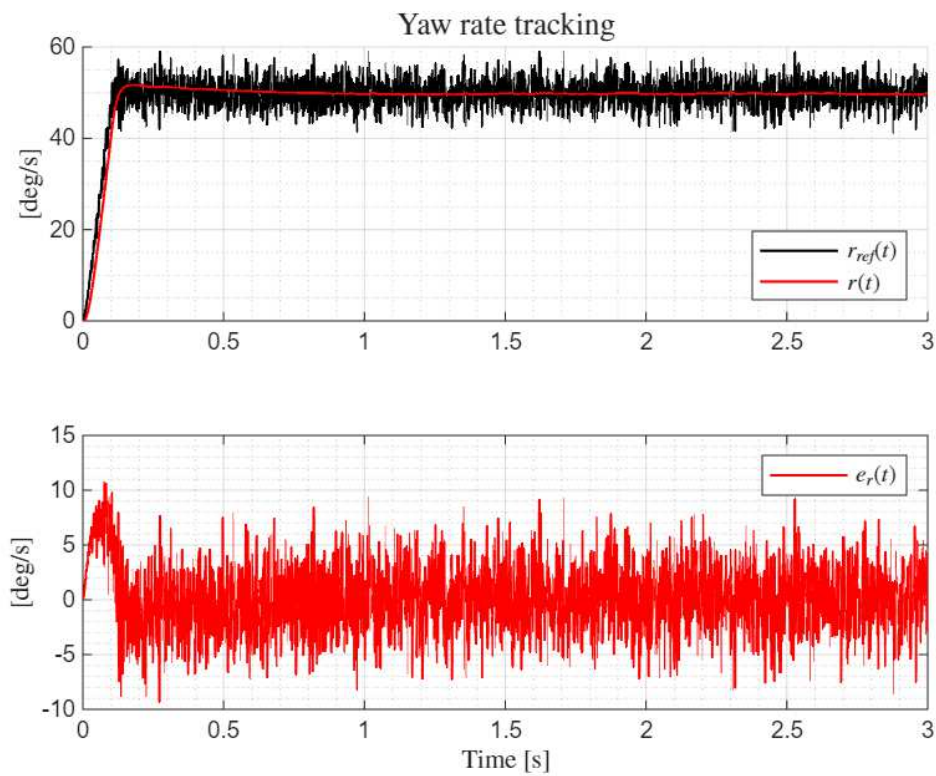
In ogni configurazione di test il sistema di controllo è stato tarato imponendo $\omega_B = 1$ Hz e $m_\phi = 90^\circ$. L'angolo δ_D , che si traduce in un angolo alle ruote δ tramite un rapporto di trasmissione approssimabile a $\tau_S = 0.227$, non viene raggiunto istantaneamente ma in 0.1 s. Questo permette di simulare un input di sterzo molto veloce e diretto ma allo stesso tempo realistico e coerente con quello che è il tempo di risposta di un pilota alla guida. Il modello implementa inoltre al suo interno l'effetto dovuto al rumore di misura dei segnali di sterzo e velocità. Per farlo, ai valori imposti vengono sommati dei segnali di rumore bianco a media nulla in grado di produrre una variazione rispettivamente di $\pm 1^\circ$ per il segnale δ_D e di ± 1 m/s per v_x . Con ciò è possibile valutare anche la sensibilità del sistema ai disturbi e alle possibili incertezze di misura che verrebbero naturalmente introdotte una volta installato il sistema sul veicolo reale.

Gradino di sterzo a bassa velocità

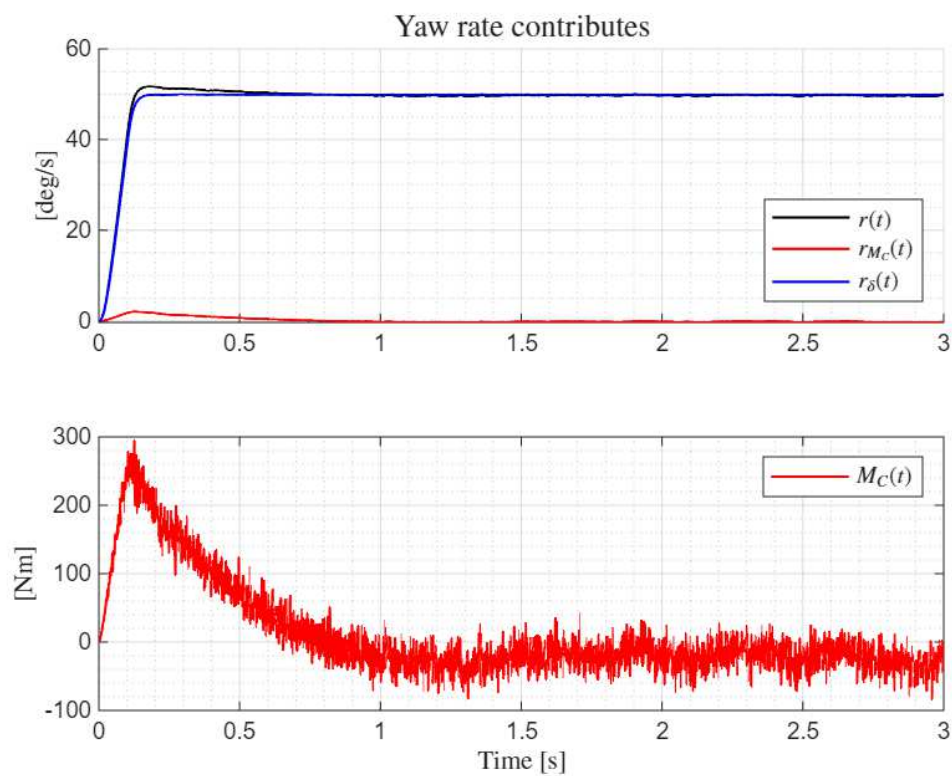
I risultati ottenuti per la casistica a bassa velocità sono riportati in Figura 4.3 e Figura 4.4. Considerando le condizioni imposte, tramite la relazione (3.20) si ottiene una velocità di imbardata di riferimento pari a:

$$r_{\text{ref}} = \frac{\delta_D \cdot \tau_S \cdot v_x}{l} = 49.29 \text{ }^\circ/\text{s} \quad (4.11)$$

Dalla Figura 4.3a si nota che l'effetto del rumore introdotto è quello di far variare il riferimento calcolato dal sistema nell'intervallo $[40, 60]$ $^\circ/\text{s}$. Nonostante ciò la velocità di imbardata raggiunta dal veicolo coincide con il valore target e l'errore viene mantenuto mediamente nullo. In Figura 4.3b si possono osservare i contributi di velocità di imbardata prodotti tramite le azioni di sterzo e di controllo. In particolare si vede come il veicolo, essendo caratterizzato da un comportamento neutro, necessita di un momento di imbardata correttivo, che raggiunge un valore prossimo ai 300 Nm, solo nella fase iniziale della sterzata.



(a) Andamento dell'errore di inseguimento del riferimento



(b) Contributi di velocità di imbardata generati dal sistema

Figura 4.3: Risposta del veicolo al gradino di sterzo a bassa velocità

Il rumore introdotto nella determinazione del riferimento si traduce in una variazione del momento di imbardata M_C comandato, il cui effetto è una oscillazione dei contributi di coppia ΔT_{ij} richiesti dal sistema di controllo [Figura 4.4]. I contributi di coppia comandati ai motori assumono valori contenuti con oscillazione di lieve entità, il loro andamento indica che il sistema di controllo cerca di correggere il comportamento sottosterzante del veicolo in ingresso curva per poi riadattarsi nel momento in cui viene raggiunta la velocità di imbardata di riferimento.

