



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

NETWORK FORMATION GAMES

Laureando **Andrea Bartolomei** *Relatore* **Prof. Luca Schenato**

ANNO ACCADEMICO 2012/2013

Indice

1	Introduzione	1
2	Concetti base Teoria dei giochi	5
2.1	Esempi di giochi	5
2.1.1	Il dilemma del prigioniero	5
2.1.2	Giochi Cooperativi	7
2.2	Giochi, Strategie, Costi e Guadagni	9
2.2.1	Definizione di un gioco a movimenti simultanei	9
2.3	Concetti di soluzione di base	10
2.3.1	Strategia a soluzione dominante	10
2.3.2	Equilibrio di Nash strategia pura	11
2.3.3	Il prezzo del anarchia e il prezzo di stabilità	11
3	Giochi a connessione locale	13
3.1	Modello	13
3.2	Descrizione di Soluzioni e del prezzo di stabilità	14
3.3	Il prezzo del anarchia	15
4	Giochi potenziali e a connessione globale	19
4.1	Giochi a connessione globale	20
4.2	Giochi potenziali e di congestione	23
4.3	Metodo della funzione potenziale e Prezzo della stabilità	24
4.4	Trovare l'equilibrio di Nash nei giochi potenziali	25
5	Localizzazione servizi	28
5.1	Il modello	28
5.2	Localizzazione dei servizi come gioco potenziale	30
5.3	Giochi a profitto	31
5.4	Il prezzo del anarchia per i giochi a profitto	32
5.5	Delimitare la qualità della soluzione senza raggiungere un equilibrio	33

<i>INDICE</i>	ii
6 Conclusioni	34
Bibliografia	36

Sommario

Grandi reti di computer come internet sono costruite, gestite, ed usate da un grande numero di diverse entità competitive. Alla luce di queste forze competitive, è sorprendente quanto queste reti siano efficienti. Una sfida entusiasmante nel area degli algoritmi della teoria dei giochi, stà nel comprendere i successi di queste reti in termini di teoria dei giochi: quali principi di interazione portano i partecipanti a formare delle reti così efficienti?

Si vuole presentare una serie di giochi per la formazione di una rete. Soprattutto ci concentreremo su giochi semplici che sono stati analizzati in termini di perdita di efficienza per rivalità. Inoltre si vuole sottolineare una tecnica fondamentale usata nel analisi di inefficienza in molti giochi: the potential function method. I modelli che si concentrano sul coinvolgere giocatori che possono unilateralmente costruire lati e perciò la risoluzione dell'equilibrio di Nash è un concetto appropriato.

Capitolo 1

Introduzione

La progettazione ed il funzionamento di grandi reti informatiche, come per esempio Internet, sono formati da un vasto numero di service provider indipendenti (Sistemi autonomi), i quali cercano egoisticamente di ottimizzare la qualità e il costo delle loro operazioni. La teoria dei giochi fornisce un quadro naturale per la modellazione di tali interessi egoistici e delle reti che li generano. Questi modelli a loro volta facilitano uno studio quantitativo del compromesso tra efficienza e stabilità nella formazione della rete.

Innanzitutto, introduciamo (capitolo 2) dei giochi classici della teoria dei giochi e mostriamo come possono essere visti in un contesto informatico. Inoltre introdurremmo alcuni dei concetti della teoria dei giochi per studiare questi giochi. Considereremo una serie di semplici giochi di formazione della rete che modellano i modi differenti con cui gli agenti egoistici possono creare e valutare le reti. Tutti i modelli che saranno presentati mirano a studiare due questioni concorrenti: in primis i giocatori vogliono minimizzare le spese che occorrono nel costruire la rete, ma allo stesso tempo mirano a garantire che la rete fornisca loro un'elevata qualità del servizio.

Ci sono varie misure con cui i giocatori possono valutare la qualità della rete. Innanzitutto ci occuperemo delle misure di distanza (Capitolo 3) e della connettività (Capitolo 4), anziché misure date dal effetto congestione. Inoltre si assume che i giocatori hanno delle considerazioni finanziarie. Nei capitoli 3 e 4, i giocatori tentano di minimizzare i costi di costruzione della rete che stanno creando. Nel capitolo 5, osserviamo un gioco con un aspetto finanziario più sofisticato: i giocatori rappresentano i service providers che fissano il prezzo per ogni utente e cercano di massimizzare il loro profitto, ovvero le entrate provenienti dagli utenti meno il costo della fornitura del servizio.

Per tutti i giochi considerati, usiamo l'equilibrio di Nash come concetto di soluzione e ci si riferisce alle reti corrispondenti a questi equilibri come

stabili. I modelli su cui ci si focalizza coinvolgono giocatori che possono costruire lati unilateralmente, perciò il concetto di soluzione di equilibrio di Nash è appropriato.

Per valutare la totalità della qualità di una rete, consideriamo il *costo sociale*, o la somma del costo di tutti i giocatori. Riferendoci alle reti che ottimizzano il costo sociale come *ottimo* o *socialmente efficiente*. L'obiettivo principale è capire meglio la quantità di scambi tra le reti che sono stabili e quelle che sono socialmente efficienti. Più precisamente, siamo interessati nel delimitare il prezzo dell'anarchia e il prezzo di stabilità (definiti nel capitolo 2.3.3). Questi modelli che consideriamo sono giochi di formazione della rete in cui queste misure si può dimostrare che sono le più piccole possibili.

Nel capitolo 3 consideriamo giochi a connessione locale dove i nodi del grafo sono giocatori che pagano attraverso un lato per connettersi direttamente ad altri nodi (lati incidenti). Nel selezionare una strategia, i giocatori affrontano due desideri in conflitto: di pagare il meno possibile, ed avere il cammino più corto con tutti gli altri nodi. L'obiettivo è di limitare la perdita di efficienza conseguente alla stabilità del sistema. Questi giochi di connessione sono stati ampiamente studiati nella letteratura economica per modelli di formazione di reti sociali, usando i lati per rappresentare le relazioni sociali. Il gioco di connessione locale può anche essere pensato come un semplice modello per come collega sottoreti di computer (stabilendo peering point) o per come modella la formazione di sottoreti in sistemi sovrapposti come reti P2P (peer-to-peer) connettendo utenti uno all'altro per il download di file.

Useremo un modello nel quale i giocatori possono formare lati con un vicino unilateralmente, ed useremo l'equilibrio di Nash come concetto di soluzione. Questo si differenzia da gran parte della letteratura economica, dove in genere si assume che un lato tra due giocatori abbia bisogno del consenso o il contributo di tutti e due i giocatori e dove la notazione di stabilità a due a due è usata al posto dell'equilibrio di Nash.

Il modello esaminato rappresenta il primo sforzo quantitativo per capire la perdita di efficienza delle reti stabili. In questo gioco, un singolo parametro α rappresenta il costo di costruire un qualsiasi lato. Ogni giocatore (rappresentato da un nodo) percepisce la qualità di una rete come la somma della distanza di ogni altro nodo. Giocatori puntano a minimizzare la funzione di costo che unisce sia la qualità della rete che il costo di costruzione della rete: tentano di minimizzare la somma dei costi di costruzione sostenuti e la distanza dagli altri giocatori. Perciò, i giocatori usano α come parametro di scambio tra i loro due obiettivi. Questo è forse il modo più semplice per modellare questo tipo di scambio. Mentre la semplicità di questo gioco rende facile valutare, come un modello stilizzato ignori una serie di problemi, come

la variazione dei costi e effetti di congestione.

Nel capitolo 4 studiamo un modello molto diverso (e anche abbastanza semplice) di progettazione della rete, col nome di giochi a connessione globale. Mentre i giocatori nel gioco del capitolo 3 possono solo fare scelte locali (tra gli altri nodi collegati a loro), i giocatori in questo gioco prendono decisioni globali, nelle quali loro possono costruire lati attraverso la rete. Diversamente dai giochi a connessione locale, questi giochi globali tentano di modellizzare giocatori che attualmente costruiscono e mantengono reti condivise su larga scala. Questi modelli inoltre permettono una migliore eterogeneità nei grafi orientati.

Nei giochi a connessione globale, un giocatore non è associato ad un solo nodo di rete, ma invece viene associato a certi obiettivi di connessione globale. Per raggiungere questi obiettivi, un giocatore potrebbe contribuire con un certo costo per ogni insieme di lati della rete. Come prima, vediamo la connettività come la misura primaria di qualità. Comunque, i giocatori non desiderano una connettività uniforme; invece, ogni giocatore ha un sottoinsieme di nodi che devono essere connessi e mira a fare in modo che sia il più economico possibile. Inoltre, diversamente dai giochi locali, i giocatori non sono interessati alla distanza, semplicemente vogliono connettere i loro terminali.

Come nel modello precedente, i giocatori sono sensibili ai costi. Il lato e ha un costo $c_e \geq 0$ e i giocatori che usano il lato e ne condividono il costo. In particolare, ci focalizziamo su una *regola di ripartizione equa*; tutti i giocatori usano un lato e e ne condividono il costo uniformemente tra loro. Inoltre esamineremo altri giochi di condivisione dei costi.

Una tecnica chiave usata in questi capitoli è la *potential function method*. Questo metodo è emerso come una tecnica generale nel capire la qualità di equilibrio. Vediamo questa tecnica in dettaglio nel capitolo 4.3. Mentre questa tecnica fornisce risultati solo per quel che riguarda il prezzo della stabilità, è interessante notare che molti risultati dei prezzi di anarchia conosciuti attualmente sono per giochi potenziali.

Nel capitolo 5 considereremo un altro gioco potenziale; un gioco di localizzazione dei servizi con un modello di costo più sofisticato. Nei capitoli 3 e 4, i giocatori semplicemente minimizzeranno i loro costi. Qui, i lati hanno ancora costi, ma i giocatori possono anche selezionare il prezzo per utente in modo da massimizzare il profitto: prezzo praticato meno il costo pagato. Ancora considereremo un modello molto semplice nel quale i giocatori collocano servizi per servire i clienti, formando così una rete tra providers e clienti. Mostriamo che una rete sociale è stabile (cioè il prezzo di stabilità è 1) e limiteremo il prezzo di anarchia.

Nel contesto dei giochi di localizzazione dei servizi, abbiamo anche limitato la qualità delle soluzioni ottenute dopo giocate egoistiche sufficientemente lunghe, senza assumere che i giocatori abbiano ancora raggiunto un equilibrio. Soluzioni di equilibrio potrebbero essere difficili da trovare e la naturale giocata in un gioco potrebbe non convergere ad un equilibrio. Perciò è spesso utile valutare la qualità delle soluzioni transitorie che risultano da giocate competitive. La struttura di un modello locale considerata è una delle poche classi di giochi per la quale questo tipo di forte limite è conosciuto.

Capitolo 2

Concetti base Teoria dei giochi

2.1 Esempi di giochi

In questo paragrafo presenteremo alcuni giochi classici della teoria dei giochi e mostreremo come possono essere visti in un contesto informatico.

