UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

"TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Varianti della traduzione della doppia negazione di Gödel-Gentzen

Relatrice:

Prof.ssa Maria Emilia Maietti

Laureando:

Piantavigna Ester

Matricola:

1162696

---

23 Febbraio 2023

Anno Accademico: 2022/2023

Indice

Abstract

In questa tesi analizzerò il ruolo della regola dell'ex-falso-quodlibet nella traduzione della doppia negazione di Gödel-Gentzen. Mostreremo che esistono varianti di tale traduzione dovute a Friedman in cui il falso è interpretato come una qualsiasi formula proposizionale B. In particolare dimostrerò che la traduzione della doppia implicazione di Friedman traduce la logica predicativa con uguaglianza nella logica minimale predicativa con uguaglianza. Dunque non ha bisogno dell'ex-falso-quodlibet per essere valida.

In conclusione osserverò che la traduzione della doppia negazione e' l'unica tra le varianti di Friedman ad essere fedele ovvero a tradurre la logica classica in quella minimale traducendo le formule classiche in formule ad esse equivalenti dal punto di vista classico.

Capitolo 1

1. Cenni storici sui sistemi deduttivi in logica

Per millenni si è creduto che logica e verità coincidessero. Il ventesimo secolo però, in tanti ambiti come per l'arte e per la scienza, fu un periodo di rivoluzione.
Nel 1908 Brouwer con l'articolo *"De onbetrouwbaarheid der logiche principes, L'inaffidabilità dei principi logici"* porta alla luce la molteplicità delle logiche, sottolineando le criticità delle dimostrazioni in logica classica quando si parla di domini infiniti.

La logica proposta da Brouwer, chiamata intuizionista, non punta a dire che principi logici come il terzo escluso siano sempre falsi ma suppone non siano verità assolute. A differenza di Hilbert per dimostrare la verità non basterà più la tabella di verità ma sarà necessario, almeno idealmente, un individuo specifico del dominio per cui la tesi sia vera.
Nonostante le criticità della logica classica, per l'apparente semplicità questa viene maggiormente usata in matematica, ma recentemente con l'utilizzo dei calcolatori si è ricorsi ad un approccio via via più costruttivo.

Una logica è un sistema costituito da proposizioni considerate vere, dette assiomi e regole per ottenere la verità di proposizioni da altre proposizioni.
Ciascuno considera vero ciò che segue le realtà, per cui il concetto di verità e conseguentemente di logica dipendono da un'interpretazione.
Per la logica classica si considera la verità come postulato e approssimativamente è vero ciò che è vero per almeno un soggetto, mentre per la logica intuizionista la verità è la meta da raggiungere e possiamo immaginare la verità come ciò per cui tutti i soggetti sanno esibire una prova.
Per mettere in relazione le logiche tra loro faremo uso della traduzione $\circ$ che ci permetterà di studiare il comportamento formale di A grazie alla sua interpretazione A° nella nostra logica. Considereremo A° vera quando A sarà vera per l'altra.

Sono state proposte diverse traduzioni dalla logica classica alla logica intuizionista negli anni, la più utilizzata oggi è quella di Gödel e Gentzen con la quale si riuscirà a dire che "A è dimostrabile per la logica classica se e solo se A° è dimostrabile intuizionisticamente".

La logica classica potrebbe essere definita a partire da un sottoinsieme dei connettivi di congiunzione&, di implicazione $\rightarrow$, il quantificatore universale $\forall$ e il falso $\perp$, disgiunzione $\vee$ e il quantificatore di esistenza $\exists$, ovvero $\&, \perp, \forall, \rightarrow$ ma accetta i termini che sono essenziali per poter essere interpretata dalla logica intuizionista.
In logica classica per mostrare che A è vera basterà che $\neg A$ sia falsa, $\neg A$ sarà vera quando A sarà falsa e $\neg\neg A$ sarà uguale ad A utilizzando semplicemente le tabelle di verità; questo per la logica intuizionista è inaccettabile. Per la logica intuizionista è necessario esibire una prova per determinare la verità e per questo necessita di alcune accortezze. Mentre in logica classica $A \vee C$ è vera quando almeno una tra A e C non è falsa, in logica intuizionista si dovrà sapere quale tra le due è vera. Ma sapendo che classicamente $A \vee C \equiv \neg(\neg A \& \neg C)$, perché se una tra A e C è vera non può verificarsi che sia A che C siano false, la traduzione intuizionista di $(A \vee C)^\circ$ sarà $\neg(\neg A \& \neg C)$ in quanto per quest'ultima è possibile trovare una prova. Per lo stesso motivo la logica intuizionista usa l'uguaglianza classica $\exists x A \equiv \neg(\forall x(\neg A))$ per trovare una prova di $(\exists x A)^\circ$.

Capitolo 2

2. Sistemi formali di deduzione naturale per la logica classica, intuizionista e minimale

Prima di addentrarci nelle dimostrazioni vere e proprie per studiare la traduzione tra logiche, formalizziamo alcune nozioni viste nel capitolo precedente e definiamo alcuni concetti essenziali che verranno utilizzati in seguito.

Deduzione naturale della logica classica

Dopo aver richiamato il linguaggio predicativo presenteremo i calcoli formali della deduzione naturale della logica classica che riflettono lo stile naturale di dedurre teoremi.

La formulazione moderna della deduzione naturale è ad opera di Gerhard Gentzen che nel 1935 ne ha introdotto anche il nome odierno. L'idea di trattare la logica in modo più naturale piuttosto che in modo assiomatico come per Hilbert, è di Łukasiewicz nel 1926 in Polonia.

Definizione 1. ***Linguaggio predicativo con uguaglianza***
Un linguaggio predicativo con uguaglianza $\mathcal{L}$ è determinato dai seguenti simboli di base:

1. *variabili **Var** per termini : una quantità numerabili di variabili **Var** che supponiamo contenga x, w, y, z, e le loro indicizzazioni su $n \in N$ (ad esempio $x_1, x_2...x_n$ per $n \in N$, ma anche $w_1, w_2...w_n$ per $\boldsymbol{n} \in N$ e $y_1, y_2...y_n$ per $n \in N$ e $z_1, z_2...z_n$ per $n \in N$).*

2. *costanti $\boldsymbol{Cost_{\mathcal{L}}}$ per termini: una quantità, anche vuota, grande a piacere di costanti c_j per j $\in J$ con J collezione di "indici" (che indicheremo con le lettere minuscole dell'alfabeto inglese eccetto x, w, y, z);*

3. *funzioni $\boldsymbol{Fun_{\mathcal{L}}}$ **n-arie** tra termini: una quantita' grande a piacere, anche vuota, di funzioni fn($x_1, ...x_{n_h}$) dipendenti da n-variabili con $nh \geq 1$ per $h \in H$ con H collezione di "indici";*

4. *predicati atomici $\boldsymbol{Pred_{\mathcal{L}}}$: un insieme (anche vuoto) di PREDICATI atomici dipendenti da un numero FINITO qualsiasi di variabili o non dipendenti da nessuna variabile che indicheremo con le lettere maiuscole dell'alfabeto italiano seguite dal numero di variabili da cui dipendono*

nella forma: $A(x_1, ..., x_n)$, . . . , B, $C(x_1, ..., x_m)$, . . . M(x), . . . , L, E, . . . e ci riferiremo a questi predicati in modo generico con la scrittura

$(P_k(x_1, \ldots, x_{n_k})_{k \in K}$

ovvero una famiglia di predicati con un numero finito di variabili indiciate su un insieme K grande a piacere oppure vuoto.

In particolare, chiamiamo proposizioni atomiche i predicati Pk che sono 0-ari, ovvero i predicati che non dipendono da alcuna variabile (nella lista sopra riportata gli unici predicati atomici sono i simboli L ed E che non dipendono da alcuna variabile);

5. *il predicato (atomico) di uguaglianza: $x = y$ (che sarà utilizzato per formare predicati del tipo $ter_1 = ter_2$ con ter_1 e ter_2 termini qualsiasi). Oltre a questi simboli di base L contiene anche i simboli dei connettivi di disgiunzione , di congiunzione &, di implicazione $\rightarrow$, di negazione $\neg$, simboli di costante falso $\perp$, di costante vero $>$ e poi i simboli di quantificazione universale $\forall$, di quantificazione esistenziale $\exists$ e poi i simboli di parentesi aperta (e chiusa) che servono per poter costruire correttamente predicati composti.*

Nel calcolo dei predicati per verificare che da determinate ipotesi Γ segue logicamente una certa tesi fr, ovvero $\Gamma \vdash fr$ bisognerà far riferimento a tutte le possibili strutture in fr.

Definizione 2. *Diciamo che il sequente $\Gamma \vdash fr$ è derivabile per la deduzione naturale classica se esiste una derivazione in $DNC_=$, ovvero se esiste un albero finito con radice unica, in cui i nodi sono sequenti. I sequenti alle foglie, devono essere assiomi. Ogni sequente che non è una foglia deve essere ottenuto dai sequenti immediatamente sopra di esso applicando una delle regole di inferenza del calcolo, inserite in seguito.*

La nozione di derivabilità di una formula, intesa come la derivabilità del sequente associato all'asserzione della formula come vera ovvero del sequente

$$\vdash fr$$

fornisce un concetto di verità formale di una formula in un calcolo dei sequenti, e quindi nella logica che questo calcolo formalizza.