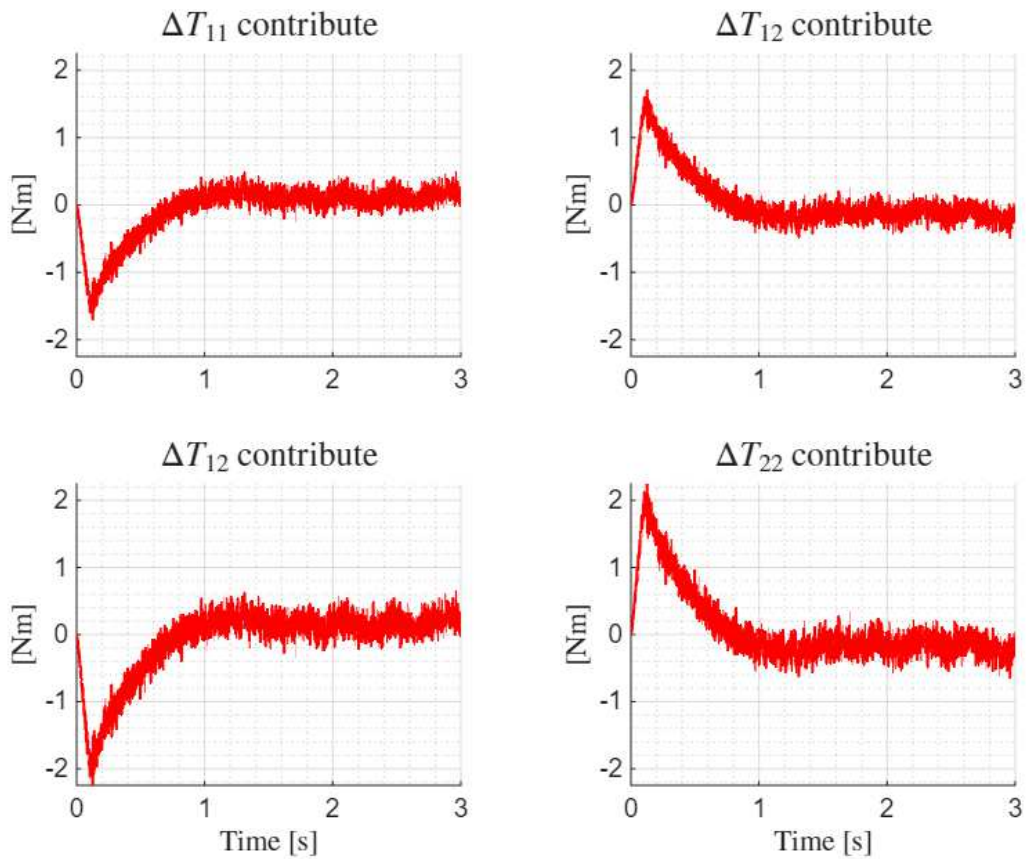
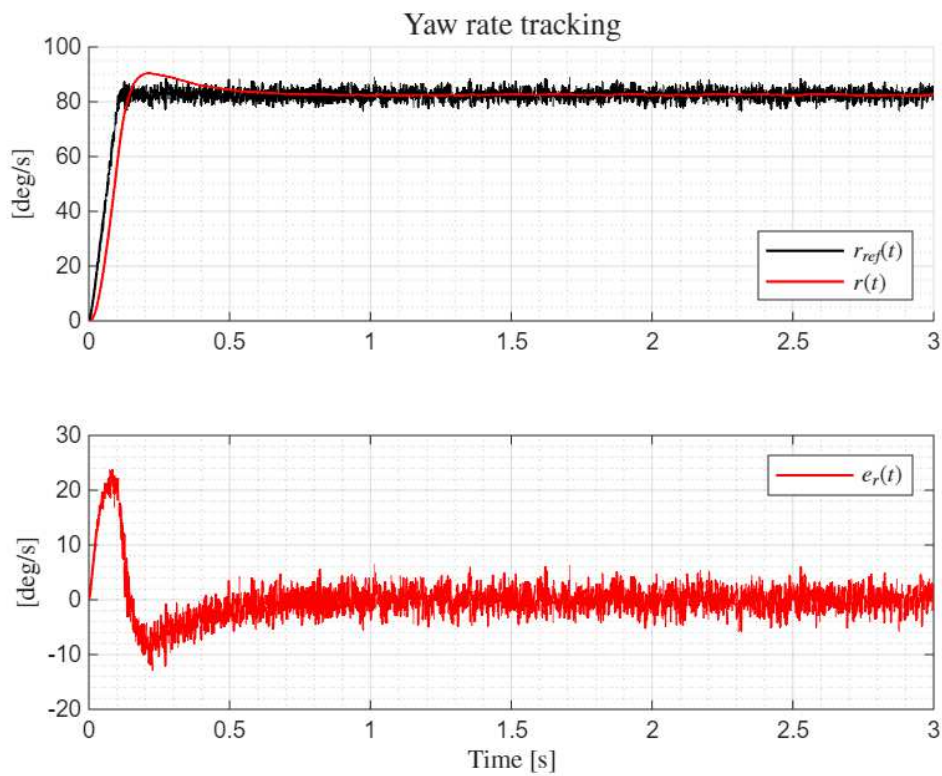


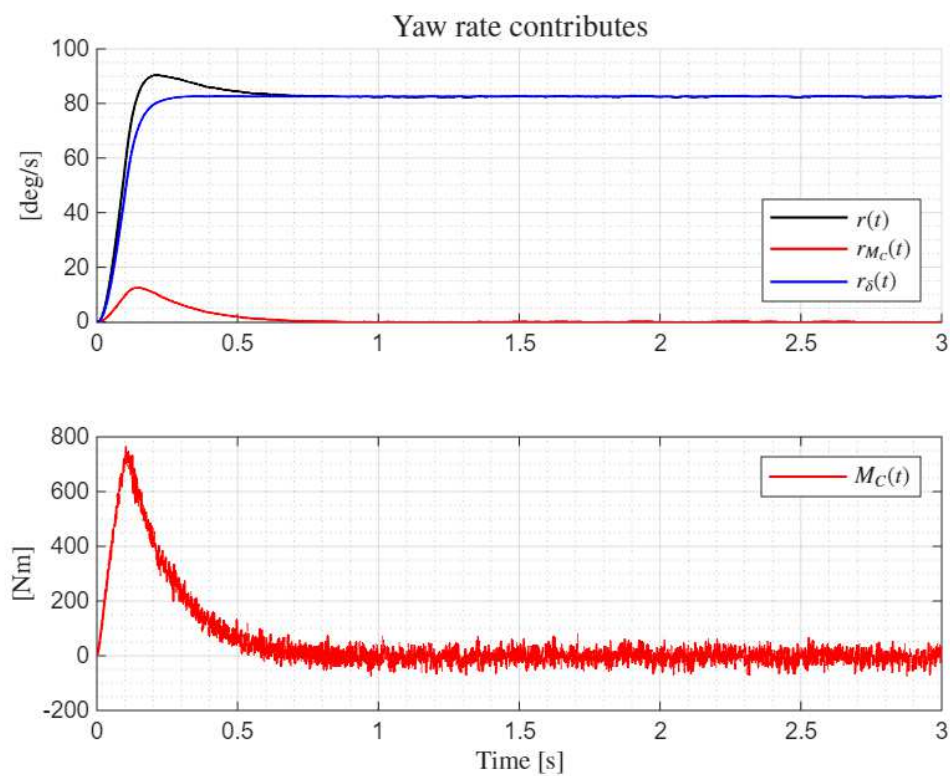
Figura 4.4: Andamento dei contributi di coppia comandati ($\delta_D = 60^\circ$, $v_x = 20$ km/h)

Gradino di sterzo a media velocità

Riutilizzando la relazione (3.20) si giunge ad un valore per la velocità di imbardata di riferimento pari a $82.16^\circ/\text{s}$. Analogamente a quanto fatto nel caso precedente, è possibile osservare il comportamento del veicolo in Figura 4.5. In Figura 4.5a si nota come la variazione del riferimento, prodotta dai segnali di rumore introdotti, venga ridotta notevolmente con una velocità del veicolo più elevata. Anche in questo caso, dopo una fase di correzione iniziale, l'errore di inseguimento è mediamente nullo.



(a) Andamento dell'errore di inseguimento del riferimento



(b) Contributi di velocità di imbardata generati dal sistema

Figura 4.5: Risposta del veicolo al gradino di sterzo a media velocità

I contributi di velocità di imbardata prodotti sono visibili in Figura 4.5b, dove è possibile osservare anche la crescita del momento di imbardata imposto dal sistema di controllo, che si avvicina al valore di saturazione del termine integrale del regolatore PI (impostato ad 800 Nm). L'aumento del momento M_C richiesto implica un maggiore sforzo sui motori, specialmente sull'assale posteriore dove alle coppie viene applicata una correzione di ± 7 Nm [Figura 4.6].