2.1.1 Il dilemma del prigioniero

La teoria dei giochi si propone di modellare situazioni in cui multipli partecipanti interagiscono o influiscono tra i loro risultati. Iniziamo descrivendo quelli che forse sono i più conosciuti e meglio studiati giochi.

Esempio 2.1(Dilemma del prigioniero) Due criminali vengono accusati di aver commesso un reato. Gli investigatori li arrestano entrambi e li chiudono in due celle diverse, impedendo loro di comunicare. Ad ognuno di loro vengono date due scelte: confessare l'accaduto, oppure non confessare. Se entrambi rimangono in silenzio, le autorità non sono in grado di provare accuse contro di loro e quindi entrambi avranno un periodo breve di prigione, diciamo 2 anni, per reati minori. Se solo uno di loro confessa, il periodo di detenzione viene ridotto di un anno e la sua confessione sarà usata contro l'altro, che in cambio otterrà una pena di 5 anni. Infine se entrambi confessano, entrambi otterranno una riduzione della pena per aver cooperato con le autorità e finiranno in prigione con una pena di 4 anni (invece che 5).

Chiaramente, ci sono quattro soluzioni totali che dipendono dalla scelta fatta dai due prigionieri. Possiamo sinteticamente riassumere i costi sostenuti da queste quattro soluzioni attraverso la seguente matrice due per due. Ognuno dei due prigionieri "P1" e "P2" ha due possibili strategie (scelte) di "confessare" o di rimanere in "silenzio". Le due strategie del giocatore P1 corrispondono alle due righe, le due strategie del prigioniero P2 corrispondono alle due colonne delle matrici. I numeri nella matrice corrispondono ai costi

		P2	
		Confess	Silent
P1	Confess	4	5
	Silent	1	2
		4	1
		5	2

sostenuti dai giocatori in ogni situazione (i numeri a sinistra per il giocatore riga e i numeri a destra per il giocatore colonna). Una matrice così viene chiamata *matrice di costo* perché contiene il costo sostenuto dai giocatori per ogni scelta della loro strategia.

L'unica soluzione stabile in questo gioco è quando entrambi i giocatori confessano; negli altri tre casi, almeno uno dei giocatori può passare dal "silenzio" alla "confessione" e migliorare il proprio guadagno. Dal altro lato, il miglior risultato per entrambi i giocatori avviene quando nessuno dei due confessa. Comunque, questa non è una soluzione stabile - perfino se è attentamente pianificata - poiché ciascuno dei giocatori potrebbe essere tentato di confessare.

La situazione modellata dal dilemma del prigioniero sorge spontanea in molte differenti situazioni; diamo di seguito un cotesto di ISP routing.

Esempio 2.2 (ISP routing game) Consideriamo dei Internet Service Providers (ISPs) che devono inviarsi traffico tra di loro. Nel traffico di routing che proviene da un ISP con destinazione un differente ISP, la scelta fatta di routing dal originario ISP ha anche effetto sul carico a destinazione del ISP. Vedremo qui come questa situazione comporta esattamente il dilemma del prigioniero descritto prima.

Consideriamo due ISPs (Internet Service Provides), come raffigurato in Figura 2.1, ognuno avente la sua rete separata. Le due reti possono scambiare traffico attraverso due punti di transizione, chiamati peering points, che chiameremo C ed S . Nella figura abbiamo anche due paia di origini-destinazioni s_i e t_i tra loro incrociati tra i domini. Supponiamo che ISP 1 deve inviare traffico dal punto s_1 nel suo dominio al punto t_1 nel secondo dominio ISP. ISP 1 ha due scelte per inviare il suo traffico, corrispondenti ai due peering points. ISPs tipicamente si comporta egoisticamente e tenta di minimizzare

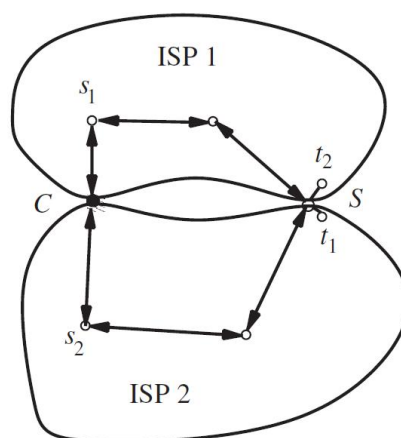


Figura 2.1: Problema di ISP routing

i propri costi ed inviare il traffico al più vicino peering point, così l'ISP del nodo di destinazione deve reindirizzare il traffico, indipendentemente da dove entra nel dominio. Il Peering point C è il più vicino, usando questo peering point, ISP 1 sostiene un costo di 1 unità (nel inviare il traffico lungo un lato), mentre se usa il più lontano peering point S , incorre in un costo di 2.

Notiamo che il più lontano peering point S è più diretto nel percorso di destinazione a t_1 e quindi l'instradamento attraverso S risulta il percorso più corto. La lunghezza del percorso attraverso C è 4 mentre quello attraverso S è 2, quindi la destinazione è molto vicina ad S .

La situazione descrive per ISP 1 il traffico instradato da s_1 a t_1 in modo analogo alla scelta del prigioniero nel Dilemma del Prigioniero: ci sono due scelte, una migliore rispetto una prospettiva egoistica ("confessare" o instradare attraverso il peering point C), ma danneggia l'altro giocatore. Per rendere il nostro gioco di routing identico al Dilemma del Prigioniero, presumiamo che simmetricamente il secondo ISP deve inviare traffico dal punto s_2 nel suo dominio al punto t_2 nel dominio del primo ISP. Le due scelte dei due ISP portano a un gioco con matrice dei costi identica alla matrice dove C corrisponde al "confessare" e S rappresenta il rimanere in "silenzio".

2.1.2 Giochi Cooperativi

Nel prossimo esempio, ci saranno risultati multipli che possono essere stabili. Questo gioco è un esempio di un cosiddetto "gioco cooperativo". Un gioco cooperativo si presenta quando gli interessi dei giocatori non sono in opposizione diretta tra loro, ma esiste una comunanza di interessi. I giocatori

perseguono un fine comune, almeno per la durata del gioco, alcuni di essi possono tendere ad associarsi per migliorare il proprio "pay-off"(guadagno).

Esempio 2.3 (Battaglia dei sessi) Consideriamo che due giocatori, un ragazzo e una ragazza, stanno decidendo come passare la sera. Entrambi considerano due possibilità: andare alla partita di baseball o andare a quella di softball. Il ragazzo preferisce il baseball mentre la ragazza preferisce il softball, ma entrambi vogliono passare la serata assieme piuttosto che separati. Di seguito esprimiamo le preferenze dei giocatori sempre tramite "payoffs" (guadagni).

		Boy	
		B	S
Girl	B	6 1	5 1
	S	2 5	2 6

Evidentemente, le due soluzioni dove i due giocatori scelgono giochi diversi non sono stabili. In ogni caso, uno dei due giocatori può migliorare il loro guadagno cambiando la sua azione. Dal altro lato, le due opzioni rimanenti, entrambe partecipano allo stesso gioco, sia che si tratti di softball o baseball, sono entrambe soluzioni stabili; la ragazza preferisce la prima il ragazzo la seconda.

I giochi cooperativi inoltre si presentano naturalmente in vari contesti. Qui diamo un esempio di gioco cooperativo nel contesto di routing per evitare congestioni. In contrasto, nel gioco di routing, i risultati positivi richiederanno instradamenti su differenti percorsi per evitare congestioni. Quindi, questo sarà un gioco "anti coordinamento".

Esempio 2.4 (Routing congestion game) Supponiamo che due flussi di informazioni originati dal nodo (proxy) O , devono essere instradati al resto della rete, come si vede in Figura 2.2. Supponiamo che il nodo O è connesso con il resto della rete attraverso due punti di connessione A e B , dove A è un pò più vicino di B . Comunque, entrambi i punti di connessione raggiungono facilmente la congestione, così inviare entrambe le trasmissioni attraverso lo stesso punto di connessione causa un ritardo extra. Buone soluzioni in questo

gioco sarebbero per i due giocatori "coordinare" e inviare le loro informazioni attraverso differenti punti di connessione.

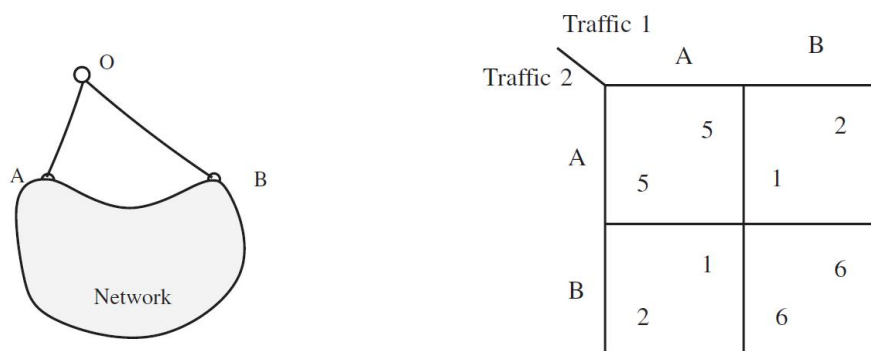


Figura 2.2: Routing per evitare congestioni e la corrispondente matrice di costo.

Definiamo questa situazione tramite un gioco con i due flussi di informazioni come giocatori. Ogni giocatore ha due possibili strategie - attraversare A o attraversare B - portando a quattro le possibilità totali. La matrice in Figura 2.2 esprime i costi dei giocatori in termini di ritardo dipesi dalle scelte di routing.

2.2 Giochi, Strategie, Costi e Guadagni

2.2.1 Definizione di un gioco a movimenti simultanei

Formalmente, un gioco consiste in un insieme di giocatori, $\{1, 2, \dots, n\}$. Ogni giocatore i ha il proprio insieme di possibili strategie, detto S_i . Per giocare il gioco, ogni giocatore i seleziona una strategia $s_i \in S_i$. Utilizzeremo $s = (s_1, \dots, s_n)$ per definire un *vettore di strategie* scelto dai giocatori e $S = \times_i S_i$ per definire l'insieme di tutti i possibili modi in cui i giocatori possono scegliere le strategie.

Il vettore delle strategie $s \in S$ scelto dai giocatori determina i risultati per ogni giocatore; in generale, il risultato sarà diverso per i differenti giocatori. Per specificare il gioco, dobbiamo dare, per ogni giocatore, un *ordine di preferenza* a tali risultati dando una completa, transitiva, riflessiva relazione binaria nel insieme di tutte le strategie vettoriali S ; presi due elementi di S , la relazione per il giocatore i dice quali di questi due risultati i preferisce leggermente; diciamo che *preferisce leggermente* S_1 a S_2 se i o preferisce S_1 a S_2 o li considera come risultati ugualmente buoni.