L'idea è che le regole conservano la verità delle affermazioni rappresentate dai sequenti dall'alto verso il basso ovvero supposto che le affermazioni del sequente premessa di una regola sia vero allora ne segue che pure il sequente conclusione della regola considerata risulta vero.

$$\frac{ax.id}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash A} \qquad \frac{ax - tt}{\Gamma \vdash tt}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash C}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash C}\text{-sc}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, C \vdash A}\text{-in}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash C \quad C, \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}\text{-comp}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A\&C}{\Gamma \vdash A}\ \&\text{-S}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A\&C}{\Gamma \vdash C}\ \&\text{-S}_2 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash A\&C}\ \&\text{-D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee C \quad \Gamma, A \vdash D \quad \Gamma, C \vdash D}{\Gamma \vdash D}\ \vee - S \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee C}\ \vee - D_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash A \vee C}\ \vee - D_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg - S \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\neg - D$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \to C \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash C}\to -S \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash A \to C}\to -D$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A(x)}{\Gamma \vdash A[x/t]}\forall - S \qquad \frac{\Gamma \vdash A[x/w]}{\Gamma \vdash \forall x A(x)}\forall - D(w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x)))$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists y A(y) \quad \Gamma, A[y/w] \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \exists\text{ -S(w} \notin VL(\Gamma, \exists y A(y), C)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A[y/t]}{\Gamma \vdash \exists y A(y)}\ \exists - D$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = s \quad \Gamma \vdash A[x/t]}{\Gamma \vdash A[x/s]}\ =\text{-S} \qquad \frac{= -ax}{\Gamma \vdash t = t}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\text{ex-f-q} \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \text{-ra}$$

Lo scopo della deduzione naturale è fornire un approccio alternativo alle trattazioni assiomatiche della logica classica; l'equivalenza tra $\neg\neg A$ e A ad esempio, nella deduzione naturale classica dovrà essere dimostrata. Ci aiuteremo con la regola -ra (reductio ad absurdum).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax.id}{(A \to \bot) \to \bot, A \to \bot \vdash A \to \bot} \quad \dfrac{ax.id}{(A \to \bot) \to \bot, A \to \bot \vdash (A \to \bot) \to \bot}}{(A \to \bot) \to \bot, A \to \bot \vdash \bot} \to -S}{(A \to \bot) \to \bot \vdash A} \text{-ra}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax.id}{A, A \to \bot \vdash A \to \bot} \quad \dfrac{ax.id}{A, A \to \bot \vdash A}}{A, A \to \bot \vdash \bot} \to -S}{A \vdash (A \to \bot) \to \bot} \to -D$$

Deduzione naturale della logica intuizionista

Per quanto detto nei cenni storici, nel ventesimo secolo si mette in dubbio l'unicità della logica classica dando vita quindi alla logica intuizionista.
La particolarità di quest'ultima è che non si darà più per scontato il terzo escluso A$\vee\neg$A perché si differenzierà la verità di A dimostrata esibendone una prova dalla verità dimostrata quando la negazione $\neg A$ è falsa. Sarà conseguentemente eliminata la regola di $reductio - ad - absurdum$ grazie alla quale era possibile dimostrare il terzo escluso in logica classica.

$$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \text{ -ra}$$

Questo è importante perché perché se voglio analizzare la frase "il numero 7 è una cifra decimale di $\sqrt{2}$" le cose si complicano. Infatti, posso cominciare a cercare le cifre decimali di $\sqrt{2}$: se ad un certo punto trovo un 7 allora posso dire che la frase è vera; ma non potrò mai affermare con certezza che la frase è falsa, perché le cifre di $\sqrt{2}$ sono infinite. Quindi, in generale, non ho un metodo per capire se una frase è vera o falsa.

A differenza della logica classica, dove era sufficiente avere solo i connettivi di congiunzione&, di implicazione $\to$, il quantificatore universale $\forall$ e il falso $\perp$ perché i restanti potevano essere definiti in funzione di questi, per definire la logica intuizionista si necessiterà anche del quantificatore di esistenza $\exists$ e connettivo di disgiunzione $\vee$, i quali avranno un significato vero e proprio.

È facile dedurre che tutto ciò che è dimostrabile in logica intuizionistica vale anche classicamente, ma non è sempre vero il viceversa, infatti possiamo dire che logica classica è meno esigente in quanto ha una regola in più da poter usare nelle dimostrazioni.

Deduzione naturale della logica minimale

Nasce la curiosità di conoscere fin dove una logica può spingersi, di quante regole ha effettivamente bisogno.
Johansson nel 1937 introduce la logica minimale, un frammento della logica intuizionista, ottenuta togliendo da questa la regola di $ex - falso - quodlibet$.

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\text{ex-f-q}$$

L'$ex - falso - quodlibet$ è una regola che permette di derivare qualsiasi cosa dal falso; nella logica minimale non si potrà dedurre nulla da una contraddizione.

È facile osservare che nozioni valide per la logica minimale saranno valide per quella intuizionista. La sintassi di questa logica consiste nelle proposizioni atomiche e nei connettivi $\rightarrow$ e $\neg$, i suoi teoremi sono dimostrati con la regola di implicazione della deduzione naturale.

Le dimostrazioni in questa logica sono deterministiche e questo la rende ottimale dal punto di vista computazionale.

Capitolo 3

3. Varianti di Friedman della traduzione della doppia negazione

Definiamo in questo capitolo la variante della traduzione di Gödel e Gentzen per la logica minimale, l'oggetto di studio di questa tesi. Dimostriamo alcune sue proprietà che ci serviranno in seguito per dimostrarne la validità e per studiarne l'unicità.

Definizione 3. ***Traduzione con doppia implicazione:***
Dato un linguaggio predicativo $\mathcal{L}$, definiamo "traduzione con doppia negazione" la funzione sottostante:

$$(-)^{\diamond} : Frm(\mathcal{L}) \longmapsto Frm(\mathcal{L})$$

con le seguenti caratteristiche:

1. $\perp^{\diamond} \equiv B$ *con* B *una generica proposizione;*
2. $tt^{\diamond} \equiv tt$;
3. $P^{\diamond} \equiv (P \to B) \to B$ *con* P *un qualsiasi predicato atomico uguaglianza compresa;*
4. *Prese le formule generiche* fr *e* $fr_1, ...fr_n$ $\forall n \in N$*:*
   (a) $(fr_1 \ \& \ fr_2)^{\diamond} \equiv \ fr_1^{\diamond} \ \& \ fr_2^{\diamond}$
   (b) $(fr_1 \vee fr_2)^{\diamond} \equiv \ ((fr_1^{\diamond} \to B) \ \& \ (fr_2^{\diamond} \to B)) \to B$
   (c) $(fr_1 \to fr_2)^{\diamond} \equiv \ fr_1^{\diamond} \to fr_2^{\diamond}$
   (d) $(\neg fr)^{\diamond} \equiv \ fr^{\diamond} \to B$
   (e) $(\forall x \ fr)^{\diamond} \equiv \ \forall x \ fr^{\diamond}$
   (f) $(\exists x \ fr)^{\diamond} \equiv \ (\forall x \ (fr^{\diamond} \to B)) \to B$
   (g) $(fr_1, ...fr_n)^{\diamond} \equiv fr_1^{\diamond}, ...fr_n^{\diamond}$

Definizione 4. ***Sostituzione:***

La funzione $fr[x/t_{er}]$ prende il nome di Sostituzione e associa ad ogni formula fr(x) una formula dove ogni x è stata sostituita con il termine t_{er}.

Lemma 1. ***Sostituzione:***

Presa una formula qualsiasi fr in un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ possiamo dire che la sostituzione di un qualsiasi termine t_{er} commuta con la traduzione con doppia implicazione, ovvero:

$$(fr[x/t_{er}])^{\diamond} \equiv fr^{\diamond}[x/t_{er}]$$

Dim. La tesi segue per induzione sulla composizione di fr, grazie alla definizione induttiva di sostituzione e dal fatto che la traduzione $\diamond$ non sostituisce termini nelle formule atomiche .

Lemma 2. ***Traduzione fedele:***

Presa una formula generica fr di un linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ si ha che in logica minimale $DNM_{=}$ si deriva

$$\vdash fr^{\diamond} \leftrightarrow (fr^{\diamond} \to B) \to B$$

Dim. Per dimostrare l'implicazione $\vdash fr^{\diamond} \to ((fr^{\diamond} \to B) \to B)$ per ogni formula vediamo subito che

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax.id}{fr^{\diamond}, fr^{\diamond} \to B \vdash fr^{\diamond} \to B} \qquad \dfrac{ax.id}{fr^{\diamond}, fr^{\diamond} \to B \vdash fr^{\diamond}}}{fr^{\diamond}, fr^{\diamond} \to B \vdash B} \to S}{fr^{\diamond} \vdash (fr^{\diamond} \to B) \to B} \to D}{\vdash fr^{\diamond} \to ((fr^{\diamond} \to B) \to B)} \to D$$

Per l'altra implicazione procediamo per induzione sulla composizione di fr.

1. Se $fr \equiv tt$ sapendo per definizione che $tt^{\diamond} \equiv tt$ dimostro

$$\dfrac{\dfrac{ax-tt}{(tt \to B) \to B \vdash tt}}{\vdash ((tt \to B) \to B) \to tt} \to -D$$

2. Se $fr \equiv \bot$ sapendo per definizione che $\bot^\diamond \equiv B$ dimostro

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$(B \to B) \to B, B \vdash B$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$(B \to B) \to B \vdash B \to B$}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$(B \to B) \to B \vdash (B \to B) \to B$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$(B \to B) \to B \vdash B$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$\vdash ((B \to B) \to B) \to B$}
\end{prooftree}
$$

3. Se fr è una formula atomica P, sapendo per definizione che $P^\diamond \equiv (P \to B) \to B$ e definendo per comodità $\Delta \equiv (((P \to B) \to B) \to B) \to B, P \to B$ e $\Delta_2 \equiv \Delta, (P \to B) \to B$ dimostro

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta_2 \vdash P \to B$}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta_2 \vdash (P \to B) \to B$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$\Delta, (P \to B) \to B \vdash B$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash ((P \to B) \to B) \to B$}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash (((P \to B) \to B) \to B) \to B$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$(((P \to B) \to B) \to B) \to B, P \to B \vdash B$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$(((P \to B) \to B) \to B) \to B \vdash (P \to B) \to B$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$\vdash ((((P \to B) \to B) \to B) \to B) \to ((P \to B) \to B)$}
\end{prooftree}
$$

4. Se $fr \equiv \neg\alpha$ sapendo che $(\neg\alpha)^\diamond \equiv \alpha^\diamond \to B$ e definendo $\Delta \equiv ((\alpha^\diamond \to B) \to B) \to B, \alpha^\diamond$ dimostro

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta, \alpha^\diamond \to B \vdash \alpha^\diamond$}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta, \alpha^\diamond \to B \vdash \alpha^\diamond \to B$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$\Delta, \alpha^\diamond \to B \vdash B$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash (\alpha^\diamond \to B) \to B$}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash ((\alpha^\diamond \to B) \to B) \to B$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$((\alpha^\diamond \to B) \to B) \to B, \alpha^\diamond \vdash B$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$((\alpha^\diamond \to B) \to B) \to B \vdash \alpha^\diamond \to B$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$\vdash (((\alpha^\diamond \to B) \to B) \to B) \to (\alpha^\diamond \to B)$}
\end{prooftree}
$$