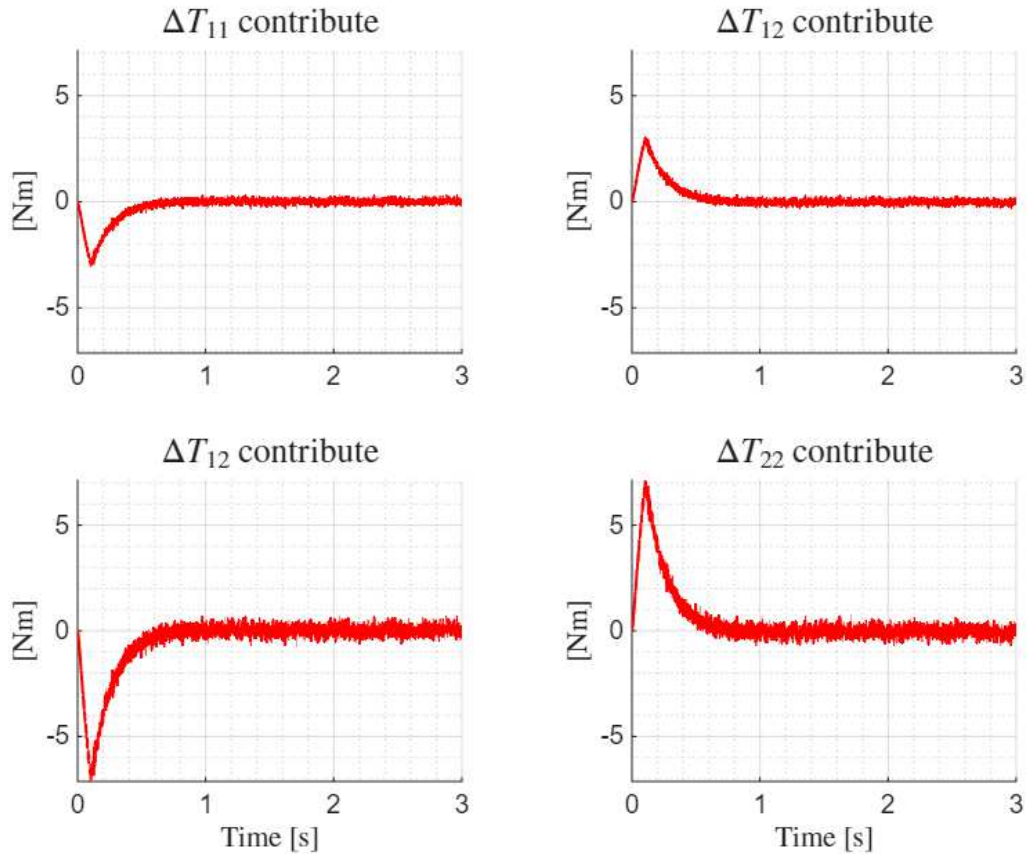
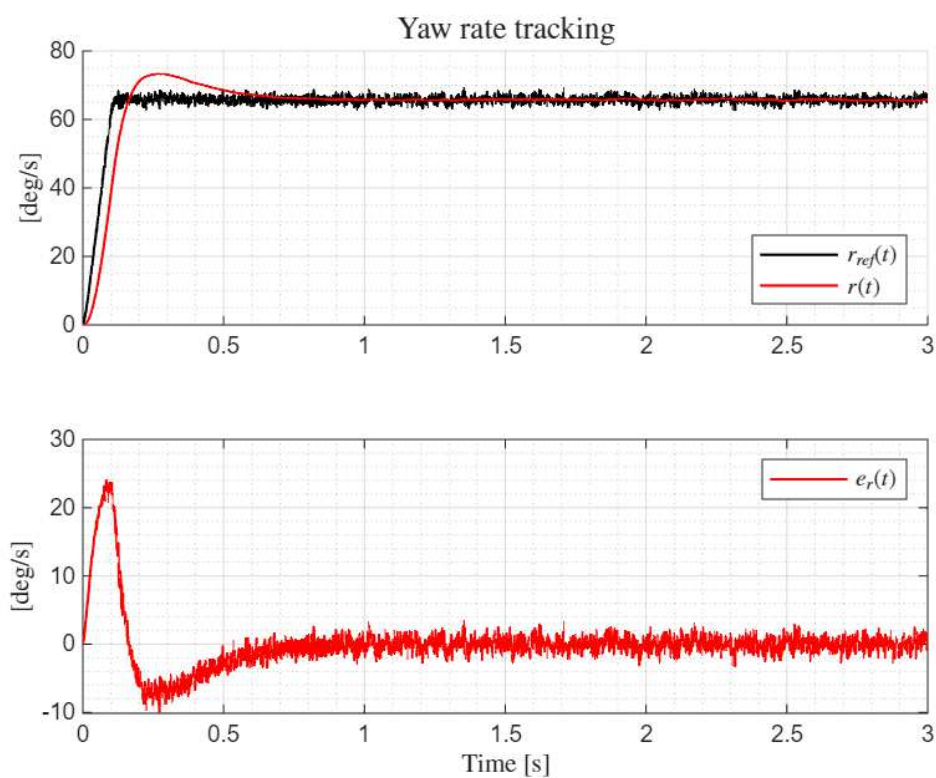


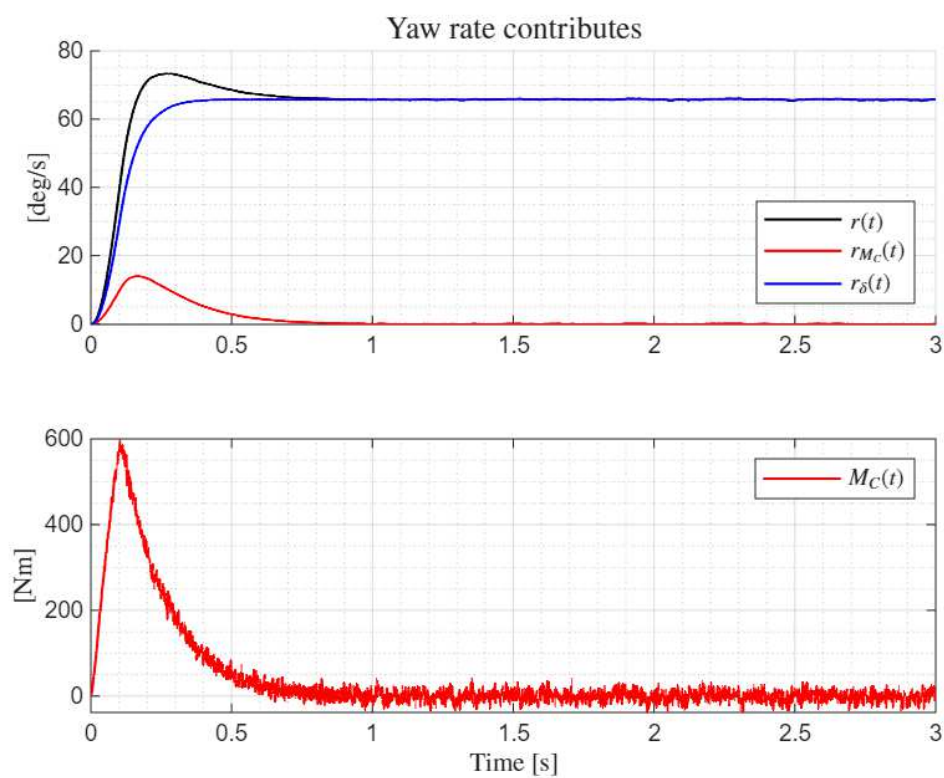
Figura 4.6: Andamento dei contributi di coppia comandati ($\delta_D = 40^\circ$, $v_x = 50$ km/h)

Gradino di sterzo ad alta velocità

La velocità d'imbardata di riferimento calcolata in questo caso è pari a $65.73^\circ/\text{s}$. Anche nel caso a velocità più elevata, il comportamento del veicolo e del sistema di controllo possiede le stesse caratteristiche osservate precedentemente. Ancora una volta si può notare come, al crescere della velocità del veicolo, la velocità di imbardata di riferimento sia meno affetta dagli effetti di disturbo introdotti [Figura 4.7a]. L'errore a regime è mediamente nullo e si osserva che il picco di momento di imbardata richiesto scende a 600 Nm [Figura 4.7b]. Questo evidenzia come la seguente condizione richieda uno sforzo di controllo inferiore rispetto a quella a media velocità.