Il modo più semplice per specificare le preferenze è assegnando, ad ogni giocatore, un valore per ogni soluzione. In alcuni giochi sarà naturale pensare a dei valori come il profitto dei giocatori e in altri come i costi sostenuti dai giocatori. Indicheremo queste funzioni $u_i : S \rightarrow \mathfrak{R}$ e $c_i : S \rightarrow \mathfrak{R}$, rispettivamente. Chiaramente, costi e profitti possono essere utilizzati in modo intercambiabile tra loro, siccome $u_i(s) = -c_i(s)$.

Definiamo per ogni giocatore i , la strategia u_i , la funzione s_i , otteniamo per ognuno degli n giocatori un indipendente problema di ottimizzazione. Inoltre osserviamo che il profitto di ogni giocatore non dipende solo dalla sua strategia ma anche dalle strategie scelte dagli altri giocatori.

2.3 Concetti di soluzione di base

In questo paragrafo introduciamo i concetti di soluzioni di base che possono essere usati per studiare i tipi di giochi descritti nei capitoli seguenti. In particolare, verrà formalizzata la nozione di stabilità che informalmente viene utilizzata nella discussione delle soluzioni dei giochi.

2.3.1 Strategia a soluzione dominante

Il *dilemma del prigioniero* ha una proprietà speciale: in questa tipologia di giochi, ogni giocatore ha una strategia migliore unica. Diciamo che un gioco ha una *strategia di soluzione dominante* se ha questa proprietà.

Più formalmente, per un strategia vettoriale $s \in S$ usiamo s_i per indicare la strategia giocata dal giocatore i e s_{-i} indica il vettore (n-1)-dimensionale delle strategie giocate da tutti i giocatori. Ricordiamo che usiamo $u_i(s)$ per identificare i profitti sostenuti dal giocatore i . Useremo anche questa notazione $u_i(s_i, s_{-i})$ quando è più conveniente. Usando questa notazione, una strategia vettoriale $s \in S$ è una *strategia di soluzione dominante*, se per ogni giocatore i , ed ogni strategia vettoriale $s' \in S$ alternativa, abbiamo che

$$u_i(s_i, s'_{-i}) \geq u_i(s'_i, s'_{-i}).$$

È importante notare che una strategia a soluzione dominante non potrebbe dare un guadagno ottimo per ogni giocatore. Questo era il caso del gioco del *Dilemma del prigioniero*, in cui è possibile migliorare il guadagno per tutti i giocatori simultaneamente.

Avere una singola strategia dominante per ogni giocatore è un requisito estremamente rigoroso per un gioco e solo pochi giochi lo soddisfano.

2.3.2 Equilibrio di Nash strategia pura

Siccome i giochi raramente possiedono strategie a soluzioni dominanti, dobbiamo cercare un concetto di soluzione meno rigoroso e largamente applicabile. Una soluzione desiderabile nella teoria dei giochi è una in cui i giocatori individuali operano in accordo con i loro incentivi, per massimizzare il loro profitto. Questa idea è meglio definita dalla nozione d'equilibrio di Nash, che, nonostante i suoi difetti (di seguito indicati), è emersa come il concetto centrale di soluzione nella teoria dei giochi, con applicazioni estremamente varie. L'equilibrio di Nash acquisisce la nozione di soluzione stabile, vista negli esempi del paragrafo 2.1 ed usata nella battle of sexes come una soluzione dalla quale nessun giocatore singolo può individualmente migliorare il proprio benessere dissociandosi dal equilibrio di Nash.

Una strategia vettoriale $s \in S$ si dice che sia un equilibrio di Nash se per tutti i giocatori i e ogni altra strategia alternativa $s'_i \in S_i$, abbiamo che

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}).$$

In altre parole, nessun giocatore i può cambiare la propria strategia da s_i a s'_i e con ciò migliorare il proprio guadagno, assumendo che tutti gli altri giocatori rimangono alle strategie che hanno scelto in s . Osservare che tale soluzione è auto-imposta nel senso che una volta che i giocatori stanno giocando una tale soluzione, è nel interesse di ogni giocatore rimanere alle proprie strategie.

Evidentemente, una strategia a soluzione dominante è l'equilibrio di Nash. Inoltre, se la soluzione è strettamente dominante (ossia passando ad essa si migliora sempre il risultato), allora è anche l'unico equilibrio di Nash. Comunque, l'equilibrio di Nash potrebbe non essere unico. Per esempio, i giochi di coordinamento possono avere equilibri multipli.

Sappiamo già che l'equilibrio di Nash potrebbe non essere ottimo per tutti i giocatori, siccome strategie a soluzione dominante sono equilibri di Nash. Per giochi con multipli equilibri di Nash, differenti equilibri possono avere (ampiamente) differenti profitti per i giocatori. Per esempio, per un piccolo cambiamento del profitto matriciale, possiamo modificare il gioco della *battaglia dei sessi* in modo che abbia ancora due soluzioni stabili (quelle in cui entrambi i giocatori vanno nella stessa attività); comunque, entrambi i giocatori traggono un profitto molto superiore da una di queste soluzioni.

2.3.3 Il prezzo del anarchia e il prezzo di stabilità

Il *prezzo del anarchia*, è la più popolare misura di inefficienza di equilibrio, risolve i problemi di equilibri multipli utilizzando un approccio al caso peg-

giore. Appunto, il prezzo del anarchia di un gioco è definito come il rapporto tra la funzione obiettivo peggiore di un gioco di equilibrio e la soluzione ottima. La *funzione obiettivo* viene definita sui risultati di un gioco, che numericamente rappresenta il "bene sociale" o il "costo sociale" di un uscita. Due importanti funzioni obiettivo sono le funzioni *utilitarian* e *egalitarian*, definite come la somma dei costi dei giocatori e il costo massimo di un giocatore, rispettivamente. Introdurre una funzione obiettivo ci permette di *quantificare* l'inefficienza di un equilibrio, ed in particolare ritenere certe uscite di un gioco *ottime* o *approssimativamente ottime*.

Siamo interessati nel identificare giochi in cui il prezzo del anarchia è vicino a 1; in questi giochi, tutti gli equilibri sono una buona approssimazione per un risultato ottimo. Vediamo i comportamenti egoistici come benigni in questi giochi. In altri termini, il beneficio fornito (probabilmente costoso o impraticabile) da un controllo dittatoriale sulle azioni dei giocatori è ragionevolmente piccolo.

Il *prezzo di stabilità* è una misura dell'inefficienza creata per differenziare i giochi in cui *tutti* gli equilibri sono inefficienti e quelli in cui *alcuni* equilibri sono inefficienti. Formalmente, il prezzo di stabilità di un gioco è il rapporto tra il *miglior* valore della funzione obiettivo di uno dei suoi equilibri e tra uno dei suoi risultati ottimali. Naturalmente, in un gioco con equilibrio unico, il prezzo del anarchia e il prezzo di stabilità sono identici.

Un limite del prezzo di stabilità è che garantisce solo che un equilibrio sia approssimativamente ottimo, quindi fornisce garanzie minori rispetto al limite del prezzo del anarchia. Tuttavia, ci sono due ragioni per studiare il prezzo di stabilità. La prima, in alcune applicazioni, un limite non banale è possibile solo per il prezzo della stabilità. La seconda, il prezzo di stabilità ha una interpretazione naturale nei giochi di rete.

Il prezzo di stabilità così quantifica la degradazione della qualità della soluzione imponendo la teoria dei giochi in contrasto con la stabilità. Nei prossimi capitoli, quantificheremo solo l'inefficienza del peggiore o del miglior equilibrio di un gioco.

$$\text{Prezzo del Anarchia} = \frac{\text{Costo del peggior equilibrio di Nash}}{\text{Costo sociale ottimo}}$$

$$\text{Prezzo della stabilità} = \frac{\text{Costo del miglior equilibrio di Nash}}{\text{Costo sociale ottimo}}$$

Capitolo 3

Giochi a connessione locale

In questo capitolo considereremo dei semplici giochi di formazione di rete, dove i giocatori possono formare collegamenti con altri giocatori. Consideriamo un gioco con n giocatori, dove ogni giocatore è identificato da un nodo. Il nodo u potrebbe essere scelto per costruire dei lati da se stesso a un sottoinsieme di nodi, creando una rete. I giocatori hanno due obiettivi concorrenti; vogliono costruire (e quindi giocare) per il minor numero di lati possibili e ancora vogliono formare una rete che minimizza le distanze dal proprio nodo agli altri. Il principale obiettivo di questo capitolo è quantitativamente capire l'inefficienza che risulta dal comportamento egoistico di queste costruzioni di reti.

3.1 Modello

I giocatori nei giochi a connessione locale sono definiti con nodi in grafi G nei quali la rete è costruita. Una strategia per un giocatore u è un insieme di lati non orientati che u costruirà, che hanno tutti u come punto finale. Data una strategia vettoriale S , l'insieme dei lati in unione di tutte le strategie dei giocatori forma una rete $G(S)$ sui nodi del giocatore. Preso $dist_S(u, v)$ come path (percorso) più corto (in termini di numero di lati) tra u e v in $G(S)$. Usiamo $dist(u, v)$ quando S è chiara dal contesto. Il costo per costruire un lato è specificato da un singolo parametro, α . Ogni giocatore cerca di rendere le distanze tra gli altri nodi piccole e di pagare il meno possibile. Più precisamente, l'obiettivo del giocatore u è di minimizzare la somma dei costi e delle distanze $\alpha n_u + \sum_v dist(u, v)$, dove n_u è il numero di lati comprati dal giocatore u .

Osserviamo che finché i lati non sono orientati, se un nodo u compra un lato (u, v) , è anche un lato valido per l'uso da v a u , in particolare, è valido

per il nodo v . Così, all'equilibrio di Nash al massimo uno dei nodi u e v paga per connettersi al lato (u, v) . Inoltre, essendo la distanza $dist(u, v)$ infinita ogni qualvolta che u e v non sono connessi, allora all'equilibrio dobbiamo avere un grafo connesso. Diciamo che una rete $G = (V, E)$ è *stabile* per un valore α se esiste una strategia vettoriale stabile S che forma G .

Il costo sociale di una rete G è $SC(G) = \sum_{u \neq v} dist(u, v) + \alpha|E|$, cioè la somma dei costi dei giocatori. Si nota che la distanza $dist(u, v)$ contribuisce alla qualità complessiva due volte (una volta per u ed una volta per v). Confronteremo soluzioni stabili a quelle ottimali sotto queste misure.

3.2 Descrizione di Soluzioni e del prezzo di stabilità

Ora definiamo la struttura di una soluzione ottima come una funzione di α . Una rete si dice *ottima* o *efficiente* se minimizza il costo sociale $SC(G)$.

