UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN

Corso di Laurea in Matematica
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata

TESI DI LAUREA

Una applicazione della topologia formale ai metodi di ricerca

Relatore: Ch.mo Prof. Silvio Valentini
Laureando: Denis Andreatta

ANNO ACCADEMICO 2003-2004

Indice

Introduzione

Lo scopo principale della topologia formale è quello di sviluppare topologia in un contesto costruttivo, dove con costruttivo intendiamo un contesto basato sulla logica predicativa e intuzionista. In questa tesi mostreremo che questo permette di utilizzare la topologia formale come strumento per l'implementazione di un metodo di ricerca di oggetti in un insieme.

Cominceremo descrivendo una prima formalizzazione della definizione classica di topologia. Seguendo poi la linea dell'articolo [SPFT], illustreremo le proprietà fondamentali di un predicato di copertura e di un predicato di positività definiti attraverso questa prima formalizzazione, e arriveremo a giustificare la definizione di topologia formale. Ricorderemo infine la definizione di punto formale, corrispondente formale dei punti di uno spazio topologico.

Estenderemo quindi quanto detto nell'articolo [IGFT] a proposito della generazione induttiva delle topologie formali con un predicato unario di positività, al caso delle topologie formali con un predicato binario di positività. La generazione induttiva ci permetterà di usare metodi induttivi nell'utilizzare le topologie formali, e di costruire, con dei processi di approssimazione, le relazioni che stanno alla base della definizione di topologia formale.

Definiremo poi l'interpretazione di una topologia formale in uno spazio topologico e mostreremo che alcune proprietà dei punti formali ci permetteranno di dimostrare un teorema di completezza per le topologie formali induttivamente generate.

In prospettiva della futura implementazione di un metodo di ricerca basato sulla topologia formale, attraverso degli algoritmi mostreremo un possibile modo di sviluppare i processi di approssimazione che portano alla costruzione delle relazioni che stanno alla base della definizione di topologia formale.

Infine mostreremo che la possibilità di definire la topologia formale in modo completamente costruttivo ci permetterà di utilizzarla come strumento per la ricerca, in un insieme di oggetti, di classi di oggetti che soddisfino delle proprietà richieste.

Capitolo 1

Formalizzazione della topologia

In questo primo capitolo daremo una prima formalizzazione della definizione di spazio topologico derivandola da quella classica di topologia, per poi passare ad una formulazione più generale introducendo le relazioni $- \lhd -$ e $- \ltimes -$. Termineremo con la definizione di punto formale e di spazio formale.

Notazione. In questa tesi svilupperemo la topologia basandoci sulla fondazione predicativa e intuizionistica della teoria dei tipi di Martin-Löf. In questa teoria dei tipi, insiemi e sottoinsiemi sono classi formate da oggetti di tipo diverso, quindi un oggetto di tipo sottoinsieme non può essere considerato anche un oggetto di tipo insieme. Per questo motivo solitamente in letteratura si utilizza la notazione $a \varepsilon U$ per dire che l'elemento a è un elemento del sottoinsieme U, e la notazione $a \in S$ per dire che a è un elemento dell'insieme S. In questa tesi per semplicità useremo il simbolo $\in$ anche per indicare che un elemento sta in un sottoinsieme, pur continuando a considerare insiemi e sottinsiemi oggetti di tipo diverso.

1.1 Spazio topologico concreto

Cominciamo ricordando la definizione classica di topologia: uno spazio topologico è una coppia ordinata $(X, \Omega(X))$ dove X è un insieme e $\Omega(X)$ è una collezione di sottoinsiemi di X tale che

(Ω_1) $\emptyset, X$ sono elementi di $\Omega(X)$

(Ω_2) $\Omega(X)$ è chiuso per intersezioni finite

(Ω_3) $\Omega(X)$ è chiuso per unioni arbitrarie

Questa formulazione di spazio topologico non è accettabile in un contesto predicativo. La quantificazione usata in (Ω_3) è su famiglie di sottoinsiemi ed è quindi del terzo ordine. Per porci in un contesto predicativo la dobbiamo portare al primo ordine.

Possiamo scendere di un ordine pensando che una collezione di sottoinsiemi di X sia indicizzata da un insieme S tramite una mappa $\mathsf{ext} : S \to \mathcal{P}(X)$, così la quantificazione su sottoinsiemi della famiglia indicizzata da S viene ridotta ad una quantificazione su S. Non ci si può però aspettare che tutti gli aperti della topologia vengano dati come immagini di elementi di S, in particolare non ci si può aspettare che S possa indicizzare tutti gli elementi di $\mathcal{P}(X)$. Inoltre la quantificazione implicita in Ω_3 è ancora al secondo ordine, quindi ancora non predicativa: $(\forall U \in \mathcal{P}(S))(\exists c \in S)(\bigcup_{a \in U} \mathsf{ext}(a) = \mathsf{ext}(c))$.

La soluzione sta nel chiedere che i sottoinsiemi di X indicizzati da S formino una base per la topologia su X. Quindi che i sottoinsiemi $\mathsf{ext}(a) \subseteq X$, con $a \in S$, siano gli intorni di base della topologia e che ogni aperto della topologia sia ottenuto come unione di intorni di base.

Per poter considerare $\{\mathsf{ext}(a) \mid a \in S\}$ una base per una topologia su X è sufficiente richiedere che valga

$$(B_1)\ (\forall x \in X)(\exists a \in S)\ x \in \mathsf{ext}(a)$$

e che l'intersezione di due elementi della base sia unione di elementi della base.

Possiamo risolvere il problema della chiusura per intersezione in un modo banale introducendo una operazione associativa e commutativa fra elementi dell'insieme S. Supponiamo cioè che dati due elementi $a, b \in S$ esista sempre un elemento $(a \wedge b) \in S$ tale che valga $\mathsf{ext}(a) \cap \mathsf{ext}(b) = \mathsf{ext}(a \wedge b)$. Con questa operazione l'intersezione di due elementi della base è ancora un elemento della base.

In realtà per permettere la chiusura per intersezione sarebbe sufficiente una richiesta meno forte sulla struttura di S, ma abbiamo scelto questa soluzione al fine di dare la definizione di topologia formale che meglio si adatta agli scopi di questa tesi. Per una più ampia discussione sulle definizioni si veda [SPFT].

La richiesta sulla intersezione di elementi della base è allora

$$(B_2)\ (\forall a, b \in S)\ \mathsf{ext}(a \wedge b) = \mathsf{ext}(a) \cap \mathsf{ext}(b)$$

Definiamo ora una nuova mappa $\mathsf{Ext} : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(X)$ che, dato un sottoinsieme U di S, restituisca l'unione delle immagini attraverso ext dei suoi elementi: $\mathsf{Ext}(U) \equiv \bigcup_{a \in U} \mathsf{ext}(a)$. Diremo che un sottoinsieme A di X è un aperto della topologia se e solo se è unione di intorni di base, cioè se e solo se

$$A = \mathsf{Ext}(U) \text{ per qualche } U \subseteq S$$

Osserviamo che con questa definizione di aperto individuiamo una topologia su X. Infatti abbiamo che l'insieme $\emptyset$ è un aperto, perchè $\mathsf{Ext}(\emptyset) = \emptyset$, e che la proprietà (Ω_3) è automaticamente soddisfatta perché $\mathsf{Ext}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} \mathsf{Ext}(U_i)$ per la associatività dell'unione. Inoltre dati due aperti $\mathsf{Ext}(U)$ e $\mathsf{Ext}(V)$, con $U, V \subseteq S$, allora, definendo $U \wedge V \equiv \{u \wedge v \mid u \in U, v \in V\}$, vale $\mathsf{Ext}(U) \cap \mathsf{Ext}(V) = \mathsf{Ext}(U \wedge V)$ per la distributività dell'intersezione sull'unione.

Possiamo così dare una prima definizione predicativa di topologia su un insieme X:

Definizione 1.1 (Spazio topologico concreto) *Uno spazio topologico concreto è una struttura $\mathcal{X} \equiv (X, \mathsf{ext}, S, \wedge)$ dove X è un insieme, $(S, \wedge)$ è un semigruppo commutativo, ext è una mappa da S in $\mathcal{P}(X)$ tale che, definita la corrispondente mappa $\mathsf{Ext} : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(X)$ come $\mathsf{Ext}(U) \equiv \bigcup_{a \in U} \mathsf{ext}(a)$, valga:*

(B_1) $X = \mathsf{Ext}(S)$

(B_2) $(\forall a, b \in S)$ $\mathsf{ext}(a) \cap \mathsf{ext}(b) = \mathsf{ext}(a \wedge b)$

Da un punto di vista costruttivo la definizione di spazio topologico concreto è certamente accettabile, ma non sufficiente per lavorare in topologia. Infatti in molti interessanti esempi la collezione X di punti non è data come insieme nel senso costruttivo e quindi non abbiamo una struttura con cui costruire uno spazio topologico concreto. Per questo è stata introdotta la nozione di topologia formale.

L'idea è quella di considerare gli elementi $a, b, c \dots$ come sostituti per gli intorni di base e i sottoinsiemi $U, V, W \dots$ di S come sostituti degli aperti della topologia. La nozione di topologia formale viene così ad essere una specifica struttura sugli aperti di base.

Nella prossima sezione vedremo come isolare le proprietà necessarie alla definizione di topologia formale partendo dalla struttura di spazio topologico concreto.

1.2 Topologia formale

Diamo una caratterizzazione degli insiemi aperti che ricalchi la definizione usuale di aperto come insieme che coincide con il suo interno.

Un elemento x di un sottoinsieme A di X sta nell'interno di A se e solo se soddisfa la condizione

$$(\exists a \in S)(x \in \mathsf{ext}(a) \ \& \ \mathsf{ext}(a) \subseteq A)$$

Definiamo quindi l'interno del sottoinsieme A:

$$\mathsf{Int}(A) \equiv \{x \in X \mid (\exists a \in S)(x \in \mathsf{ext}(a) \ \& \ \mathsf{ext}(a) \subseteq A)\} \tag{1.1}$$

Questa definizione di interno deriva direttamente dalla definizione classica di interno di un insieme per la topologia con base $\{\mathsf{ext}(a) \mid a \in S\}$. Dimostriamo ora il seguente teorema:

Teorema 1.1 *Sia $A \subseteq X$. Allora A coincide con il suo interno $\mathsf{Int}(A)$ se e solo se esiste un sottoinsieme U di S tale che $A = \mathsf{Ext}(U)$.*

Dimostrazione: Sia $x \in \mathsf{Ext}(U)$ allora, per definizione di $\mathsf{Ext}(U)$, esiste una $a \in S$ tale che $x \in \mathsf{ext}(a)$ e $a \in U$. Questo implica che $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$ e quindi che $x \in \mathsf{Int}(\mathsf{Ext}(U))$. Osservando poi che per definizione di interno vale $\mathsf{Int}(\mathsf{Ext}(U)) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$, possiamo concludere che $\mathsf{Ext}(U)$ coincide con il suo interno.

Viceversa sia A un sottoinsieme di X che coincide con il suo interno. Consideriamo il sottoinsieme $U_A \equiv \{a \in S \mid \mathsf{ext}(a) \subseteq A\}$ di S. Dimostriamo che $A = \mathsf{Ext}(U_A)$. É ovviamente $\mathsf{Ext}(U_A) = \bigcup_{a \in U_A} \mathsf{ext}(a) \subseteq A$. Viceversa se $x \in A$ allora esiste un $a \in S$ tale che $x \in \mathsf{ext}(a)$ e $\mathsf{ext}(a) \subseteq A$ perché $A = \mathsf{Int}(A)$. Quindi possiamo dire che esiste $a \in U_A$ tale che $x \in \mathsf{ext}(a)$. Questo, per definizione di Ext, implica che $x \in \mathsf{Ext}(U_A)$. ∎

Quindi la definizione classica di aperto, inteso come sottoinsieme che coincide con il suo interno, coincide con la definizione di aperto che abbiamo dato nel paragrafo precedente.

Spostiamo ora l'attenzione sui sottoinsiemi chiusi. Per rimanere in un contesto intuizionistico non è possibile definire gli insiemi chiusi come complementari degli insiemi aperti. Quindi seguiremo un approccio simile a quello usato per definire gli insiemi aperti e daremo una caratterizzazione dei sottoinsiemi chiusi duale a quella per gli insiemi aperti.

Nella definizione classica di topologia un insieme C è chiuso se contiene ogni punto $x \in X$ tale che ogni intorno di base di x ha almeno un elemento in comune con C, cioè

$$(\forall a \in S)(x \in \mathsf{ext}(a) \rightarrow \mathsf{ext}(a) \between C) \rightarrow x \in C$$

dove $\mathsf{ext}(a) \between C$ è una abbreviazione per $(\exists y \in X)(y \in \mathsf{ext}(a) \ \& \ y \in C)$, a cui ci riferiamo dicendo che $\mathsf{ext}(a)$ *incontra* C. Questo equivale a chiedere che C sia uguale alla sua chiusura, che definiamo

$$\mathsf{Cl}(C) \equiv \{x \in X \mid (\forall a \in S)(x \in \mathsf{ext}(a) \rightarrow \mathsf{ext}(a) \between C)\} \tag{1.2}$$

Dalle definizioni è evidente la forte dualità logica fra i due operatori di interno e di chiusura. La definizione di chiusura è ottenuta da quella di interno scambiando $\exists$ con $\forall$, & con $\rightarrow$ (che sono duali tra loro) e $\subseteq$ con $\between$ (le cui definizioni a loro volta sono ottenute una dall'altra scambiando $\exists$ con $\forall$ e & con $\rightarrow$).

Notiamo che nella definizione di interno e chiusura non sono mai state usate le proprietà (B_1) e (B_2) della definizione di spazio topologico concreto. Questo ci dice che è possibile definire insiemi aperti e chiusi anche in strutture che non verificano le proprietà (B_1) e (B_2). Queste strutture sono dette *Basic-pairs*. Per la definizione e la discussione delle proprietà delle basic-pairs si veda [SPFT].

1.2.1 Una struttura per la topologia

Consideriamo uno spazio topologico concreto $(X, \mathsf{ext}, S, \wedge)$. Definiamo la mappa $\alpha : X \rightarrow \mathcal{P}(S)$, simmetrica di ext, come $\alpha(x) \equiv \{a \in S \mid x \in \mathsf{ext}(a)\}$.

Dalle definizioni si vede subito che dato un sottoinsieme U di S vale l'equivalenza

$$x \in \mathsf{Ext}(U) \Leftrightarrow \alpha(x) \between U$$

Per dualità possiamo definire l'operatore su sottoinsiemi Rest, duale di Ext:

$$x \in \mathsf{Rest}(F) \Leftrightarrow \alpha(x) \subseteq F$$

$\mathsf{Ext}(U)$ e $\mathsf{Rest}(F)$ sono dette rispettivamente *anti-immagine esistenziale* e *anti-immagine universale* di U e F attraverso la relazione $- \Vdash -$, dove $x \Vdash a$, con $x \in X$ e $a \in S$, vale se e solo se $x \in \mathsf{ext}(a)$. Una interessante applicazione dell'operatore Rest si ha con il seguente teorema:

Teorema 1.2 *Sia $C \subseteq X$. Allora $C = \mathsf{Cl}(C)$ se e solo se esiste un sottoinsieme F di S tale che $C = \mathsf{Rest}(F)$.*

Dimostrazione: Sia $C = \mathsf{Rest}(F)$ e $x \in \mathsf{Cl}(\mathsf{Rest}(F))$. Allora, per ogni $a \in S$, $x \in \mathsf{ext}(a)$ implica che $\mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$, e quindi anche che $a \in F$. Infatti supponiamo che $\mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$, allora esiste un elemento $y \in X$ tale che $y \in \mathsf{ext}(a)$ e $y \in \mathsf{Rest}(F)$. Per ogni $b \in S$, se $y \in \mathsf{ext}(b)$, allora $b \in F$ per definizione di $\mathsf{Rest}(F)$ e $a \in F$ segue da $y \in \mathsf{ext}(a)$. Abbiamo così dimostrato che $\mathsf{Cl}(\mathsf{Rest}(F)) \subseteq \mathsf{Rest}(F)$. Osservando che ovviamente $\mathsf{Rest}(F) \subseteq \mathsf{Cl}(\mathsf{Rest}(F))$, possiamo concludere che $C = \mathsf{Rest}(F)$ coincide con la sua chiusura.

Viceversa sia C un sottoinsieme di X tale che $C = \mathsf{Cl}(C)$, consideriamo l'insieme $F_C \equiv \{a \in S \mid \mathsf{ext}(a) \between C\}$. Dimostriamo che vale $C = \mathsf{Rest}(F_C)$. Supponiamo $x \in C$, allora, per ogni $a \in S$, $x \in \mathsf{ext}(a)$ implica $\mathsf{ext}(a) \between C$ e quindi $a \in F_C$. Quindi $x \in \mathsf{Rest}(F_C)$. Supponiamo invece che $x \in \mathsf{Rest}(F_C)$. Per ogni $a \in S$, $x \in \mathsf{ext}(a)$ implica $a \in F_C$, cioè $\mathsf{ext}(a) \between C$. Quindi, per definizione di chiusura, $x \in \mathsf{Cl}(C)$, che implica $x \in C$ perché $C = \mathsf{Cl}(C)$. ■

Quindi, così come Ext caratterizza gli aperti di X, il suo duale Rest caratterizza i chiusi di X (che sono i duali degli aperti).

Attraverso la mappa ext, simmetrica di α, possiamo definire gli operatori $\Diamond$ e $\Box$, simmetrici di Ext e Rest:

$$a \in \Diamond(D) \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \between D$$

$$a \in \Box(D) \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \subseteq D$$

$\Diamond(D)$ e $\Box(D)$ sono dette rispettivamente *immagine esistenziale* e *immagine universale* di D attraverso la relazione $- \Vdash -$.