(a) Andamento dell'errore di inseguimento del riferimento



(b) Contributi di velocità di imbardata generati dal sistema

Figura 4.7: Risposta del veicolo al gradino di sterzo ad alta velocità

Alla riduzione del momento M_C imposto è associata una riduzione delle differenze di coppia imposte tra i motori dei due assali [Figura 4.8]. L'ampiezza dei ripple di coppia è ulteriormente ridotta e questo permette di alleggerire lo sforzo sugli attuatori.

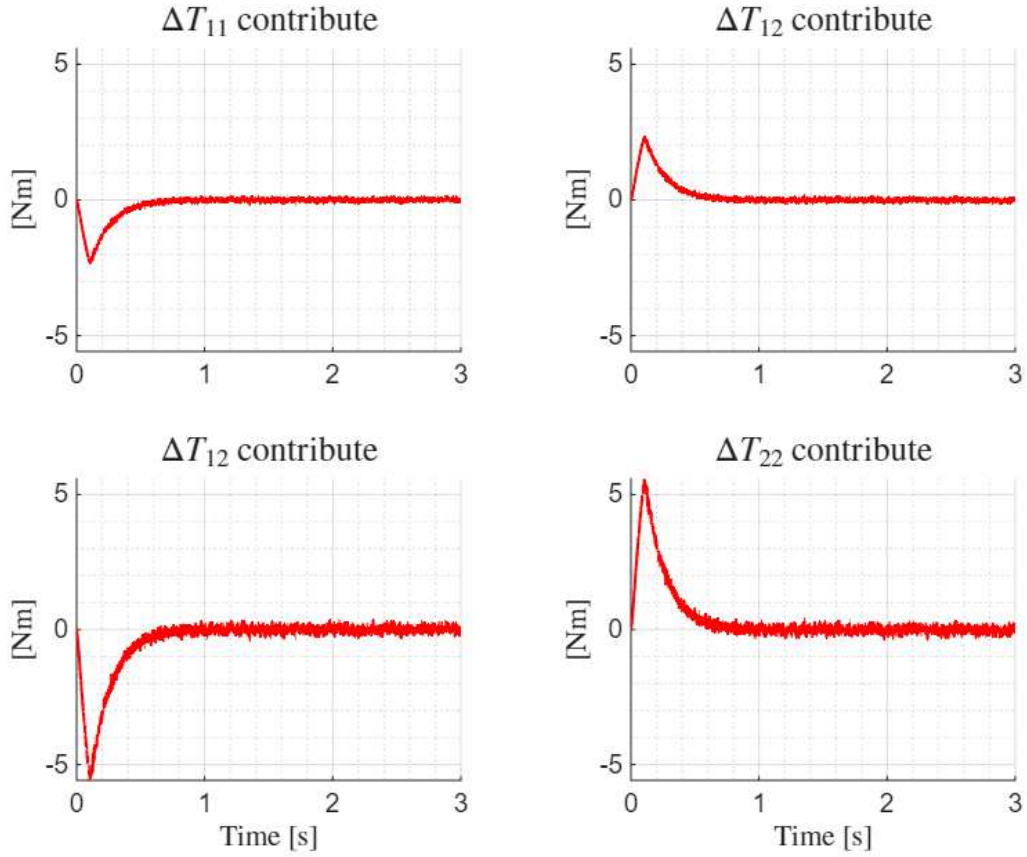


Figura 4.8: Andamento dei contributi di coppia comandati ($\delta_D = 20^\circ$, $v_x = 80$ km/h)

Come nei casi precedenti l'effetto del sistema di controllo è quello di aiutare la vettura ad essere più reattiva nella prima fase della sterzata, dopo della quale il veicolo riesce a raggiungere la velocità di imbardata target.

4.3.2 Simulazione offline closed-loop

Il passo successivo per verificare il corretto funzionamento del sistema di controllo è quello di testare l'algoritmo tramite una simulazione *closed-loop*, in cui gli input di guida vengono generati da un sottosistema dedicato che svolge il ruolo di pilota virtuale. La manovra richiesta al pilota virtuale è l'inseguimento di una traiettoria concidente con una curva a raggio e velocità costante (test comunemente denominato *constant radius cornering*). Per effettuare il test è stata scelta una combinazione dei valori di raggio di curvatura R e di velocità v_x

tipici delle prove dinamiche FSAE: $R = 20$ m e $v_x = 50$ km/h. Il sistema di controllo è stato implementato all'interno di un modello di simulazione del veicolo costruito attraverso il software *VI-CarRealTime*, utilizzato dal team Race UP per la progettazione e simulazione del veicolo. Quest'ultimo fa parte della suite software *VI-Grade* [12], utilizzata a livello industriale per la simulazione dettagliata di autoveicoli, la quale permette di definire tutte le caratteristiche della vettura reale e di costruirne una fedele rappresentazione basata sui dati di progetto del prototipo. La funzionalità di *co-simulazione* offerta dal software permette di testare il controllore implementandolo tramite un modello Simulink come parte integrante del veicolo che viene simulato all'interno di *VI-CarRealTime* [Figura 4.9]. La guida del veicolo è affidata all'algoritmo proprietario di *VI-CarRealTime* denominato *VI-Driver*.