Lemma 3.1. *Se $\alpha \geq 2$ allora ogni stella è una soluzione ottima, invece se $\alpha \leq 2$ allora il grafo completo è una soluzione ottima.*

Dimostrazione. Per dimostrarlo consideriamo una soluzione ottima G con m lati. Sapendo che $m \geq n-1$; d'altro canto, il grafo sarebbe scollegato e quindi avere un costo infinito. Tutte le coppie di nodi ordinati non direttamente connesse ad un lato devono essere ad una distanza di almeno 2 da ogni altro lato e ci sono $n(n-1) - 2m$ di queste coppie. Aggiungendo le rimanenti $2m$ coppie con distanza 1 produco $\alpha m + 2n(n-1) - 4m + 2m = (\alpha - 2)m + 2n(n-1)$ come un limite inferiore del costo sociale di G . Entrambi la stella e il grafo completo corrispondono a questo limite. Il costo sociale è minimizzato rendendo m il più piccolo possibile quando $\alpha > 2$ (una stella) e il più grande possibile quando $\alpha < 2$ (un grafo completo). \square

Sia la stella che il grafo completo possono essere ottenuti come un equilibrio di Nash per un certo valore di α , come mostrato nel seguente lemma.

Lemma 3.2. *Se $\alpha \geq 1$ allora ogni stella è un equilibrio di Nash, invece se $\alpha \leq 1$ allora il grafo completo è un equilibrio di Nash.*

Dimostrazione. Prima supponiamo $\alpha \geq 1$ e consideriamo una stella. Si scopre che qualsiasi assegnazione dei lati ai suoi giocatori incidenti corrisponde all'equilibrio di Nash, ma per questo risultato, dobbiamo solo dare prova di una soluzione unica. In particolare, consideriamo la strategia in cui il giocatore 1 (il centro della stella) acquisisce tutti i lati dagli altri giocatori, mentre

i rimanenti $n - 1$ giocatori foglia collegati al centro non acquisiscono nulla. Il giocatore 1 non ha nessun incentivo a distaccarsi, in quanto così facendo si disconnette dal grafico incorrendo così in una sanzione infinita. Ogni giocatore foglia può cambiare solamente aggiungendo dei lati. Per ogni giocatore foglia, aggiungere k lati consente di risparmiare k in distanza ma viene a costare αk e pertanto non è un cambiamento proficuo. Quindi la stella è un equilibrio di Nash.

Ora supponiamo $a \leq 1$. Consideriamo un grafo completo, con ogni lato assegnato ad un giocatore incidente. Un giocatore che smette di pagare per un insieme di k lati risparmia αk nel costo, ma incrementa la distanza totale di k , quindi questo risultato è stabile. \square

Esistono anche altri equilibri, alcuni dei quali sono meno efficienti. Comunque, questo particolare equilibrio di Nash, in combinazione con le suddette soluzioni ottimali, è sufficiente come limite superiore per il prezzo di stabilità.

Teorema 3.1. *Se $\alpha \geq 2$ o $\alpha \leq 1$, il prezzo di stabilità è 1. Per $1 < \alpha < 2$, il prezzo di stabilità è al più $4/3$.*

Dimostrazione. Le affermazioni in merito a $\alpha \leq 1$ e $\alpha \geq 2$ sono immediatamente spiegate dai Lemma 3.1 e 3.2. Quando $1 < \alpha < 2$, la stella è un equilibrio di Nash, mentre la struttura ottima è un grafo completo. Per stabilire il prezzo di stabilità, abbiamo bisogno di calcolare il rapporto di costo tra le due soluzioni. Il caso peggiore per questo rapporto si verifica quando α si avvicina ad 1, dove raggiunge il valore di

$$\frac{2n(n-1) - 2(n-1)}{2n(n-1) - n(n-1)/2} = \frac{4n^2 - 6n + 2}{3n^2 - 3n} < 4/3$$

\square

Ora ci dedichiamo sul prezzo del anarchia per grandi valori di α .

3.3 Il prezzo del anarchia

Un limite sul prezzo del anarchia per questo gioco, riguarda due passaggi: limitare il diametro del grafo risultante e tramite il diametro limitarne il costo. Iniziamo con il secondo passo.

Lemma 3.3. *Se un grafo G al equilibrio di Nash ha diametro d , allora il costo sociale è al massimo $O(d)$ volte il minimo costo possibile.*

Dimostrazione. Il costo della soluzione ottimale è al meno $\Omega(\alpha n + n^2)$, siccome dobbiamo acquistare un grafo connesso, il cui costo è al meno $(n-1)\alpha$ e ci sono $\Omega(n^2)$ distanze, ciascuna delle quali è almeno 1. Per limitare la qualità della soluzione, consideriamo separatamente i costi rispetto alla distanza e i costi dei lati. Il costo della distanza è al massimo $n^2 d$, ed è pertanto al più d volte il minimo possibile.

Ora esaminiamo i costi dei lati. Prima consideriamo i *lati connessi* (*cut edges*), la cui rimozione scollega il grafo G . Ci sono al massimo $n-1$ lati connessi, così il costo totale di tutti i lati connessi è al massimo $\alpha(n-1)$, che a sua volta è al massimo la soluzione ottimale di costo. Ora consideriamo l'insieme di tutti i lati non connessi (noncut) pagati da un vertice v . Discuteremo che ci sono $O(nd/\alpha)$ di tali lati, con costo $O(dn)$ per un nodo v e così il costo totale di tutti i lati non connessi è $O(dn^2)$. Questo prova che il costo di G è $O(\alpha n + dn^2)$, completando la dimostrazione.

Preso un nodo u e per ogni lato $e = (u, v)$ pagato dal nodo u , sia V_e l'insieme di nodi di w , dove il percorso più corto da u a w passa per il lato e . Dimostreremo che la distanza tra i nodi u e v con il lato e rimosso sarà al massimo $2d$. Così eliminando e aumentiamo la distanza totale da u verso il resto dei nodi al massimo di $2d|V_e|$. Siccome l'eliminazione del lato farebbe risparmiare α nel costo dei lati e G è stabile, dobbiamo avere che $\alpha \leq 2d|V_e|$ e quindi $|V_e| \geq \alpha/2d$. Se ci sono almeno $\alpha/2d$ nodi in ogni V_e , allora il numero di questi lati adiacenti ad un nodo v dovrebbe essere al massimo $2dn/\alpha$, come sostenuto.

Ora si limiti la distanza tra i nodi u e v con il lato e eliminato. Consideriamo la Figura 3.1, raffigurante uno dei percorsi più corti evitando il lato e . Sia $e' = (u', v')$ il lato di questo percorso che entra nel insieme V_e . Il segmento P_u di questo percorso da u al nodo u' è il percorso più corto da u a $u' \notin V_e$, quindi eliminando e non influisce sul percorso più corto. Così P_u è al massimo lungo d . Il segmento P_v da v' a v è al massimo lungo $d-1$, come $P_v \cup e$ forma il percorso più corto tra u e v' . Così la lunghezza totale è al massimo $2d$. \square

Usando questo lemma, possiamo limitare il prezzo del anarchia di $O(\sqrt{\alpha})$.

Teorema 3.2. *Il diametro di un equilibrio di Nash è al massimo $2\sqrt{\alpha}$ e quindi il prezzo di anarchia è al massimo $O(\sqrt{\alpha})$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 3.3, dobbiamo solo dimostrare che per tutti i nodi u e v , $dist(u, v) < 2\sqrt{\alpha}$. Supponiamo per i nodi u e v , $dist(u, v) \geq 2k$, per qualche k . La principale osservazione è che aggiungendo il lato (u, v) , il nodo u dovrebbe pagare α e migliorare la sua distanza nella seconda metà

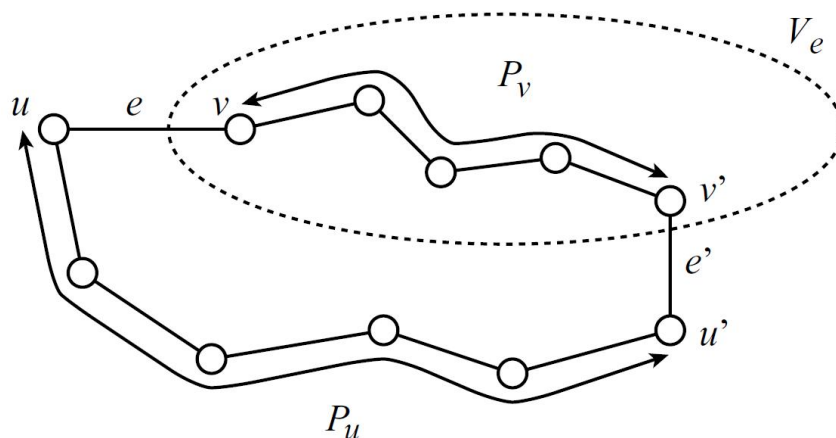


Figura 3.1: Percorso $P_u, (u', v')P_v$ è il $u - v$ percorso più corto dopo aver eliminato $e = (u, v)$.

del percorso più corto $u - v$ per $(2k - 1) + (2k - 3) + \dots + 1 = k^2$. Così se $dist(u, v) > 2\sqrt{\alpha}$, il nodo u beneficerebbe nell'aggiunta del lato (u, v) , una contraddizione. \square

Ora mostriamo un limite $O(1)$ nel prezzo del anarchia per $\alpha = O(\sqrt{n})$.

Teorema 3.3. *Il prezzo del anarchia è $O(1)$ ogni volta che α è $O(\sqrt{n})$. Più in generale, il prezzo del anarchia è $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.*

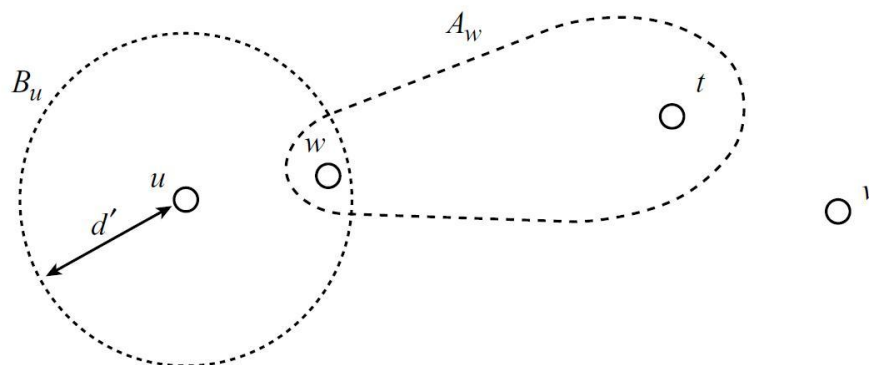


Figura 3.2: Nodi u e v che si trovano alla massima distanza d . B è l'insieme di nodi che al massimo distano $d' = (d - 1)/4$ dal nodo u e A_w è l'insieme di nodi il cui percorso più corto parte da B e arriva a w .