Osserviamo ora che gli operatori Int e Cl sono definibili attraverso la composizione degli operatori Ext e Rest e dei loro simmetrici $\Diamond$ e $\Box$:

$$\mathsf{Int} = \mathsf{Ext}\Box \qquad \mathsf{Cl} = \mathsf{Rest}\Diamond$$

infatti

$$x \in \mathsf{Int}(A) \Leftrightarrow (\exists a \in S)(x \in \mathsf{ext}(a)\ \&\ \mathsf{ext}(a) \subseteq A) \Leftrightarrow \alpha(x) \between \Box(A) \Leftrightarrow x \in \mathsf{Ext}\Box(A)$$

$$x \in \mathsf{Cl}(C) \Leftrightarrow (\forall a \in S)(x \in \mathsf{ext}(a) \to \mathsf{ext}(a) \between C) \Leftrightarrow \alpha(x) \subseteq \Diamond(C) \Leftrightarrow x \in \mathsf{Rest}\Diamond(C)$$

Per simmetria possiamo definire due operatori che siano la controparte in S degli operatori Int e Cl:

$$\mathcal{I} \equiv \Diamond\mathsf{Rest} \qquad \mathcal{A} \equiv \Box\mathsf{Ext}$$

Il significato di questi due operatori diventa più chiaro esplicitando le loro definizioni:

$$a \in \mathcal{A}(U) \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U) \Leftrightarrow (\forall x \in X)(x \in \mathsf{ext}(a) \to \alpha(x) \between U)$$

Quindi $a \in \mathcal{A}(U)$ significa che tutti gli elementi di X che stanno in $\mathsf{ext}(a)$ stanno anche in $\mathsf{Ext}(U)$.

$$a \in \mathcal{I}(F) \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F) \Leftrightarrow (\exists x \in X)(x \in \mathsf{ext}(a)\ \&\ \alpha(x) \subseteq F)$$

Questo ci dice che se $a \in \mathcal{I}(F)$ allora in $\mathsf{ext}(a)$ c'è un elemento di X di cui in più sappiamo anche che tutti i suoi intorni di base stanno in F. In particolare $a \in \mathcal{I}(S)$ ci dice solo $\mathsf{ext}(a)$ è abitato, cioè che contiene almeno un elemento di X.

Gli operatori $\mathcal{A}$ e $\mathcal{I}$ suggeriscono la definizione di due relazioni formali fra elementi di S e sottoinsiemi di S:

Definizione 1.2 (Relazione $- \triangleleft -$ e predicato binario $- \ltimes -$) *Dato uno spazio topologico concreto $(X, \mathsf{ext}, S, \wedge)$. Chiameremo relazione di copertura la relazione $- \triangleleft -$ definita ponendo*

$$a \triangleleft_{\mathcal{A}} U \equiv a \in \mathcal{A}(U)$$

Chiameremo predicato binario di positività la relazione $- \ltimes -$ definita ponendo

$$a \ltimes_{\mathcal{I}} F \equiv a \in \mathcal{I}(F)$$

Descriveremo ora alcune proprietà degli operatori $\mathcal{A}$ e $\mathcal{I}$ che definiscone queste relazioni, la definizione di topologia formale sarà poi ottenuta ponendo queste proprietà come condizioni che devono essere soddisfatte da delle relazioni fra elementi di S e sottoinsiemi di S.

Sfruttando l'esistenza di aggiunzioni fra gli operatori Ext e $\Box$ e fra Rest e $\Diamond$ si dimostra (una dimostrazione è in [SPFT]) che gli operatori Int e $\mathcal{I}$ sono operatori di riduzione e che Cl e $\mathcal{A}$ sono operatori di saturazione.

Per gli operatori di riduzione $\mathcal{I}$ e Int diremo che un insieme è ridotto se, rispettivamente, $F = \mathcal{I}(F)$ e $A = \mathsf{Int}(A)$. Le collezioni di insiemi ridotti si denotano con $Red(\mathcal{I})$ e $Red(\mathsf{Int})$. Per gli operatori di saturazione $\mathcal{A}$ e Cl diremo che un insieme è saturato se, rispettivamente, $U = \mathcal{A}(U)$ e $C = \mathsf{Cl}(C)$. Le collezioni di insiemi saturati si denotano con $Sat(\mathcal{A})$ e $Sat(\mathsf{Cl})$. Le collezioni $Sat(\mathcal{A})$, $Sat(\mathsf{Cl})$, $Red(\mathcal{I})$, $Red(\mathsf{Int})$ sono tutti reticoli completi e esistono fra loro gli isomorfismi

$$\Box : Red(\mathsf{Int}) \to Sat(\mathcal{A}) \text{ con inverso } \mathsf{Ext} : Sat(\mathcal{A}) \to Red(\mathsf{Int})$$

$$\Diamond : Sat(\mathsf{Cl}) \to Red(\mathcal{I}) \text{ con inverso } \mathsf{Rest} : Red(\mathcal{I}) \to Sat(\mathsf{Cl})$$

Questi isomorfismi inducono a chiamare i saturati di $\mathcal{A}$ *aperti formali* e i ridotti di $\mathcal{I}$ *chiusi formali* (per una dimostrazione di questi fatti si veda ancora [SPFT])

Questi isomorfismi rappresentano il legame fra due modi di vedere la topologia: quello usuale, costruito attraverso i punti dell'insieme su cui è costruita la topologia, e quello formale, costruito utilizzando solo gli aperti di base della topologia. Le proprietà fondamentali della struttura che abbiamo definito possono essere riassunte nella figura (1.1). A sinistra è rappresentata la parte concreta della topologia, a destra invece quella formale. Nella parte più in alto stanno i sottoinsiemi (i chiusi concreti e gli aperti formali) che sono determinati da operatori di saturazione, la cui definizione è caratterizzata dalla combinazione di quantificatori $\forall\exists$. In basso stanno i sottoinsiemi (aperti concreti e chiusi formali) determinati da operatori di riduzione, duali degli operatori di saturazione, la cui definizione è caratterizzata dalla combinazione di quantificatori $\exists\forall$. Le frecce sulle diagonali del diagramma rappresentano gli isomorfismi fra aperti concreti e formali e chiusi concreti e formali.

Prima di dare la definizione di topologia formale dobbiamo dare una nuova condizione che leghi le relazioni $- \triangleleft_{\mathcal{A}} -$ e $- \ltimes_{\mathcal{I}} -$ in modo da poter affermare che entrambe derivano dallo stesso spazio topologico concreto. Partiamo dalla condizione (certamente valida):

$$\frac{\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U) \quad \mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)}{\mathsf{Ext}(U) \between \mathsf{Rest}(F)}$$

e riscriviamola formalmente. Per le equivalenze $a \triangleleft U = \mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$ e $a \ltimes F = \mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$, la condizione diventa

$$\frac{a \triangleleft_{\mathcal{A}} U \quad a \ltimes_{\mathcal{I}} F}{U \ltimes_{\mathcal{I}} F}$$

dove con $U \ltimes_{\mathcal{I}} F$ intendiamo dire che $(\exists b \in U)(b \ltimes_{\mathcal{I}} F)$. La condizione è ancora valida infatti, per l'ipotesi $a \ltimes_{\mathcal{I}} F$, esiste un $x \in X$ tale che $x \in \mathsf{ext}(a)$ e $x \in \mathsf{Rest}(F)$, e per l'ipotesi $a \triangleleft_{\mathcal{A}} U$, esiste un elemento $u \in U$ tale che $x \in \mathsf{ext}(a)$. Quindi esiste un $x \in X$ tale che $x \in \mathsf{ext}(u)$ con $u \in U$ e $x \in \mathsf{Rest}(F)$, cioè vale $U \ltimes_{\mathcal{I}} F$.

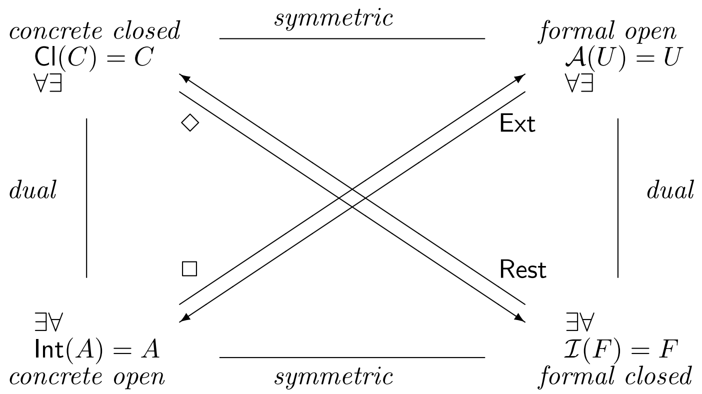

Figura 1.1: Lato formale e lato concreto di una topologia

1.2.2 Definizione di topologia formale

Con gli elementi a nostra disposizione finora potremmo già dare una prima definizione di topologia formale che però non è quella che utilizzeremo nella seconda parte della tesi. Quindi, prima di dare la definizione, introdurremo ancora due proprietà delle relazioni $- \lhd_{\mathcal{A}} -$ e $- \ltimes_{\mathcal{I}} -$. Per una descrizione e un confronto fra diverse definizioni di topologia formale si veda [SPFT].

Introduciamo delle proprietà formali che ci permettano di esprimere la condizione $(\forall a, b \in S)(\mathsf{ext}(a) \cap \mathsf{ext}(b) = \mathsf{ext}(a \wedge b))$, cioè la condizione (B_2) della definizione di spazio topologico concreto. Le proprietà sono:

$$(\wedge - left)\ \frac{a \lhd_{\mathcal{A}} U \quad b \in S}{(a \wedge b) \lhd_{\mathcal{A}} U} \qquad\qquad (\wedge - right)\ \frac{a \lhd_{\mathcal{A}} U \quad a \lhd_{\mathcal{A}} V}{a \lhd_{\mathcal{A}} (U \wedge V)}$$

dove $U \wedge V \equiv \{a \wedge b \in S \mid a \in U, b \in V\}$. Se valgono queste due proprietà allora la relazione $- \lhd_{\mathcal{A}} -$ rispetta il significato che vogliamo dare alla operazione $- \wedge -$.

Siamo finalmente pronti per dare una definizione di topologia formale:

Definizione 1.3 (Topologia Formale) *Diremo topologia formale una struttura* $(S, \wedge, \lhd, \ltimes)$ *dove* $(S, \wedge)$ *è un semigruppo commutativo,* $- \lhd -$ *e* $- \ltimes -$ *sono relazioni fra elementi di* S *e suoi sottoinsiemi che soddisfano le seguenti proprietà:*

$$(reflexivity)\ \frac{a \in U}{a \lhd U} \qquad\qquad (\lhd - transitivity)\ \frac{a \lhd U \quad U \lhd V}{a \lhd V}$$

$$(co - reflexivity)\ \frac{a \ltimes F}{a \in F} \qquad\qquad (\ltimes - co - transitivity)\ \frac{a \ltimes F \quad (\forall b \in S)(b \ltimes F \rightarrow b \in G)}{a \ltimes G}$$

$$(\wedge - left)\ \frac{a \lhd U \quad b \in S}{(a \wedge b) \lhd U} \qquad\qquad (\wedge - right)\ \frac{a \lhd U \quad a \lhd V}{a \lhd (U \wedge V)}$$

$$(compatibility)\ \frac{a \lhd U \quad a \ltimes F}{U \ltimes F}$$

dove $U \lhd V$ *significa* $(\forall a \in U)(a \lhd V)$ *e* $U \ltimes F$ *significa* $(\exists b \in U)(b \ltimes F)$.

Osserviamo che, dato uno spazio topologico concreto $(X, \mathsf{ext}, S, \wedge)$, le relazioni $- \lhd_{\mathcal{A}} -$ e $- \ltimes_{\mathcal{I}} -$ che si definiscono attraverso gli operatori $\mathcal{A}$ e $\mathcal{I}$, sono tali che $(S, \lhd_{\mathcal{A}}, \ltimes_{\mathcal{I}}, \wedge)$ è una topologia formale. Quindi da ogni spazio topologico concreto deriva una topologia formale. Le topologie formali che derivano da uno spazio topologico concreto sono dette *rappresentabili*.

Le proprietà reflexivity e $\lhd$-transitivity sono la formalizzazione delle proprietà di saturazione dell'operatore $\mathcal{A}$. Allo stesso modo le proprietà co-reflexivity e $\ltimes$-co-transitivity sono la formalizzazione delle proprietà di riduzione di $\mathcal{I}$. Le proprietà $\wedge$-left e $\wedge$-right sono invece la formalizzazione della proprietà *(B2)* della definizione di spazio topologico concreto.

Osserviamo che le proprietà reflexivity e co-reflexivity, e $\triangleleft$-transitivity e $\ltimes$-co-transitivity, sono duali fra loro. La dualità è più evidente se riscriviamo le regole utilizzando gli operatori $\triangleleft : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(X)$ e $\ltimes : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(X)$, associati alle omonime relazioni $- \triangleleft -$ e $- \ltimes -$ e definiti come $\triangleleft(U) \equiv \{a \in S \mid a \triangleleft U\}$ e $\ltimes(F) \equiv \{a \in S \mid a \ltimes F\}$ per ogni sottoinsieme U e F di S. Con questi operatori reflexivity e co-reflexivity diventano

$$U \subseteq \triangleleft(U) \quad e \quad \ltimes(F) \subseteq F$$

e $\ltimes$-co-transitivity e $\triangleleft$-transitivity

$$\frac{U \subseteq \triangleleft(V)}{\triangleleft(U) \subseteq \triangleleft(V)} \quad e \quad \frac{\ltimes(F) \subseteq G}{\ltimes(F) \subseteq \ltimes(G)}$$

Infine la compatibility si riscrive

$$\frac{\triangleleft(U) \between \ltimes(F)}{U \between \ltimes(F)}$$

Osserviamo che in questa formulazione di compatibility c'è nessun elemento delle ipotesi che non compare nella conclusione come succede nella formulazione della definizione (1.3).

É interessante osservare che si può dimostrare la validità della seguente condizione che lega $- \wedge -$ a $- \ltimes -$:

$$(\wedge - monotonicity)\ \frac{(a \wedge b) \ltimes F}{a \ltimes F}$$

infatti per $\wedge$-left con ipotesi $a \triangleleft a$, che è valida per reflexivity, ricaviamo $(a \wedge b) \triangleleft a$, e ponendo questa, assieme a $(a \wedge b) \ltimes F$, come ipotesi di compatibility otteniamo la conclusione $a \ltimes F$.

Nel capitolo (3) dimostreremo un teorema di completezza per una importante classe di topologie formali. Nel prossimo paragrafo invece introdurremo la nozione di punto formale e di spazio formale di una topologia.

1.3 Punti formali

Vogliamo ora mostrare come è possibile "riempire" gli aperti e i chiusi formali con i punti. Vogliamo cioè definire degli oggetti formali che rappresentino su lato formale il duale degli elementi di X su lato concreto. Chiameremo questi oggetti *punti formali*.

Supponiamo di avere una topologia formale $\mathcal{S} = (S, \wedge, \triangleleft, \ltimes)$ rappresentabile, derivata dallo spazio topologico concreto $\mathcal{X} = (X, \mathsf{ext}, S, \wedge)$. In questa struttura la migliore rappresentazione formale di un punto concreto $x \in X$ che possiamo dare è costituita dal sottoinsieme $\alpha(x)$, che contiene tutti gli aperti di base che contengono x. L'idea per arrivare alla definizione di punto formale è quella di descrivere formalmente le proprietà del sottoinsieme $\alpha(x)$ e prendere queste come condizioni astratte che devono essere soddisfatte da un sottoinsieme $\alpha \subseteq S$ perché questo possa essere chiamato punto formale.

Andiamo a vedere quali proprietà fondamentali di $\alpha(x)$ possiamo ricavare dalla definizione di spazio topologico concreto.

La proprietà $(B1)$ della definizione 1.1 ci dice che ogni elemento $x \in X$ è contenuto in un aperto di base, ci dice quindi che $\alpha(x)$ contiene almeno un elemento di S, cioè che $\alpha(x) \between S$.

Una implicazione della proprietà $(B2)$ può essere rappresentata con la regola

$$\frac{x \in \mathsf{ext}(a) \quad x \in \mathsf{ext}(b)}{x \in \mathsf{ext}(a \wedge b)} \text{ che possiamo riscrivere } \frac{a \in \alpha(x) \quad b \in \alpha(x)}{(a \wedge b) \in \alpha(x)}$$

Il significato che si vuole esprimere con la relazione $- \triangleleft -$ è $a \triangleleft U \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$. Possiamo esprimere l'implicazione da sinistra a destra di questa equivalenza con la regola

$$\frac{x \in \mathsf{ext}(a) \quad a \triangleleft U}{x \in \mathsf{Ext}(U)} \text{ che possiamo riscrivere } \frac{a \in \alpha(x) \quad a \triangleleft U}{\alpha(x) \between U}$$

Infine la relazione $- \ltimes -$ ci dice che vale la seguente regola

$$\frac{x \in \mathsf{ext}(a) \quad \alpha(x) \subseteq F}{a \ltimes F} \text{ che possiamo riscrivere } \frac{a \in \alpha(x) \quad \alpha(x) \subseteq F}{a \ltimes F}$$

che è una riformulazione dell'implicazione da destra a sinistra dell'equivalenza $a \ltimes F \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$.

Le quattro condizioni se riscritte sostituendo un qualsiasi sottoinsieme $\alpha \subseteq S$ a $\alpha(x)$ ci danno la definizione di punto formale:

Definizione 1.4 (Punto formale) *Un punto formale è un sottoinsieme α di S che soddisfa le seguenti condizioni*

$$\alpha \text{ è abitato: } \alpha \between S \qquad\qquad \alpha \text{ è convergente: } \frac{a \in \alpha \quad b \in \alpha}{(a \wedge b) \in \alpha}$$

$$\alpha \text{ spezza } - \lhd - : \ \frac{a \in \alpha \quad a \lhd U}{\alpha \between U} \qquad\qquad \alpha \text{ entra in } - \ltimes - : \ \frac{a \in \alpha \quad \alpha \subseteq F}{a \ltimes F}$$

La collezione dei punti formali di una topologia formale $\mathcal{S}$ è detto spazio formale di $\mathcal{S}$ e lo indicheremo con $Pt(\mathcal{S})$.

Osserviamo che la collezione dei punti formali $Pt(\mathcal{S})$ non sempre è un insieme costruttivo, quindi non sempre ci sono delle regole induttive che definiscono i suoi elementi. (Una discussione sui punti formali di topologie formali induttivamente generate (che presenteremo nel prossimo capitolo) si trova in [IGFT]).

Osserviamo che α spezza $- \lhd -$ e α entra in $- \ltimes -$ possono essere riscritte nel seguente modo

$$\alpha \text{ spezza } - \lhd - : \ \frac{\alpha \between \lhd(U)}{\alpha \between U} \qquad\qquad \alpha \text{ entra in } - \ltimes - : \ \frac{\alpha \subseteq F}{\alpha \subseteq \ltimes(F)}$$

che evidenzia la dualità che c'è fra due regole.