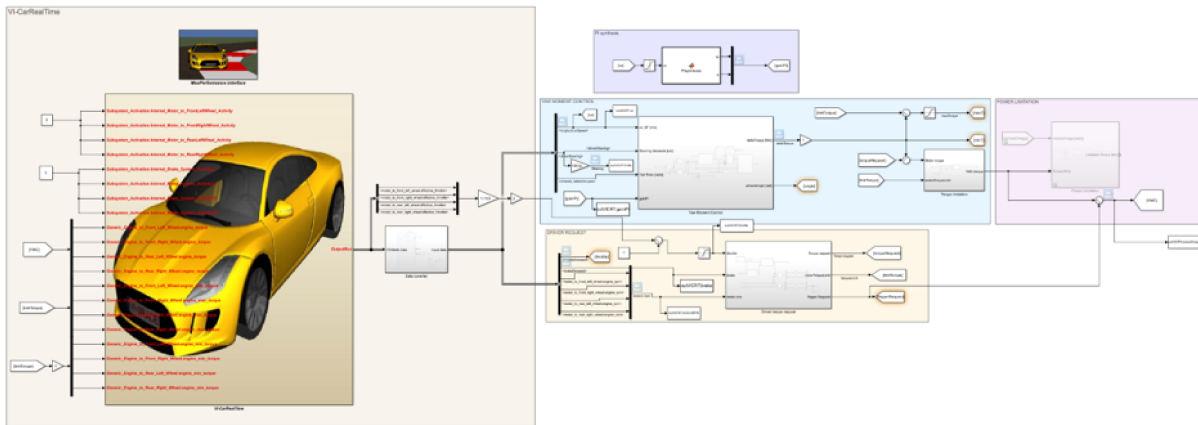
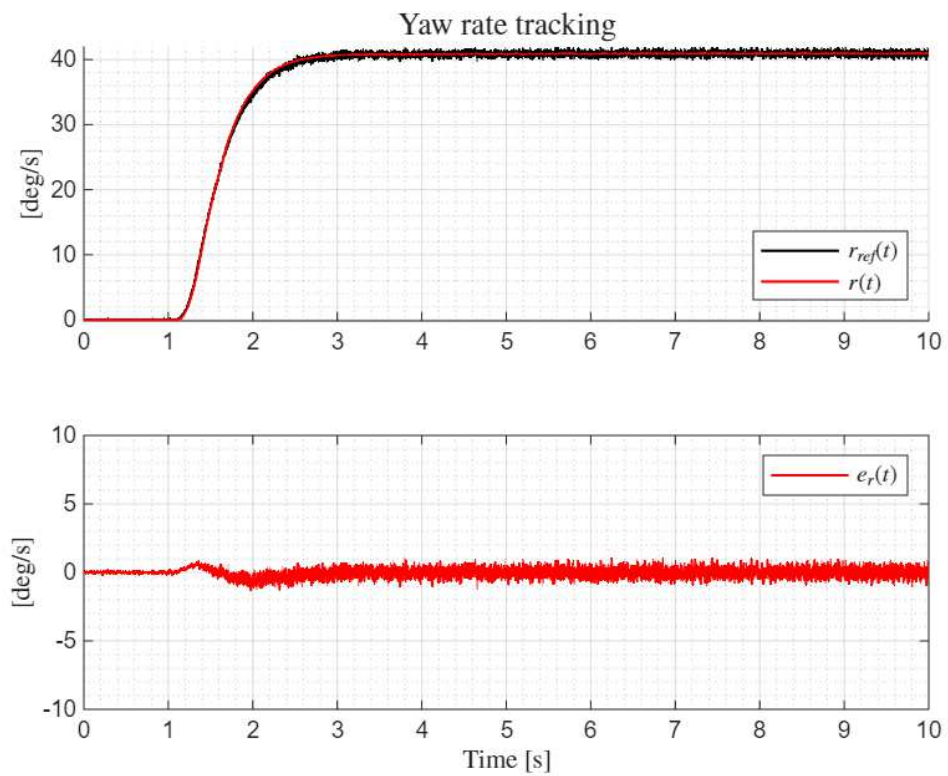
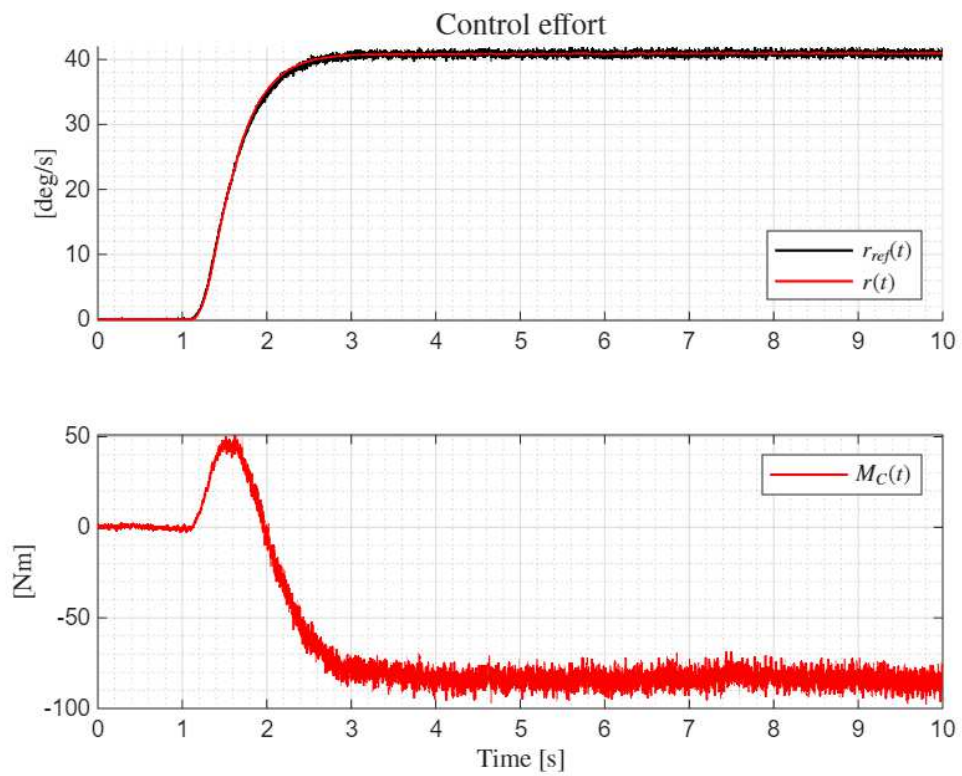


Figura 4.9: Modello simulink dedicato alla co-simulazione con *VI-CarRealTime*

Durante la simulazione vengono ancora utilizzati i disturbi sui segnali di sterzo δ_D e velocità v_x , per permettere di valutare la sensibilità del sistema ai rumori di misura. La vettura procede inizialmente per 1 secondo in modo rettilineo, dopodiché inizia la curva imposta. Il comportamento del veicolo durante il test è mostrato in Figura 4.10. In Figura 4.10a si nota come la velocità di imbardata di riferimento, pari a 41 °/s considerando l'angolo volante δ_D raggiunto pari a 20°, venga seguita correttamente dal veicolo, mentre l'errore rimane mediamente nullo. L'andamento di M_C è mostrato in Figura 4.10b, in cui il suo valore, inizialmente positivo, si assesta sui -90 Nm una volta terminato l'ingresso in curva. Considerando che la curva è stata imposta verso sinistra, un momento di imbardata correttivo negativo indica che il sistema di controllo sta cercando di correggere una tendenza sovrasterzante del veicolo, rallentandone la rotazione. Il modello creato tramite *VI-CarRealTime* possiede dunque comportamento di natura leggermente più sovrasterzante rispetto al modello monotraccia sviluppato precedentemente.



(a) Andamento dell'errore di inseguimento del riferimento



(b) Momento di imbardata correttivo generato

Figura 4.10: Risposta del veicolo durante curva a raggio costante ($R = 20$ m, $v_x = 50$ km/h)

In Figura 4.11 vengono invece riportate le coppie comandate ai motori elettrici durante lo svolgimento della manovra. Gli andamenti mostrano ancora una volta come il sistema di controllo intervenga sulle coppie comandate per indurre un comportamento più sovrasterzante in ingresso curva e più sottosterzante in percorrenza, questo per permettere al veicolo di seguire correttamente la velocità di imbardata di riferimento. Il risultato è che ogni motore applica un differente valore di coppia, generato attraverso la relazione 4.4.

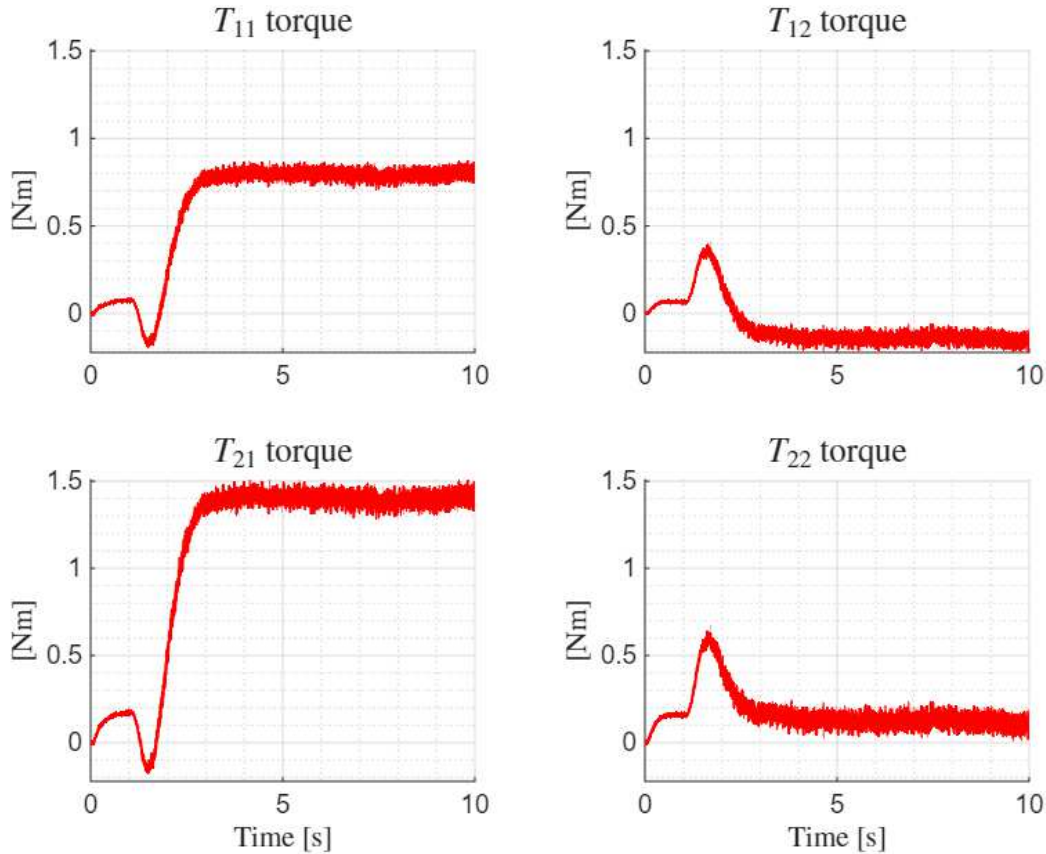


Figura 4.11: Coppie comandate ai motori elettrici ($R = 20$ m, $v_x = 50$ km/h)

4.3.3 Simulazioni online

Una volta verificato il corretto funzionamento del sistema di controllo tramite le simulazioni in modalità *offline*, il veicolo modellato tramite *VI-CarRealTime* è stato inserito all'interno dell'ambiente di simulazione *VI-DriveSim*. Quest'ultimo è lo strumento della suite *VI-Grade* dedicato alle simulazioni *Driver-in-the-loop*, in cui è possibile mettere un pilota reale alla guida del veicolo tramite. Il setup sperimentale utilizzato, realizzato all'interno del laboratorio NAVLAB del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DEI) dell'Università di Padova, è mostrato in Figura 4.12.