5. Se $fr \equiv \alpha \;\&\; \gamma$ ricordando per definizione che $(\alpha\&\gamma)^\diamond \equiv \alpha^\diamond\&\gamma^\diamond$, grazie all'ipotesi induttiva $\vdash \alpha^\diamond \longleftrightarrow ((\alpha^\diamond \to B) \to B)$ e definendo $\Delta \equiv ((\alpha^\diamond\&\gamma^\diamond) \to B) \to B, \alpha^\diamond \to B$ otteniamo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathit{ax.id}}{\Delta \vdash ((\alpha^\diamond\&\gamma^\diamond) \to B) \to B} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathit{ax.id}}{\Delta, \alpha^\diamond\&\gamma^\diamond \vdash \alpha^\diamond\&\gamma^\diamond}}{\Delta, \alpha^\diamond\&\gamma^\diamond \vdash \alpha^\diamond}\;\&\text{ -S} \quad \dfrac{\mathit{ax.id}}{\Delta, \alpha^\diamond\&\gamma^\diamond \vdash \alpha^\diamond \to B}}{\Delta, \alpha^\diamond\&\gamma^\diamond \vdash B} \to -S}{\Delta \vdash (\alpha^\diamond\&\gamma^\diamond) \to B} \to -D}{((\alpha^\diamond\&\gamma^\diamond) \to B) \to B, \alpha^\diamond \to B \vdash B} \to -S}{((\alpha^\diamond\&\gamma^\diamond) \to B) \to B \vdash (\alpha^\diamond \to B) \to B} \to -D}{((\alpha^\diamond\&\gamma^\diamond) \to B) \to B \vdash \alpha^\diamond\&\gamma^\diamond}\;\&\text{ -}D_1}{\vdash (((\alpha^\diamond\&\gamma^\diamond) \to B) \to B) \to (\alpha^\diamond\&\gamma^\diamond)} \to -D$$

6. Se $fr \equiv \alpha \to \gamma$ ricordando che $(\alpha \to \gamma)^\diamond \equiv \alpha^\diamond \to \gamma^\diamond$, servendoci quindi dell'ipotesi induttiva $\vdash \gamma^\diamond \longleftrightarrow ((\gamma^\diamond \to B) \to B)$ e definendo $\Delta \equiv ((\alpha^\diamond \to \gamma^\diamond) \to B) \to B, \alpha^\diamond, \gamma^\diamond \to B$ e $\Delta_2 \equiv \Delta, \alpha^\diamond \to \gamma^\diamond$ otteniamo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathit{ax.id}}{\Delta_2 \vdash \alpha^\diamond \to \gamma^\diamond} \quad \dfrac{\mathit{ax.id}}{\Delta_2 \vdash \alpha^\diamond}}{\Delta_2 \vdash \gamma^\diamond} \to -S \quad \dfrac{\mathit{ax.id}}{\Delta_2 \vdash \gamma^\diamond \to B}}{\Delta, \alpha^\diamond \to \gamma^\diamond \vdash B} \to -S}{\Delta \vdash (\alpha^\diamond \to \gamma^\diamond) \to B} \to -D \quad \dfrac{\mathit{ax.id}}{\Delta \vdash ((\alpha^\diamond \to \gamma^\diamond) \to B) \to B}}{((\alpha^\diamond \to \gamma^\diamond) \to B) \to B, \alpha^\diamond, \gamma^\diamond \to B \vdash B} \to -S}{((\alpha^\diamond \to \gamma^\diamond) \to B) \to B, \alpha^\diamond \vdash (\gamma^\diamond \to B) \to B} \to -D}{((\alpha^\diamond \to \gamma^\diamond) \to B) \to B \vdash \alpha^\diamond \to \gamma^\diamond} \to -D}{\vdash (((\alpha^\diamond \to \gamma^\diamond) \to B) \to B) \to (\alpha^\diamond \to \gamma^\diamond)} \to -D$$

7. Se $fr \equiv \alpha \vee \gamma$ ricordando $(\alpha \vee \gamma)^\diamond \equiv ((\alpha^\diamond \to B)\&(\gamma^\diamond \to B)) \to B$ e denominando per comodità $\Delta \equiv ((\alpha \vee \gamma)^\diamond \to B) \to B, (\alpha^\diamond \to B)\&(\gamma^\diamond \to B)$ e $\Delta_2 \equiv \Delta, ((\alpha^\diamond \to B)\&(\gamma^\diamond \to B)) \to B$ otteniamo

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax.id}{\Delta_2 \vdash ((\alpha^\diamond \to B)\&(\gamma^\diamond \to B)) \to B} \qquad \dfrac{ax.id}{\Delta_2 \vdash (\alpha^\diamond \to B)\&(\gamma^\diamond \to B)}}{\Delta, ((\alpha^\diamond \to B)\&(\gamma^\diamond \to B)) \to B \vdash B} \to -S}{\Delta \vdash (\alpha \vee \gamma)^\diamond \to B} \to -D \qquad \dfrac{ax.id}{\Delta \vdash ((\alpha \vee \gamma)^\diamond \to B) \to B}}{\dfrac{\dfrac{((\alpha \vee \gamma)^\diamond \to B) \to B, (\alpha^\diamond \to B)\&(\gamma^\diamond \to B) \vdash B}{((\alpha \vee \gamma)^\diamond \to B) \to B \vdash ((\alpha^\diamond \to B)\&(\gamma^\diamond \to B)) \to B} \to -D}{\vdash (((\alpha \vee \gamma)^\diamond \to B) \to B) \to (((\alpha^\diamond \to B)\&(\gamma^\diamond \to B)) \to B)} \to -D} \to -S
$$

8. Se $fr \equiv \forall x\ \alpha$ ricordando che $(\forall x\ \alpha)^\diamond \equiv \forall x\ \alpha^\diamond$, utilizzando il lemma 1, l'ipotesi induttiva $\vdash \alpha^\diamond \longleftrightarrow ((\alpha^\diamond \to B) \to B)$, definendo $\Delta \equiv ((\forall x((\alpha^\diamond \to B) \to B)) \to B) \to B, \alpha^\diamond[x/w] \to B$ e $\Delta_2 \equiv \Delta, \forall x((\alpha^\diamond \to B) \to B)$ otteniamo

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax.id}{\Delta_2 \vdash \forall x((\alpha^\diamond \to B) \to B)}}{\Delta_2 \vdash (\alpha^\diamond[x/w] \to B) \to B} \forall - S \qquad \dfrac{ax.id}{\Delta_2 \vdash \alpha^\diamond[x/w] \to B}}{\Delta, \forall x((\alpha^\diamond \to B) \to B) \vdash B} \to -S}{\Delta \vdash (\forall x((\alpha^\diamond \to B) \to B)) \to B} \to -D \qquad \dfrac{ax.id}{\Delta \vdash ((\forall x((\alpha^\diamond \to B) \to B)) \to B) \to B}}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{((\forall x((\alpha^\diamond \to B) \to B)) \to B) \to B, \alpha^\diamond[x/w] \to B \vdash B}{((\forall x((\alpha^\diamond \to B) \to B)) \to B) \to B \vdash (\alpha^\diamond[x/w] \to B) \to B} \to -D}{((\forall x((\alpha^\diamond \to B) \to B)) \to B) \to B \vdash \forall x((\alpha^\diamond \to B) \to B)} \forall - D(w \notin VL)}{\vdash (((\forall x((\alpha^\diamond \to B) \to B)) \to B) \to B) \to \forall x((\alpha^\diamond \to B) \to B)} \to -D} \to -S
$$

9. Se $fr \equiv \exists x\ \alpha$ ricordando che per definizione $(\exists x\ \alpha)^\diamond \equiv ((\alpha^\diamond \to B)) \to B$ e definendo $\Delta \equiv ((\forall x(\alpha^\diamond \to B)) \to B) \to B) \to B, \forall x(\alpha^\diamond \to B)$ e $\Delta_2 \equiv \Delta, (\forall x(\alpha^\diamond \to B)) \to B$ dimostriamo

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax.id}{\Delta_2 \vdash (\forall x(\alpha^\diamond \to B)) \to B} \qquad \dfrac{ax.id}{\Delta_2 \vdash \forall x(\alpha^\diamond \to B)}}{\Delta, (\forall x(\alpha^\diamond \to B)) \to B \vdash B} \to -S}{\Delta \vdash ((\forall x(\alpha^\diamond \to B)) \to B) \to B} \to -D \qquad \dfrac{ax.id}{\Delta \vdash (((\forall x(\alpha^\diamond \to B)) \to B) \to B) \to B}}{\dfrac{\dfrac{(((\forall x(\alpha^\diamond \to B)) \to B) \to B) \to B, \forall x(\alpha^\diamond \to B) \vdash B}{(((\forall x(\alpha^\diamond \to B)) \to B) \to B) \to B \vdash (\forall x(\alpha^\diamond \to B)) \to B} \to -D}{\vdash ((((\forall x(\alpha^\diamond \to B)) \to B) \to B) \to B) \to ((\forall x(\alpha^\diamond \to B)) \to B)} \to -D} \to -S
$$

Concludiamo quindi che $\vdash fr^\diamond \leftrightarrow (fr^\diamond \to B) \to B$ è derivabile in logica minimale.

3.1 Premesse

Ora dimostriamo alcuni lemmi che saranno fondamentali per dimostrare nei prossimi capitoli che la traduzione presa in esame in questo elaborato è valida e in che condizioni questa è fedele.

Lemma 3. *Date due formule predicative* fr_1 *e* fr_2

$$\text{Se} \vdash fr_1 \longleftrightarrow fr_2 \text{ è derivabile in } DNM_=$$
$$\text{ne segue che}$$
$$\vdash fr_1 \text{ è derivabile in } DNM_= \text{ sse} \vdash fr_2 \text{ è derivabile in } DNM_=$$

Dim.

Sapendo che $\vdash fr_1 \longleftrightarrow fr_2$ è derivabile in $DNM_=$ ho per ipotesi una derivazione π_1 in $DNM_=$ tale che

$$\frac{\pi_1}{\vdash (fr_1 \to fr_2)\&(fr_2 \to fr_1)}$$

Sapendo che la verità scende, ovvero se le foglie sono vere sarà vera anche la radice, dovranno essere vere pure

$$\cfrac{\cfrac{\pi_1}{\vdash (fr_1 \to fr_2)\&(fr_2 \to fr_1)}}{\vdash fr_1 \to fr_2}\ \&\text{-S}_1 \qquad \cfrac{\cfrac{\pi_1}{\vdash (fr_1 \to fr_2)\&(fr_2 \to fr_1)}}{\vdash fr_2 \to fr_1}\ \&\text{-S}_2$$

Vogliamo provare che se $\vdash fr_2$ è derivabile allora $\vdash fr_1$ è derivabile e viceversa.