Dimostriamo ora una proposizione sui punti formali:

Proposizione 1.1 *I punti formali sono chiusi formali, cioè vale la $\alpha = \ltimes(\alpha)$ per ogni punto formale $\alpha \subseteq S$.*

Dimostrazione: Sia α un punto formale. Per la co-riflessività di $- \ltimes -$ abbiamo subito l'inclusione $\ltimes(\alpha) \subseteq \alpha$.

Il viceversa si vede subito dalla riscrittura della regola α entra in $- \ltimes -$. Vale infatti:

$$\frac{\alpha \subseteq \alpha}{\alpha \subseteq \ltimes(\alpha)}$$

■

Abbiamo ricavato la definizione di punto formale dalle proprietà soddisfatte dai sottoinsiemi $\alpha(x)$ associati ad elementi $x \in X$ nel caso che $\mathcal{S}$ sia una topologia formale derivata da uno spazio topologico concreto. Dimostriamo che il sottoinsieme $\alpha(x)$ è un punto formale.

Proposizione 1.2 *Sia $\mathcal{X} = (X, \mathsf{ext}, S, \wedge)$ uno spazio topologico concreto e $\mathcal{S} = (S, \wedge, \lhd, \ltimes)$ la topologia formale rappresentabile derivata da $\mathcal{X}$. Dato un elemento $x \in X$, il sottoinsieme $\alpha(x) \equiv \{a \in S \mid x \in \mathsf{ext}(a)\}$ è un punto formale.*

Dimostrazione: La condizione $\alpha(x) \between S$ è soddisfatta in conseguenza di $(B1)$ della definizione di spazio topologico concreto.

Mostriamo che $\alpha(x)$ è convergente: siano $a, b \in \alpha(x)$, allora $x \in \mathsf{ext}(a)$ e $x \in \mathsf{ext}(b)$, ma allora $x \in \mathsf{ext}(a \wedge b)$ per definizione di $- \wedge -$, quindi $(a \wedge b) \in \alpha(x)$.

Sia $a \in \alpha(x)$ e $a \triangleleft U$, allora $x \in \mathsf{ext}(a)$ e $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$. La seconda affermazione dice che, per ogni elemento di X che sta in $\mathsf{ext}(a)$, esiste un u in U tale che $\mathsf{ext}(u)$ contiene quel elemento. Quindi anche x sta in $\mathsf{ext}(u)$ per qualche elemento u di U. Questo implica che $\alpha(x) \between U$. Abbiamo così dimostrato che $\alpha(x)$ spezza $- \triangleleft -$.

Resta da dimostrare che $\alpha(x)$ entra in $- \ltimes -$: sia $a \in \alpha(x)$ e $\alpha(x) \subseteq F$. La seconda affermazione dice che ogni elemento $a \in S$ tale che $x \in \mathsf{ext}(a)$ è un elemento di F. Quindi x è un elemento che sta in $\mathsf{ext}(a)$ e che sta in $\mathsf{ext}(b)$ solo per elementi b di F, questo significa che $\mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$, cioè che $a \ltimes F$. ■

Il senso di punto formale associato ad un elemento di X è quello di ragruppare in un sottoinsieme tutti gli elementi di S che possono contribuire ad identificare $x \in X$, cioè di dare con un sottoinsieme di S la migliore descrizione formale possibile dell'elemento x. Osserviamo che in generale non c'è corrispondenza biunivoca fra elementi di X e punti formali, infatti possono verificarsi entrambe le seguenti situazioni:

1. Esistono punti formali che non corrispondono ad alcun punto concreto, cioè che non coincidono con nessun $\alpha(x)$ per un $x \in X$ (si veda (**Appendice 2**) per un esempio).
2. Due diversi elementi x e x' di X possono corrispondere allo stesso punto formale, cioè può essere $\alpha(x) = \alpha(x')$.

Quindi, nel caso di una topologia formale $\mathcal{S}$ rappresentabile, non possiamo considerare la collezione $Pt(\mathcal{S})$ di tutti i punti formali di $\mathcal{S}$ come un equivalente formale dell'insieme dei punti concreti, ma $Pt(\mathcal{S})$, per la proposizione precedente, può comunque essere considerata una controparte formale di X. Possiamo anzi dimostrare che ogni punto formale contiene almeno un punto formale associato ad un punto concreto, vale cioè la seguente proposizione:

Proposizione 1.3 *Sia $\mathcal{X} = (X, \mathsf{ext}, S, \wedge)$ uno spazio topologico concreto e $\mathcal{S} = (S, \wedge, \triangleleft, \ltimes)$ la topologia formale rappresentabile derivata da $\mathcal{X}$. Allora, per ogni punto formale $\alpha \in Pt(\mathcal{S})$, se $x \in \mathsf{Rest}(\alpha)$ allora $\alpha(x) \subseteq \alpha$, e $\mathsf{Rest}(\alpha)$ contiene almeno un elemento.*

Dimostrazione: Sia $\alpha \in Pt(\mathcal{S})$ e $x \in X$ tale che $x \in \mathsf{Rest}(\alpha)$, allora $\alpha(x) \subseteq \alpha$ vale per definizione di Rest. Dimostriamo ora che $\mathsf{Rest}(\alpha)$ contiene almeno un elemento. Abbiamo dimostrato che ogni punto formale è un chiuso formale, quindi per ogni $a \in \alpha$ vale $a \ltimes \alpha$. Dalla definizione di punto formale sappiamo inoltre che esiste almeno un $a \in S$ tale che $a \in \alpha$. Quindi esiste un $a \in S$ tale che $\mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(\alpha)$, cioè tale che $(\exists x \in X)(x \in \mathsf{ext}(a) \ \& \ x \in \mathsf{Rest}(\alpha))$. Quindi $\mathsf{Rest}(\alpha)$ contiene almeno un elemento. ■

Questa proposizione ci dice che, nelle topologie formali rappresentabili, possiamo pensare un punto formale α come un'estensione dei punti formali associati agli elementi di $\mathsf{Rest}(\alpha)$.

Capitolo 2

Generazione induttiva della topologia formale

Da un punto di vista costruttivo la definizione di topologia formale data nella sezione (1.2) non è completamente soddisfacente. Infatti si tratta di una definizione assiomatica, cioè le regole della definizione vanno intese come condizioni di cui va verificata la validità e non sono in alcun modo accettabili come regole per la generazione di una copertura e di un predicato di positività. Questa è una delle principali ragioni per la quale è stato sviluppato un approccio induttivo che permetta di costruire esplicitamente una topologia formale fornendo una opportuna *collezione di assiomi* (induttivamente si definiscono topologie per i numeri reali e per gli spazi di Cantor, si veda ad esempio [FPFTBT]). In questo capitolo introdurremo una definizione costruttiva di topologia formale e mostreremo come generare per induzione le relazioni $- \lhd -$ e $- \ltimes -$.

2.1 Topologia formale induttivamente generata

Dato un insieme S, una definizione induttiva di una copertura comincia da alcuni assiomi, che assumiamo siano dati da una relazione $R_\lhd$ fra elementi di S e sottoinsiemi di S, cioè $R_\lhd(a, U)$ prop $[a : S, U \subseteq S]$. Vogliamo generare la più piccola copertura $- \lhd -$ che soddisfi la seguente condizione:

$$(\lhd - assiomi)\ \frac{R_\lhd(a, U)}{a \lhd U}$$

Considerando per il momento solo le condizioni reflexivity e transitivity. Da un punto di vista impredicativo $- \lhd -$ è facilmente ottenibile come intersezione degli elementi della collezione $\mathcal{C}_R$ di tutte le relazioni riflessive e transitive che contengono R. Predicativamente questo metodo di definizione non è accettabile, non abbiamo infatti un modo di produrre $\mathcal{C}_R$ come una famiglia indicizzata su un insieme e quindi definire la sua intersezione. Dobbiamo quindi ottenere $- \lhd -$ attraverso delle regole di introduzione.

Cominciamo col dire che la condizione di transitività per $- \lhd -$ può essere sostituita in ogni sua applicazione da una applicazione della regola

$$(trax)\ \frac{R_\lhd(a, V) \quad V \lhd U}{a \lhd U}$$

che chiameremo *trax (transitivity on axioms)*. Intuitivamente possiamo spiegare questo pensando che ogni applicazione di transitivity venga "sollevata" fino a ricondursi ad una applicazione di trax (per una motivazione dettagliata dell'introduzione della regola trax vedi [IGFT, Capitolo 2]). Cercheremo quindi di generare induttivamente coperture che soddisfino: $\lhd$−assiomi, reflexivity e trax.

Un problema della regola trax è il fatto che per ottenere $a \triangleleft U$ basta che esista un sottoinsieme V di S tale che valgano le premesse $R_\triangleleft(a,V)$ e $V \triangleleft U$. Quindi le possibili premesse di $a \triangleleft U$ non possono essere indicizzate da un insieme perché la sua validità dipende da una quantificazione esistenziale su $\mathcal{P}(S)$ (che non è in genere un insieme). La soluzione sta semplicemente nel ridurre questa quantificazione ad una quantificazione su un insieme.

Il caso più generale è quello in cui si dispone di una famiglia di insiemi $I(a)$ set $[a : S]$, tali da far diventare la precedente quantificazione su $\mathcal{P}(S)$ per derivare $a \triangleleft U$ una quantificazione su $I(a)$, e di un sottoinsieme $C(a,i)$ di S per ogni $i \in I(a)$, che svolge il compito precedentemente svolto dal sottoinsieme V. Quindi i sottoinsiemi che per assioma devono coprire un elemento $a \in S$ non sono dati come quei V tali che $R_\triangleleft(a,V)$, ma direttamente come una famiglia di sottoinsiemi $C(a,i)$ indicizzata su un insieme $I(a)$. In questo modo si evita la quantificazione sulla collezione dei sottoinsiemi.

Definizione 2.1 (Axiom-set) *Sia S un insieme. Sia $I(a)$ set $[a : S]$ una famiglia di insiemi che indicizza una famiglia di sottoinsiemi $C(a,i) \subseteq S$ $[a : S, i : I(a)]$. Chiameremo I, C un axiom-set.*

Dato un axiom-set I, C, per ogni $a \in S$ e $i \in I(a)$ considereremo, per assioma, i sottoinsiemi $C(a,i)$ di S delle coperture di a (per deli esempi di axiom-set si veda [FPFTBT]).

Per ricondurci alla forma iniziale data agli assiomi possiamo pensare ad un axiom-set come ad una relazione infinitaria $R_\triangleleft$ tale che valga $R_\triangleleft(a,V)$ se e solo se esiste $i \in I(a)$ tale che $C(a,i) \subseteq V$. Diremo che la relazione $R_\triangleleft$ è $\triangleleft$-*set-presented* se esiste un axiom-set I, C tale che

$$R_\triangleleft(a,V) \text{ se e solo se } (\exists i \in I(a))\ C(a,i) \subseteq V$$

Una applicazione della regola trax per una tale relazione ci porta alla regola

$$(\triangleleft - infinity)\ \frac{i \in I(a) \quad C(a,i) \triangleleft U}{a \triangleleft U}$$

Vediamo ora che con le regole

$$(reflexivity)\ \frac{a \in U}{a \triangleleft U} \qquad (\triangleleft - infinity)\ \frac{i \in I(a) \quad C(a,i) \triangleleft U}{a \triangleleft U}$$

possiamo definire induttivamente una $- \triangleleft -$ che soddisfi reflexivity e transitivity.

Teorema 2.1 *Per ogni relazione infinitaria $R_\triangleleft$ che sia $\triangleleft$-set-presented tramite insiemi $I(a)$ set $[a : S]$ e sottoinsiemi $C(a,i) \subseteq S$ $[a : S, i : I(a)]$, la relazione $- \triangleleft -$ definita induttivamente da reflexivity e $\triangleleft$-infinity è la più piccola relazione che contiene $R_\triangleleft$ e che soddisfa le regole di reflexivity e $\triangleleft$-transitivity.*

Dimostrazione: Mostriamo che $- \triangleleft -$ soddisfa le regole reflexivity e $\triangleleft$-transitivity. La chiusura per reflexivity è data per definizione. Proviamo la chiusura per $\triangleleft$-transitivity per induzione sulla derivazione delle premesse. Supponiamo quindi $a \triangleleft U$ e $U \triangleleft V$. Se $a \triangleleft U$ è ottenuto per reflexivity da $a \in U$ allora $a \triangleleft V$ si ottiene da $U \triangleleft V$. Se invece $a \triangleleft U$ è ottenuto tramite $\triangleleft$-infinity da $C(a,i) \triangleleft U$ per qualche $i \in I(a)$ allora, per ipotesi induttiva, possiamo dire che $C(a,i) \triangleleft V$, da cui $a \triangleleft V$ segue per $\triangleleft$-infinity con ipotesi $i \in I(a)$ e $C(a,i) \triangleleft V$.

Dimostriamo ora che $- \triangleleft -$ contiene $R_\triangleleft$: se vale $R_\triangleleft(a,U)$ allora esiste $i \in I(a)$ tale che $C(a,i) \subseteq U$ perchè $R_\triangleleft$ è $\triangleleft$-set-presented. Quindi per reflexivity $C(a,i) \triangleleft U$, e $a \triangleleft U$ segue per $\triangleleft$-infinity con ipotesi $i \in I(a)$ e $C(a,i) \triangleleft U$.

Ci resta da mostrare che le regole reflexivity e $\triangleleft$-infinity sono valide, cioè che valgono per ogni relazione $- \triangleleft' -$ che contiene $R_\triangleleft$ e che sia chiusa per reflexivity e $\triangleleft$-transitivity. Reflexivity vale per definizione di $- \triangleleft' -$. Sia poi $C(a,i) \triangleleft' U$ per qualche $i \in I(a)$ allora vale anche $a \triangleleft' U$ per una applicazione di $\triangleleft$-transitivity sull'assioma $R_\triangleleft(a, C(a,i))$. ■

Sviluppiamo ora un procedimento duale per il predicato binario di positività $- \ltimes -$. Per la generazione di $- \ltimes -$ siano dati alcuni assiomi $R_{\ltimes}(a,F)$ prop $[a : S, F \subseteq S]$. Vogliamo generare la più grande relazione $- \ltimes -$ che soddisfi le regole co-reflexivity e $\ltimes$-co-transitivity e la condizione:

$$(\ltimes - assiomi)\ \frac{a \ltimes F}{R_{\ltimes}(a,F)}$$

Similmente a quanto fatto per la relazione $R_{\lhd}$ diremo che $R_{\ltimes}$ è $\ltimes$*-set-presented* se esiste un axiom-set $J(a)$ set $[a : S]$, $E(a,j) \subseteq S$ $[a : S, j : J(a)]$ tale che

$$R_{\ltimes}(a,F) \text{ se e solo se } (\forall j \in J(a))\ F \between E(a,j)$$

Si dimostra (vedi [PFCT]) che le regole co-reflexivity e $\ltimes$-co-transitivity assieme a $\ltimes$-assiomi sono equivalenti alla coppia di regole

$$(co - reflexivity)\ \frac{a \ltimes F}{a \in F} \qquad (\ltimes - infinity)\ \frac{a \ltimes F \quad j \in J(a)}{E(a,j) \ltimes F}$$

Nella definizione (1.3) di topologia formale abbiamo richiesto la validità della regola compatibility che mostra un legame tra $- \lhd -$ e $- \ltimes -$. Nel caso di una topologia formale induttivamente generata basta richiedere che valga la seguente istanza di compatibility

$$(compatibility)\ \frac{i \in I(a) \quad a \ltimes F}{C(a,i) \ltimes F}$$

La regola è una semplice riscrittura di quella data nella definizione (1.3) utilizzando gli assiomi della copertura. Osserviamo inoltre che compatibility coincide con $\ltimes$-infinity quando gli assiomi per generare $- \ltimes -$ coincidono con quelli per generare $- \lhd -$. Dimostriamo che è equivalente alla compatibility della definizione (1.3):

Proposizione 2.1 *Sia $- \lhd -$ una relazione generata induttivamente dalle regole reflexivity e $\lhd$-infinity. Allora vale l'equivalenza*

$$\frac{a \lhd U \quad a \ltimes F}{U \ltimes F} \Leftrightarrow \frac{i \in I(a) \quad a \ltimes F}{C(a,i) \ltimes F}$$

Dimostrazione: Dimostriamo l'implicazione da sinistra a destra. Sia $i \in I(a)$ e $a \ltimes F$. Sappiamo che $a \lhd C(a,i)$, quindi possiamo applicare la regola a sinistra per concludere $C(a,i) \ltimes F$.

Viceversa sia $a \lhd U$ e $a \ltimes F$. Se $a \lhd U$ è ottenuto con una applicazione di reflexivity allora vale certamente $U \ltimes F$. Se invece $a \lhd U$ è ottenuto con una applicazione di $\lhd$-infinity, allora esiste un $i \in I(a)$ tale che $C(a,i) \lhd U$. Possiamo applicare la regola di destra alle ipotesi $i \in I(a)$ e $a \ltimes F$ per concludere che $C(a,i) \ltimes F$, cioè che esiste un elemento a' di $C(a,i)$ che è positivo con F. É a' coperto da U quindi, per induzione, possiamo applicare la regola di sinistra sulle ipotesi $a' \lhd U$ e $a' \ltimes F$ per concludere $U \ltimes F$. ■

Si dimostra (vedi ancora [PFCT]) che gli assiomi per il predicato binario di positività sono completamente indipendenti dagli assiomi per la relazione di copertura. Nella proposizione precedente abbiamo inoltre visto che la validità di compatibility, relazione che lega le relazioni copertura e predicato binario di positività in una topologia formale, dipende *solo* dagli assiomi della copertura. Quindi, fissati degli assiomi per $- \lhd -$ nessun vincolo viene posto nella scelta di assiomi per $- \ltimes -$ e ogni scelta fatta darà un predicato di positività compatibile con $- \lhd -$.

Questo induce a definire *topologia formale induttivamente generata* una struttura ottenuta generando induttivamente una relazione di copertura con un axiom-set e che abbia un predicato binario di positività non generato da assiomi ma caratterizzato dalle regole co-reflexivity e compatibility, così che un solo predicato di positività resta associato ad una data relazione di copertura. Possiamo allora dimostrare che un tale predicato binario di positività soddisfa co-reflexivity, $\ltimes$-co-transitivity e $\ltimes$-assiomi. Sappiamo infatti che, dato un axiom-set, il predicato binario generato co-induttivamente da co-reflexivity e $\ltimes$-infinity è il più grande predicato che soddisfa co-reflexivity, $\ltimes$-co-transitivity e $\ltimes$-assiomi per quel axiom-set. Consideriamo l'axiom-set I, C che genera induttivamente la copertura. Per questo axiom-set, $\ltimes$-infinity si riduce a compatibility e resta così dimostrato che il predicato binario co-induttivamante generato da co-reflexivity e compatibility è il più grande predicato che soddisfa co-reflexivity, $\ltimes$-co-transitivity e $\ltimes$-assiomi per l'axiom-set I, C.