Dimostrazione. Utilizziamo ancora il Lemma 3.3, così tutto quello che dobbiamo fare è dimostrare il nostro limite nel diametro d . Consideriamo i nodi u e v con $\text{dist}(u, v) = d$. Sia $d' = \lfloor (d-1)/4 \rfloor$ e sia B l'insieme di nodi al massimo d' distante da u , come mostrato in Figura 3.2. Si consideri come la distanza $d(v, w)$ cambi per i nodi $w \in B$ aggiungendo il lato (v, u) . Prima di aggiungere il lato, $\text{dist}(v, w) \geq d - d'$. Dopo aver aggiunto (v, u) , la distanza decresce al massimo di $d' + 1$. Così v risparmia almeno $(d - 2d' - 1)$ in distanza a tutti i nodi in B , pertanto permetterebbe di risparmiare almeno $(d - 2d' - 1)|B| \geq (d - 1)|B|/2$ nei costi di distanza totale comprando il lato (v, u) . Se G è stabile, dobbiamo avere $(d - 1)|B|/2 \leq \alpha$.

Per un nodo $w \in B$ e sia A_w l'insieme contenente tutti i nodi t per cui il percorso più breve $u - t$ lascia l'insieme B dopo il nodo w . Si nota che se A_w non è vuoto, allora w deve essere esattamente alla distanza d' da u . Dunque, il nodo u farebbe risparmiare $|A_w|(d' - 1)$ nel costo della distanza comprando il lato (u, w) . Se la rete è al equilibrio, allora dobbiamo avere che $|A_w|(d' - 1) \leq \alpha$. Ci deve essere un nodo $w \in B$ che ha $|A_w| \geq (n - |B|)/|B|$. Con la combinazione di questi, otteniamo che

$$(d' - 1)(n - |B|)/|B| \leq \alpha.$$

Questo implica che $|B|(1 + \alpha/(d' - 1)) \geq n$ e finché $\alpha > d > d'$,

$$|B| \geq n(d' - 1)/2\alpha.$$

Combinando questo con il limite precedenti $\alpha \geq (d - 1)|B|/2$ produce

$$\alpha \geq (d - 1)|B|/2 \geq (d - 1)n(d' - 1)/4\alpha \geq n(d' - 1)^2/\alpha.$$

Così $\alpha^2 \geq n(d' - 1)^2$ e quindi $d \leq 4(d' + 1) + 1 \leq 4\alpha/\sqrt{n} + 9$, il quale implica il limite sostenuto nel Lemma 3.3. \square

Capitolo 4

Giochi potenziali e a connessione globale

In questo capitolo introduciamo un'ampia classe di giochi conosciuti come *giochi potenziali*. Questa classe comprende un numero naturale e ben studiato di giochi basati sulla rete. Come vedremo, i giochi potenziali posseggono varie interessanti proprietà; l'equilibrio puro esiste sempre, la convergenza delle migliori risposte dinamiche è garantita e il prezzo della stabilità può essere limitato utilizzando una tecnica denominata *potential function method*. L'esempio per questa classe di giochi è un gioco per la formazione di reti chiamato *gioco a connessione globale (global connection game)*. Iniziamo definendo questo gioco e presentiamo un pò di teoremi riguardo all'equilibrio puro e al prezzo di stabilità. Poi introduciamo i giochi potenziali e forniamo dei risultati generali per questo quadro più ampio.

Il gioco per la formazione di rete discusso nel paragrafo 3.2 è locale nel senso che un giocatore può costruire collegamenti ad altri nodi, ma non ha alcun mezzo diretto per influenzare la struttura della rete a distanza. Come potrebbe essere il caso con reti sociali o relazioni di peering (interconnessione tra due reti) in una rete digitale. I giochi a connessione globale, in contrasto, formano modelli di giocatori che producono decisioni strutturali globali; i giocatori possono costruire lati attraverso la rete e così considerare strategie relativamente più complesse. Questo gioco potrebbe essere più appropriato per modellare l'effettiva costruzione e manutenzione di reti fisiche su larga scala.

Oltre ai vari ambiti della strategia dei giocatori, ci sono due ulteriori caratteristiche che differenziano questi giochi per la formazione di reti. Primo, in cambio di una strategia spaziale più ampia per giochi a connessione globale, consideriamo una funzione obiettivo semplificata del giocatore. In particolare, assumiamo che i giocatori sono indifferenti alla loro distanza con altri

nodi della rete e invece vogliono solamente costruire una rete che connette i loro terminali al minor costo possibile. L'altra distinzione rilevante è che i giochi a connessione globale supportano la cooperazione, siccome più giocatori possono condividere il costo della creazione di collegamenti per beneficio reciproco. Nei giochi a connessione locale, un lato potrebbe beneficiare di giocatori multipli e ancora il costo del lato è sempre coperto interamente da uno dei due giocatori incidente. Ora diamo una descrizione formale dei giochi a connessione globale.

4.1 Giochi a connessione globale

Dato un grafo orientato $G = (V, E)$ con lati a costi non negativi c_e per tutti i lati $e \in E$. Esistono k giocatori, ed ogni giocatore i ha un nodo di origine s_i specificato e un nodo di destinazione t_i (lo stesso nodo potrebbe essere una sorgente o una destinazione per giocatori multipli). L'obiettivo dei giocatori i è di costruire una rete nella quale t_i è raggiungibile da s_i , pagando il meno possibile per farlo. Una strategia per il giocatore i è un percorso P_i da s_i a t_i in G . Scegliendo P_i , il giocatore i si impegna a costruire tutti i lati lungo P_i nella rete finale. Data una strategia per ogni giocatore, definiamo la rete creata come $\cup_i P_i$.

Resta da assegnare il costo di ogni lato della rete ai giocatori che la utilizzano, in quanto ciò permetterà ai giocatori di valutare l'utilità di ogni strategia. L'obiettivo principale sarà sul singolo meccanismo di condivisione dei costi con un numero di interessanti proprietà. In particolare, consideriamo il meccanismo che divide il costo di un lato in modo uniforme tra tutti i giocatori contenuti nel percorso. Più concretamente, se k_e definisce il numero di giocatori il cui percorso contiene il lato e , quindi e assegna un costo condiviso di c_e/k_e per ogni giocatore che utilizza e . Così il costo totale sostenuto dal giocatore i sotto una strategia vettoriale S è data da

$$cost_i(S) = \sum_{e \in P_i} c_e/k_e.$$

Visto che il costo totale assegnato a tutti i giocatori è esattamente il costo per realizzare la rete. Ci si riferisce ad essa come *equo* o *meccanismo di condivisione dei costi di Shapley*. L'obiettivo sociale per questo gioco è semplicemente il costo della rete creata.

I due esempi in Figura 4.1 forniscono una qualche informazione utile su questo gioco. L'esempio in Figura 4.1(a) mostra un semplice gioco, dove ci sono k giocatori che hanno la stessa sorgente e la stessa destinazione e devono scegliere tra due archi paralleli (di costo differente). Il gioco ammette due

equilibri di Nash in cui tutti i giocatori scelgono lo stesso percorso. Il costo sociale per il ramo di sinistra è 1, mentre per il ramo di destra è k . Poiché la soluzione del ramo di sinistra è anche una soluzione ottimale, il prezzo di stabilità è 1, mentre il prezzo dell'anarchia è k . L'obiettivo principale sarà limitare il prezzo di stabilità in generale.

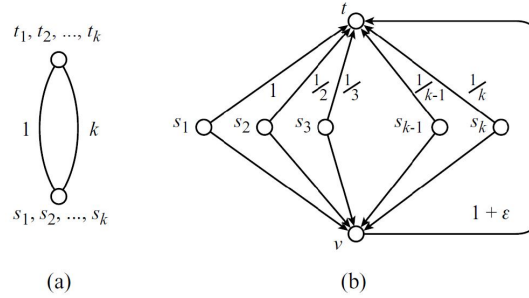


Figura 4.1: Un esempio di giochi a connessione globale con prezzo di anarchia k (a) e un esempio di prezzo di stabilità \mathcal{H}_k (b).

L'esempio in Figura 4.1(b) ci mostra un gioco dove ci sono k giocatori che devono raggiungere una destinazione comune t . Ogni giocatore i può scegliere tra due percorsi: uno diretto da s_i a t che deve utilizzare in maniera esclusiva ed un percorso più lungo ma condiviso. La soluzione ottima ha costo $1 + \epsilon$, ed è rappresentata dalla situazione in cui tutti i giocatori scelgono il percorso condiviso (verso il basso). Questa soluzione, però, non è un equilibrio di Nash perché il giocatore k , che deve pagare un costo $(1 + \epsilon)/k$ e quindi sarebbe incentivato a scegliere un percorso diretto (verso l'alto) che costa $1/k$. Se, però, le spese dell'arco condiviso devono essere divise solo tra $k - 1$ giocatori allora anche il giocatore $k - 1$ preferisce utilizzare il percorso verso l'alto. Iterando questo ragionamento, si arriva a provare che l'unico equilibrio di Nash del gioco è quello in cui tutti i giocatori scelgono il percorso verso l'alto, con costo $\mathcal{H}_k = \sum_{i=1}^k 1/i$. Così, il prezzo di stabilità di questa rete è approssimativamente \mathcal{H}_k . Entrambi questi risultati usufruiscono di una *funzione potenziale*, che verrà formalmente introdotta nel paragrafo 4.2.

Consideriamo un esempio di gioco a connessione globale e una strategia vettoriale $S = (P_1, P_2, \dots, P_k)$ contenente un percorso $s_i - t_i$ per ogni giocatore i . Per ogni lato e , definiamo una funzione $\Psi_e(S)$ di mappatura di una strategia vettoriale in valori reali come

$$\Psi_e(S) = c_e \cdot \mathcal{H}_{k_e},$$

dove k_e è il numero di giocatori che usano il lato e in S e $\mathcal{H}_k = \sum_{j=1}^k 1/j$. Sia $\Psi(S) = \sum_e \Psi_e(S)$, con le seguenti proprietà.