Se $\vdash fr_2$ è derivabile posso dire che ho la seguente derivazione in $DNM_=$

$$\frac{\pi_2}{\vdash fr_2}$$

Dalle ipotesi ottengo anche la derivazione sottostante, dalla quale ottengo che $\vdash fr_1$ è derivabile come volevasi dimostrare

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\vdash (fr_1 \to fr_2)\&(fr_2 \to fr_1)}}{\vdash fr_2 \to fr_1}\,\&\text{-S}_2 \qquad \dfrac{\pi_2}{\vdash fr_2}}{\vdash fr_1} \to -S$$

Allo stesso modo possiamo dimostrare che con l'ipotesi $\vdash fr_1 \longleftrightarrow fr_2$ ottengo che se fr_1 è derivabile abbiamo che fr_2 è derivabile.

Infatti se $\vdash fr_1$ è derivabile posso dire che ho la seguente derivazione in $DNM_=$

$$\dfrac{\pi_3}{\vdash fr_1}$$

Dalle ipotesi ottengo anche la derivazione sottostante, dalla quale ottengo che $\vdash fr_2$ è derivabile come volevasi dimostrare

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\vdash (fr_1 \to fr_2)\&(fr_2 \to fr_1)}}{\vdash fr_1 \to fr_2}\,\&\text{-S}_1 \qquad \dfrac{\pi_3}{\vdash fr_1}}{\vdash fr_2} \to -S$$

Osservazione 1. *Applicando il lemma 2 (sulla traduzione fedele) al lemma 3 riusciamo a dire che in logica minimale* $\vdash \varphi^\diamond$ *è derivabile se e solo se* $\vdash (\varphi^\diamond \to B) \to B$ *è derivabile. Questa osservazione sarà molto utile per dimostrare la validità della traduzione di Friedman.*

Il prossimo lemma invece servirà per alleggerire la dimostrazione di fedeltà per la traduzione di Gödel-Gentzen.

Lemma 4. ***Conservazione equivalenza:*** *Date le formule predicative* α_1, α_2 *posso dire che* $\neg, \forall$ *e* $\exists$ *conservano le equivalenze, ovvero*

$$\textit{Se} \vdash \alpha_1 \longleftrightarrow \alpha_2 \textit{ è derivabile in } DNC_=$$
$$\textit{ne segue che sono derivabili in } DNC_= \textit{ anche}$$
$$\vdash \neg\alpha_1 \longleftrightarrow \neg\alpha_2$$
$$\vdash \forall\ x\ \alpha_1 \longleftrightarrow \forall\ x\ \alpha_2$$
$$\vdash \exists\ x\ \alpha_1 \longleftrightarrow x\ \alpha_2$$

Dim. Per ipotesi avremo $\Delta \equiv \alpha_1 \to \alpha_2, \alpha_2 \to \alpha_1$.

Vogliamo mostrare una doppia implicazione quindi $\Delta \vdash \neg\alpha_1 \to \neg\alpha_2$ e $\Delta \vdash \neg\alpha_2 \to \neg\alpha_1$, per cui deriviamo in $DNC_=$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta, \neg\alpha_1, \alpha_2 \vdash \alpha_1 \to \bot$}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta, \neg\alpha_1, \alpha_2 \vdash \alpha_2 \to \alpha_1$}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta, \neg\alpha_1, \alpha_2 \vdash \alpha_2$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$\Delta, \neg\alpha_1, \alpha_2 \vdash \alpha_1$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$\Delta, \neg\alpha_1, \alpha_2 \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$\Delta, \neg\alpha_1 \vdash \neg\alpha_2$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash \neg\alpha_1 \to \neg\alpha_2$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta, \neg\alpha_2, \alpha_1 \vdash \alpha_2 \to \bot$}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta, \neg\alpha_2, \alpha_1 \vdash \alpha_1 \to \alpha_2$}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta, \neg\alpha_2, \alpha_1 \vdash \alpha_1$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$\Delta, \neg\alpha_2, \alpha_1 \vdash \alpha_2$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$\Delta, \neg\alpha_2, \alpha_1 \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg - D$}
\UnaryInfC{$\Delta, \neg\alpha_2 \vdash \neg\alpha_1$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash \neg\alpha_2 \to \neg\alpha_1$}
\end{prooftree}
$$

Ho mostrato quindi che la negazione mantiene le equivalenze.

Vogliamo ora mostrare che $\Delta \vdash \forall x\alpha_1 \to \forall x\alpha_2$ e $\Delta \vdash \forall x\alpha_2 \to \forall x\alpha_1$, per cui deriviamo in $DNC_=$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta, \forall x\alpha_1 \vdash \forall x\alpha_1$}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta, \forall x\alpha_1 \vdash \alpha_1 \to \alpha_2$}
\RightLabel{$\forall - D(w \notin VL(\Delta, \forall x\alpha_1, \forall x\alpha_1 \to \alpha_2))$}
\UnaryInfC{$\Delta, \forall x\alpha_1 \vdash \forall x\alpha_1 \to \alpha_2$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$\Delta, \forall x\alpha_1 \vdash \alpha_2$}
\RightLabel{$\forall - D(w \notin VL(\Delta, \forall x\alpha_1, \forall x\alpha_2))$}
\UnaryInfC{$\Delta, \forall x\alpha_1 \vdash \forall x\alpha_2$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash \forall x\alpha_1 \to \forall x\alpha_2$}
\end{prooftree}
$$

La regola $\forall - D$ è usata correttamente perché avendo per ipotesi α_1 e α_2 potrò sostituire in $\forall x\alpha_1$ e $\forall x\alpha_2$ l'unico "w" che differenzia i due predicati, il quale non è una variabile libera.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta, \forall x\alpha_2 \vdash \forall x\alpha_2$}
\AxiomC{$ax.id$}
\UnaryInfC{$\Delta, \forall x\alpha_2 \vdash \alpha_2 \to \alpha_1$}
\RightLabel{$\forall - D(w \notin VL(\Delta, \forall x\alpha_2, \forall x\alpha_2 \to \alpha_1))$}
\UnaryInfC{$\Delta, \forall x\alpha_2 \vdash \forall x\alpha_2 \to \alpha_1$}
\RightLabel{$\to -S$}
\BinaryInfC{$\Delta, \forall x\alpha_2 \vdash \alpha_1$}
\RightLabel{$\forall - D(w \notin VL(\Delta, \forall x\alpha_2, \forall x\alpha_1))$}
\UnaryInfC{$\Delta, \forall x\alpha_2 \vdash \forall x\alpha_1$}
\RightLabel{$\to -D$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash \forall x\alpha_2 \to \forall x\alpha_1$}
\end{prooftree}
$$

Ho mostrato quindi che il quantificatore universale mantiene le equivalenze. Vogliamo infine mostrare che $\Delta \vdash \exists x\alpha_1 \to \exists x\alpha_2$ e $\Delta \vdash \exists x\alpha_2 \to \exists x\alpha_1$, per cui deriviamo in $DNC_=$

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{ax.id}{\Delta, \exists x\alpha_1 \vdash \exists x\alpha_1} \qquad \cfrac{\cfrac{ax.id}{\Delta, \exists x\alpha_1 \vdash \alpha_1 \to \alpha_2}}{\Delta, \exists x\alpha_1 \vdash \exists x\alpha_1 \to \alpha_2}\ \exists - D}{\Delta, \exists x\alpha_1 \vdash \alpha_2}\ \to -S}{\Delta, \exists x\alpha_1 \vdash \exists x\alpha_2}\ \exists - D}{\Delta \vdash \exists x\alpha_1 \to \exists x\alpha_2}\ \to -D
$$

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{ax.id}{\Delta, \exists x\alpha_2 \vdash \exists x\alpha_2} \qquad \cfrac{\cfrac{ax.id}{\Delta, \exists x\alpha_2 \vdash \alpha_2 \to \alpha_1}}{\Delta, \exists x\alpha_2 \vdash \exists x\alpha_2 \to \alpha_1}\ \exists - D}{\Delta, \exists x\alpha_2 \vdash \alpha_1}\ \to -S}{\Delta, \exists x\alpha_2 \vdash \exists x\alpha_1}\ \exists - D}{\Delta \vdash \exists x\alpha_2 \to \exists x\alpha_1}\ \to -D
$$

Ho mostrato quindi che il quantificatore esiste mantiene le equivalenze.

3.2 Validità della traduzione di Friedman per la logica minimale

Dimostreremo ora la validità della traduzione di Friedman dalla logica classica alla logica minimale. Questo ci farà notare che la regola di $ex - falso - quodlibet$ non è essenziale neanche per la validità della traduzione di Gödel-Gentzen dalla logica classica alla logica intuizionista.

Proposizione 1. *Per ogni sequente predicativo* $\Gamma \vdash fr$ *vale che*

$$\textit{se } \Gamma \vdash fr \textit{ è derivabile in } DNC_=$$
$$\textit{allora}$$
$$\Gamma^\diamond \vdash fr^\diamond \textit{ è derivabile in } DNM_=$$

Dim. Procediamo per induzione sulla profondità delle derivazioni. Per ipotesi esiste la derivazione di $\Gamma \vdash fr$ in $DNC_=$ che indichiamo con π di profondità n.

$$\frac{\pi}{\Gamma \vdash fr}$$

Se n=0 allora il sequente $\Gamma \vdash fr$ può essere o un assioma identità o un assioma del vero o un assioma di uguaglianza.

Assioma identità Se $\Gamma \vdash fr$ è un assioma identità allora per ipotesi $\Gamma \equiv \Gamma_1, fr$ traducendo otteniamo che $\Gamma^\diamond \equiv \Gamma_1^\diamond, fr^\diamond$ quindi $\Gamma^\diamond \vdash fr^\diamond$ è un assioma identità in $DNM_=$ e la tesi è dimostrata.

Assioma del vero Se $\Gamma \vdash fr$ è un assioma del vero allora $fr \equiv tt$, sapendo che $tt^\diamond \equiv tt$ abbiamo che $\Gamma^\diamond \equiv tt^\diamond$ è un assioma del vero anche in $DNM_=$ e la tesi è dimostrata.