Per poter dare la definizione di topologia formale dobbiamo dare anche delle condizioni sugli assiomi per fare in modo che valgano le condizioni $\wedge$-left e $\wedge$-right della definizione (1.3) di topologia formale. A questo fine richiediamo che per ogni coppia a e b di elementi di S esistano due indici i_a e i_b in $I(a \wedge b)$ tali che $C(a \wedge b, i_a) = \{a\}$ e $C(a \wedge b, i_b) = \{b\}$. É immediato verificare che questo è sufficiente per far valere la condizione $\wedge$-left. Supponiamo infatti che sia $a \lhd U$, allora per assioma vale $(a \wedge b) \lhd a$ e quindi con una applicazione di transitivity otteniamo che:

$$\frac{(a \wedge b) \lhd a \quad a \lhd U}{(a \wedge b) \lhd U}$$

cioè otteniamo la conclusione di $\wedge$-left dalle ipotesi $a \lhd U$ e $b \in S$.

Mostriamo ora come dare una condizione sugli assiomi perché sia soddisfatta anche la condizione $\wedge$-right. Supponiamo che per ogni elemento $a \in S$ esista un indice $i_\wedge \in I(a)$ tale che $C(a, i_\wedge) = \{a \wedge a\}$, quindi otteniamo che, per assioma, valga $a \lhd (a \wedge a)$. Con questa ipotesi $\wedge$-right è un caso particolare della seguente condizione:

$$\frac{a \lhd U \quad b \lhd V}{(a \wedge b) \lhd (U \wedge V)}$$

Infatti, applicando questa condizione alle ipotesi $a \lhd U$ e $a \lhd V$, otteniamo $(a \wedge a) \lhd (U \wedge V)$, da questa e da $a \lhd (a \wedge a)$, per $\lhd$-transitivity, otteniamo $a \lhd (U \wedge V)$. Quindi se gli assiomi sono dati in una forma tale da rendere valida questa condizione possiamo considerare valida anche la condizione $\wedge$-right. La condizione da dare sugli assiomi I, C è la seguente:

$$(\forall a, b \in S)(\forall i \in I(a))(\exists j \in I(a \wedge b))\ C(a \wedge b, j) \subseteq (b \wedge C(a, i))$$

dove $b \wedge C(a, i) = \{b \wedge c \mid c \in C(a, i)\}$. Dimostriamo quindi il seguente teorema:

Teorema 2.2 *Sia I, C un axiom-set che soddisfa la condizione precedente e sia $- \lhd -$ una relazione generata con le regole reflexivity, $\lhd$-infinity e che soddisfa $\wedge$-left. Allora vale la condizione*

$$\frac{a \lhd U \quad b \lhd V}{(a \wedge b) \lhd (U \wedge V)}$$

Dimostrazione: Sia $a \lhd U$ e $b \lhd V$. Supponiamo che entrambi siano ottenuti dalle ipotesi $a \in U$ e $b \in V$ tramite una applicazione di reflexivity. Allora $(a \wedge b) \in (U \wedge V)$ per definizione di $U \wedge V$, e quindi per reflexivity vale $(a \wedge b) \lhd (U \wedge V)$.

Supponiamo invece che $a \lhd U$ sia ottenuto con una applicazione di $\lhd$-infinity (il caso in cui $b \lhd U$ è ottenuto con una applicazione di $\lhd$-infinity è del tutto simmetrico). Allora $a \lhd U$ è conseguenza delle ipotesi $i \in I(a)$ e $C(a, i) \lhd U$ per qualche $i \in I(a)$. Per ipotesi induttiva possiamo dire che vale

$$\frac{b \lhd V \quad C(a, i) \lhd U}{(b \wedge C(a, i)) \lhd (U \wedge V)}$$

Per ipotesi sappiamo che esiste un $j \in I(a \wedge b)$ tale che $C(a \wedge b, j) \subseteq (b \wedge C(a, i))$, quindi possiamo dire che $C(a \wedge b, j) \lhd (U \wedge V)$. Con una applicazione di $\lhd$-infinity otteniamo

$$\frac{j \in I(a \wedge b) \quad C(a \wedge b, j) \lhd (U \wedge V)}{(a \wedge b) \lhd (U \wedge V)}$$

$\blacksquare$

Abbiamo visto che, se un axiom-set I, C soddisfa le condizioni date sopra, allora possiamo dimostrare che una copertura generata tramite le regole reflexivity e infinity, è la più piccola copertura che soddisfa reflexivity, transitivity, $\wedge$-left, $\wedge$-right e tale che, dati $a \in S$ e $i \in I(a)$, vale $a \lhd C(a,i)$.

Diremo che un axiom-set è *localizzato* quando soddisfa le tre condizioni viste sopra.

Diamo quindi la definizione di topologia formale induttivamente generata che adotteremo:

Definizione 2.2 (Topologia formale induttivamente generata) *Sia S un insieme munito di una operazione $- \wedge -$ tale che $(S, \wedge)$ sia un semigruppo commutativo. Sia $I(a)\mathsf{set}$ $[a : S]$ una famiglia di insiemi indicizzata su S e $C(a,i)$ $[a : S, i : I(a)]$ un sottoinsieme di S per ogni $a \in S$ e ogni $i \in I(a)$, tali che I, C sia un axiom-set localizzato. Allora la topologia formale induttivamente generata dall'axiom-set I, C è la struttura $(S, \wedge, \lhd, \ltimes)$ dove $- \lhd -$ è una relazione fra elementi e sottoinsiemi di S induttivamente generata dalle regole*

$$(reflexivity)\ \frac{a \in U}{a \lhd U} \qquad (infinity)\ \frac{i \in I(a) \quad C(a,i) \lhd U}{a \lhd U}$$

(dove $C(a,i) \lhd U$ è una abbreviazione per $(\forall y \in C(a,i))\ y \lhd U$) e $- \ltimes -$ è una relazione fra elementi e sottoinsiemi di S co-induttivamente generata dalle regole

$$(co-reflexivity)\ \frac{a \ltimes F}{a \in F} \qquad (compatibility)\ \frac{i \in I(a) \quad a \ltimes F}{C(a,i) \ltimes F}$$

(dove $C(a,i) \ltimes F$ è una abbreviazione per $(\exists y \in C(a,i))\ y \ltimes F$).

Introducendo le regole per la topologia formale induttivamente generata abbiamo mostrato che le relazioni $- \lhd -$ e $- \ltimes -$ di una topologia formale induttivamente generata soddisfano le condizioni delle relazioni della definizione (1.3) di topologia formale. Quindi possiamo dire che ogni topologia formale induttivamente generata è una topologia formale come definita nella (1.3).

Vogliamo ora vedere come sia possibile fornire una definizione esplicita della relazione di copertura e del predicato binario di positività. Richiamiamo quindi cosa significa dire che la relazione di copertura è induttivamente generata. Ricordando che $\lhd(U)$ è definita come $\lhd(U) = \{a \in S \mid a \lhd U\}$, possiamo riscrivere la relexivity e la infinity come

$$(reflexivity)\ U \subseteq \lhd(U) \qquad (infinity)\ \frac{C(a,i) \subseteq \lhd(U)}{a \in \lhd(U)}$$

Allora, affermare che la relazione di copertura è induttivamente generata significa dire che $\lhd(U)$ è il minimo sottoinsieme di S che soddisfa entrambe le proprietà reflexivity e infinity, che equivale a dire che per ogni sottoinsieme V di S è soddisfatta la seguente condizione

$$(minimality)\ \frac{U \subseteq V \quad a \in V\ [i \in I(a), C(a,i) \subseteq V]}{\lhd(U) \subseteq V}$$

Osserviamo che la stessa idea può anche essere espressa dicendo che $\lhd(U)$ è la più piccola soluzione della seguente equazione fra sottoinsiemi

$$a \in Y \Leftrightarrow (a \in U) \vee (\exists i \in I(a))(\forall y \in C(a,i))\ y \in Y \tag{2.1}$$

Allo stesso modo, ricordando che abbiamo definito $\ltimes(F) = \{a \in S \mid a \ltimes F\}$, le regole per la generazione co-induttiva del predicato binario di positività diventano:

$$(co-reflexivity)\ \ltimes(F) \subseteq F \qquad (compatibility)\ \frac{i \in I(a) \quad a \in \ltimes(F)}{C(a,i) \between \ltimes(F)}$$

Allora dire che $-\ltimes-$ è coinduttivamente generato significa dire che per ogni sottoinsieme G di S è soddisfatta la seguente condizione

$$(maximality)\ \frac{G \subseteq F \quad C(a,i) \between G\ [i \in I(a), a \in G]}{G \subseteq \ltimes(F)}$$

che può essere espressa anche dicendo che $\ltimes(F)$ è la più grande soluzione della seguente equazione

$$a \in Y \Leftrightarrow a \in F\ \&\ (\forall i \in I(a))(\exists y \in C(a,i))\ y \in Y \tag{2.2}$$

Ora abbiamo per $-\lhd-$ e $-\ltimes-$ delle definizioni induttive. Queste però non ci permettono di determinare effettivamente sottoinsiemi del tipo $\lhd(U)$ e $\ltimes(F)$. Il teorema di Tarski ci dice che le equazioni (2.1) e (2.2) ammettono soluzione ma la dimostrazione impredicativa non indica una costruzione dei sottoinsiemi che le risolvono. Vogliamo modificare la definizione di axiom-set in modo che i nuovi assiomi ci permettano di ottenere una procedura per costruire le soluzioni di queste due equazioni.

2.2 Una soluzione per le definizioni induttive

Introduciamo una versione leggermente modificata degli assiomi per generare per induzione una topologia formale, allo scopo di fornire una soluzione esplicita della definizione induttiva della relazione di copertura e della definizione co-induttiva del predicato binario di positività (questo approccio è preso da [BFTGT]).

I nuovi assiomi sono formati da due famiglie di insiemi, $I(-)$ e $D(-,-)$, e una funzione $d(-,-,-)$ tali che:

$$I(a)\ \mathsf{set}\ [a:S]$$

$$D(a,i)\ \mathsf{set}\ [a:S, i:I(a)]$$

$$d(a,i,j) \in S\ [a:S, i:I(a), j:D(a,i)]$$

Dati degli assiomi di questo tipo, per ogni $a \in S$ e $i \in I(a)$, considereremo, per assioma, a coperto dal sottoinsieme $\mathsf{Im}[d(a,i)] = \{d(a,i,j) \mid j \in D(a,i)\}$. Vogliamo che i nuovi assiomi soddisfino condizioni equivalenti a quelle della definizione di axiom-set localizzato. Richiederemo quindi che, dati due elementi $a, b \in S$, l'insieme $I(a \wedge b)$ contenga due indici, i_a e i_b, tali che $\mathsf{Im}[d(a \wedge b, i_a)] = \{a\}$ e $\mathsf{Im}[d(a \wedge b, i_b)] = \{b\}$; che sia rispettata la condizione

per ogni $a, b \in S$ e ogni $i \in I(a)$, esiste $j \in I(a \wedge b)$ tale che $\mathsf{Im}[d(a \wedge b, j)] \subseteq (b \wedge \mathsf{Im}[d(a,i)])$

e che per ogni $a \in S$ esista $i_\wedge \in I(a)$ tale che $\mathsf{Im}[d(a, i_\wedge)] = \{a \wedge a\}$.

Riscriviamo le regole per una topologia induttivamente generata adattandole ai nuovi assiomi:

$$(reflexivity)\ \frac{a \in U}{a \lhd U} \qquad (infinity)\ \frac{i \in I(a) \quad (\forall j \in D(a,i))\ d(a,i,j) \lhd U}{a \lhd U}$$

$$(co-reflexivity)\ \frac{a \ltimes F}{a \in F} \qquad (compatibility)\ \frac{i \in I(a) \quad a \ltimes F}{(\exists j \in D(a,i))\ d(a,i,j) \ltimes F}$$

L'equivalenza fra i due tipi di assiomi resta dimostrata se si dimostra che da un axiom-set localizzato del primo tipo si può ottenere da una collezione di assiomi del secondo tipo e viceversa, in modo che diano luogo alla stessa topologia formale induttivamente generata. Data una collezione di assiomi del nuovo tipo allora un axiom-set localizzato del vecchio tipo si ottiene ponendo semplicemente

$$C(a,i) \equiv \mathsf{Im}[d(a,i)]$$

e mantenendo la definizione di $I(a)\ \mathsf{set}\ [a:S]$. Questo garantisce la validità di compatibility e infinity della definizione (2.2) di topologia formale induttivamente generata, e delle condizioni della definizione di axiom-set localizzato, perché ottenute direttamente dalla compatibility, infinity e condizioni per gli assiomi nella nuova forma.

Viceversa, data una collezione di assiomi del primo tipo poniamo

$$D(a,i) \equiv \sum(S, C(a,i)) = \{(c,\pi) \mid c \in S, \pi \text{ prova del fatto che } c \in C(a,i)\}$$

$$d(a,i,j) \equiv \mathsf{fst}(j)$$

Gli elementi canonici dell'insieme $D(a,i)$ sono delle coppie $j = (c,\pi)$ in cui c è un elemento di S e π è inteso come prova del fatto che $c \in C(a,i)$. Quindi la definizione della funzione d ci garantisce che $d(a,i,(c,\pi)) = c$. Con queste definizioni abbiamo che $\mathsf{Im}[d(a,i)] = C(a,i)$ da cui ricaviamo che $a \lhd \mathsf{Im}[d(a,i)]$. Le regole di infinity e compatibility per il secondo tipo di assiomi si ricavano direttamente da quelle per il primo tipo sostituendo le definizioni degli assiomi, quindi resta provata la loro validità. Le condizioni di localizzazione per il nuovo tipo di assiomi si ottengono semplicemente sostituendo la definizione di $\mathsf{Im}[d(-,-)]$ a $C(-,-)$ nelle condizioni della definizione di axiom-set localizzato.

Mostriamo ora che questo cambiamento della forma degli assiomi è sufficente per risolvere la definizione induttiva della relazione di copertura e del predicato binario di positività. Con assiomi di questa forma riusciremo infatti a caratterizzarli attraverso costruzioni induttive.

T. Coquand ha proposto un approccio alla definizione di proposizioni basato sulla teoria dei giochi (in [IID]). P. Martin-Löf e G. Sambin hanno più tardi utilizzato questa idea per definire la relazione di copertura e il predicato binario di positività (si veda [BP]). Mostriamo la principale idea di questo approccio qui di seguito.

Supponiamo che I, D e d sia una collezione di assiomi che generino induttivamente una topologia formale su una base S, e supponiamo di voler costruire il sottoinsieme $\lhd(U)$, con $U \subseteq S$. Introduciamo il seguente gioco fra due giocatori A e B:

Stati del gioco: l'insieme S è l'insieme degli stati del gioco.
Supponiamo che il gioco si trovi nello stato $a \in S$
Mossa giocatore A: A muove scegliendo un elemento $i \in I(a)$.
Mossa del giocatore B: B risponde alla mossa di A scegliendo un elemento $j \in D(a,i)$.
Nuovo stato del gioco: dopo le due mosse il gioco va nello stato $d(a,i,j) \in S$.

Il giocatore A vince se riesce a forzare B a scegliere per la sua mossa un elemento del sottoinsieme U, mentre B non perde se riesce sempre a stare al di fuori di U. Quindi:

Posizione vincente per A: lo stato $a \in S$ è una posizione vincente per A se e solo se $a \in U$ oppure esiste $i \in I(a)$ tale che, per ogni $j \in D(a,i)$, $d(a,i,j)$ è una posizione vincente per A

In conseguenza della equazione (2.1) c'è una strategia che porta A alla vittoria partendo dallo stato a se e solo se l'elemento a sta in una soluzione della (2.1). Quindi l'insieme $\lhd(U)$ coincide con il minimo sottoinsieme degli stati del gioco che sono vincenti per il giocatore A.

Allo scopo di determinare il sottoinsieme $\lhd(U)$ possiamo definire la relazione di copertura attraverso i percorsi dell'albero delle mosse del gioco. Vogliamo cioè costruire $\lhd(U)$ per approssimazioni successive, partendo da U e aggiungendovi gli stati del gioco che riconosciamo essere vincenti per il giocatore A.

Notiamo che non c'è un limite prestabilito per la lunghezza di un possibile percorso che porti alla vittoria di A. Quindi non possiamo pernsare di limitarci ad alcun numero di passi che stia nei naturali. Per questo (seguendo l'articolo [BFTGT]) introduciamo l'insieme Ord_S degli *ordinali su S*:

Definizione 2.3 *L'insieme Ord_S degli ordinali è generato per induzione dalle tre seguenti regole:*

$$0 \in \mathsf{Ord}_S \qquad \frac{n \in \mathsf{Ord}_S}{n+1 \in \mathsf{Ord}_S} \qquad \frac{a \in S \quad i \in I(a) \quad f \in D(a,i) \to \mathsf{Ord}_S}{\Lambda(f) \in \mathsf{Ord}_S}$$

Definiamo ora le seguenti famiglie di sottoinsiemi di S per induzione su Ord_S:

$$U_0 \equiv U$$

$$U_{n+1} \equiv U_n \cup \{x \in S \mid (\exists i \in I(x))(\forall j \in D(x,i))d(a,i,j) \in U_n\}$$

$$U_{\Lambda(f)} \equiv \bigcup_{j \in D(a,i)} U_{f(j)} \text{ dove } f : D(a,i) \to \mathsf{Ord}_S$$

Gli elementi di U_{n+1} sono gli stati $a \in S$ per i quali esiste un elemento $i \in I(a)$ per cui ogni mossa di B dà la possibilità ad A di scegliere una sequenza di mosse che porta in uno stato $u \in U$ e lunga al più $n+1$ passi, mentre gli elementi di $U_{\Lambda(f)}$ sono gli stati per i quali qualunque mossa di B porta ad uno stato $d(a,i,j)$ che sta in U_m per qualche $m \in \mathsf{Ord}_S$.

Definiamo l'insieme

$$\lhd'(U) \equiv \bigcup_{x \in \mathsf{Ord}_S} U_x$$

dal quale ricaviamo la definizione della relazione $- \lhd' -$:

$$a \lhd' U \Leftrightarrow a \in \lhd'(U)$$

che si legge: $a \lhd' U$ se e solo se esiste $x \in \mathsf{Ord}_S$ tale che $a \in U_x$.