Figura 4.12: Setup sperimentale utilizzato presso il laboratorio NAVLAB

I piloti del team Race UP sono stati posti alla guida del veicolo su un tracciato (realizzato tramite gli strumenti messi a disposizione del software *VI-DriveSim*) con caratteristiche simili a quelle dei layout utilizzati durante le prove di Autocross ed Endurance negli eventi FSAE [Figura 4.13].

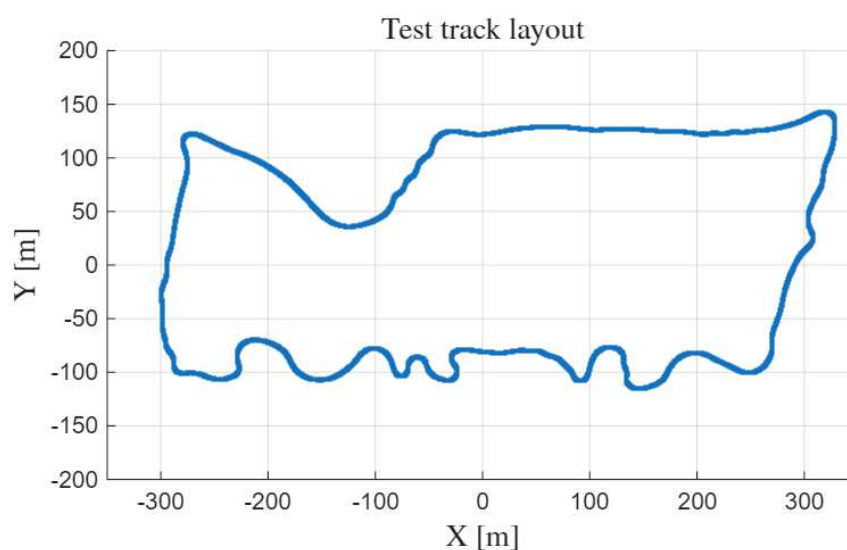


Figura 4.13: Layout del circuito di test ricreato all'interno di *VI-DriveSim*

Data la complessità nell'analizzare l'interazione tra pilota, veicolo e sistema di controllo, lo scopo principale delle simulazioni impostate è quello di ottenere delle indicazioni di carattere qualitativo sulle sensazioni che il sistema trasmette durante la guida. Sono state svolte diverse sessioni di test, alternando i piloti alla guida e variando i parametri di setup impostati per il sistema di controllo.

Raccogliendo i feedback dei piloti e analizzando i dati raccolti è stato possibile definire una taratura ottimale per il sistema, in grado di migliorare le performance e la guidabilità del veicolo.

$$K_U^* = 0.01 \text{ } ^\circ/\text{g} \quad \omega_B = 1 \text{ Hz} \quad m_\phi = 90^\circ \quad \xi_{MC} = 0.2 \quad (4.12)$$

Per quanto riguarda la taratura del regolatore PI interno all'anello di controllo, i valori di 1 Hz per la banda passante e di 90° per il margine di fase si sono dimostrati i più convincenti. In particolare, per valori inferiori di ω_B l'azione del sistema di controllo è risultata lenta e difficilmente prevedibile dal pilota, soprattutto durante i settori del circuito più tortuosi in cui si nota maggiormente il limite imposto alla dinamica del controllore. Per valori superiori a 1.5 Hz, al contrario, il sistema è eccessivamente reattivo, difficile da governare per i piloti e aumenta sensibilmente la coppia trasmessa al volante tramite il sistema di sterzo (la quale arriva a toccare i 15 Nm). La distribuzione del momento di imbardata è stata spostata verso l'assale posteriore rispetto al valore imposto inizialmente ($\xi_{MC} = 0.3$), questo permette di sfruttare ancora i motori sull'assale anteriore riducendo però l'effetto di disturbo percepito dal pilota sul volante, contribuendo a migliorare la guidabilità del veicolo. Attraverso i feedback dei piloti, il gradiente di sottosterzo target K_U^* è stato corretto ad un valore tale da rendere il comportamento del veicolo leggermente sottosterzante, questo contribuisce a rendere la risposta del sistema più facilmente prevedibile e a migliorare la stabilità complessiva del veicolo. Un'ultima modifica che è stata apportata al sistema è l'inserimento di un filtro passa-basso a valle della misura di angolo volante δ_D . Impostando una frequenza di taglio del filtro pari a $f_c = 25 \text{ Hz}$ ($f_c \gg \omega_B$) si è raggiunto un compromesso tra la riduzione delle armoniche a frequenza più elevata, derivanti dalle micro-correzioni del pilota e causa di una eccessiva oscillazione della velocità di imbardata di riferimento, e il ritardo introdotto dall'azione filtrante che si propaga sull'anello di controllo interno. In termini di miglioramento di performance, dopo l'implementazione del sistema di controllo il tempo medio sul giro misurato nelle prove *Driver-in-the-loop* è sceso mediamente di 3.98 secondi. Nonostante l'elevata variabilità della prova dovuta al comportamento del pilota alla guida, che variando di giro in giro riduce la ripetibilità del test, il risultato ottenuto rappresenta un'utile indicazione sul potenziale guadagno prestazionale. Un utile strumento per comprendere la variazione del comportamento indotta dal sistema di controllo implementato è il grafico *G-G* rappresentato in Figura 4.14.

Il grafico permette infatti di tracciare le accelerazioni longitudinali e laterali (misurate in g) raggiunte dal veicolo durante un giro di pista. In particolare nella figura vengono riportati i valori registrati nel quinto giro di due differenti sessioni di test *Driver-in-the-loop* composte da dieci giri, una con il sistema di controllo disabilitato mentre l'altra con il controllore attivo. Confrontando l'insieme di punti raggiunti dalla vettura con e senza sistema di controllo attivo è possibile apprezzare l'influenza che il controllore ha complessivamente sulla dinamica del veicolo. Confrontando i due tempi sul giro, grazie all'utilizzo del sistema progettato si ottiene un miglioramento di 3.61 secondi, in linea con il guadagno medio menzionato in precedenza.