Assioma dell'uguaglianza Se $\Gamma \vdash$ fr è un assioma dell'uguaglianza in $DNC_=$, ricordando che l'uguaglianza è un predicato atomico, grazie alla traduzione

$$(t = t)^\diamond \vdash ((t = t) \to B) \to B$$

mostriamo che $\Gamma^\diamond \vdash (t = t)^\diamond$ è derivabile in $DNM_=$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax.id}{\Gamma^\diamond, (t=t) \to B \vdash (t=t) \to B} \qquad \dfrac{=-ax.}{\Gamma^\diamond, (t=t) \to B \vdash (t=t)}}{\Gamma^\diamond, (t=t) \to B \vdash B} \to S}{\Gamma^\diamond \vdash ((t=t) \to B) \to B} \to D$$

Se n≥1 allora il sequente $\Gamma \vdash fr$ ha una derivazione π di profondità n che termina con l'utilizzo di una regola in $DNC_=$. Analizziamo quindi le possibili forme di π nella nostra ipotesi

$$\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash fr}$$

Ultima regola & -S$_1$: Se la derivazione π in $DNC_=$ si conclude con

$$\dfrac{\dfrac{\pi'}{\Gamma \vdash \alpha \& \gamma}}{\Gamma \vdash \alpha} \text{ \&-S}_1$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a π' e troviamo la seguente formula con π'' derivazione in $DNM_=$

$$\dfrac{\pi''}{\Gamma^\diamond \vdash (\alpha \& \gamma)^\diamond}$$

e ricordando che $(\alpha \& \gamma)^\diamond \equiv \alpha^\diamond \& \gamma^\diamond$ ne segue che

$$\dfrac{\dfrac{\pi''}{\Gamma^\diamond \vdash \alpha^\diamond \& \gamma^\diamond}}{\Gamma^\diamond \vdash \alpha^\diamond} \text{ \&-S}_1$$

Abbiamo quindi trovato una derivazione in $DNM_=$ di $\Gamma^\diamond \vdash \alpha^\diamond$

Specularmente troviamo una derivazione in $DNM_=$ se l'ultima regola è $\& - S_2$

Ultima regola &-D : Se la derivazione π in $DNC_=$ si conclude con

$$\dfrac{\dfrac{\pi'_1}{\Gamma \vdash \alpha} \qquad \dfrac{\pi'_2}{\Gamma \vdash \gamma}}{\Gamma \vdash \alpha \& \gamma} \text{ \&-D}$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a π_1' e π_2' e troviamo la seguente formula con π_1'' e π_2'' derivazione in $DNM_=$

$$\frac{\pi_1''}{\Gamma^\diamond \vdash \alpha^\diamond} \qquad \frac{\pi_2''}{\Gamma^\diamond \vdash \gamma^\diamond}$$

e ricordando che $(\alpha \& \gamma)^\diamond \equiv \alpha^\diamond \& \gamma^\diamond$ ne segue che

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1''}{\Gamma \vdash \alpha^\diamond} \quad \dfrac{\pi_2''}{\Gamma \vdash \gamma^\diamond}}{\Gamma^\diamond \vdash \alpha^\diamond \& \gamma^\diamond}\ \&\text{-D}$$

Ultima regola $\vee - S$: Se la derivazione π in $DNC_=$ si conclude con

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1'}{\Gamma \vdash \alpha \vee \gamma} \quad \dfrac{\pi_2'}{\Gamma, \alpha \vdash fr} \quad \dfrac{\pi_3'}{\Gamma, \gamma \vdash fr}}{\Gamma \vdash fr}\ \vee - S$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a π_1' , π_2' π_3' e troviamo π_1'' , π_2'' e π_3'' derivazioni in $DNM_=$

$$\frac{\pi_1''}{\Gamma^\diamond \vdash (\alpha \vee \gamma)^\diamond} \quad \frac{\pi_2''}{\Gamma^\diamond, \alpha^\diamond \vdash fr^\diamond} \quad \frac{\pi_3''}{\Gamma^\diamond, \gamma^\diamond \vdash fr^\diamond}$$

ricordando che in logica intuizionista $(\alpha \vee \gamma)^\diamond \equiv ((\alpha^\diamond \to B) \& (\gamma^\diamond \to B)) \to B$, dimostro

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1''}{\Gamma^\diamond \vdash (\alpha \vee \gamma)^\diamond}}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash ((\alpha^\diamond \to B) \& (\gamma^\diamond \to B)) \to B}\ \text{-in}_{sx} \quad \dfrac{\dfrac{1}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash \alpha^\diamond \to B} \quad \dfrac{2}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash \gamma^\diamond \to B}}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash (\alpha^\diamond \to B) \& (\gamma^\diamond \to B)}\ \&\text{-D}}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash B}\ \to S}{\Gamma^\diamond \vdash (fr^\diamond \to B) \to B}\ \to D$$

Deriviamo 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{3}{\alpha^\diamond \to fr^\diamond, fr^\diamond \to B, \alpha^\diamond \vdash B}}{\alpha^\diamond \to fr^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash A^\diamond \to B}\ \to -D}{\alpha^\diamond \to fr^\diamond \vdash (fr^\diamond \to B) \to (\alpha^\diamond \to B)}\ \to -D \quad \dfrac{\dfrac{\pi_2''}{\Gamma^\diamond, \alpha^\diamond \vdash fr^\diamond}}{\Gamma^\diamond \vdash \alpha^\diamond \to fr^\diamond}\ \to -D}{\Gamma^\diamond \vdash (fr^\diamond \to B) \to (\alpha^\diamond \to B)}\ \text{-comp}}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash (fr^\diamond \to B) \to (\alpha^\diamond \to B)}\ \text{-in}_{sx} \quad \dfrac{ax.id}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash fr^\diamond \to B}}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash \alpha^\diamond \to B}\ \to -S$$

Definendo $\Gamma_1 \equiv \alpha^\diamond \to fr^\diamond, fr^\diamond \to B, \alpha^\diamond$, deriviamo 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax.id}{\Gamma_1 \vdash \alpha^\diamond \to fr^\diamond} \quad \dfrac{ax.id}{\Gamma_1 \vdash \alpha^\diamond}}{\Gamma_1 \vdash fr^\diamond} \to -S \qquad \dfrac{ax.id}{\Gamma_1 \vdash fr^\diamond \to B}}{\Gamma_1 \vdash B} \to -S$$

Similmente a 1 deriviamo 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{4}{\gamma^\diamond \to fr^\diamond, fr^\diamond \to B, \gamma^\diamond \vdash B}}{\gamma^\diamond \to fr^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash \gamma^\diamond \to B} \to -D}{\gamma^\diamond \to fr^\diamond \vdash (fr^\diamond \to B) \to (\gamma^\diamond \to B)} \to -D \quad \dfrac{\dfrac{\pi_3''}{\Gamma^\diamond, \gamma^\diamond \vdash fr^\diamond}}{\Gamma^\diamond \vdash \gamma^\diamond \to fr^\diamond} \to -D}{\Gamma^\diamond \vdash (fr^\diamond \to B) \to (\gamma^\diamond \to B)} \text{-comp}}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash (fr^\diamond \to B) \to (\gamma^\diamond \to B)} \text{-in}_{sx} \qquad \dfrac{ax.id}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash fr^\diamond \to B}}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash \gamma^\diamond \to B} \to -S$$

Deriviamo 4 definendo $\Gamma_2 \equiv \gamma^\diamond \to fr^\diamond, fr^\diamond \to B, \gamma^\diamond$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax.id}{\Gamma_2 \vdash \gamma^\diamond \to fr^\diamond} \quad \dfrac{ax.id}{\Gamma_2 \vdash \gamma^\diamond}}{\Gamma_2 \vdash fr^\diamond} \to -S \qquad \dfrac{ax.id}{\Gamma_2 \vdash fr^\diamond \to B}}{\Gamma_2 \vdash B} \to -S$$

per l'osservazione 1 dalla derivabilità di $\Gamma^\diamond \vdash (fr^\diamond \to B) \to B$ discende la derivabilità di $\Gamma^\diamond \vdash fr^\diamond$ e quindi la nostra tesi.

Ultima regola $\vee - D_1$: Se la derivazione π in $DNC_{\equiv}$ si conclude con

$$\dfrac{\dfrac{\pi'}{\Gamma \vdash \alpha}}{\Gamma \vdash \alpha \vee \gamma} \vee - D_1$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a π' e troviamo π'' derivazione in $DNM_{=}$

$$\dfrac{\pi''}{\Gamma^{\diamond} \vdash \alpha^{\diamond}}$$

e ricordando che $(\alpha \vee \gamma)^{\diamond} \equiv ((\alpha^{\diamond} \to B)\&(\gamma^{\diamond} \to B)) \to B$ ne segue che

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax.id}{\alpha^{\diamond}, (\alpha^{\diamond} \to B)\&(\gamma^{\diamond} \to B) \vdash \alpha^{\diamond}} \qquad \dfrac{\dfrac{ax.id}{\alpha^{\diamond}, (\alpha^{\diamond} \to B)\&(\gamma^{\diamond} \to B) \vdash (\alpha^{\diamond} \to B)\&(\gamma^{\diamond} \to B)}}{\alpha^{\diamond}, (\alpha^{\diamond} \to B)\&(\gamma^{\diamond} \to B) \vdash \alpha^{\diamond} \to B}\;\&\text{-S}}{\alpha^{\diamond}, (\alpha^{\diamond} \to B)\&(\gamma^{\diamond} \to B) \vdash B}\;\to S}{\alpha^{\diamond} \vdash ((\alpha^{\diamond} \to B)\&(\gamma^{\diamond} \to B)) \to B}\;\to D \qquad \dfrac{\pi''}{\Gamma^{\diamond} \vdash \alpha^{\diamond}}}{\Gamma^{\diamond} \vdash ((\alpha^{\diamond} \to B)\&(\gamma^{\diamond} \to B)) \to B}\;\text{-comp}$$

Analogamente troviamo una derivazione in $DNM_{=}$ di $\Gamma^{\diamond} \vdash fr^{\diamond}$ anche se l'ultima regola è $\vee - D_2$

Ultima regola $\neg - S$: Se la derivazione π in $DNC_{=}$ si conclude con

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1'}{\Gamma \vdash \alpha} \qquad \dfrac{\pi_2'}{\Gamma \vdash \neg\alpha}}{\Gamma \vdash \bot}\;\neg - S$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a π_1' e π_2' e troviamo π_1'' e π_2'' derivazioni in $DNM_{=}$

$$\dfrac{\pi_1''}{\Gamma^{\diamond} \vdash \alpha^{\diamond}}$$

$$\dfrac{\pi_2''}{\Gamma^{\diamond} \vdash (\neg\alpha)^{\diamond}}$$

e ricordando che $(\neg\alpha)^{\diamond} \equiv \alpha^{\diamond} \to B$ e $(\bot)^{\diamond} \equiv B$ ne segue che

$$\dfrac{\dfrac{\pi_2''}{\Gamma^{\diamond} \vdash \alpha^{\diamond} \to B} \qquad \dfrac{\pi_1''}{\Gamma^{\diamond} \vdash \alpha^{\diamond}}}{\Gamma^{\diamond} \vdash B}\;\to -S$$