Con i seguenti due teoremi mostriamo che $- \lhd' -$ coincide con la copertura $- \lhd -$ generata dagli assiomi I, D, d.

Teorema 2.3 *La relazione $- \lhd' -$ definita*

$$a \lhd' U \Leftrightarrow (\exists x \in \mathit{Ord}_S)\ a \in U_x$$

soddisfa le proprietà di reflexivity e infinity.

Dimostrazione: Per provare la validità di reflexivity dobbiamo provare che se $a \in U$ allora $a \lhd' U$. Questo risulta dal fatto che se $a \in U$ allora $a \in U_0$ e quindi esiste un $x \in \mathsf{Ord}_S$ tale che $a \in U_x$, cioè $a \lhd' U$.

Dimostriamo che vale infinity. Dobbiamo provare che, per ogni $a \in S$, se esiste $i \in I(a)$ tale che $\mathsf{Im}[d(a,i)] \lhd' U$ allora $a \lhd' U$. Sia $\mathsf{Im}[d(a,i)] \lhd' U$, allora per ogni $j \in D(a,i)$, $d(a,i,j) \lhd' U$ e quindi per definizione esiste $x \in \mathsf{Ord}_S$ tale che $d(a,i,j) \in U_x$. Per l'assioma di scelta esiste una funzione $f \in D(a,i) \to \mathsf{Ord}_S$ tale che per ogni $j \in D(a,i)$, $d(a,i,j) \in U_{f(j)}$. Quindi $d(a,i,j) \in U_{\Lambda(f)}$ perché per ogni $j \in D(a,i)$, $U_{f(j)} \subseteq U_{\Lambda(f)}$. Abbiamo così dimostrato che esiste un $i \in I(a)$ tale che, per ogni $j \in D(a,i)$, $d(a,i,j) \in U_{\Lambda(f)}$, che implica $a \in U_{\Lambda(f)+1}$ e quindi $a \lhd' U$. ■

Teorema 2.4 *$\lhd'(U)$ è il più piccolo sottoinsieme di S contenente U e chiuso per reflexivity e infinity.*

Dimostrazione: Per induzione su Ord_S proviamo che $\lhd'(U)$ è sottoinsieme di ogni sottoinsieme V di S chiuso per reflexivity e infinity e tale che $U \subseteq V$.

$U_0 = U \subseteq V$ vale per reflexivity di V, e se $U_n \subseteq V$ allora anche $U_{n+1} \subseteq V$ perché, se per qualche $a \in S$ esiste un $i \in I(a)$ tale che, per ogni $j \in D(a,i)$, $d(a,i,j) \in U_n$, allora vale anche che per ogni $j \in D(a,i)$ è $d(a,i,j) \in V$, quindi per infinity $a \lhd' V$. Infine, se per qualche $a \in S$ e qualche $i \in I(a)$, f è una funzione da $D(a,i)$ a Ord_S tale che, per ogni $j \in D(a,i)$, $U_{f(j)} \subseteq V$ allora $U_{\Lambda(F)} = \bigcup_{j \in D(a,j)} U_{f(j)} \subseteq V$. ■

Questo dimostra che la relazione $- \lhd' -$ soddisfa alle proprietà che caratterizzano la relazione di copertura generata dagli assiomi. Possiamo quindi considerarla una ridefinizione costruttiva della relazione di copertura.

Dimostriamo ora, utilizzando un nuovo gioco, un risultato analogo per il predicato binario di positività. Le regole che descrivono le mosse del nuovo gioco sono esattamente quelle considerate per il gioco descritto sopra; cambia però il criterio per stabilire quando un giocatore vince. Sia F un sottoinsieme di S e supponiamo di voler costruire il sottoinsieme $\ltimes(F)$ di S. Utilizziamo il gioco per determinare se per un elemento $a \in S$ vale $a \ltimes F$. Condizione necessaria per cui valga $a \ltimes F$ è che sia $a \in F$. Il giocatore B vince se dimostra di sapersi mantenere indefinitivamente all'interno dell'insieme F, mentre A non perde se riesce sempre a mantenere la possibilità di uscire da F.

Posizione vincente per B: lo stato a è una posizione vincente per B se e solo se $a \in F$ e per ogni $i \in I(a)$ esiste $j \in D(a,i)$ tale che $d(a,i,j)$ è una posizione vincente per B.

In conseguenza della equazione (2.2) c'è una strategia che porta B alla vittoria partendo dallo stato a se e solo se l'elemento a sta in una soluzione della equazione (2.2). L'insieme $\ltimes(F)$ è quindi è il massimo sottoinsieme degli stati del gioco che sono vincenti per il giocatore B.

Come abbiamo fatto per $\lhd(U)$ possiamo caratterizzare $\ltimes(F)$ attraverso i percorsi dell'albero delle mosse del gioco. Costruiamo $\ltimes(F)$ per approssimazioni successive, partendo da F e togliendo gli stati del gioco che riconosciamo non essere vincenti per il giocatore B.

Consideriamo le seguenti famiglie di sottoinsiemi di S indicizzati su Ord_S:

$$F_0 \equiv F$$

$$F_{n+1} \equiv F_n \cap \{x \in S \mid (\forall i \in I(x))(\exists j \in D(x,i)) d(x,i,j) \in F_n\}$$

$$F_{\Lambda(f)} \equiv \bigcap_{j \in D(a,i)} F_{f(j)} \text{ dove } f : D(a,i) \to \mathsf{Ord}_S$$

F_{n+1} è composto dagli stati di S per cui ogni mossa di A permette a B di fare una mossa che fa rimanere il gioco in uno stato in F e per le prossime $n+1$ mosse. Mentre $F_{\Lambda(F)}$ è composto dagli stati di S in cui qualunque mossa di A dà a B la possibilità di una contromossa che porta ad uno stato $d(a,i,j)$ in F_m.

Definiamo

$$\ltimes'(F) \equiv \bigcap_{x \in \mathsf{Ord}_S} F_x$$

e definiamo la relazione $- \ltimes' -$ ponendo

$$a \ltimes' F \Leftrightarrow a \in \ltimes'(F)$$

quindi $a \ltimes' F$ vale se e solo se per ogni $x \in \mathsf{Ord}_S$, $a \in F_x$.

Con i seguenti due teoremi mostriamo che $-\ltimes'-$ coincide con il predicato binario di positività $- \ltimes -$ generato dagli assiomi I, D, d.

Teorema 2.5 *La relazione $- \ltimes' -$ definita*

$$a \ltimes' F \Leftrightarrow (\forall x \in \mathit{Ord}_S)\ a \in F_x$$

soddisfa anti-reflexivity e compatibility.

Dimostrazione: Per dimostrare la validità di co-reflexivity dobbiamo mostrare che se $a \ltimes' F$ allora $a \in F$. Supponiamo sia $a \ltimes' F$; allora per ogni $x \in \mathsf{Ord}_S$ vale $a \in F_x$ quindi per $x = 0$ abbiamo $a \in F_0$, cioè $a \in F$.

Per dimostrare la validità di compatibility useremo il seguente principio logico, duale dell'assioma della scelta: supponiamo A e B due insiemi, allora

$$(\exists x \in A)(\forall y \in B)\ C(x,y) \Leftrightarrow (\forall f \in A \to B)(\exists x \in A)\ C(c, f(x))$$

La validità di questo principio ha dimostrazione solo classica. Per la dimostrazione si veda [BFTGT, Appendice]. Proviamo la validità della compatibility. Dobbiamo provare che se $a \ltimes' F$ e $i \in I(a)$ allora esiste $j \in D(a,i)$ tale che $d(a,i,j) \ltimes' F$, cioè esiste $j \in D(a,i)$ tale che, per ogni $x \in \mathsf{Ord}_S$, $d(a,i,j) \in F_x$. Per definizione, se $a \ltimes' F$, allora $a \in F_x$ per ogni $x \in \mathsf{Ord}_S$. In particolare, per ogni funzione f da $D(a,i)$ a Ord_S, $a \in F_{\Lambda(f)+1}$ che significa $a \in F$ e per ogni $i' \in I(a)$, esiste $j \in D(a,i')$ tale che $d(a,i',j) \in F_{\Lambda(f)}$. Osserviamo ora che, per ogni $j \in D(a,i)$, $F_{\Lambda(f)} \subseteq F_{f(j)}$ e quindi $d(a,i,j) \in F_{f(j)}$. Quindi vale la relazione $(\forall f \in D(a,i) \to \mathsf{Ord}_S)(\exists j \in D(a,i))d(a,i,j) \in F_{f(j)}$.

Per l'applicazione del principio logico duale dell'assioma della scelta, scelto un $i \in I(a)$, esiste $j \in D(a,i)$ tale che, per ogni $x \in \mathsf{Ord}_S$, $d(a,i,j) \in F_x$ e quindi $d(a,i,j) \ltimes' F$. ■

Teorema 2.6 $\ltimes'(F)$ *è il più grande sottoinsieme di S contenuto in F e chiuso per co-reflexivity e compatibility*

Dimostrazione: Dobbiamo mostrare che se G, sottoinsieme di S, è tale che $G \subseteq F$ e $a \in G$ implica $\mathsf{Im}[d(x,i)] \between G$ per ogni $i \in I(a)$ allora $G \subseteq \ltimes'(F)$. Dimostriamolo per induzione su Ord_S. Il passo base dell'induzione $G \subseteq F = F_0$ è soddisfatto. Sia $G \subseteq F_n$ allora $G \subseteq F_{n+1}$ perché ogni elemento $x \in S$ tale che per ogni $i \in I(x)$, $\mathsf{Im}[d(x,i)] \between G$ è anche un elemento di G per ipotesi. Poi se per qualche $a \in S$ e $i \in I(a)$, $f \in D(a,i) \to \mathsf{Ord}_S$ tale che, per ogni $j \in D(a,i)$, $G \subseteq F_{f(j)}$ allora $G \subseteq \bigcap_{j \in D(a,i)} F_{f(j)} = F_{\Lambda(f)}$. ■

Riassumendo possiamo dare una nuova definizione di topologia formale induttivamente generata equivalente alla precedente definizione (2.2):

Definizione 2.4 (Topologia formale induttivamente generata) *Una topologia formale induttivamente generata è una struttura $(S, \wedge, I, D, d)$ tale che $(S, \wedge)$ è un semigruppo commutativo, $I(a)$ è una famiglia di insiemi indicizzata su S, $D(a,i)$ è una famiglia di insiemi indicizzata su elementi $a \in S$ e $i \in I(a)$, $d(a,i,j)$ è una funzione che mappa $a \in S, i \in I(a), j \in D(a,i)$ in un elemento di S. I, D, d sono inoltre tali che:*

1. *dati due elementi $a, b \in S$, l'insieme $I(a \wedge b)$ contiene due indici i_a e i_b tali che $\mathsf{Im}[d(a \wedge b, i_a)] = \{a\}$ e $\mathsf{Im}[d(a \wedge b, i_a)] = \{a\}$.*

2. *per ogni $b \in S$ e $i \in I(a)$, esiste $j \in I(a \wedge b)$ tale che $\mathsf{Im}[d(a \wedge b, j)] \subseteq (b \wedge \mathsf{Im}[d(a,i)])$.*

3. *per ogni $a \in S$ esiste $i_\wedge \in I(a)$ tale che $\mathsf{Im}[d(a, i_\wedge)] = \{a \wedge a\}$.*

Attraverso questi assiomi possiamo ri-definire la *relazione di copertura* e il *predicato binario di positività* ponendo:

$$a \lhd U \equiv (\exists x \in \mathsf{Ord}_S) a \in U_x \qquad a \ltimes F \equiv (\forall x \in \mathsf{Ord}_S) a \in F_x$$

e le nuove definizioni soddisfano le proprietà richieste nella definizione (2.2) di topologia formale, quindi questa definizione di topologia formale induttivamente generata è equivalente alla definizione (2.2).

Nel prossimo capitolo descriveremo il legame fra il teorema di completezza per le topologie formali induttivamente generate e alcune proprietà dei punti formali di topologie formali induttivamente generate.

Capitolo 3

Teorema di completezza e proprietà dei punti formali

Nella sezione (1.3) abbiamo dato la definizione di spazio formale di una topologia formale, che intendiamo come corrispondente formale dell'insieme dei punti concreti. Anche per i punti formali le regole della definizione (1.4) sono da intendere come condizioni che l'oggetto punto formale deve verificare e non come regole costruttive. Vogliamo mostrare come è possibile, nel caso di una topologia formale induttivamente generata, dare una caratterizzazione induttiva del sottoinsieme di S formato da tutti gli elementi contenuti in almeno un punto formale α contenuto in un sottoinsieme F di S. Mostreremo poi che nelle topologie formali rappresentabili questo sottoinsieme coincide con $\ltimes(F)$. Questo ci permetterà di dimostrare che, nelle topologie rappresentabili, il sottoinsieme di S formato da tutti gli elementi che sono contenuti solo in punti formali che contengono almeno un elemento di un sottoinsieme U di S, coincide con $\lhd(U)$. Nel paragrafo (3.3) dimostreremo quindi un teorema di completezza per le topologie formali induttivamente generate e osserveremo che ogni topologia formale rappresentabile è anche induttivamente generata e che per tali topologie vale il teorema di completezza.

Facciamo qualche osservazione preliminare. Sia $(S, \wedge, \lhd, \ltimes)$ una topologia formale induttivamente generata da un axiom-set localizzato $I(a)$ set $[a : S]$, $C(a,i) \subseteq S$ $[a : S, i : I(a)]$.

Cominciamo osservando che possiamo sostituire la regola α *spezza* $- \lhd -$ della definizione di punto formale con la seguente

$$\frac{a \in \alpha \quad i \in I(a)}{\alpha \between C(a,i)}$$

Vale cioè il seguente lemma:

Lemma 3.1 *Sia α un sottoinsieme di S, allora vale l'equivalenza*

$$\frac{a \in \alpha \quad a \lhd U}{\alpha \between U} \Leftrightarrow \frac{a \in \alpha \quad i \in I(a)}{\alpha \between C(a,i)}$$

Dimostrazione: Dimostriamo l'implicazione da sinistra a destra. Sappiamo che, per definizione di copertura generata da un axiom-set, dato un $i \in I(a)$ vale $a \lhd C(a,i)$. Quindi date le premesse $a \in \alpha$ e $i \in I(a)$, possiamo applicare la regola a sinistra con premesse $a \in \alpha$ e $a \lhd C(a,i)$ per derivare $\alpha \between C(a,i)$.

Viceversa sia $a \in \alpha$ e $a \lhd U$, dobbiamo dimostrare che $\alpha \between U$. Dimostriamo $\alpha \between U$ per induzione sulla derivazione di $a \lhd U$. Per definizione di $- \lhd -$ vale $a \lhd U \Leftrightarrow a \in U \vee (\exists i \in I(a))(\forall c \in C(a,i))\ c \lhd U$. Se $a \in U$ allora dalla premessa $a \in \alpha$ si ricava $\alpha \between U$. Se invece $a \lhd U$ è derivato dalle premesse $i \in I(a)$ e $(\forall c \in C(a,i))\ c \lhd U$ allora possiamo dire che $\alpha \between C(a,i)$, quindi $(\exists c \in C(a,i))\ c \in \alpha$. Otteniamo la conclusione $\alpha \between U$ applicando induttivamente la regola a sinistra:

$$\frac{c \in \alpha \quad c \lhd U}{\alpha \between U}$$

$\blacksquare$

Si noti inoltre che combinando le regole

$$\frac{a \in \alpha \quad i \in I(a)}{\alpha \between C(a,i)} \qquad e \qquad \frac{a \in \alpha \quad b \in \alpha}{(a \wedge b) \in \alpha}$$

otteniamo che vale la regola

$$\frac{a \in \alpha \quad i \in I(a)}{(\exists c \in C(a,i))\ (c \wedge a) \in \alpha}$$

Nel prossimo paragrafo questa regola ci sarà utile per mostrare come determinare se un elemento di S è contenuto in un punto formale contenuto in un dato sottoinsieme di S.

3.1 Sottoinsiemi Γ

In questo paragrafo vogliamo mostrare come, dato un sottoinsieme F, sia possibile caratterizzare il sottoinsieme Γ^F di S così definito:

$$\Gamma^F \equiv \{a \in S \mid \text{ esiste } \alpha \in Pt(\mathcal{S}) \text{ tale che } a \in \alpha \text{ e } \alpha \subseteq F\}$$

Osserviamo subito che Γ^F coincide con l'unione dei punti formali contenuti in F, cioè vale

$$\Gamma^F = \bigcup_{\{\alpha \in Pt(\mathcal{S}) \mid \alpha \subseteq F\}} \alpha$$

Daremo prima una caratterizzazione di Γ^F che ci dica come sono fatti i suoi elementi, e poi mostreremo che, facendo delle ipotesi sugli assiomi che generano la topologia, possiamo dare una ridefinizione di Γ^F attraverso il predicato $- \ltimes -$.

In questo capitolo supporremo di lavorare con insiemi di assiomi I, C tali che, per ogni elemento $a \in S$, esiste in indice $i_s \in I(a)$ tale che $C(a, i_s) = S$. Osserviamo che l'indice i_s ci dice solamente che, per assioma, ogni elemento di S è coperto da S stesso. Questo, nei casi in cui non vale per assioma, diventa ovvio con la chiusura riflessiva della relazione $- \lhd -$. Osserviamo inoltre che aggiungendo un elemento ad un insieme (nel senso costruttivo del termine) otteniamo ancora un insieme. Quindi l'aggiunta dell'indice i_s all'insieme I non modifica la struttura della topologa generata dagli assiomi.

Il seguente teorema caratterizza gli elementi che stanno in un punto formale contenuto in F:

Teorema 3.1 *Sia $(S, \wedge, \lhd, \ltimes)$ una topologia formale induttivamente generata dagli assiomi I, C. Allora per ogni $a \in S$, e ogni $F \subseteq S$, vale*

$$a \in \Gamma^F \Leftrightarrow a \in F \ \& \ (\forall i \in I(a))(\exists c \in C(a,i))\ (c \wedge a) \in \Gamma^F$$

Dimostrazione: Supponiamo $a \in \Gamma^F$, allora esiste un punto formale β che contiene a ed è contenuto in F (e quindi $\beta \subseteq \Gamma^F$ perchè Γ^F è l'unione dei punti formali contenuti in F). Dalle premesse $a \in \beta$ e $\beta \subseteq F$ ricaviamo $a \in F$. Poi sappiamo che $a \in \beta$ implica $(\forall i \in I(a))(\exists c \in C(a,i))\ (c \wedge a) \in \beta$, da cui possiamo concludere che $(\forall i \in I(a))(\exists c \in C(a,i))\ (c \wedge a) \in \Gamma^F$.