Lemma 4.1. *Sia $S = (P_1, P_2, \dots, P_k)$ e sia $P'_i \neq P_i$ un percorso alternativo per qualche giocatore i , definiamo una nuova strategia vettoriale $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Allora*

$$\Psi(S) - \Psi(S') = u_i(S') - u_i(S).$$

Dimostrazione. Questo lemma afferma che quando un giocatore i cambia strategia, il corrispondente cambio in $\Psi(\cdot)$ rispecchia esattamente il cambio di profitto del giocatore i . Sia k_e il numero di giocatori che usano e sotto la strategia S . Per ogni lato e che appare in entrambi o in nessuno dei due percorsi P_i e P'_i , il costo pagato per i attraverso e è lo stesso sotto S e S' . Allo stesso modo, $\Psi_e(\cdot)$ ha lo stesso valore sotto S e S' . Per ogni lato e in P_i ma non in P'_i , spostandosi da S a S' , i risparmia (e incrementa il suo guadagno di) c_e/k_e , che è precisamente il decremento in $\Psi_e(\cdot)$. Così pure, per un lato e in P'_i ma non in P_i , un giocatore i incorre in un costo di $c_e/(k_e + 1)$ nel passaggio da S a S' , che corrisponde al aumento di $\Psi_e(\cdot)$. Finché $\Psi(\cdot)$ è semplicemente la somma della $\Psi_e(\cdot)$ su tutti i lati, il cambiamento collettivo di profitto del giocatore i è esattamente la negazione del cambiamento in $\Psi(\cdot)$. \square

Inoltre si nota che $\Psi(S)$ è strettamente correlata al $cost(S)$, il costo della rete generata da S . Più esattamente, consideriamo ogni lato e usato da S . La funzione $\Psi_e(S)$ è almeno c_e (ogni lato utilizzato è selezionato da almeno un giocatore) e non più di $\mathcal{H}_k c_e$ (ci sono solo k giocatori). Pertanto si avrà

Lemma 4.2.

$$cost(S) \leq \Psi(S) \leq \mathcal{H}_k cost(S).$$

Questi due lemma vengono utilizzati per dimostrare i seguenti due teoremi, che saranno seguiti dai teoremi 4.3, 4.4 e 4.5.

Teorema 4.1. *Ogni esempio di gioco a connessione globale presenta un equilibrio puro di Nash e la risposta dinamica migliore converge sempre.*

Teorema 4.2. *Il prezzo della stabilità nei giochi a connessione globale con k è al massimo \mathcal{H}_k , il k -esimo numero armonico.*

In quanto le dimostrazioni di questi due risultati sono effettivamente applicate a una classe più ampia di giochi (es. giochi potenziali), ora introduciamo questi giochi e dimostriamo il relativo risultato in questo contesto più generale.

4.2 Giochi potenziali e di congestione

Per ogni gioco finito (si intende un gioco con un numero qualunque ma finito di giocatori e di strategie), un *esatta funzione potenziale* Φ che mappa ogni strategia vettoriale S in qualche valore reale e soddisfa le seguenti condizioni: Se $S = (S_1, S_2, \dots, S_k)$, $S'_i \neq S_i$ è una strategia alternativa per qualche giocatore i e $S' = (S_{-i}, S'_i)$, allora $\Phi(S) - \Phi(S') = u_i(S') - u_i(S)$. In altre parole, se lo stato corrente del gioco è S e il giocatore i passa dalla strategia S_i alla S'_i , il conseguente risparmio di i è esattamente uguale alla riduzione del valore della funzione potenziale. Quindi il Lemma 4.1 afferma semplicemente che Ψ è una funzione potenziale esatta per i giochi a connessione globale.

Non è difficile vedere che un gioco ha al massimo una funzione potenziale, più l'aggiunta in modulo di una costante. Un gioco che è in possesso di una funzione potenziale esatta è chiamato *gioco potenziale esatto*. Per il restante capitolo, si ometterà la parola esatta da questi termini. Un numero sorprendente di giochi interessanti si rivelano essere giochi potenziali e questa struttura ha un numero notevole di implicazioni per l'esistenza di equilibri e la convergenza sempre all'equilibrio.

Teorema 4.3. *Ogni gioco potenziale ha almeno un equilibrio di Nash puro, ossia la strategia S che minimizza $\Phi(S)$.*

Dimostrazione. Sia Φ una funzione potenziale per questo gioco e sia S una strategia vettoriale pura che minimizza $\Phi(S)$. Si consideri ogni mossa di un giocatore i come risultato di una nuova strategia vettoriale S' . Per ipotesi, $\Phi(S') \geq \Phi(S)$ e dalla definizione di funzione potenziale, $u_i(S') - u_i(S) = \Phi(S) - \Phi(S')$. Quindi il profitto di i non può crescere con queste mosse e quindi S è stabile. \square

Facendo un passo in avanti, si nota che ogni stato S con la proprietà che Φ non può decrescere alterando una qualsiasi strategia in S è un equilibrio di Nash per lo stesso argomento. Inoltre, la miglior risposta dinamica simula ricerche locali in Φ ; migliorano le mosse dei giocatori decrescendo il valore della funzione potenziale. Assieme queste osservazioni, implicano il seguente risultato.

Teorema 4.4. *In ogni gioco potenziale finito, la miglior risposta dinamica sempre converge ad un equilibrio di Nash.*

Si nota che questi due risultati derivano dal Teorema 4.1.

Una caratterizzazione meno astratta dei giochi potenziali può essere trovata in una classe di giochi chiamati *giochi a congestione*. Un gioco a congestione ha k giocatori e n risorse. I giocatori i hanno un insieme S_i di

strategie ammissibili, ognuna delle quali specifica un sottoinsieme di risorse. Ogni risorsa j ha una funzione di costo $c_j(x)$ dipendente dal carico, che indica il costo occorso da un giocatore i a scegliere una strategia che include la risorsa j se ci sono x giocatori in totale. Il costo totale caricato al giocatore i che sceglie una strategia S_i è semplicemente la somma dei costi sostenuti da ogni risorsa in S_i . Così se il carico totale nel collegamento a j è x_j , allora il giocatore i paga $\sum_{j \in S_i} c_j(x_j)$. Il gioco a connessione globale è chiaramente un gioco a congestione; i lati sono risorse, i percorsi $s_i - t_i$ sono strategie ammissibili per giocatori i e le funzioni di costo sono $c_e(x) = c_e/x$.

Ora presentiamo un generico limite superiore sul prezzo della stabilità per un gioco potenziale arbitrario.

4.3 Metodo della funzione potenziale e Prezzo della stabilità

Supposto di avere un gioco potenziale G con una funzione potenziale $\Phi(S)$ e funzione costo sociale $c(S)$. Se $\Phi(S)$ e $c(S)$ sono simili, allora il prezzo di stabilità deve essere piccolo.

Teorema 4.5. *Supposto che abbiamo un gioco potenziale con funzione potenziale Φ , assumiamo inoltre che per ogni risultato S , abbiamo*

$$\frac{\text{cost}(S)}{A} \leq \Phi(S) \leq B \cdot \text{cost}(S)$$

per alcune costanti $A, B > 0$. Quindi il prezzo di stabilità è al massimo AB .

Dimostrazione. Sia S^N la strategia vettoriale che minimizza $\Phi(S)$. Dal Teorema 4.3, S^N è un equilibrio di Nash. Basta dimostrare che l'attuale costo di questa soluzione non è molto più grande rispetto ad una soluzione S^* di costo minimo. Per ipotesi, abbiamo che $\frac{\text{cost}(S^N)}{A} \leq \Phi(S^N)$. Dalla definizione di S^N , abbiamo che $\Phi(S^N) \leq \Phi(S^*)$. Infine, la seconda disequazione per assunzione implica che $\Phi(S^*) \leq B \cdot \text{cost}(S^*)$. Unire queste disequazioni assieme produce $\text{cost}(S^N) \leq AB \cdot \text{cost}(S^*)$, come richiesto. \square

Si nota che questo risultato, preso assieme al Lemma 4.2, implica direttamente il Teorema 4.2. Questa tecnica per limitare il prezzo della stabilità usando la funzione potenziale è conosciuto come *metodo della funzione potenziale (potential function method)*.

In generale, risultati che minimizzano la funzione potenziale potrebbero non essere il miglior equilibrio di Nash, così questo limite non è sempre stretto. Comunque, nel caso di un gioco a connessione globale, abbiamo

visto che il prezzo di stabilità è al massimo \mathcal{H}_x . Così, per questa classe di giochi, il limite dato dal metodo della funzione potenziale è il migliore possibile.

Abbiamo visto che i giochi potenziali hanno equilibrio puro e che il prezzo di stabilità può essere limitato attraverso il metodo della funzione potenziale. Ora consideriamo la complessità di trovare questi equilibri in giochi potenziali generali.

4.4 Trovare l'equilibrio di Nash nei giochi potenziali

Il Teorema 4.4 fornisce una media algoritmica per il raggiungimento dell'equilibrio puro nei giochi potenziali. Sfortunatamente, questo teorema non si dichiara in merito al tasso di convergenza. In alcuni giochi, la migliore risposta dinamica converge sempre velocemente, ma in molti giochi non è così. In alcuni giochi, la funzione potenziale Φ può essere minimizzata in tempo polinomiale. Per ottenere una migliore gestione della complessità per trovare un equilibrio puro nei giochi potenziali, consideriamo il problema strettamente correlato di trovare i punti di massimo o minimi locali ottimi nei problemi di ottimizzazione.

La classe di problemi di *ricerca locale polinomiale* (PLS, Polynomial Local Search) furono definiti come una classe astratta di problemi di ottimizzazione locale. Innanzitutto, cerchiamo di definire un *problema di ottimizzazione* (detto anche problema di minimizzazione) generale come segue. Abbiamo un insieme di istanze I e per ogni istanza $x \in I$ un insieme di soluzioni ammissibili $F(x)$ e una funzione di costo $c_x(s)$ definita su tutta $s \in F(x)$. Inoltre abbiamo un algoritmo in tempo polinomiale che prende un istanza x e una soluzione candidata $s \in F(x)$ e controlla se s sia una soluzione ammissibile ($s \in F(x)$). Se lo è, l'algoritmo elabora il costo di tale soluzione, $c_x(s)$. Il problema di ottimizzazione vuole trovare una soluzione $s \in F(x)$ con costo minimo $c_x(s)$ per una data istanza $x \in I$.

Per definire un *problema di ottimizzazione locale*, dobbiamo anche specificare un sottoinsieme $N_x(s) \subset F(x)$ per ogni istanza $x \in I$ e in ogni soluzione $s \in F(x)$. Una soluzione $s \in F(x)$ è *localmente ottimale* se $c_x(s) \leq c_x(s')$ per tutti gli $s' \in N_x(s)$. Il problema di ottimizzazione locale vuole trovare un ottimo locale (punto di massimo o minimo locale) $s \in F(x)$ per una data istanza di $x \in I$. Un *problema di ottimizzazione locale* è un *PLS* se abbiamo un algoritmo che, per ogni istanza $x \in I$ e soluzione $s \in F(x)$, decide che s

è punto localmente ottimo (punto di massimo o minimo locale), se non lo è, restituisce $s' \in N_x(s)$ con $c_x(s') < c_x(s)$.

Fu dimostrato che trovare un equilibrio di Nash in un gioco potenziale è un problema PLS-completo, assumendo che la risposta migliore per ogni giocatore può essere trovata in tempo polinomiale. Vedere questo ci porta ad affermare che il sottoinsieme $N_x(s)$ di una strategia vettoriale s sono tutte le strategie vettoriali s' che possono essere ottenute da s per un singolo giocatore cambiando la strategia di uno o del altro. Per definizione, una funzione potenziale Φ è localmente ottimale (punto di massimo o minimo locale) per una funzione di costo $c_x = \Phi(s)$ se e solo se è un equilibrio di Nash puro, in modo da trovare un equilibrio di Nash nei problemi PLS.