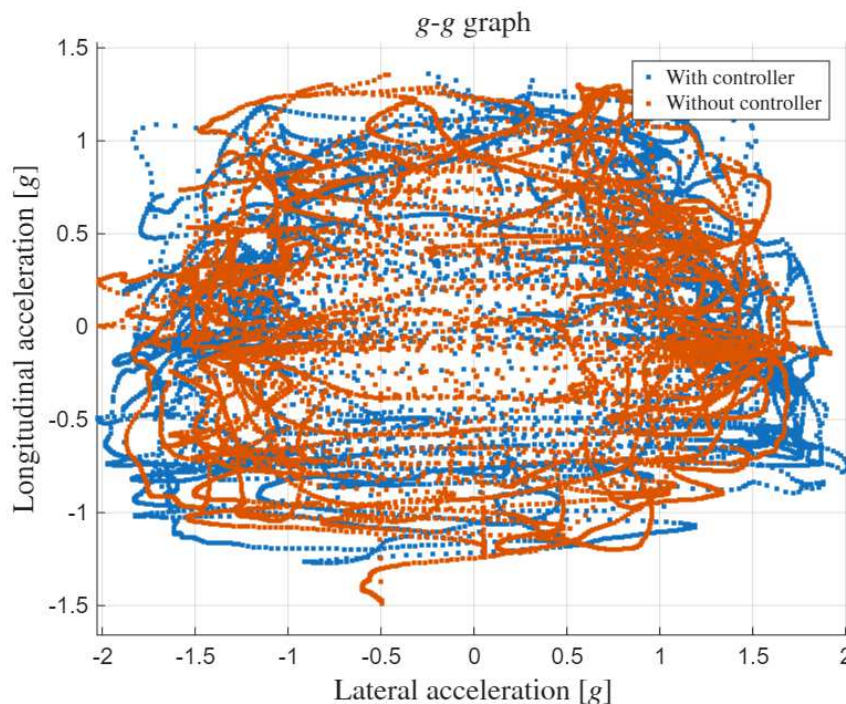


Figura 4.14: Grafico g-g per confronto prestazionale

Dalle misurazioni effettuate nei due casi si osserva come i valori massimi di accelerazione longitudinale e laterale raggiunti rimangano sostanzialmente invariati. Tuttavia, il potenziale guadagno prestazionale associato al sistema di controllo è rappresentato dalla maggiore estensione delle regioni di funzionamento raggiunte dalla vettura nel piano delle accelerazioni. In particolare, il controllore consente di raggiungere valori maggiori di accelerazione laterale nelle condizioni più critiche, caratterizzate dalla presenza simultanea di elevate accelerazioni o decelerazioni longitudinali. Tale risultato si traduce in un miglioramento del comportamento dinamico del veicolo nelle fasi di ingresso, percorrenza e uscita di curva, ovvero nelle condizioni in cui è al veicolo è richiesta contemporaneamente la sua massima capacità di aderenza longitudinale e laterale.

Nel contesto della Formula Student, un vantaggio prestazionale di questo tipo risulta fondamentale. Nelle prove dinamiche tipiche degli eventi FSAE, il risultato è influenzato soprattutto dalla capacità del veicolo di sfruttare al massimo i propri limiti di aderenza longitudinale e laterale. Pertanto, ampliare lo spettro delle condizioni di funzionamento che la vettura è in grado di raggiungere rappresenta il principale vantaggio del sistema di controllo progettato.

4.4 Implementazione sul prototipo SGe-08

Dopo aver concluso la campagna di simulazioni, definito una prima taratura del sistema, e verificato il corretto funzionamento del controllore, nel corso della stagione 2025/2026 del progetto Formula Student il sistema di controllo è stato implementato sulla vettura SGe-08 dal team Race UP. Per farlo, il modello del controllore utilizzato durante i test svolti in ambiente virtuale è stato tradotto in linguaggio C, utilizzando la funzione di auto-compilazione offerta dal software MATLAB-Simulink. Il codice così generato è stato successivamente implementato all'interno della centralina della vettura.

All'interno del codice vengono utilizzati tutti i parametri di progetto definiti precedentemente. Ovviamente i segnali relativi all'angolo volante δ_D , alla velocità del veicolo v_x e agli input di acceleratore e freno vengono misurati tramite l'utilizzo di opportuni sensori e/o tecniche di stima, in particolare:

- L'angolo volante viene misurato tramite l'utilizzo di un potenziometro rotativo installato in prossimità dell'accoppiamento del volante sul sistema di sterzo.
- Gli input di acceleratore/freno sono misurati tramite dei potenziometri lineari installati direttamente sui rispettivi pedali.
- La velocità del veicolo non viene misurata da un sensore dedicato ma viene ricostruita tramite un filtro di Kalman progettato dal team. Il filtro permette in particolare di determinare la velocità longitudinale della vettura a partire dalle misure di: velocità di rotazione delle ruote (tramite gli encoder dei quattro motori elettrici), accelerazioni longitudinali e laterali (tramite un'unità *IMU* dedicata) e angolo di sterzo delle ruote (ricostruito a partire dall'angolo volante).

Per validare i risultati ottenuti in ambiente simulativo ed effettuare delle prime prove del sistema in un contesto di utilizzo reale, il team ha svolto due differenti sessioni di test:

- **Simulazione Skidpad:** sessione in cui è stata effettuata una simulazione della prova dinamica Skidpad, rispettando i vincoli imposti dal regolamento FSAE. La prova è stata svolta sia con il sistema di controllo abilitato che disabilitato, in modo da ottenere una misura diretta del miglioramento delle prestazioni in percorrenza curva.
- **Simulazione Autocross:** sessione in cui è stata simulata una prova dinamica Autocross su un layout realizzato a partire dalle indicazioni del regolamento tecnico. Questo con lo scopo di ottenere un feedback più preciso riguardo alle sensazioni trasmesse alla guida dal sistema e alla sua effettiva utilizzabilità.

I risultati ottenuti nella simulazione Skidpad sono riportati in Tabella 4.1.

	Tempo medio	Tempo migliore	Distacco medio / minimo
Controllo disabilitato	4.997 s	4.826 s	0.861 / 0.690 s
Controllo abilitato	4.881 s	4.645 s	0.745 / 0.509 s
Miglioramento assoluto	-0.117 s	-0.181 s	-0.116 / -0.181 s
Miglioramento percentuale	-2.3 %	-3.8 %	-13.5 / -26.2 %

Tabella 4.1: Risultati delle simulazioni Skidpad

Il miglior risultato ottenuto con il sistema di controllo disattivato è pari a 4.826 s, a fronte di un valore medio, calcolato sui medesimi tentativi, di 4.997 s. Con l'abilitazione del sistema di controllo, la durata media della prova si riduce a 4.881 s, mentre il valore minimo rilevato è pari a 4.645 s. Il confronto tra le due configurazioni evidenzia quindi una riduzione del tempo medio di 0.117 s, corrispondente a un miglioramento del 2.3% rispetto alla configurazione senza controllo. Considerando invece i migliori risultati registrati, la differenza si attesta a 0.181 s, equivalente a un incremento percentuale delle prestazioni pari al 3.8%. Al fine di fornire un ulteriore indice di valutazione delle prestazioni, i tempi cronometrati sono stati confrontati con il record mondiale della disciplina, stabilito dal *TU Graz Racing Team* durante la competizione *FS East 2024*, pari a 4.136 s [5]. Rispetto a tale valore di riferimento, la configurazione priva di controllo presenta un distacco di 0.861 s sulla media delle prove, mentre con il sistema attivo tale differenza scende a 0.745 s. Analogamente, considerando le migliori prestazioni, il divario dal record passa da 0.690 s in assenza di controllo a 0.509 s con il sistema abilitato. L'introduzione del controllo permette pertanto di avvicinare le prestazioni al riferimento considerato, con una riduzione del distacco pari a 0.116 s per i valori medi e a 0.181 s per i migliori risultati. Si può pertanto concludere che il miglioramento percentuale ottenuto, in termini di riduzione distacco dal tempo selezionato come benchmark, corrisponde mediamente al 13.5% e può arrivare al 26.2%.

Considerando che, tipicamente, una riduzione del tempo di percorrenza di circa 0.150 s può corrispondere a un miglioramento di 2/3 posizioni nella classifica finale della prova di Skidpad, il risultato ottenuto assume una rilevanza ancora maggiore, evidenziando il contributo che un sistema di controllo della dinamica laterale può fornire alle prestazioni di una vettura FSAE.

Per quanto riguarda la simulazione Autocross, al termine delle sessioni di test sono stati raccolti i feedback dei piloti. Le sensazioni alla guida registrate sono per tutti i piloti positive, la taratura progettata garantisce una maggiore reattività del veicolo, soprattutto nelle fasi di percorrenza curva, mantenendo tuttavia limitato lo sforzo che il pilota deve aggiungere sul volante per governare l'azione di controllo. Dai piloti è stata inoltre segnalata un'ottima corrispondenza del feedback al volante tra la vettura reale e quella simulata in ambiente *VI-DriveSim*.

La principale problematica riscontrata risulta essere un'eccessiva tendenza sovrasterzante del veicolo nelle fasi di entrata ed uscita curva. Questo comportamento è compatibile con la attuale mancanza di un termine di feedforward nella catena di controllo, che rende il momento d'imbardata correttivo generato dipendente unicamente dal termine in retroazione. Per ridurre lo sforzo richiesto al regolatore PI, e rendere più preciso l'inseguimento del riferimento durante i cambi di direzione più repentini, va quindi progettato opportuno termine di feedforward, il cui guadagno sarà dipendente dalle caratteristiche del veicolo e dalle condizioni di lavoro in cui sta operando.