Viceversa, sia dato un elemento a di S tale che valga $a \in F \ \& \ (\forall i \in I(a))(\exists c \in C(a,i))\ (c \wedge a) \in \Gamma^F$. Quindi, preso un qualsiasi $i \in I(a)$, sappiamo che esiste un $c \in C(a,i)$ tale che $(c \wedge a) \in \Gamma^F$. Chiamiamo β un punto formale che contiene $c \wedge a$ e che sia contenuto in F. Allora da $(c \wedge a) \in \beta$ e $(c \wedge a) \lhd a$ ricaviamo $a \in \beta$. Quindi possiamo dire che se esiste un $i \in I(a)$ allora $a \in \Gamma^F$. D'altra parte almeno un $i \in I(a)$ esiste sempre perché in $I(a)$ è sempre presente, per definizione, l'indice i_s che indica la copertura S dell'elemento a. ■

Quindi l'insieme Γ^F è una soluzione della seguente equazione su sottoinsiemi:

$$a \in X \Leftrightarrow a \in F \ \& \ (\forall i \in I(a))(\exists c \in C(a,i)) \ (c \wedge a) \in X \tag{3.1}$$

Vogliamo ora dimostrare che, se la topologia formale è rappresentabile (cioè che deriva da uno spazio topologico concreto), allora vale l'equivalenza $a \ltimes F \Leftrightarrow a \in \Gamma^F$, per ogni $a \in S$ e ogni $F \subseteq S$.

Sia $\mathcal{S} = (S, \wedge, \lhd, \ltimes)$ derivata dallo spazio topologico concreto $(X, \mathsf{ext}, S, \wedge)$. Allora si dimostra (per una dimostrazione vedi **Appendice 1**) che $\mathcal{S}$ è induttivamente generata dagli assiomi

$$I(a) \equiv \{g \in \mathsf{ext}(a) \to S \mid \ (\forall x \mathsf{ext}(a)) \ x \in \mathsf{ext}(g(x))\} \ \mathsf{set} \ [a \in S]$$

$$C(a,i) \equiv \mathsf{Im}[i] \subseteq S \ [a : S, i : I(a)]$$

cioè che la relazione di copertura $- \lhd -$ e il predicato binario di positività $- \ltimes -$ definiti induttivamente dagli assiomi I, C sono tali che $a \lhd U \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$ e $a \ltimes F \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$, per ogni $a \in S$ e ogni $U, F \subseteq S$.

Sia quindi $a \ltimes F$. Allora esiste un elemento $x \in X$ tale che $x \in \mathsf{ext}(a)$ e $x \in \mathsf{Rest}(F)$, cioè tale che $a \in \alpha(x)$ e $\alpha(x) \subseteq F$, dove $\alpha(x) = \{a \in S \mid x \in \mathsf{ext}(a)\}$. Abbiamo dimostrato nella sezione (1.3) che, in una topologia formale rappresentabile, per ogni $x \in X$ il sottoinsieme $\alpha(x)$ è un punto formale, quindi possiamo dire che, se vale $a \ltimes F$, allora esiste un punto formale $\alpha(x)$ che contiene a e che è contenuto in F, cioè possiamo dire che $a \ltimes F$ implica $a \in \Gamma^F$. Viceversa sia $a \in \Gamma^F$, allora esiste un punto formale α che contiene a e che è contenuto in F. Per definizione di punto formale, dalle premesse $a \in \alpha$ e $\alpha \subseteq F$ possiamo ottenere $a \ltimes F$.

Abbiamo quindi dimostrato che, nelle topologie formali rappresentabili, per ogni sottoinsieme F di S, Γ^F coincide con $\ltimes(F)$, cioè:

$$a \ltimes F \text{ se e solo se esiste } \alpha \in Pt(\mathcal{S}), a \in \alpha \ \& \ \alpha \subseteq F \tag{3.2}$$

Quindi, per queste topologie, il sottoinsieme Γ^F è un sottoinsieme completamente costruttivo.

3.2 Sottoinsiemi Π

Nel paragrafo precedente abbiamo detto che per una topologia formale rappresentabile, dato un elemento $a \in S$, $a \ltimes F$ vale se e solo se esiste un punto formale che contiene a e che è contenuto in F. Vogliamo dimostrare in questo paragrafo che, per tali topologie, dati $a \in S$ e $U \subseteq S$, vale $a \lhd U$ se e solo se a appartiene solo a punti formali che contengono almeno un elemento di U.

Definiamo

$$\Pi_U \equiv \{a \in S \mid \text{ per ogni } \alpha \in Pt(\mathcal{S}), a \in \alpha \to \alpha \between U\}$$

Vogliamo quindi dimostrare che, per le topologie rappresentabili, vale l'equivalenza $a \lhd U \Leftrightarrow a \in \Pi_U$. Sia infatti $a \lhd U$ e α un qualsiasi punto formale che contiene a. Per definizione di punto formale, dalle premesse $a \lhd U$ e $a \in \alpha$ possiamo ottenere $\alpha \between U$. Quindi $a \lhd U$ implica $a \in \Pi_U$. Viceversa sia $a \in \Pi_U$. Sappiamo che, nelle topologie rappresentabili, per ogni $x \in X$ il sottoinsieme $\alpha(x)$ è un punto formale. Quindi per ogni $x \in X$ tale che $a \in \alpha(x)$ vale $\alpha(x) \between U$, cioè, per ogni $x \in X$, $x \in \mathsf{ext}(a)$ implica $x \in \mathsf{Ext}(U)$. Quindi se vale $a \in \Pi_U$ allora vale $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$, che nelle topologie rappresentabili, coincide con $a \lhd U$

Più in generale osserviamo che utilizzando il fatto che vale l'uguaglianza $\Gamma^F = \ltimes(F)$ per ogni sottinsieme F di S, possiamo dimostrare il seguente teorema (di cui daremo una dimostrazione classica):

Teorema 3.2 *Sia $(S, \wedge, \lhd, \ltimes)$ una topologia formale tale che $\Gamma^F = \ltimes(F)$ per ogni sottinsieme F di S, e sia U un sottoinsieme di S. Allora $\Pi_U = \lhd(U)$.*

Dimostrazione: Se $a \lhd U$ allora, per ogni punto formale α, dalle premesse $a \lhd U$ e $a \in \alpha$ possiamo ottenere $\alpha \between U$ per definizione di punto formale. Quindi se $a \lhd U$ allora $a \in \Pi_U$.

Viceversa supponiamo sia $a \in S$ tale che $a \in \Pi_U$ ma che $\neg(a \lhd U)$. Classicamente $\neg(a \lhd U)$ equivale a $a \ltimes (S-U)$. Per ipotesi, $a \ltimes F$ equivale a dire che esiste un punto formale che contiene a e contenuto in F. Quindi se $a \ltimes (S-U)$ allora esite un punto formale che contiene a ma che non contiene nessun elemento di U (perchè è contenuto in $S-U$). La conclusione va contro l'ipotesi che $a \in \Pi_U$, quindi $a \lhd U$. ■

Il teorema precedente ci dice quindi che, se $\Gamma^F = \ltimes(F)$ per ogni sottinsieme F di S, Π_U coincide con l'insieme, completamente costruttivo, $\lhd(U)$. Ci dice quindi che l'equivalenza di Γ^F e $\ltimes(F)$, per ogni sottoinsieme F di S, è sufficiente per dimostrare (classicamente) che per la relazione di copertura vale la seguente equivalenza per ogni sottoinsieme U di S:

$$a \lhd U \text{ se e solo se, per ogni } \alpha \in Pt(\mathcal{S}), (a \in \alpha) \to (\alpha \between U) \tag{3.3}$$

Nel prossimo paragrafo mostreremo che l'equivalenza di Γ^F con $\ltimes(F)$ e di Π_U con $\lhd(U)$ sono condizioni sufficienti per dimostrare un teorema di completezza per le topologie formali induttivamente generate.

3.3 Teorema di completezza

Cominciamo definendo cosa intendiamo per interpretazione di una topologia formale induttivamente generata in uno spazio topologico.

Definizione 3.1 *Sia $\mathcal{S} = (S, \wedge, \lhd, \ltimes)$ una topologia formale induttivamente generata dall'axiom-set localizzato I, C, e sia $\mathcal{X} = (X, \Omega(X))$ uno spazio topologico. Una interpretazione di $\mathcal{S}$ in $\mathcal{X}$ è una mappa $\mathsf{ext}(-)$ da S in $\mathcal{P}(X)$ che soddisfa le seguenti condizioni:*

1. *per ogni $a, b \in S$, $\mathsf{ext}(a \wedge b) \equiv \mathsf{ext}(a) \cap \mathsf{ext}(b)$.*

2. *per ogni $a \in S$ e ogni $i \in I(a)$, $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(C(a,i))$, dove $\mathsf{Ext}(C(a,i)) = \bigcup_{u \in C(a,i)} \mathsf{ext}(u)$.*

Supponiamo quindi di avere una topologia formale induttivamente generata $\mathcal{S} = (S, \wedge, \lhd, \ltimes)$. Definiamo una mappa $\mathsf{ext}^{Pt}(-)$ da S nella collezione $Pt(\mathcal{S})$ dei punti formali di $\mathcal{S}$:

$$\mathsf{ext}^{Pt}(a) \equiv \{\alpha \in Pt(\mathcal{S}) \mid a \in \alpha\}$$

Si dimostra (vedi [GT]) che la collezione $\{\mathsf{ext}^{Pt}(a) \mid a \in S\}$ può essere considerata una base per uno spazio topologico su $Pt(\mathcal{S})$. Inoltre $\mathsf{ext}^{Pt}(-)$ soddisfa le condizioni **1.** e **2.** della definizione di interpretazione di $\mathcal{S}$ nello spazio topologico $Pt(\mathcal{S})$. Infatti siano $a, b \in S$ e $\alpha \in \mathsf{ext}^{Pt}(a \wedge b)$, allora $(a \wedge b) \in \alpha$, quindi, ricordando che per assioma $(a \wedge b) \lhd a$ e $(a \wedge b) \lhd b$, otteniamo che, per definizione di punto formale, $a \in \alpha$ e $b \in \alpha$, cioè $\alpha \in \mathsf{ext}^{Pt}(a) \cap \mathsf{ext}^{Pt}(b)$. Viceversa sia $\alpha \in \mathsf{ext}^{Pt}(a) \cap \mathsf{ext}^{Pt}(b)$. Allora $a \in \alpha$ e $b \in \alpha$. Per definizione di punto formale vale anche $(a \wedge b) \in \alpha$, cioè $\alpha \in \mathsf{ext}^{Pt}(a \wedge b)$. Sia poi $a \in S$ e $i \in I(a)$. Per ogni $\alpha \in \mathsf{ext}^{Pt}(a)$, da $a \lhd C(a,i)$, per definizione di punto formale, ricaviamo che $C(a,i) \between \alpha$. Quindi esite un elemento $c \in C(a,i)$ tale che $c \in \alpha$, cioè che $\alpha \in \mathsf{ext}^{Pt}(c)$. Quindi $\alpha \in \mathsf{Ext}^{Pt}(C(a,i))$. Possiamo quindi dire che $\mathsf{ext}^{Pt}(-)$ è una interpretazione di $\mathcal{S}$ in $Pt(\mathcal{S})$.

Per questa interpretazione, dato $U \subseteq S$, la collezione $\mathsf{Ext}^{Pt}(U)$ è la collezione formata dai punti formali che contengono almeno un elemento di U e , dato $F \subseteq S$, $\mathsf{Rest}^{Pt}(F)$ è la collezione dei punti formali contenuti in F. Quindi un elemento $a \in S$ è tale che $\mathsf{ext}^{Pt}(a) \subseteq \mathsf{Ext}^{Pt}(U)$ se e solo se ogni punto formale che lo contiene contiene anche un elemento di U, quindi se e solo se $a \in \Pi_U$. Ugualmente $a \in S$ è tale che $\mathsf{ext}^{Pt}(a) \between \mathsf{Rest}^{Pt}(F)$ se e solo se esiste un punto formale che contiene a e che è contenuto in F, quindi se e solo se $a \in \Gamma^F$.

Quindi possiamo dire che per la interpretazione $\mathsf{ext}^{Pt}(-)$ valgono le equivalenze

$$a \in \Gamma^F \Leftrightarrow \mathsf{ext}^{Pt}(a) \between \mathsf{Rest}^{Pt}(F)$$
$$a \in \Pi_U \Leftrightarrow \mathsf{ext}^{Pt}(a) \subseteq \mathsf{Ext}^{Pt}(U) \tag{3.4}$$

Nelle sezioni (3.1) e (3.2) abbiamo dimostrato che per le topologie formali rappresentabili valgono $a \ltimes F \Leftrightarrow a \in \Gamma^F$ e $a \lhd U \Leftrightarrow a \in \Pi_U$. Le equivalenze (3.4) ci dicono che, per tali topologie, l'interpretazione ext^{Pt} è valida e completa, cioè valgono le seguenti equivalenze:

$$a \ltimes F \Leftrightarrow \mathsf{ext}^{Pt}(a) \between \mathsf{Rest}^{Pt}(F)$$
$$a \lhd U \Leftrightarrow \mathsf{ext}^{Pt}(a) \subseteq \mathsf{Ext}^{Pt}(U) \tag{3.5}$$

Vogliamo ora dimostrare che, data una topologia formale induttivamente generata $(S, \wedge, \lhd, \ltimes)$, se valgono le equivalenze $a \ltimes F \Leftrightarrow \mathsf{ext}^{Pt}(a) \between \mathsf{Rest}^{Pt}(F)$ e $a \lhd U \Leftrightarrow \mathsf{ext}^{Pt}(a) \subseteq \mathsf{Ext}^{Pt}(U)$, per ogni $a \in S$ e ogni $U, F \subseteq S$, allora vale un teorema di completezza per le topologie formali induttivamente generate. Vogliamo cioè dimostrare il seguente teorema:

Teorema 3.3 (Teorema di completezza) *Sia $\mathcal{S} = (S, \wedge, \lhd, \ltimes)$ una topologia formale induttivamente generata tale che valga, per ogni elemento $a \in S$ e ogni sottoinsieme U, F sottoinsiemi di S,*

$$a \ltimes F \Leftrightarrow \mathsf{ext}^{Pt}(a) \between \mathsf{Rest}^{Pt}(F) \qquad e \qquad a \lhd U \Leftrightarrow \mathsf{ext}^{Pt}(a) \subseteq \mathsf{Ext}^{Pt}(U)$$

Allora valgono

1. *$a \ltimes F$ se e solo se esiste uno spazio topologico $\mathcal{X} = (X, \Omega(X))$ ed una interpretazione $\mathsf{ext}(-)$ di $\mathcal{S}$ in $\mathcal{X}$ tale che $\mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$.*

2. *$a \lhd U$ se e solo se, per ogni spazio topologico $\mathcal{X} = (X, \Omega(X))$ ed ogni interpretazione $\mathsf{ext}(-)$ di $\mathcal{S}$ in $\mathcal{X}$, vale $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$.*

Dimostrazione: 1. Siano $a \in S$ e $F \subseteq S$ tali che $a \ltimes F$. Abbiamo dimostrato che la mappa ext^{Pt} è una interpretazione di $\mathcal{S}$ nello spazio topologico $Pt(\mathcal{S})$. Quindi, per l'equivalenza $a \ltimes F \Leftrightarrow \mathsf{ext}^{Pt}(a) \between \mathsf{Rest}^{Pt}(F)$ (valida per ipotesi), possiamo dire che l'implicazione da sinistra a destra del punto **1.** è soddisfatta. Viceversa sia ext una interpretazione in uno spazio topologico $\mathcal{X}$. Dimostriamo per co-induzione che il sottoinsieme $P(F) = \{a \in S \mid \mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)\}$ è contenuto in $\ltimes(F)$. Sia $a \in P(F)$. Allora $a \in F$ per definizione di Rest. Siano poi $a \in P(F)$ e $i \in I(a)$, allora esiste $x \in X$ tale che $x \in \mathsf{ext}(a)$ & $x \in \mathsf{Rest}(F)$. Per definizione di interpretazione, sappiamo che vale $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(C(a,i))$, quindi, per definizione di Ext, esiste $c \in C(a,i)$ tale che $x \in \mathsf{ext}(c)$. Quindi possiamo dire che esiste $c \in C(a,i)$ tale che $\mathsf{ext}(c) \between \mathsf{Rest}(F)$, cioè che $C(a,i) \between P(F)$. Quindi $P(F)$ soddisfa le condizioni che generano per co-induzione il predicato $- \ltimes -$, e quindi $a \in P(F)$ implica $a \ltimes F$. Questo ci dice che, se esiste uno spazio topologico $\mathcal{X}$ e una interpretazione ext di $\mathcal{S}$ in $\mathcal{X}$ tale che $\mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$, allora $a \in P(F)$ e quindi $a \ltimes F$.
2. Siano $a \in S$ e $U \subseteq S$ tali che $a \lhd U$, e sia ext una interpretazione di $\mathcal{S}$ in un qualsiasi spazio topologico $\mathcal{X}$. Dimostriamo che $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$ per induzione sulla derivazione di $a \lhd U$. Supponiamo che $a \lhd U$ sia derivato da $a \in U$. Allora vale $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$ per definizione di $\mathsf{Ext}(U)$. Supponiamo invece che $a \lhd U$ sia derivato dalle ipotesi $i \in I(a)$ e $C(a,i) \lhd U$. Sappiamo allora che $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(C(a,i))$ per definizione di interpretazione, e che $\mathsf{Ext}(C(a,i)) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$ per ipotesi induttiva. Quindi possiamo dire che vale anche $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$.