Ultima regola $\neg - D$: Se la derivazione π in $DNC_=$ si conclude con

$$\dfrac{\dfrac{\pi'}{\Gamma, \alpha \vdash \bot}}{\Gamma \vdash \neg\alpha} \neg - D$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a π' troviamo la seguente derivazione in $DNM_=$

$$\dfrac{\pi''}{\Gamma^\diamond, \alpha^\diamond \vdash B}$$

e ricordando che $(\neg\alpha)^\diamond \equiv \alpha^\diamond \to B$ otteniamo

$$\dfrac{\dfrac{\pi''}{\Gamma^\diamond, \alpha^\diamond \vdash B}}{\Gamma^\diamond \vdash \alpha^\diamond \to B} \to D$$

Ultima regola $\to -S$: Se la derivazione π in $DNC_=$ si conclude con

$$\dfrac{\dfrac{\pi'_1}{\Gamma \vdash \alpha \to \gamma} \quad \dfrac{\pi'_2}{\Gamma \vdash \alpha}}{\Gamma \vdash \gamma} \to -S$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a π'_1 e π'_2 e ricordando che $(\alpha \to \gamma)^\diamond \equiv \alpha^\diamond \to \gamma^\diamond$ troviamo le seguenti derivazioni in $DNM_=$

$$\dfrac{\pi''_1}{\Gamma^\diamond \vdash \alpha^\diamond \to \gamma^\diamond} \qquad \dfrac{\pi''_2}{\Gamma^\diamond \vdash \alpha^\diamond}$$

otteniamo quindi la nostra tesi, cioè che $\Gamma^\diamond \vdash \gamma^\diamond$ è derivabile in $DNM_=$

$$\dfrac{\dfrac{\pi''_1}{\Gamma^\diamond \vdash \alpha^\diamond \to \gamma^\diamond} \quad \dfrac{\pi''_2}{\Gamma^\diamond \vdash \alpha^\diamond}}{\Gamma^\diamond \vdash \gamma^\diamond} \to -S$$

Ultima regola $\rightarrow -D$: Se la derivazione π in $DNC_=$ si conclude con

$$\cfrac{\cfrac{\pi'}{\Gamma, \alpha \vdash \gamma}}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma} \rightarrow -D$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a π' troviamo la seguente derivazione in $DNM_=$

$$\cfrac{\pi''}{\Gamma^\diamond, \alpha^\diamond \vdash \gamma^\diamond}$$

e ricordando che $(\alpha \rightarrow \gamma)^\diamond \equiv \alpha^\diamond \rightarrow \gamma^\diamond$ otteniamo

$$\cfrac{\cfrac{\pi''}{\Gamma^\diamond, \alpha^\diamond \vdash \gamma^\diamond}}{\Gamma^\diamond \vdash \alpha^\diamond \rightarrow \gamma^\diamond} \rightarrow D$$

Ultima regola $\forall - S$: Se la derivazione di $\Gamma \vdash fr$ in $DNC_=$ si conclude con π in forma

$$\cfrac{\cfrac{\pi'}{\Gamma \vdash \forall x fr(x)}}{\Gamma \vdash fr[x/t]} \forall - S$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a π' troviamo la seguente derivazione in $DNM_=$

$$\cfrac{\pi''}{\Gamma^\diamond \vdash (\forall x fr(x))^\diamond}$$

ricordando che $(\forall x fr(x))^\diamond \equiv \forall x fr(x)^\diamond$ e grazie al lemma 6 per cui $fr(x)^\diamond \equiv fr^\diamond(x)$ otteniamo

$$\cfrac{\cfrac{\pi''}{\Gamma^\diamond \vdash \forall x fr^\diamond(x)}}{\Gamma^\diamond \vdash fr^\diamond[x/t]} \forall - S$$

Ultima regola $\forall - D$: Se la derivazione di $\Gamma \vdash fr$ in $DNC_{=}$ si conclude con π in forma

$$\dfrac{\dfrac{\pi'}{\Gamma \vdash fr[x/w]}}{\Gamma \vdash \forall x fr(x)} \forall - D(w \notin VL(\Gamma, \forall x fr(x)))$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a π' troviamo la seguente derivazione in $DNM_{=}$

$$\dfrac{\pi''}{\Gamma^{\diamond} \vdash (fr[x/w])^{\diamond}}$$

e ricordando che $(\forall x fr(x))^{\diamond} \equiv \forall x fr(x)^{\diamond}$ e grazie al lemma 1 per cui $fr(x)^{\diamond} \equiv fr^{\diamond}(x)$ otteniamo la nostra tesi

$$\dfrac{\dfrac{\pi''}{\Gamma^{\diamond} \vdash fr^{\diamond}[x/w]}}{\Gamma^{\diamond} \vdash \forall x fr^{\diamond}(x)} \forall - D(w \notin VL(\Gamma, \forall x fr(x)))$$

Ultima regola $\exists$ **-S** : Se la derivazione di $\Gamma \vdash fr$ in $DNC_{=}$ si conclude con π in forma

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1'}{\Gamma \vdash \exists y \alpha(y)} \qquad \dfrac{\pi_2'}{\Gamma, \alpha[y/w] \vdash fr}}{\Gamma \vdash fr} \ \exists \text{ -S(w} \notin VL(\Gamma, \exists y \alpha(y), fr))$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a π_1' e π_2' e troviamo la seguente formula con π_1'' e π_2'' derivazione in $DNM_{=}$

$$\dfrac{\pi_1''}{\Gamma^{\diamond} \vdash (\exists y \alpha(y))^{\diamond}}$$

$$\dfrac{\pi_2''}{\Gamma^{\diamond}, (\alpha[y/w])^{\diamond} \vdash fr^{\diamond}}$$

grazie al lemma 1 per cui $(\alpha[y/w])^{\diamond} \equiv \alpha^{\diamond}[y/w]$ e sapendo che $(\exists y fr)^{\diamond} \equiv (\forall y (fr^{\diamond} \to B)) \to B$, dimostriamo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{1}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash \forall y(\alpha^\diamond(y) \to B)} \qquad \dfrac{\dfrac{\pi_1''}{\Gamma^\diamond \vdash (\exists y\alpha(y))^\diamond}}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash (\forall y(\alpha^\diamond(y) \to B)) \to B}\text{-in}_{sx}}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash B} \to -S}{\Gamma^\diamond \vdash (fr^\diamond \to B) \to B} \to -D$$

deriviamo 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{2}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash (fr^\diamond \to B) \to (\alpha^\diamond[y/w] \to B)} \qquad \dfrac{ax.id}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash fr^\diamond \to B}}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash \alpha^\diamond[y/w] \to B} \to -S}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash \forall y(\alpha^\diamond(y) \to B)} \forall - D(w \notin VL(\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B, \forall y(\alpha^\diamond(y) \to B)))$$

l'applicazione della regola $\forall - D$ è appropriata in quanto w non compare libera né in $\Gamma^\diamond$ né in $fr^\diamond \to B$ perché per ipotesi non appartiene alle variabili libere di Γ e fr e la traduzione non cambia la presenza di esse. La variabile w non è libera neanche in $\forall y(\alpha^\diamond(y) \to B)$ in quanto sempre per ipotesi non lo è in $\exists y\alpha(y)$.

Deriviamo 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{3}{\alpha^\diamond[y/w] \to fr^\diamond, fr^\diamond \to B, \alpha^\diamond[y/w] \vdash B}}{\alpha^\diamond[y/w] \to fr^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash \alpha^\diamond[y/w] \to B} \to -D}{\alpha^\diamond[y/w] \to fr^\diamond \vdash (fr^\diamond \to B) \to (\alpha^\diamond[y/w] \to B)} \to -D \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_2''}{\Gamma^\diamond, \alpha^\diamond[y/w] \vdash fr^\diamond}}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B, \alpha^\diamond[y/w] \vdash fr^\diamond}\text{-in}_{sx}}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash \alpha^\diamond[y/w] \to fr^\diamond} \to -D}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash (fr^\diamond \to B) \to (\alpha^\diamond[y/w] \to B)}\text{-comp}$$

deriviamo 3 ponendo $\Delta \equiv (\alpha[y/w])^\diamond \to fr^\diamond, fr^\diamond \to B, (\alpha[y/w])^\diamond$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax.id}{\Delta \vdash (\alpha[y/w])^\diamond} \qquad \dfrac{ax.id}{\Delta \vdash (\alpha[y/w])^\diamond \to fr^\diamond}}{\Delta \vdash fr^\diamond} \to -S \qquad \dfrac{ax.id}{\Delta \vdash fr^\diamond \to B}}{\Delta \vdash B} \to -S$$

per l'osservazione 1 dalla derivabilità di $\Gamma^\diamond \vdash (fr^\diamond \to B) \to B$ discende la derivabilità di $\Gamma^\diamond \vdash fr^\diamond$ e quindi la nostra tesi.

Ultima regola $\exists - D$: Se la derivazione di $\Gamma \vdash fr$ in $DNC_=$ si conclude con π in forma

$$\dfrac{\dfrac{\pi'}{\Gamma \vdash fr[y/t]}}{\Gamma \vdash \exists y fr(y)}\ \exists - D$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a π' troviamo la seguente derivazione in $DNM_=$

$$\dfrac{\pi''}{\Gamma^\diamond \vdash (fr[y/t])^\diamond}$$

e ricordando che $(fr[y/t])^\diamond \equiv fr^\diamond[y/t]$ otteniamo

$$\dfrac{\dfrac{\pi''}{\Gamma^\diamond \vdash fr^\diamond[y/t]} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax.id}{fr^\diamond[y/t], \forall y(fr^\diamond \to B) \vdash \forall y(fr^\diamond \to B)}}{fr^\diamond[y/t], \forall y(fr^\diamond \to B) \vdash fr^\diamond[y/t] \to B}\ \forall - S \qquad \dfrac{ax.id}{fr^\diamond[y/t], \forall y(fr^\diamond \to B) \vdash fr^\diamond[y/t]}}{fr^\diamond[y/t], \forall y(fr^\diamond \to B) \vdash B}\ \to D}{fr^\diamond[y/t] \vdash (\forall y fr^\diamond \to B) \to B}\ \to -D}{}}{\Gamma^\diamond \vdash (\forall y fr^\diamond \to B) \to B}\ \text{-comp}$$

per l'osservazione 1 dalla derivabilità di $\Gamma^\diamond \vdash (fr^\diamond \to B) \to B$ discende la derivabilità di $\Gamma^\diamond \vdash fr^\diamond$ e quindi la nostra tesi.