Tutte le indicazioni raccolte in questi primi test in pista svolti dal team, seppur da arricchire con altri risultati quantitativi e misurabili oggettivamente, testimoniano la correttezza della progettazione svolta e l'efficacia che il sistema di controllo realizzato ha sulla dinamica del veicolo. Inoltre, i risultati delle simulazioni Skidpad danno una misura dell'incremento prestazionale del veicolo garantito dal sistema progettato, che possono contribuire al miglioramento delle prestazioni conseguibili dal team nelle prove dinamiche.

Capitolo 5

Conclusioni

Il principale obiettivo del lavoro presentato è stato quello di progettare un sistema di controllo del momento di imbardata del veicolo in grado di migliorarne le prestazioni dinamiche, in particolare quelle ottenute in curva. La modellazione matematica del veicolo ha permesso di ottenere una rappresentazione adatta alla progettazione di un sistema di controllo basato sulla correzione del momento di imbardata sviluppato dal veicolo. A partire dai dati di progetto della vettura presa in analisi e dalla caratterizzazione del comportamento degli pneumatici, è stato possibile definire una rappresentazione in spazio di stato del sistema, attraverso la quale studiare la risposta della monoposto agli input di sterzo e controllo nel dominio delle frequenze.

Per correggere il momento di imbardata del veicolo, e quindi il suo assetto in curva, è stato progettato un anello di controllo che, a partire dall'input di sterzo comandato dal pilota, genera il momento di imbardata correttivo tramite un regolatore PI opportunamente tarato. La taratura del regolatore è stata svolta utilizzando una logica di *gain scheduling*, considerando quindi la dipendenza intrinseca che il comportamento del veicolo possiede rispetto alla propria velocità di avanzamento, con l'obiettivo di ottenere un'azione di controllo sufficientemente reattiva e precisa, senza tuttavia dimenticare di garantirne l'usabilità e l'intuitività per i piloti alla guida. Contemporaneamente sono stati definiti degli ulteriori parametri di setup per il sistema, utili a modificare il tipo di comportamento che il sistema cerca di indurre nel veicolo e definire come utilizzare i quattro motori elettrici per generare il momento di imbardata correttivo calcolato. Conclusa la fase di progettazione, il sistema è stato testato attraverso una serie di simulazioni svolte in differenti ambienti software e modalità di testing. Le simulazioni *offline*, condotte in catena aperta e in catena chiusa, hanno permesso di validare il corretto funzionamento del controllore, evidenziando come il comportamento del veicolo venga influenzato dall'azione di controllo e mostrando gli effetti che possono manifestarsi a causa dell'incertezza parametrica o dei possibili disturbi che possono affliggere le grandezze fisiche misurate.

Le simulazioni *online*, svolte all'interno dell'ambiente software *VI-Grade*, hanno invece permesso di verificare come l'azione del sistema di controllo viene percepita dai piloti durante la guida, con lo scopo di valutare l'utilizzabilità dell'algoritmo di controllo nelle prove dinamiche tipiche degli eventi FSAE, e di verificare lo sforzo richiesto al powertrain elettrico.

I risultati ottenuti dalle simulazioni *Driver-in-the-loop* sono stati analizzati da un punto di vista qualitativo, data la difficoltà nel definire dei metri di giudizio oggettivi che non risentano dell'alta varianza e della scarsa ripetibilità introdotta nelle prove dal comportamento del pilota. Nonostante ciò, i feedback ricevuti dai piloti coinvolti nella campagna di test, uniti all'interpretazione delle misurazioni effettuate, hanno permesso di ottenere utili indicazioni sui vantaggi garantiti dal sistema di controllo progettato e in generale sul miglioramento delle performance dinamiche del veicolo. Infine, il sistema è stato testato attraverso delle prove condotte dal team Race UP in pista, ottenendo così utili informazioni per validare la progettazione del sistema di controllo e il miglioramento prestazionale del veicolo.

Con lo scopo di affinare e migliorare ulteriormente il sistema di controllo proposto, possono essere individuate diverse direzioni di sviluppo, tra cui:

- **Modellazione delle variazioni di carico verticale agenti sugli pneumatici:** durante la fase di modellazione del veicolo i carichi verticali agenti sugli pneumatici sono stati ritenuti costanti, questo ha permesso di facilitare la trattazione dal momento che si tratta del primo tentativo di progettazione di un sistema di controllo di questo tipo per il team Race UP. Tuttavia, per un prototipo FSAE, i trasferimenti di carico e i carichi aerodinamici sviluppati contribuiscono pesantemente a definire il comportamento dinamico del veicolo assieme alle forze sviluppate dagli pneumatici. Per questo motivo, il lavoro può essere esteso a un'analisi che coinvolga la modellazione di tali fenomeni, in modo da sviluppare una taratura del controllore in grado di adattarsi anche alle variazioni dei carichi verticali agenti sulla vettura.
- **Progettazione di un contributo di feedforward nell'anello di controllo:** nel lavoro presentato, l'azione di controllo viene comandata dall'uscita del regolatore PI, prodotta all'interno dell'anello di controllo. Il sistema lavora unicamente in feedback, a partire dall'errore calcolato tra la velocità di imbardata di riferimento e quella misurata. Progettando un termine di feedforward, basato sulle caratteristiche del veicolo e dipendente dalle condizioni di lavoro in cui opera, è possibile migliorare le prestazioni dinamiche del sistema e ridurre lo sforzo di controllo affidato al regolatore PI, a beneficio della guidabilità e della facilità di utilizzo per i piloti.

- **Miglioramento dell'algoritmo di distribuzione delle coppie:** in questa prima iterazione, il momento di imbardata correttivo comandato dal controllo viene generato attraverso una distribuzione statica delle coppie ai motori della vettura, secondo una variabile di setup. Introducendo un algoritmo di ottimizzazione all'interno della distribuzione dei contributi di coppia comandati è possibile ottenere una minimizzazione del consumo energetico del controllo, una minimizzazione dello sforzo richiesto su ogni attuatore, oppure una massimizzazione dello sfruttamento dei limiti di aderenza degli pneumatici.

Il lavoro descritto si pone quindi come base per ulteriori sviluppi e affinamenti della tecnica di controllo presentata, in grado di contribuire ai risultati ottenuti dal team Race UP nelle competizioni Formula SAE, e dall'Università di Padova nel campo del controllo applicato alla dinamica del veicolo.

Bibliografia

- [1] Doug Milliken and Milliken Research Associates, Inc. . Tire Test Consortium. <https://www.millikenresearch.com/fsaettc.html>.
- [2] AMKmotion. Datasheet AMK DD5-14-10-POW. https://www.amk-motion.com/amk-dokucd/dokucd/en/content/resources/pdf-dateien/fse/motor_data_sheet_a2370dd_dd5.pdf.
- [3] Michele Asperti, Michele Vignati, and Edoardo Sabbioni. On torque vectoring control: Review and comparison of state-of-the-art approaches. *Machines*, 12(3), 2024.
- [4] Hans B.Pacejka. *Tire and Vehicle Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2012.
- [5] Formula Student EAST. Formula Student EAST 2024 - Skidpad Manual Day 3 results. <https://fseast.eu/wp-content/uploads/2024/08/Skidpad-Manual-1.2.pdf>.
- [6] Formula Student Germany. FS-Rules 2026. https://www.formulastudent.de/fileadmin/user_upload/all/2026/rules/FS-Rules_2026_v1.1.pdf.
- [7] Bc. Petr Gadas. Design of a torque vectoring control system for a formula student vehicle. Master's thesis, Brno University of technology, 2024.
- [8] Massimo Guiggiani. *Dinamica del veicolo*. Città Studi edizioni, 2007.
- [9] M J Hancock, R A Williams, T J Gordon, and M C Best. A comparison of braking and differential control of road vehicle yaw-sideslip dynamics. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 219(3):309–327, 2005.
- [10] Basilio Lenzo. *Torque Vectoring Control for Enhancing Vehicle Safety and Energy Efficiency*, pages 193–233. Springer International Publishing, Cham, 2022.
- [11] Basilio Lenzo, Mattia Zanchetta, Aldo Sorniotti, Patrick Gruber, and Wouter De Nijs. Yaw rate and sideslip angle control through single input single output direct yaw moment control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 29(1):124–139, 2021.

[12] VI-Grade. VI-Grade Driving Simulator. <https://www.vi-grade.com/>.

[13] Wikipedia. Formula SAE. https://it.wikipedia.org/wiki/Formula_SAE.