Viceversa sia invece $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$ per ogni interpretazione ext di $\mathcal{S}$ in $\mathcal{X}$. Sappiamo che ext^{Pt} è una interpretazione di $\mathcal{S}$ in $Pt(\mathcal{S})$, quindi possiamo dire che vale $\mathsf{ext}^{Pt} \subseteq \mathsf{Ext}^{Pt}(U)$ che, per ipotesi, equivale ad $a \lhd U$. ■

Quindi perchè siano verificate le ipotesi del teorema di completezza è sufficiente dimostrare che l'interpretazione ext^{Pt} è tale che $a \ltimes F \Leftrightarrow \mathsf{ext}^{Pt}(a) \between \mathsf{Rest}^{Pt}(F)$ e $a \lhd U \Leftrightarrow \mathsf{ext}^{Pt}(a) \subseteq \mathsf{Ext}^{Pt}(U)$, per ogni $a \in S$ e ogni $U, F \subseteq S$, cioè che $\ltimes(F) = \Gamma^F$ e $\lhd(U) = \Pi_U$ per ogni $U, F \subseteq S$. Ricordando poi che nel teorema (3.2) abbiamo dimostrato (classicamente) che, se vale $\ltimes(F) = \Gamma^F$

per ogni $F \subseteq S$, allora vale anche $\lhd(U) = \Pi_U$ per ogni $U \subseteq S$, ricaviamo che se per ogni $F \subseteq S$ vale l'ipotesi $\ltimes(F) = \Gamma^F$ allora possiamo dimostrare il teorema di completezza per le topologie formali induttivamente generate.

Dimostriamo ora un risultato che ci servirà per dare una riformulazione più generale del teorema di completezza. Osserviamo prima che nella dimostrazione dell'implicazione da sinistra a destra del punto **2.** del teorema (3.3), non abbiamo utilizzato il fatto che, per ipotesi, vale $a \lhd U \Leftrightarrow \mathsf{ext}^{Pt}(a) \subseteq \mathsf{Ext}^{Pt}(U)$, ma solo il fatto che ext è una interpretazione. Quindi in generale possiamo dire che, per ogni interpretazione ext di una topologia formale $\mathcal{S}$ in uno spazio topologico $\mathcal{X}$, $a \lhd U$ implica $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$.

Sia quindi $\mathsf{ext}(-)$ una interpretazione di una topologia formale $\mathcal{S}$ in uno spazio topologico $\mathcal{X}$. Per ogni $x \in X$, definiamo il sottoinsieme $\alpha(x) \equiv \{a \in S \mid x \in \mathsf{ext}(a)\}$. Vale allora il seguente teorema:

Teorema 3.4 *Sia $\mathcal{S} = (S, \wedge, \lhd, \ltimes)$ una topologia formale induttivamente generata dall'axiom-set localizzato I, C, sia $\mathcal{X} = (X, \Omega(X))$ uno spazio topologico e $\mathsf{ext}(-)$ una interpretazione di $\mathcal{S}$ in $\mathcal{X}$. Per ogni $x \in X$, se $\alpha(x)$ contiene almeno un elemento, allora $\alpha(x)$ è un punto formale.*

Dimostrazione: La condizione $\alpha(x) \between S$ è soddisfatta per ipotesi.

Mostriamo che $\alpha(x)$ è convergente: siano $a, b \in \alpha(x)$, allora $x \in \mathsf{ext}(a)$ e $x \in \mathsf{ext}(b)$, ma allora $x \in \mathsf{ext}(a \wedge b)$ per definizione di interpretazione, quindi $(a \wedge b) \in \alpha(x)$.

Dimostriamo che $\alpha(x)$ spezza $- \lhd -$. Sia $a \in \alpha(x)$ e $a \lhd U$. Per quanto osservato sopra possiamo dire che $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$. Questo ci dice che, per ogni elemento $x \in \mathsf{ext}(a)$, esiste un u in U tale che x sta in $\mathsf{ext}(u)$, cioè ci dice che per ogni $x \in \mathsf{ext}(a)$ vale $\alpha(x) \between U$.

Resta da dimostrare che $\alpha(x)$ entra in $- \ltimes -$. Sia $a \in \alpha(x)$ e $\alpha(x) \subseteq F$. Dimostriamo per co-induzione che il sottoinsieme $P(F) = \{a \in S \mid a \in \alpha(x) \ \&\ \alpha(x) \subseteq F\}$ è contenuto in $\ltimes(F)$. Sia $a \in S$ tale che $a \in \alpha(x) \ \&\ \alpha(x) \subseteq F$. Allora $a \in F$. Sia poi $i \in I(a)$, allora $a \lhd C(a, i)$ per assioma, quindi $\alpha(x) \between C(a, i)$ perchè $\alpha(x)$ spezza $- \lhd -$. Quindi esiste un $c \in C(a, i)$ tale che $c \in \alpha(x) \ \&\ \alpha(x) \subseteq F$, cioè $C(a, i) \between P(F)$. Quindi $P(F)$ soddisfa le proprietà che generano co-induttivamente $\ltimes(F)$, quindi $a \in P(F)$ implica $a \ltimes F$, cioè $\alpha(x)$ entra in $- \ltimes -$. ■

Il seguente teorema ci dice che il teorema di completezza può essere riformulato in maniera più generale:

Teorema 3.5 *Sia $\mathcal{S} = (S, \wedge, \lhd, \ltimes)$ una topologia formale induttivamente generata dall'axiom-set localizzato I, C. Sia $\mathsf{ext}(-)$ una interpretazione di $\mathcal{S}$ nello spazio topologico $\mathcal{Y} = (Y, \Omega(Y))$. Allora per ogni $a \in S$ e ogni $U, F \subseteq S$*

1. *se vale $a \ltimes F \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$ allora vale anche $a \ltimes F \Leftrightarrow \mathsf{ext}^{Pt}(a) \between \mathsf{Rest}^{Pt}(F)$*

2. *se vale $a \lhd U \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$ allora vale anche $a \lhd U \Leftrightarrow \mathsf{ext}^{Pt}(a) \subseteq \mathsf{Ext}^{Pt}(U)$*

Dimostrazione: 1. Dimostriamo che per ogni $a \in S$ vale $a \ltimes F \Leftrightarrow \mathsf{ext}^{Pt}(a) \between \mathsf{Rest}^{Pt}(F)$. Sia $a \ltimes F$, allora $\mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$. Quindi esiste un elemento $x \in \mathsf{ext}(a)$ tale che $\alpha(x) \subseteq F$. $\alpha(x)$ contiene almeno l'elemento a, quindi è un punto formale, e quindi possiamo dire che esiste un punto formale che contiene a e che è contenuto in F, cioè possiamo dire che $\mathsf{ext}^{Pt}(a) \between \mathsf{Rest}^{Pt}(F)$. Viceversa se $\mathsf{ext}^{Pt}(a) \between \mathsf{Rest}^{Pt}(F)$ allora esiste un punto formale α tale che $a \in \alpha$ e $\alpha \subseteq F$. Questo, per definizione di punto formale, ci basta per dire che $a \ltimes F$.
2. Sia invece $a \lhd U$. Allora, per ogni punto formale α che contiene a, per definizione di punto formale, possiamo dire che $\alpha \between U$. Quindi vale $\mathsf{ext}^{Pt}(a) \subseteq \mathsf{Ext}^{Pt}(U)$. Viceversa supponiamo sia $\mathsf{ext}^{Pt}(a) \subseteq \mathsf{Ext}^{Pt}(U)$. Per ogni $x \in Y$, $x \in \mathsf{ext}(a)$ implica che $a \in \alpha(x)$. Ma $\alpha(x)$ contiene almeno l'elemento a, quindi è un punto formale, e possiamo quindi dire che $\alpha(x) \between U$, cioè che $x \in \mathsf{Ext}(U)$. Abbiamo così dimostrato che $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$, che equivale a $a \lhd U$. ■

Questo teorema ci dice che, per ogni topologia formale, se esiste una interpretazione valida e completa, cioè tale che $a \ltimes F \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$ e $a \lhd U \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$, allora sono soddisfatte le ipotesi del teorema (3.3). Possiamo quindi riformulare il teorema di completezza nel seguente modo:

Teorema 3.6 (Teorema di completezza) *Sia $\mathcal{S} = (S, \wedge, \lhd, \ltimes)$ una topologia formale induttivamente generata. Se esiste una interpretazione $\mathsf{ext}'(-)$ di $\mathcal{S}$ in uno spazio topologico $\mathcal{Y} = (Y, \Omega(Y))$, tale che, per ogni elemento $a \in S$ e ogni sottoinsieme U e F di S,*

$$a \ltimes F \Leftrightarrow \mathsf{ext}'(a) \between \mathsf{Rest}'(F) \qquad e \qquad a \lhd U \Leftrightarrow \mathsf{ext}'(a) \subseteq \mathsf{Ext}'(U)$$

Allora valgono

1. *$a \ltimes F$ se e solo se esiste uno spazio topologico $\mathcal{X} = (X, \Omega(X))$ ed una interpretazione $\mathsf{ext}(-)$ di $\mathcal{S}$ in $\mathcal{X}$ tale che $\mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$.*

2. *$a \lhd U$ se e solo se, per ogni spazio topologico $\mathcal{X} = (X, \Omega(X))$ ed ogni interpretazione $\mathsf{ext}(-)$ di $\mathcal{S}$ in $\mathcal{X}$, vale $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$.*

Nei paragrafi (3.1) e (3.2) abbiamo dimostrato che ogni topologia formale rappresentabile $\mathcal{S} = (S, \wedge, \lhd, \ltimes)$ è tale che $a \ltimes F \Leftrightarrow a \in \Gamma^F$ e $a \lhd U \Leftrightarrow a \in \Pi_U$. Quindi per tali topologie vale il teorema di completezza (3.3). Il teorema (3.6) ci dice che il teorema di completezza vale semplicemente perchè le topologie rappresentabili sono definite in modo tale che, se ext è la mappa dello spazio topologico concreto da cui derivano, vale $a \ltimes F \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$ e $a \lhd U \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$.

3.4 Sottoinsiemi Γ e Π di sottoinsiemi finiti

Sia $U \subseteq S$ un sottoinsieme finito e F un sottoinsieme qualsiasi di S. In questo paragrafo vogliamo mostrare come possiamo ottenere il sottoinsieme di S composto da tutti gli elementi di S contenuti in almeno un punto formale che contiene U e contenuto in F, e il sottoinsieme di S composto da tutti gli elementi che sono contenuti solo in punti formali che contengono anche U.

Questo ci sarà possibile grazie al seguente teorema:

Teorema 3.7 *Sia $(S, \wedge, \lhd, \ltimes)$ una topologia formale, e sia U un sottoinsieme finito di S di cardinalità maggiore o uguale a 1. Poniamo $w \equiv \bigwedge_{u \in U} u$ (se $U = \{u\}$ per qualche $u \in S$ si intende $w = u$). Allora un punto formale α contiene U se e solo se contiene l'elemento w.*

Dimostrazione: Dimostriamo che se α contiene U allora contiene anche w per induzione sul numero di elementi di U. Se U contiene un solo elemento l'affermazione è ovvia. Supponiamo quindi che U sia di cardinalità maggiore di 1. Sia α un punto formale che contiene U. Se U contiene due soli elementi u e v, dalla definizione di punto formale, sappiamo che $u \wedge v$ è contenuto in α. Supponiamo ora che U sia un sottoinsieme di S contenente n elementi e che $U \subseteq \alpha$, per ipotesi induttiva supponiamo sia $(\bigwedge_{u \in U} u) \in \alpha$. Sia v un qualsiasi altro elemento di α non contenuto in U, per definizione di punto formale, dalle premesse $(\bigwedge_{u \in U} u) \in \alpha$ e $v \in \alpha$ ricaviamo che $((\bigwedge_{u \in U} u) \wedge v) \in \alpha$, cioè $(\bigwedge_{u \in U \cup \{v\}} u) \in \alpha$. Per l'arbitrarietà di v possiamo concludere che per un qualsiasi sottoinsieme U di S contenente $n + 1$ elementi, se vale $U \subseteq \alpha$ allora vale $(\bigwedge_{u \in U} u) \in \alpha$. Quindi dato un qualsiasi sottoinsieme U di S di cardinalità finita tale che $U \subseteq \alpha$ vale $(\bigwedge_{u \in U} u) \in \alpha$.

Viceversa sia α un punto che contiene $w = \bigwedge_{u \in U} u$ per un qualsiasi $U \subseteq S$ di cardinalità finita. Dalla definizione di punto formale sappiamo che se $u \in \alpha$ e $u \lhd v$ allora $v \in \alpha$. Per ogni $u \in U$ vale $w \lhd u$, quindi per ogni elemento di U possiamo dire che $u \in \alpha$, quindi $U \subseteq \alpha$. ■

Il teorema precedente ci dice che, quando U è finito, il sottoinsieme composto da tutti gli elementi di S che sono contenuti solo in punti formali contenenti U, è il sottoinsieme $\Pi_{\{w\}}$ (che per semplicità indicheremo con Π_w) dove $w \equiv \bigwedge_{u \in U} u$. Infatti $a \in \Pi_w$, per definizione, vale se e solo se, per ogni punto formale α tale che $a \in \alpha$, vale anche $\alpha \between \{w\}$, cioè $w \in \alpha$. Ma $w \in \alpha$ vale se e solo se $U \subseteq \alpha$.

Per ogni sottoinsieme finito U di S, denotiamo con Γ_U^F il sottoinsieme composto da tutti gli elementi $a \in S$ che stanno in almeno un punto formale contenente a, U e contenuto in F. Il teorema precedente ci dice che gli elementi di Γ_U^F sono tutti e soli gli elementi a di S tali che $(a \wedge w) \in \Gamma^F$, dove $w = \bigwedge_{u \in U} u$. Infatti se $(a \wedge w) \in \Gamma^F$ allora, per definizione di Γ^F, esiste un punto formale che contiene $a \wedge w$ e contenuto in F. Il teorema precedente ci dice che tale punto formale contiene sia a che w, e quindi che contiene a e anche U. Quindi $\Gamma_U^F = \{a \in S \mid (a \wedge w) \in \Gamma_F\}$.

Il teorema (3.5) ci dice che per le topologie formali per le quali esiste una interpretazione ext, valida e completa, in uno spazio topologico, i sottoinsiemi Γ^F e Π_U coincidono, rispettivamente, con $\ltimes(F)$ e $\lhd(U)$, possono quindi essere ridefiniti costruttivamente. Per quanto detto in questo paragrafo, in queste topologie possiamo considerare costruttivo anche il sottoinsieme di S composto da tutti gli elementi di S contenuti in almeno un punto formale che contiene U e contenuto in F.

In questi primi capitoli abbiamo esposto alcune proprietà delle topologie formali e delle topologie formali induttivamente generate e siamo arrivati a dimostrare un teorema di completezza per le topologie formali induttivamente generate. Abbiamo anche mostrato dei modi attraverso i quali è possibile costruire i sottoinsiemi $\lhd(U)$ e $\ltimes(F)$ per sottoinsiemi U, F di S. Le costruzioni sono però un processo di approssimazione che consiste di tanti passi quanti sono gli elementi di Ord_S, sono quindi di interesse solo teorico. Nel prossimo capitolo cercheremo di rendere utilizzabili questi processi di approssimazione limitandoli ad un numero naturale di passi. Questo ci servirà in prospettiva della futura implementazione del metodo di ricerca che descriveremo nel capitolo (5).

Capitolo 4

Soluzioni utilizzabili dei giochi

Per rendere utilizzabili i processi di approssimazione che portano alle soluzioni dei giochi presentati nel capitolo (2) dobbiamo poter simulare delle partite fra i giocatori e poter valutare, analizzando lo stato e l'andamento del gioco dopo un certo numero di passi, quale potrebbe essere il risultato di una partita. In questo capitolo ci occuperemo di costruire gli strumenti necessari per implementare algoritmi che rendano utilizzabili i giochi. Formalizzeremo la scelta delle strategie ottimali da parte dei giocatori con applicazioni del principio min-max e introdurremo poi dei modi per limitare l'esecuzione di una partita ad un numero naturale di passi e per interpretare lo stato del gioco una volta interrotta una partita.

4.1 Formalizzazione delle strategie

Per la scelta della migliore mossa da fare i giocatori non possono basarsi solamente su un'analisi statica della situazione del gioco, ma devono valutare anche gli effetti delle risposte dell'avversario e la dinamica del gioco, in modo da avere una immagine realistica delle conseguenze della mossa che si sta per fare. Vogliamo formalizzare con un algoritmo il metodo con cui i giocatori scelgono le proprie strategie.

Nei giochi di cui ci occupiamo i giocatori hanno informazione completa sulla situazione del gioco. Quindi ogni giocatore facendo una mossa può valutare quale è la migliore contromossa che può fare l'avversario. Svilupperemo prima una strategia di scelta delle mosse attraverso un algoritmo che applica il principio Min-Max, non badando alla complessità dell'algoritmo. Successivamente applicheremo la tecnica $\alpha - \beta$ per rendere meno complessa la scelta delle mosse ottimali fra tutte le possibili. Esistono tecniche di analisi che migliorano l'efficenza dell'algoritmo alpha-beta, per la loro descrizione e trattazione si rimanda a testi ed articoli di teoria dei giochi (un esempio interessante si trova nell'articolo [MCABPGTS]).

Per poter scegliere fra le possibili mosse i giocatori necessitano di dare una valutazione numerica della bontà delle mosse che possono effettuare valutando la distanza dello stato a cui una mossa porta dall'obbiettivo della vittoria e le possibilità che può offrire portarsi in quello stato del gioco. La scelta va pesata in base alla possibile risposta dell'avversario, che ci si aspetta faccia la mossa a lui più favorevole. Notiamo che il giocatore B, in tutti i giochi da noi considerati, per poter dichiarare di aver vinto deve dimostrare di sapersi mantenere indefinitivamente all'esterno o all'interno di un dato sottoinsieme di S. Una valutazione dello stato di un gioco può invece dire solamente quanto si è vicini dall'entrare o uscire da un sottoinsieme di S e quindi può solo valutare quanto nel gioco ci si è avvicinati a decretare la vittoria del giocatore A. Quindi descriveremo un algoritmo che dato uno stato $a \in S$ permette di determinare la strategia di A per portarsi verso la massimizzazione di una funzione $\mathsf{utility} : S \to [0, 1]$, che chiameremo *funzione di utilità* e che valuta, per ogni stato del gioco, la vicinanza all'obbiettivo della vittoria del giocatore A.

L'algoritmo applica il principio Min-Max per scegliere la mossa teoricamente migliore in un gioco che abbia uno spazio di ricerca limitato, in cui cioè l'albero delle mosse non è infinito. Per applicare l'algoritmo ai giochi che vogliamo risolvere necessitiamo quindi di un *test di terminazione* che ci permetta di decidere quando una partita è finita. Useremo come test di terminazione una opportuna funzione end-test. La possibilità di usare la funzione end-test ci permette di considerare i giochi che vogliamo risolvere come giochi in cui lo sviluppo delle mosse non è infinito, cioè in cui prima o poi si raggiunge uno stato che viene considerato terminale.