Ultima regola = -S : Supponendo fr $\equiv \alpha[x/s]$, se la derivazione in $DNC_=$ si conclude con π in forma

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1'}{\Gamma \vdash t = s} \qquad \dfrac{\pi_2'}{\Gamma \vdash \alpha[x/t]}}{\Gamma \vdash \alpha[x/s]}\ \text{=-S}$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a π_1' e π_2' troviamo l seguenti formule con π_1'' e π_2'' derivazione in $DNM_=$

$$\dfrac{\pi_1''}{\Gamma^\diamond \vdash (t = s)^\diamond} \qquad \dfrac{\pi_2''}{\Gamma^\diamond \vdash (\alpha[x/t])^\diamond}$$

sapendo che $(\alpha[x/t])^\diamond \equiv \alpha^\diamond[x/t]$ e $(\alpha[x/s])^\diamond \equiv \alpha^\diamond[x/s]$ e che $(t = s)^\diamond \equiv ((t = s) \to B) \to B$, ne segue che

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{1}{(((t=s)\to B)\to B)\&\alpha^{\diamond}[x/t],\alpha^{\diamond}[x/s]\to B\vdash B}}{(((t=s)\to B)\to B)\&\alpha^{\diamond}[x/t]\vdash(\alpha^{\diamond}[x/s]\to B)\to B}\to D \qquad \dfrac{\dfrac{\pi_1''}{\Gamma^{\diamond}\vdash((t=s)\to B)\to B} \quad \dfrac{\pi_2''}{\Gamma^{\diamond}\vdash\alpha^{\diamond}[x/t]}}{\Gamma^{\diamond}\vdash(((t=s)\to B)\to B)\&\alpha^{\diamond}[x/t]}\text{&-D}}{\Gamma^{\diamond}\vdash(\alpha^{\diamond}[x/s]\to B)\to B}\text{-comp}
$$

dimostriamo 1 considerando $\Delta\equiv(((t=s)\to B)\to B)\&\alpha^{\diamond}[x/s],\alpha^{\diamond}[x/s]\to B$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{2}{\Delta,(t=s)\vdash\alpha^{\diamond}[x/s]} \quad \dfrac{ax.id}{\Delta,(t=s)\vdash\alpha^{\diamond}[x/s]\to B}}{\Delta,(t=s)\vdash B}\to -S}{\Delta\vdash(t=s)\to B}\to -D \qquad \dfrac{\dfrac{ax.id}{\Delta\vdash((t=s)\to B)\to B\&\alpha^{\diamond}[x/s]}}{\Delta\vdash((t=s)\to B)\to B}\text{&-S}}{\Delta\vdash B}\to -S
$$

dimostriamo 2 con $\Delta_2\equiv(((t=s)\to B)\to B)\&\alpha^{\diamond}[x/s],\quad \alpha^{\diamond}[x/s]\to B,\quad (t=s)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax.id}{\Delta_2\vdash\alpha^{\diamond}[x/t]\&(((t=s)\to B)\to B)}}{\Delta_2\vdash\alpha^{\diamond}[x/t]}\text{&-S} \qquad \dfrac{ax.id}{\Delta_2\vdash t=s}}{\Delta_2\vdash\alpha^{\diamond}[x/s]}\text{=-S}
$$

per l'osservazione 1 dalla derivabilità di $\Gamma^{\diamond}\vdash(fr^{\diamond}\to B)\to B$ discende la derivabilità di $\Gamma^{\diamond}\vdash fr^{\diamond}$ e quindi la nostra tesi.

Ultima regola -ra : Se la derivazione di $\Gamma\vdash fr$ in $DNC_{=}$ si conclude con π in forma

$$
\dfrac{\dfrac{\pi'}{\Gamma,(\neg fr)\vdash\bot}}{\Gamma\vdash fr}\text{-ra}
$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a π' e sapendo che $(\neg fr)^\diamond \equiv fr^\diamond \to B$ e che $\bot^\diamond \equiv B$, troviamo la seguente formula con π'' derivazione in $DNM_=$

$$\frac{\pi''}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash B}$$

applicando il lemma 3 al lemma 2 ne segue che

$$\dfrac{\dfrac{\pi''}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash B}}{\Gamma^\diamond \vdash (fr^\diamond \to B) \to B} \to -D$$

Ultima regola ex-f-q : Se la derivazione di $\Gamma \vdash fr$ in $DNC_=$ si conclude con π in forma

$$\dfrac{\dfrac{\pi'}{\Gamma \vdash \bot}}{\Gamma \vdash fr} \text{ ex-f-q}$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva a π' e ricordando che $(\bot)^\diamond \equiv B$ troviamo la seguente derivazione in $DNM_=$

$$\frac{\pi''}{\Gamma^\diamond \vdash B}$$

Per l'osservazione 1 dalla derivabilità di $\Gamma^\diamond \vdash (fr^\diamond \to B) \to B$ discende la derivabilità di $\Gamma^\diamond \vdash fr^\diamond$ e quindi ci basta la seguente derivazione per dimostrare la nostra tesi.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi''}{\Gamma^\diamond \vdash B}}{\Gamma^\diamond, fr^\diamond \to B \vdash B} \text{-in}_{sx}}{\Gamma^\diamond \vdash (fr^\diamond \to B) \to B} \to -D$$

Ho mostrato in questo modo la validità della traduzione di Friedman dalla logica classica alla logica minimale senza l'utilizzo del $ex - falso - quodlibet$.

A maggior ragione posso dire quindi che la regola del $ex - falso - quodlibet$ non è fondamentale per la validità della traduzione della doppia negazione di Gödel-Gentzen dalla logica classica nella logica intuizionista, che può essere usata quindi per tradurre la logica classica in logica minimale.

3.3. La traduzione di Gödel-Gentzen e' l'unica traduzione fedele della logica classica

Tradurre fedelmente la logica classica nella logica intuizionista o minimale significa interpretare ogni sequente dimostrabile in logica classica in un sequente dimostrabile in logica minimale/intuizionista che sia equidimostrabile al sequente di partenza in logica classica.

In altri termini cio' significa dimostrare che una traduzione fedele dalla logica classica alla logica minimale traduce una data formula φ vera in logica classica in una formula $\varphi^{\diamond}$ vera in logica minimale/intuizionista. Immergendo poi $\varphi^{\diamond}$ vera nella logica intuizionista, nuovamente in quella classica devo ottenere l'identità a meno di equivalenza, e quindi deve valere $\varphi \longleftrightarrow \varphi^{\diamond}$ in $DNC_{=}$ come possiamo vedere nello schema sottostante

$$\begin{array}{rccccc} \diamond : & \mathrm{DNC}_{=} & \longrightarrow & DNI_{=} & \longrightarrow & DNC_{=} \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi^{\diamond} & \longmapsto & \varphi^{\diamond} \end{array}$$

Ovvero la traduzione delle formule vista dalla logica classica in se stessa e' equivalente alla traduzione identica.

In questa tesi, data la definizione di equivalenza logica andremo a dimostrare la bontà della traduzione di Friedman ovvero quando questa è fedele in logica classica.

Definizione 5. ***Equivalenza logica:***
Nel linguaggio proposizionale due formule sono logicamente equivalenti se $A \vdash B$ e $B \vdash A$ e lo indicheremo con $\vdash A \longleftrightarrow B$.

Osservazione 2. *Sapendo che ogni traduzione di Friedman traduce $\perp$ in B ovvero $\perp^{\diamond} \equiv B$, per avere la fedeltà della traduzione, ovvero $\vdash \varphi \longleftrightarrow \varphi^{\diamond}$ sarà condizione necessaria avere $\vdash \perp \longleftrightarrow \perp^{\diamond}$ ovvero $\vdash \perp \longleftrightarrow B$.*
Sostituendo ora B con $\perp$, la dimostrazione di $\vdash \varphi \longleftrightarrow \varphi^{\diamond}$ in $DNC_{=}$ per le altra formule, seguirà dalla fedeltà della traduzione di Gödel-Gentzen dimostrato nel lemma 5 che segue.
Quindi l'unica traduzione che manterrà la semantica dei predicati sarà la traduzione della doppia negazione.

Lemma 5. ***Traduzione fedele di Gödel e Gentzen:***
Possiamo dire che la traduzione di Gödel e Gentzen è fedele perché presa una formula generica fr di un linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ si ha che in logica classica $DNC_=$ si deriva

$$\vdash fr \leftrightarrow fr^{\triangle}$$

Dim. Si procede per induzione sulla formazione della formula fr.

1. caso fr $\equiv$ tt oppure fr $\equiv \perp$:

   ricordando che $tt^{\triangle} \equiv tt$ e $\perp^{\triangle} \equiv \perp$ la tesi segue banalmente.

2. caso fr atomica:

   ricordando che per definizione $P^{\triangle} \equiv \neg\neg P$ la tesi segue banalmente dalla legge classica della doppia negazione.

3. caso $fr \equiv \neg\alpha$:

   per ipotesi induttiva sappiamo che $\vdash \alpha^{\triangle} \longleftrightarrow \alpha$ è derivabile in $DNC_=$ e quindi dal lemma 4, grazie al fatto che la negazione conserva gli equivalenti, ne segue che è derivabile in $DNC_=$ $\vdash \neg\alpha^{\triangle} \longleftrightarrow \neg\alpha$ che è la nostra tesi ricordando che $(\neg\alpha)^{\triangle} \equiv \neg\alpha^{\triangle}$.

4. caso $fr \equiv \alpha\&\beta$:

   allora per ipotesi induttiva sappiamo che $\vdash \alpha^{\triangle} \longleftrightarrow \alpha$ e $\vdash \beta^{\triangle} \longleftrightarrow \beta$ sono derivabili in $DNC_=$, e dal lemma 4, grazie al fatto che la congiunzione conserva gli equivalenti, ne segue che è derivabile in $DNC_=$ $\vdash \alpha^{\triangle}\&\beta^{\triangle} \longleftrightarrow \alpha\&\beta$ che è la nostra tesi ricordando che $(\alpha\&\beta)^{\triangle} \equiv \alpha^{\triangle}\&\beta^{\triangle}$.