Un problema è PLS-completo se è un problema PLS e c'è una riduzione al tempo polinomiale rispetto a tutti gli altri problemi PLS così che l'ottimo locale obbiettivo del problema corrisponda al ottimo locale del problema originale. Dopo l'introduzione di questa classe, molti dei problemi di ricerca locale hanno dimostrato di essere dei PLS-completi, compresi le versioni pesate di soddisfacibilità. I problemi pesati di soddisfacibilità sono definiti da una formula nella forma normale congiuntiva $C_1 \wedge \dots \wedge C_n$, con un peso non negativo w_j per ogni proposizione C_j . Soluzioni s sono vere assegnazioni di variabili e il costo associato $c(s)$ è la somma dei pesi delle proposizioni insoddisfatte. Qui dimostriamo in forma ridotta questo problema pesato di soddisfacibilità che trova un equilibrio di Nash in un gioco potenziale che è un PLS-completo.

Teorema 4.6. *Trovare un equilibrio di Nash puro in un gioco potenziale, dove la risposta migliore può essere calcolata in tempo polinomiale, è un problema PLS-completo.*

Dimostrazione. Abbiamo definito che trovare un equilibrio puro di Nash in tali giochi è un problema PLS. Per vedere che il problema è PLS-completo, usiamo una riduzione del problema pesato di soddisfacibilità. Consideriamo un istanza pesata di soddisfacibilità con k variabili x_1, \dots, x_k e n clausole C_1, \dots, C_n con peso w_j per la clausola C_j . Il nostro gioco di congestione avrà un giocatore per ogni variabile e una risorsa per ogni clausola. Il giocatore i , associato con la variabile x_i , ha due possibili strategie: può selezionare l'insieme di risorse S_i composte di tutte le clausole che contengono il termine x_i , o \bar{S}_i , che include tutte le clausole contenenti il termine \bar{x}_i . Scegliendo S_i corrisponde a definire x_i come *falso*, mentre scegliendo \bar{S}_i corrisponde a definire x_i a vero.

La principale osservazione è che la clausola C_j con k_j letterali è falsa se e solo se il corrispondente elemento ha congestione k_j . Sia C_j essere una clausola con k_j letterali e peso w_j . Definiamo la congestione il costo degli

elementi j che corrispondono alle clausole C_j come $c_j(\xi) = 0$ se $\xi < k_i$ e $c_j(k_j) = w_j$. Per la strategia vettoriale con il relativo assegnamento di s a vero, la funzione potenziale ha valore $\Phi(s) = \sum_j c_j(\xi_j)$, dove ξ_j è il numero di valori letterali falsi in C_j . Il peso di assegnazione di s è esattamente $\Phi(s)$, così l'equilibrio di questo gioco è precisamente l'ottimo locale del problema di soddisfacibilità. \square

Capitolo 5

Localizzazione servizi

Nei modelli finora considerati, i giocatori costruiscono reti in modo da ottenere certi obiettivi basati sulla connettività. Intuitivamente, questi obiettivi hanno lo scopo di catturare i desideri dei giocatori per fornire un servizio per una parte di utenti della rete. Data questa prospettiva, potremmo chiederci cosa succede quando invece vediamo i giocatori come agenti finanziariamente motivati; dopotutto, i servizi dei provider sono principalmente concentrati nel massimare il profitto e mantenere le reti a questo scopo. Questo suggerisce un modello nel quale i giocatori non solo costruiscono reti ma anche pagano per l'utilizzo di essa, mentre gli utenti della rete stimolano la concorrenza cercando il servizio disponibile più economico.

Consideriamo qui un gioco dei prezzi basato sul problema della localizzazione di servizi. Nel problema di localizzazione di servizi, vogliamo individuare k servizi, come dei Web server o dei depositi, in modo da servire un insieme di clienti proficui. Ci concentriamo nel capire l'effetto del costo egoistico sulla complessiva efficienza della rete che i giocatori formano.

Il primo problema di localizzazione dei servizi competitivo che andiamo a presentare è il seguente, in cui i giocatori collocano servizi così da massimizzare il loro stesso profitto. Poi mostreremo che questo gioco di localizzazione dei servizi è un gioco potenziale e dimostreremo che il prezzo dell'anarchia per una classe ancora più ampia di giochi è minore.

5.1 Il modello

Supposto che abbiamo un insieme di utenti che ha bisogno di un servizio e k fornitori di servizi (service provider). Assumiamo che ogni service provider i ha un insieme di possibili postazioni A_i dove collocare i loro servizi.

Definiamo $A = \cup_i A_i$ l'insieme di tutte le postazioni dei servizi. Per ogni postazione $s_i \in A_i$ c'è un costo associato c_{js_i} per servire un cliente j dalla postazione s_i . Possiamo pensare a tali costi come lati associati ad un grafo bipartito che ha tutti gli utenti da una parte e tutte le sedi (A) dall'altra parte del grafo, come mostrato in Figura 5.1. Una strategia vettoriale $s = \{s_1, \dots, s_k\}$ può essere pensata come ad un sottografo di questo grafo

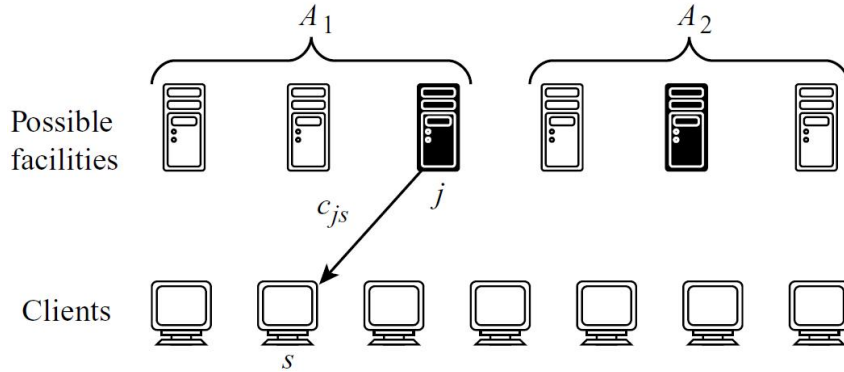


Figura 5.1: Grafo bipartito delle possibili postazioni dei servizi e dei clienti. I servizi selezionati sono marcati in nero.

costituito da un cliente e i nodi selezionati (marcati in nero nella Figura 5.1).

L'obiettivo è di massimizzare il benessere sociale, anziché minimizzare semplicemente il costo di costruire una rete. Assumiamo che i clienti j hanno un valore π_j per servizio, ed un profitto $\pi_j - p$ ricevendo un servizio al prezzo $p < \pi_j$. Individuata una postazione s_i libera, allora un service provider (fornitore di servizi) i dovrà pagare c_{js_i} per servire il cliente j dalla postazione s_i . In questo modo generiamo un profitto per il provider di $p - c_{js_i}$. Se un provider i serve un cliente j dalla postazione s_i , allora questa organizzazione crea un valore sociale (o surplus) di $\pi_j - c_{js_i}$, il valore π_j del servizio meno il costo c_{js_i} , con cui il servizio viene fornito. Notiamo che questo surplus sociale è indipendente dal prezzo $p = p_{ij}$ praticato; diversi p_{ij} servono semplicemente per redistribuire il benessere tra i clienti ed i provider. Definiamo il *benessere sociale* $V(S)$ essere il valore sociale totale su tutti i providers e i clienti.

Per semplificare la notazione, assumiamo che $\pi_j \geq c_{js_i}$ per tutti i clienti j , i e le postazioni $s_i \in A_i$. Vediamo che questo non richiede nessuna perdita di generalità, quindi notiamo che la riduzione di c_{js_i} può essere al massimo π_j e questo non cambia il valore di ogni assegnamento: quando $\pi_j < c_{js_i}$ i clienti j non possono essere serviti dalla postazione s_i , mentre se $\pi_j = c_{js_i}$ possiamo servire i clienti j dalla postazione s_i al costo voluto. In entrambi i casi, il compito di servire i clienti j da parte della postazione s_i risulta avere un valore sociale uguale a 0.

Per completare il gioco, dobbiamo specificare in che modo i prezzi sono fissati e gli assegnamenti sono determinati. Presa una strategia vettoriale s , assumiamo che ad ogni cliente sia assegnato una postazione che può servire al costo minimo. Il prezzo p_{ij} con cui viene servito il cliente j usando la postazione s_i del giocatore i è il costo della seconda connessione più economica utilizzabile da j , cioè, $\min_{i' \neq i} c_{js'}$. Intuitivamente, questo è il prezzo più alto con cui i può servire j ; aumentare il prezzo permetterebbe ad un giocatore i' di fare una offerta migliore di i .

Infatti, possiamo costruire un equivalente interpretazione di questo gioco dove i prezzi sono selezionati strategicamente. Consideriamo un gioco a tre fasi dove entrambi, i providers e i clienti, sono agenti strategici. Nella prima fase, i provider selezionano le posizioni dei servizi. Nella seconda fase, i provider definiscono i prezzi per gli utenti. E, nella fase finale, gli utenti selezionano un provider per il servizio e pagano lo specifico prezzo.

5.2 Localizzazione dei servizi come gioco potenziale

Iniziamo dimostrando che un gioco di localizzazione dei servizi è un gioco potenziale.

Teorema 5.1. *Il gioco di localizzazione dei servizi è un gioco potenziale con valore sociale $V(S)$ come funzione potenziale.*

Dimostrazione. Abbiamo bisogno di dimostrare che se un provider i cambia la sua posizione, allora modifica il benessere sociale $V(S)$ ed equivale a modificare il benessere del provider. Per dimostrare questo, immaginiamo un provider i scelga di "abbandonare il gioco" e mostriamo che il cambio nel benessere sociale $V(S)$ è esattamente il profitto di i .

Se il provider i si "ritira", ogni cliente j che era servito dal provider i lo sostituisce con la seconda miglior scelta. Ricordiamo che p_{ij} è esattamente il costo di questa scelta. Quindi il cliente sarà servito al costo p_{ij} anziché c_{js_i} , così l'incremento del costo è $p_{ij} - c_{js_i}$, che è esattamente il profitto del provider i ottenuto dal cliente j .

Per dimostrare l'affermazione sul provider i e il suo cambio di strategia, possiamo pensarla in due passi: primo il provider lascia il gioco e poi rientra con differenti strategie. Il cambio nel benessere sociale è la differenza tra il profitto del provider i nelle due strategie. \square

Corollario 5.1. *Esiste una strategia d'equilibrio pura, ed inoltre, tutti i risultati efficienti dei giochi di localizzazione dei servizi sono stabili. Quindi,*

il prezzo di stabilità è 1. Infine, la miglior risposta dinamica converge all'equilibrio, ma questo equilibrio potrebbe non essere socialmente ottimo.

Il prossimo obiettivo è dimostrare che il prezzo dell'anarchia per questo gioco di localizzazione dei servizi è piccolo. Comunque, si scopre che la dimostrazione si applica a un più ampio numero di classi di giochi, che presenteremo ora.

5.3 Giochi a profitto

I giochi di localizzazione dei servizi sono un esempio di una classe più larga di giochi chiamata *giochi a profitto*. Nei giochi a profitto, ogni giocatore i ha un insieme di strategie A_i disponibili, che pensiamo come postazioni e definiamo $A = \cup_i A_i$. Una funzione di benessere sociale $V(S)$ è definita per tutti gli $S \subseteq A$. Osserviamo che il benessere è puramente una funzione delle postazioni selezionate, come nel caso dei giochi di localizzazione di servizi. Nel definire un insieme socialmente ottimale, consideriamo solo insiemi che contengono una postazione per ogni strategia del insieme A_i . Comunque, varie proprietà strutturali della funzione $V(S)$ saranno assunte per tutti gli $S \subseteq A$. Per una strategia vettoriale s , continuiamo ad usare $V(S)$ come prima e sia $\alpha_i(s)$ ad indicare il benessere del giocatore i . Un gioco definito in questo modo si dice che sia un gioco a profitto se soddisfa le seguenti tre proprietà.

1. $V(S)$ è *sub-modulare*: per ogni insieme $S \subset S' \subset A$ ed ogni elemento $s \in A$, abbiamo $V(S + s) - V(S) \geq V(S' + s) - V(S')$. Nel contesto dei giochi di localizzazione dei servizi, questo afferma che il beneficio marginale per il benessere sociale nel aggiungere dei nuovi servizi, diminuisce quanti più servizi vengono aggiunti.
2. Il valore totale per i giocatori è minore o uguale del valore sociale totale: $\sum \alpha_i(s) \leq V(s)$.
3. Il valore per un giocatore è almeno il suo valore aggiunto per la società: $\alpha_i(s) \geq V(s) - V(s - s_i)$.

Un gioco a profitto è *essenziale* se la proprietà (3) è soddisfatta da un'uguaglianza e *monotona* se per tutti $S \subseteq S' \subseteq A$, $V(S) \leq V(S')$.

Per vedere i giochi di localizzazione dei servizi come dei giochi di profitto, dobbiamo considerare solo i provider come giocatori. Notiamo che il benessere sociale $V(S) = \sum_j (\pi_j - \min_{a \in S} c_{ja})$ è infatti puramente una funzione di selezione delle destinazioni.

Teorema 5.2. *I problemi di locazione dei servizi sono giochi a profitto essenziali e monotoni.*

Dimostrazione. La proprietà (2) è soddisfatta essenzialmente dalla definizione ed usando l'uguaglianza della proprietà (3) a dimostrare il Teorema 5.1. Per dimostrare la proprietà (1), notiamo che aggiungendo un nuovo servizio decresce il costo nel servire alcuni clienti. L'entità di questo decremento può solo diminuire se i clienti sono già scelti da un ricco insieme di servizi. Infine, aggiungendo un servizio non causi l'incremento del costo di servire un cliente e quindi i giochi di localizzazione dei servizi sono monotoni. \square

5.4 Il prezzo del anarchia per i giochi a profitto

Finché un gioco di localizzazione dei servizi è un gioco potenziale con benessere sociale come sua funzione potenziale, il prezzo di stabilità è 1. Infatti, questo vale per ogni gioco a profitto essenziale (cioè ogni gioco a profitto con $\alpha_i(s) = V(s) - V(s - s_i)$ per ogni strategia vettoriale s e giocatori i). Sfortunatamente, l'incremento di generalità dei giochi porta un suo costo; questi giochi non sono necessariamente giochi a potenziale e veramente, l'equilibrio puro non sempre esiste. Comunque, ora mostriamo che i giochi a profitto monotoni che sono in possesso di equilibrio puro (come i giochi a localizzazione dei servizi), hanno un prezzo del anarchia che è al massimo 2.

Teorema 5.3. *Per tutti i giochi a profitto monotoni il benessere sociale di ogni equilibrio puro di Nash è almeno metà del massimo benessere sociale possibile.*

Dimostrazione. Sia S l'insieme dei servizi selezionati da un equilibrio e O sia il miglior insieme di servizi in un risultato socialmente ottimale. Prima notiamo che $V(O) \leq V(S \cup O)$ dalla monotonia. Sia O^i ad indicare la strategia selezionata dal primo i giocatore nella soluzione sociale ottima. Ossia, $O^0 = \emptyset, O^1 = \{o_1\}, \dots, O^k = O$. Ora

$$V(O) - V(S) \leq V(S \cup O) - V(S) = \sum_{i=0}^n [V(S \cup O^i) - V(S \cup O^{i-1})].$$

Dalla proprietà (1)

$$V(S \cup O^i) - V(S \cup O^{i-1}) \leq V(S + o_i - s_i) - V(S - s_i)$$

per tutti gli i . Usando la proprietà (3), possiamo ulteriormente limitare questa con $\alpha_i(S + o_i - s_i)$. Finché S è un equilibrio, $\alpha_i(S + o_i - s_i) \leq \alpha_i(S)$.

Assieme queste producono

$$V(O) - V(S) \leq V(O \cup S) - V(S) \leq \sum_i \alpha_i(S).$$

Infine, la proprietà (2) implica che $\sum_i \alpha_i(S) \leq V(S)$, così $V(O) \leq 2V(S)$, quindi il prezzo del anarchia è al massimo 2. \square

5.5 Delimitare la qualità della soluzione senza raggiungere un equilibrio

Per ogni gioco a profitto di base monotono, si può anche limitare la qualità della soluzione senza assumere che i giocatori raggiungono un equilibrio.

Teorema 5.4. *Consideriamo una soluzione arbitraria in un gioco a profitto di base monotono. Supponiamo che ad un passo temporale, scegliamo un giocatore in modo casuale e produciamo la miglior risposta per quel giocatore. Per ogni costante $\epsilon > 0$ il valore sociale atteso dalla soluzione dopo $O(n)$ mosse è almeno $1/2 - \epsilon$ volte il massimo valore sociale possibile.*

Dimostrazione. Sia S uno stato e O sia una strategia vettoriale socialmente ottima. Vogliamo dimostrare che l'incremento del benessere sociale in un unico passo è almeno $\frac{1}{n}(V(O) - 2V(S))$, che comporta il limite $1/2 - \epsilon$ dopo $O(n)$ fasi.

Sia β_i il massimo incremento possibile nel valore del giocatore i . In tal modo il previsto aumento nel valore è $\frac{1}{n} \sum_i \beta_i$. Selezionando una strategia o_i come una mossa valida, così che $\beta_i \geq \alpha_i(S - s_i + o_i) - \alpha_i(S)$, quindi, $\beta_i \geq V(S - s_i + o_i) - V(S - s_i) - \alpha_i(S)$. Il resto della dimostrazione rispecchia il prezzo del anarchia dimostrato precedentemente. Abbiamo

$$V(O) - V(S) \leq \sum_{i=0}^n [V(S - s_i + o_i) - V(S - s_i)]$$

come prima. Limitiamo $V(S + o_i - s_i) - V(S - s_i) \leq \alpha_i(S) + \beta_i$. Usando questo con la proprietà (2) produco

$$V(O) - V(S) \leq \sum_i (\alpha_i(S) + \beta_i) \leq V(S) + \sum_i \beta_i.$$

Così $\sum_i \beta_i \geq V(O) - 2V(S)$ e il previsto incremento in $V(S)$ è $\frac{1}{n}(V(O) - 2V(S))$. La differenza $V(O) - 2V(S)$ è il decremento previsto di un fattore $(1 - \frac{2}{n})$ per ogni passo. Dopo $n/2$ passi, la differenza dovrebbe diminuire di un fattore e e dopo $\log(\epsilon^{-1})n$ passi si riduce ad un fattore ϵ . \square

Capitolo 6

Conclusioni

L'utilizzo della teoria dei giochi nella progettazione di reti, come si è visto nei capitoli precedenti è molto importante per la modellizzazione di modelli che aiutino lo studio del compromesso tra efficienza e stabilità di una rete.

Nel secondo capitolo abbiamo visto come i modelli classici della teoria dei giochi possono essere rivisti in chiave informatica, quindi riuscire a costruire dei modelli per risolvere dei problemi anche in questo ambito. Ad esempio il dilemma del prigioniero può essere visto come un problema di ISP routing, dove si cerca lo scambio di dati tra due ISP.

Il gioco a connessione locale presentato in seguito, ci mostra come ogni giocatore (definito come nodo di un grafo) cerchi di trovare la strategia migliore per se stesso cioè nel pagare il meno possibile ed avere il cammino più corto con gli altri nodi, ma il gioco a connessione locale cerca di ottimizzare questo per tutta la rete. Quindi l'obbiettivo tramite il parametro α (costo per costruire un lato) è quello di minimizzare il costo sociale ed il prezzo di stabilità. Quando α è grande si studia il prezzo dell'anarchia cercando di limitarlo il più possibile, attraverso la limitazione del diametro del grafo risultante e tramite il diametro limitarne il costo.

In seguito si è visto una classe di giochi conosciuti come giochi potenziali. Più in dettaglio si è definito un esempio di questa classe attraverso un gioco per la formazione di reti chiamato gioco a connessione globale, dove la differenza rispetto al gioco di connessione locale sta che un giocatore non viene più associato ad un nodo della rete, ma viene associato a degli obbiettivi di connessione globale. Ad esempio i giocatori sono indifferenti alla distanza con altri nodi della rete, vogliono solo costruire una rete che connette i terminali al minor costo possibile. Grazie al metodo della funzione potenziale abbiamo visto com'è possibile limitare il prezzo di stabilità per questi giochi. Si è osservato anche che trovare un equilibrio di Nash in un gioco potenziale è un problema PLS-completo.

Infine abbiamo considerato un altro gioco potenziale, un gioco di localizzazione dei servizi dove non solo i giocatori vogliono minimizzare i costi, ma possono anche selezionare il prezzo per utente in modo da massimizzare il profitto. Abbiamo considerato un modello nel quale i giocatori collocano servizi per servire i clienti, formando così un grafo bipartito tra i providers e i clienti. Abbiamo visto che il prezzo di stabilità è 1 e grazie alla definizione della classe più larga chiamata giochi a profitto abbiamo limitato il prezzo del anarchia.

Altri ambiti di utilizzo della teoria dei giochi non visti in questa tesi ma di indubbio interesse per lo studio di reti, potevano essere analizzare una rete wireless attraverso dei modelli della teoria dei giochi oppure lo studio di reti peer-to-peer.

Bibliografia

- [1] Noam Nissan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, Vijay V. Vazirani
Algorithmic Game Theory, Cambridge University Press (2007).