5. caso $fr \equiv \alpha \rightarrow \beta$:

   allora per ipotesi induttiva sappiamo che $\vdash \alpha^{\triangle} \longleftrightarrow \alpha$ e $\vdash \beta^{\triangle} \longleftrightarrow \beta$ sono derivabili in $DNC_=$, e dal lemma 4, grazie al fatto che l'implicazione conserva gli equivalenti, ne segue che è derivabile in $DNC_= \vdash (\alpha^\triangle \to \beta^\triangle) \longleftrightarrow (\alpha \to \beta)$ che è la nostra tesi ricordando che $(\alpha \to \beta)^\triangle \equiv \alpha^\triangle \to \beta^\triangle$.

6. caso $fr \equiv \alpha \vee \beta$:

   allora per ipotesi induttiva sappiamo che $\vdash \alpha^\triangle \longleftrightarrow \alpha$ e $\vdash \beta^\triangle \longleftrightarrow \beta$ sono derivabili in $DNC_=$, e per il lemma 4 grazie al fatto che la negazione conserva gli equivalenti ne segue che sono pure derivabili in $DNC_= \vdash \neg\alpha^\triangle \longleftrightarrow \neg\alpha$ e $\vdash \neg\beta^\triangle \longleftrightarrow \neg\beta$ Di nuovo per il lemma 4, grazie al fatto che la congiunzione conserva gli equivalenti, ne segue che $\vdash \neg\alpha^\triangle \& \neg\beta^\triangle \longleftrightarrow \neg\alpha \& \neg\beta$ è derivabile in $DNC_=$.

   Ora dalla tautologia intuizionista e quindi classica $\vdash \neg\alpha \& \neg\beta \longleftrightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$ per la transitività delle equivalenze ne segue che $\vdash \neg\alpha^\triangle \& \neg\beta^\triangle \longleftrightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$ è derivabile in $DNC_=$.

   Poi per il lemma lemma 4, grazie al fatto che la negazione conserva gli equivalenti, si ottiene che $\vdash \neg(\neg\alpha^\triangle \& \neg\beta^\triangle) \longleftrightarrow \neg\neg(\alpha \vee \beta)$ è pure derivabile in $DNC_=$.

   Inoltre dalla legge della doppia negazione $\vdash A \longleftrightarrow \neg\neg A$ per la transitività delle equivalenze ne segue che è pure derivabile in $DNC_= \vdash \neg(\neg\alpha^\triangle \& \neg\beta^\triangle) \longleftrightarrow \alpha \vee \beta$ Infine, ricordando che $(\alpha \vee \beta)^\triangle \equiv \neg(\neg\alpha^\triangle \& \neg\beta^\triangle)$ si conclude la tesi ovvero che $\vdash (\alpha \vee \beta)^\triangle \longleftrightarrow \alpha \vee \beta$ è derivabile in $DNC_=$.

7. caso $fr \equiv \forall x \alpha$:

   allora per ipotesi induttiva sappiamo che $\vdash \alpha^\triangle \longleftrightarrow \alpha$ è derivabile in $DNC_=$.

   Ora per lemma 4, grazie al fatto che la quantificazione universale conserva gli equivalenti, si ottiene che è derivabile in $DNC_= \vdash \forall x \alpha^\triangle \longleftrightarrow \forall x \alpha$ che è la nostra tesi ricordando che $(\forall x \alpha)^\triangle \equiv \forall x \alpha^\triangle$.

8. caso $fr \equiv \exists x \alpha$:

   allora per ipotesi induttiva sappiamo che $\vdash \alpha^\triangle \longleftrightarrow \alpha$ è derivabile in $DNC_=$.

   Ora per lemma 4, grazie al fatto che la quantificazione esistenziale conserva gli equivalenti, si ottiene che è derivabile in $DNC_= \vdash \exists x \alpha^\triangle \longleftrightarrow \exists x \alpha$.

Dalla derivabilità classica di $\vdash \neg\forall x \neg\alpha^{\triangle} \longleftrightarrow \exists x \alpha^{\triangle}$ ovvero le seguenti due derivazioni

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax.id}{\neg(\forall x\neg\alpha^{\triangle}), \neg\alpha^{\triangle} \vdash (\forall x\neg\alpha^{\triangle}) \to \bot} \quad \dfrac{\dfrac{ax.id}{\neg(\forall x\neg\alpha^{\triangle}), \neg\alpha^{\triangle} \vdash \neg\alpha^{\triangle}}}{\neg(\forall x\neg\alpha^{\triangle}), \neg\alpha^{\triangle} \vdash \forall x\neg\alpha^{\triangle}}\ \forall - D(w \notin VL(\neg\alpha^{\triangle}, \forall x\neg\alpha^{\triangle}))}{\neg(\forall x\neg\alpha^{\triangle}), \neg\alpha^{\triangle} \vdash \bot}\ \to -S}{\neg(\forall x\neg\alpha^{\triangle}) \vdash \alpha^{\triangle}}\ \text{-ra}}{\neg(\forall x\neg\alpha^{\triangle}) \vdash \exists x\alpha^{\triangle}}\ \exists - D}{\vdash \neg(\forall x\neg\alpha^{\triangle}) \to \exists x\alpha^{\triangle}}\ \to -D
$$

Definendo $\Delta \equiv \exists x\alpha^{\triangle}, \forall x\neg\alpha^{\triangle}$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax.id}{\Delta \vdash \forall x(\neg\alpha^{\triangle})}}{\Delta \vdash \neg\alpha^{\triangle}}\ \forall - S \quad \dfrac{\dfrac{ax.id}{\Delta \vdash \exists x\alpha^{\triangle}} \quad \dfrac{ax.id}{\Delta, \alpha^{\triangle} \vdash \alpha^{\triangle}}}{\Delta \vdash \alpha^{\triangle}}\ \exists - S(w \notin VL(\Delta, \alpha^{\triangle}))}{\exists x\alpha^{\triangle}, \forall x\neg\alpha^{\triangle} \vdash \bot}\ \to -S}{\exists x\alpha^{\triangle} \vdash \neg(\forall x\neg\alpha^{\triangle})}\ \to -D}{\vdash \exists x\alpha^{\triangle} \to \neg(\forall x\neg\alpha^{\triangle})}\ \to -D
$$

per la transitività delle equivalenze ne segue che è pure derivabile in $DNC_{=}$ $\vdash \neg\forall x\neg\alpha^{\triangle} \longleftrightarrow \exists x\alpha$ che è la nostra tesi ricordando che $(\exists x\alpha)^{\triangle} \equiv \neg\forall x\neg\alpha^{\triangle}$ ovvero concludiamo che $\vdash (\exists x\alpha)^{\triangle} \longleftrightarrow \exists x\alpha$ è derivabile in $DNC_{=}$

Con questo capitolo ho illustrato che l'unica traduzione fedele dalla logica classica alla logica intuizionista così fatta è la traduzione di Gödel-Gentzen e per fare ciò non siamo ricorsi alla regola di $ex - falso - quodlibet$, quindi sarà valido anche per tradurre la logica classica predicativa con uguaglianza nella logica minimale predicativa con uguaglianza.

Conclusioni

In questa tesi ho dimostrato che la regola dell'ex-falso-quodlibet non è essenziale per garantire la validità della traduzione della doppia negazione di Gödel-Gentzen e delle sue varianti ad opera di Friedman (*"Classically and Intuitionistically Provably Recursive Functions"*, 1978) dalla logica classica predicativa con uguaglianza nella logica intuizionista predicativa con uguaglianza.

Infatti ho fornito una prova che la traduzione della doppia negazione e le sue varianti permettono di tradurre la logica classica predicativa con uguaglianza nella logica minimale predicativa con uguaglianza, ovvero il frammento della logica intuizionista predicativa con uguaglianza privato della regola dell'ex-falso-quodlibet.

Abbiamo concluso poi osservando che la traduzione della doppia negazione e' l'unica tra le varianti di Friedman ad essere fedele ovvero a tradurre la logica classica in quella minimale traducendo le formule classiche in formule ad esse equivalenti dal punto di vista classico.

Appendice

Calcolo dei sequenti per la deduzione naturale intuizionista con uguaglianza $DNM_{=}$:

$$\frac{ax.id}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash A} \qquad \frac{ax-tt}{\Gamma \vdash tt}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash C}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash C}\text{-sc}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, C \vdash A}\text{-in}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash C \quad C, \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}\text{-comp}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A\&C}{\Gamma \vdash A}\ \&\text{-S}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A\&C}{\Gamma \vdash C}\ \&\text{-S}_2 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash A\&C}\ \&\text{-D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee C \quad \Gamma, A \vdash D \quad \Gamma, C \vdash D}{\Gamma \vdash D}\ \vee - S \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee C}\ \vee - D_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash A \vee C}\ \vee - D_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg - S \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\neg - D$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \to C \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash C} \to -S \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash A \to C} \to -D$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A(x)}{\Gamma \vdash A[x/t]}\forall - S \qquad \frac{\Gamma \vdash A[x/w]}{\Gamma \vdash \forall x A(x)}\forall - D(w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x)))$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists y A(y) \quad \Gamma, A[y/w] \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \exists\text{ -S(w} \notin VL(\Gamma, \exists y A(y), C)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A[y/t]}{\Gamma \vdash \exists y A(y)}\ \exists - D$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = s \quad \Gamma \vdash A[x/t]}{\Gamma \vdash A[x/s]}\ =\text{-S} \qquad \frac{= -ax}{\Gamma \vdash t = t}$$

Calcolo dei sequenti per la deduzione naturale classica con uguaglianza $DNI_{=}$:

Regole di $DNM_{=}$

$+$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\text{ex-f-q}$$

Calcolo dei sequenti per la deduzione naturale classica con uguaglianza $DNC_{=}$:

Regole di $DNI_{=}$

$+$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \text{-ra}$$

Bibliografia

References

[1] Maria Emilia Maietti, *"NOTE di Logica Matematica"*, 2022/23. https://www.math.unipd.it/ maietti/lm21/lm21.pdf

[2] Gilda Ferreira, Paulo Oliva, *"On Various Negative Translations"* in *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 47, pp.21-33, 2011.

[3] Anne L. Troelstra, *"La seconda rivoluzione scientifica: matematica e logica. L'intuizionismo di Brouwer"* in *Storia della Scienza*, *Treccani.it*, 2004

[4] Adrian Rezus *"Lukasiewicz, Jàskowski and natural deduction"* in *Nijmegen, The Netherlands,* 2017.

[5] Giovanni Sambin *"Logica intuizionistica e logica classica a confronto"* in *Lettera Matematica, Pristem, n. 62–63* 2007.