4.1.1 Algoritmo Min-Max

Nell'algoritmo che stiamo per illustrare si suppone che ad ogni mossa i giocatori scelgano la strategia che li avvantaggia maggiormente. La strategia ottimale consiste nel trovare il risultato del gioco analizzando tutte le mosse partendo da uno stato iniziale fino a raggiungere con ogni possibile sequenza di mosse uno stato finale, valutando l'utilità degli stati finali tramite la funzione utility e infine propagando questa valutazione ricorsivamente all'indietro fino allo stato iniziale attraverso la regola *min-max* che andremo ad illustrare.

Il grafo che si ottiene collegando allo stato iniziale del gioco $a \in S$ ogni elemento $i \in I(a)$, e ad ogni elemento $i \in I(a)$, ogni stato $d(a, i, j)$ con $j \in D(a, i)$, e ripetendo l'operazione per ogni stato $d(a, i, j)$ che *non* è considerato finale dalla funzione end-test, è un albero che chiameremo *albero delle mosse* di cui a è la radice. Le foglie dell'albero rappresentano gli stati finali. Un percorso dalla radice ad una foglia dell'albero rappresenta la sequenza di mosse che si devono fare per passare dallo stato iniziale ad uno stato finale.

Illustriamo ora la strategia di scelta *min-max*:

Regola Min-Max : Dato uno stato iniziale a, il giocatore A deve muovere per primo scegliendo un elemento $i \in I(a)$. Quindi nell'albero delle mosse il giocatore A muoverà dalla radice. Tutti i nodi che stanno al primo livello dell'albero delle mosse sono elementi di $I(a)$ e rappresentano le possibili mosse di A. Con la sua mossa A tenterà di ottimizzare l'utilità che ricaverà nello stato finale, quindi tenterà di scegliere il ramo che porta allo stato finale che dà un massimo della funzione utility. In risposta a questa mossa il giocatore B che rappresenta B nell'albero delle mosse, dovrà scegliere un $j \in D(a, i)$ che condurrà ad uno stato $d(a, i, j)$. Il secondo livello dell'albero sarà rappresentato da tutti gli stati che sono raggiungibili scegliendo un elemento $j \in D(a, i)$ per un $i \in I(a)$. La contromossa di B tenterà di scegliere il ramo che porta ad uno stato finale che minimizza l'utilità utility.
Per effettuare queste scelte si percorre tutto l'albero delle mosse con radice in a fino ad arrivare ai nodi foglia che rappresentano gli stati finali del gioco. Su ognuno dei nodi foglia sarà calcolata la funzione utility. I nodi foglia in quanto stati del gioco (e non elementi di uno degli insiemi $I(-)$) sono raggiunti tramite una contromossa del giocatore B. Con la contromossa il giocatore B sceglierà lo stato con il minor valore possibile della funzione utility. Quindi assegnamo al nodo padre i_f di ogni foglia f il valore minimo della funzione utility degli stati figli di i_f.
Ugualmente i nodi padri delle foglie saranno raggiunti con una mossa del giocatore A, che sceglierà l'elemento i a cui è stato attribuito un valore massimo, perché questo porterà ad una contromossa di B il meno possibile dannosa per A. Quindi assegnamo al nodo padre a_{i_f} di ogni nodo i_f, padre di una foglia f dell'albero, il valore massimo fra quelli assegnati ai figli di a_{i_f}.
Induttivamente ripetiamo il procedimento trascurando gli ultimi due livelli dell'albero (cioè considerando i nodi a_{i_f}, con i_f padre di una foglia f dell'albero, come foglie). Il procedimento va ripetuto finchè ad ogni nodo non viene assegnato un valore.
Quando ad ogni nodo è stato assegnato un valore alla radice viene assegnato il valore più alto di utilità ottenibile da A e le mosse che portano a tale valore sono evidenziate dal percorso che va dalla radice ad una foglia e che ad ogni nodo riporta il valore della radice.

Teoricamente il risultato del gioco può essere trovato analizzando interamente l'albero delle mosse. Nella pratica però la crescita esponenziale dell'albero forza l'analisi a fermarsi dopo aver analizzato i nodi fino ad una certa profondità. Quindi nella pratica l'albero delle mosse verrà espanso volta per volta fino ad un livello h partendo dal nodo che è stato raggiunto (con livello di un nodo in una struttura ad albero intendiamo il minimo numero di archi (che collegano un nodo padre ad un nodo figlio, la radice sta a livello 0) da attraversare in un percorso dalla radice a quel nodo). Il valore di h dipende dalle capacità di calcolo della macchina che deve eseguire l'algoritmo e dal tempo che si decide di dedicare all'esecuzione. In questa tesi non ci occuperemo di questi dettagli implementativi ma ci concentreremo solo sul funzionamento teorico degli algoritmi, quindi supporremo di avere sufficiente capacità di calcolo per l'analisi dell'intero albero delle mosse.

Possiamo descrivere il valore che la regola Min-Max assegna ad ogni nodo come:

Definizione 4.1 (Valore Min-Max) *Sia $a \in S$ e S_a l'insieme dei figli del nodo a. Il valore Min-Max $v(a)$ del nodo a e:*

$$v(a) \equiv \begin{cases} \textsf{utility}(a) \text{ se } \textsf{end-test}(a) = true \\ min\{v(c_a) \mid c_a \in S_a\} \text{ se } \textsf{end-test}(a) = false \text{ e } a \text{ sta ad un livello dispari} \\ max\{v(c_a) \mid c_a \in S_a\} \text{ se } \textsf{end-test}(a) = false \text{ e } a \text{ sta ad un livello pari} \end{cases}$$

Diamo una possibile implementazione di un algoritmo min-max in pseudocodice (per una breve spiegazione del pseudo-codice adottato si veda **Appendice 3**). L'algoritmo ritorna il valore dell'utilità dello stato di massima utilità che si trova nel sottoalbero delle mosse avente come radice lo stato $a \in S$, e la mossa $i_s \in I(a)$ e contromossa $j_s \in D(a, i_s)$ che i giocatori A e B devono effettuare per portarsi verso lo stato di massima utilità. Le mosse i_s e j_s conducono il gioco allo stato $d(a, i_s, j_s)$. Ogni chiamata ricorsiva dell'algoritmo analizza due livelli dell'albero delle mosse (quindi analizza una mossa del giocatore A e la conseguente mossa del giocatore B).

Algoritmo Min-Max(a)

```
if end-test(a) = true then
    return utility(a)
best ← 0
for all i ∈ I(a) do
    worst ← 1
    for all j ∈ D(a, i)
        v ← MinMax(d(a, i, j))
        if v < worst then
            worst ← v
            j'_s ← j
    if worst > best then
        best ← worst
        i_s ← i
        j_s ← j'_s
return best, i_s, j_s
```

4.1.2 Albero minimale e algoritmo AlphaBeta

Per trovare il valore Min-Max di un nodo non è necessario analizzare tutto il sottoalbero dell'albero delle mosse avente quel nodo come radice, ma è sufficiente analizzare solo un *albero minimale*. L'albero minimale contiene tre tipi di nodi: pv-nodi, cut-nodi, all-nodi . Possiamo definire l'albero minimale come segue:

Definizione 4.2 (Albero minimale) *In un albero minimale ogni figlio di un pv-nodo o di un all-nodo è parte dell'albero minimale, invece un solo figlio di ogni cut-nodo è parte dell'albero minimale. Dato un albero delle mosse possiamo identificare il suo albero minimale segnando i nodi come segue:*

1. *La radice dell'albero è un* pv-nodo *.*

2. *Almeno un figlio di un* pv-nodo *a deve avere valore min-max* $v(a)$ *(se ne esiste più di uno scegliamone uno arbitrariamente). Questo figlio è un* pv-nodo *e i rimanenti figli sono* cut-nodi *.*

3. *Un nodo figlio a di un* cut-nodo *che abbia valore min-max* $v(a) < v(a_{pv})$ *è un* all-nodo *, dove* a_{pv} *è il più vicino predecessore di a che sia un* pv-nodo *. Se esiste più di un figlio con tali valori prendiamone uno arbitrariamente.*

4. *Ogni nodo figlio di un* all-nodo *è un* cut-nodo *.*

Dalla definizione si deduce che per ogni albero delle mosse esistono più alberi minimali. La correttezza dell'algoritmo $\alpha - \beta$ che descriveremo ora si basa sul fatto che il valore min-max può essere trovato nella ricerca di uno qualsiasi degli alberi minimali.

Regola $\alpha - \beta$ **:** Trovato il valore min-max $v(i)$ per un figlio $i \in I(a)$ di un nodo a che stia ad un livello pari dell'albero delle mosse, abbiamo che $v(i)$ è una limitazione inferiore per il valore min-max di a (il valore min-max di a è il massimo dei valori min-max dei suoi figli). Questa limitazione inferiore può essere usata per tagliare i sottoalberi dei rimanenti nodi figli di a che hanno valore min-max inferiore a $v(i)$ (che equivale a identificare questi nodi come non appartenenti all'albero minimale), perché questa limitazione inferiore deve inoltre essere usata come limitazione superiore dall'avversario. Intuitivamente, se l'avversario trova che con una contromossa alla scelta di i otterrà un valore-min-max inferiore del limite inferiore già stabilito per a, non c'è necessità di indagare oltre quel ramo perché la scelta di i non verrà mai effettuata e il nodo corrente a diventa un cut-nodo.
Ugualmente trovato il valore min-max $v(j)$ per un figlio $j \in D(a, i)$ di un nodo $i \in I(a)$ che stia ad un livello dispari nell'albero delle mosse è una limitazione superiore per il valore min-max di i. I sottoalberi con radice nodi figli di $i \in I(a)$ che hanno valore min-max superiore a $v(j)$ possono essere tagliati.

Il nome $\alpha - \beta$ dato all'algoritmo deriva dai nomi che usualmente si danno nello sviluppo del codice per l'algoritmo alle variabili in cui si memorizzano i momentanei limiti inferiori e superiori nell'analisi dei nodi. Nello sviluppo che proponiamo qui viene utilizzata una sola variabile α.

Diamo una possibile implementazione dell'algoritmo alphabeta in pseudocodice. Prima dell'esecuzione dell'algoritmo il valore di α è inizializzato a 0. L'algoritmo ritorna il valore dell'utilità dello stato di massima utilità che si trova nel sottoalbero delle mosse avente come radice lo stato $a \in S$, e la mossa $i_s \in I(a)$ e contromossa $j_s \in D(a, i_s)$ che i giocatori A e B devono effettuare per portarsi verso lo stato di massima utilità. Le mosse i_s e j_s conducono il gioco allo stato $d(a, i_s, j_s)$.

Algoritmo alphabeta(a,α)

if end-test(a) = $true$ then
    return utility(a)
$best \leftarrow 0$
for all $i \in I(a)$ do
    $worst \leftarrow 1$
    for all $j \in D(a, i)$
        $v \leftarrow alphabeta(d(a, i, j), \alpha)$
        if $v < worst$ then
            $worst \leftarrow v$
            $j'_s \leftarrow j$
            if $worst < \alpha$ then
                interrompo l'analisi di $D(a, i)$ e passo ad un altro $i \in I(a)$
    if $worst > best$ then

$best \leftarrow worst$
if $best > \alpha$ then
$\alpha \leftarrow best$
$i_s \leftarrow i$
$j_s \leftarrow j'_s$
return $best, i_s, j_s$

4.2 Test di terminazione

Una partita dei giochi che vogliamo risolvere potrebbe anche non terminare mai. É necessario quindi scegliere quando può essere opportuno interromperla. Interrotto il gioco, la funzione utility (a cui abbiamo già accennato nel paragrafo precedente) valuterà quanto A è arrivato vicino alla vittoria, in un certo senso quindi valuterà con che probabilità A avrebbe potuto vincere se avesse continuato a giocare, e viceversa quanto B è rimasto lontano dalla sconfitta, cioè con che probabilità B avrebbe potuto perdere se avesse continuato a giocare.

Supponiamo che il gioco abbia come stato iniziale l'elemento $a \in S$, che siano state effettuate m mosse complete (con mossa completa intendiamo la scelta, da parte del giocatore A, di un elemento di un insieme $I(-)$ e la scelta del giocatore B di un elemento di un insieme $D(-,-)$, conseguente alla scelta di A) e che il gioco si trovi nello stato $v \in S$. I giocatori decidono di non proseguire il gioco se:

1. Nello stato $v \in S$ si constata che il giocatore A ha vinto, quindi che vale utility$(v) = 1$. In tal caso non c'è più ragione di proseguire la partita.

2. Nello stato $v \in S$, considerato l'andamento del gioco fino a quel momento, e considerato il valore di utility(v), si fa una stima di quante mosse sono ancora necessarie per arrivare ad uno stato che decreti la vittoria di A o che convinca del fatto che A non potrà mai vincere (stabilendo così che B ha vinto). Se il numero di mosse che si ritiene necessario è molto grande (o comunque troppo grande perché valga la pena di continuare a giocare con la prospettiva di raggiungere tale stato) allora i giocatori decidono di non proseguire la partita.

La funzione end-test che deve valutare se, arrivati con m mosse complete nello stato v, è opportuno proseguire il gioco, dovrà essere basata sui due punti precedenti. Uno stato sarà valutato terminale se utility $= 1$, o se si stima che il numero di mosse necessarie per raggiungere uno stato che decreti la vittoria di A o che convinca che A non può vincere è troppo grande perché valga la pena di continuare a giocare con la prospettiva di raggiungere tale stato. In questo caso il valore di utility sullo stato terminale darà una indicazione delle possibilità di vittoria dei giocatori visto l'andamento del gioco.

4.3 Algoritmo per determinare $- \triangleleft -$

Per arrivare ad ottenere l'insieme $\triangleleft(U)$ dobbiamo prima saper determinare quando dato un $a \in S$ vale $a \triangleleft U$; poi potremo collezionare tutti gli elementi di S che sono coperti da U.

É necessario ora definire la funzione utility per poter dare una quantificazione numerica a quanto A in quella posizione è distante dalla vittoria. A tale scopo definiamo una metrica sull'insieme S degli stati del gioco, la definizione di utility si baserà su questa definizione di metrica.

4.3.1 Metrica su S

Sappiamo che $a \lhd U$ se e solo se, partendo dallo stato a, è possibile raggiungere uno stato in U. Per valutare la bontà di uno stato del gioco abbiamo quindi bisogno di un modo per valutare quanto questo è lontano dall'essere in un sottoinsieme U di S. Cerchiamo di rendere formalmente l'idea che un elemento a di S è tanto più vicino ad U quanto minore è la grandezza del più piccolo sottoinsieme di S indicizzato da $I(a)$ che copre anche un elemento di U. Abbiamo deciso di formalizzare questa idea perché ben si adatta alle topologie formali per le quali, nel capitolo (5), avremo necessità di costruire le relazioni $- \lhd -$ e $- \ltimes -$. Per molti altri esempi di topologie formali potrebbe però non essere una buona scelta per misurare la distanza fra due elementi di S. Si noti comunque che la teoria di questo capitolo rimane ugualmente valida anche con altri modi di misurare la distanza fra elementi di S; è infatti sufficiente che abbia valori compresi nell'intervallo $[0, 1]$ e che sia nulla se misura la distanza di un elemento da se stesso.

Misureremo prima la distanza fra due elementi a e b di S, definiremo poi la distanza di un elemento $a \in S$ e un sottoinsieme $U \subseteq S$ come la minima distanza fra a e un elemento $u \in U$.

Le uniche informazioni che conosciamo a priori sulla struttura della topologia formale sono quelle che possiamo ricavare dagli assiomi I, D, d, quindi per definire la distanza utilizzeremo solo gli assiomi. $I(a)$ si interpreta come un insieme di indici per i modi fondamentali per coprire a. I sottoinsiemi di S indicizzati da $I(a)$ sono le immagini $\mathsf{Im}[d(a,i)]$.

Introduciamo prima una misura topologica sulla collezione dei sottoinsiemi di S che utilizzeremo poi per definire la distanza:

$$\mu : \mathcal{P}(S) \rightarrow [0, +\infty[$$

cioè una funzione che sia positiva e numerabilmente additiva: $\mu(\bigcup_{i \in I} U_i) = \sum_{i \in I} \mu(U_i)$. Chiediamo inoltre che μ sia tale che per ogni sottoinsieme U di S sia $\mu(U) = 0 \Leftrightarrow (\exists a \in S)\{a\} = U$.

Fra gli indici delle coperture di a date per assioma, quelli che portano ad un insieme $\mathsf{Im}[d(a,i)]$ che possiamo dire, utilizzando solo gli assiomi, che coprono anche b sono quelli che contengono un insieme $\mathsf{Im}[d(b,i')]$ per qualche $i' \in I(b)$, cioè sono gli $i \in I(a)$ tali che $(\exists i' \in I(b))\ \mathsf{Im}[d(b,i')] \subseteq \mathsf{Im}[d(a,i)]$. Definiamo allora un insieme di coppie di indici:

$$I(a,b) \equiv \{(i,i') \mid i \in I(a), i' \in I(b), \mathsf{Im}[d(b,i')] \subseteq \mathsf{Im}[d(a,i)]\}$$

La misura della grandezza del più picolo sottoinsieme di S ottenibile dagli indici di $I(a,b)$ è

$$\delta(a,b) \equiv \mathsf{min}_{(i,i') \in I(a,b)} \mu(\mathsf{Im}[d(a,i)])$$

Per far si che la distanza fra due elementi di S sia sempre valutabile è necessario aggiungere ad $I(a,b)$ qualche elemento in modo che $\delta(a,b)$ possa sempre misurare qualche insieme. Vogliamo cioè che $I(a,b)$ sia sempre abitato, qualunque siano $a, b \in S$. Per soddisfare la richiesta basta aggiungere ad ogni $I(a)$ con $a \in S$ un indice i_s che indichi la copertura S dell'elemento a. Sia $D(a,i_s) = \sum(S,S)$ e la funzione d sia estesa al dominio $D(a,i_s)$ ponendo $d(a,i_s,j) = \mathsf{fst}(j)$ per ogni $j \in D(a,i_s)$. Allora, per ogni $a, b \in S$, $I(a,b)$ contiene almeno la coppia (i_s, i_s) e quindi δ è sempre valutabile.

Vogliamo inoltre che la distanza fra due elementi sia nulla quando i due elementi coincidono. Per ottenere questo è sufficiente aggiungere ad ogni $I(a)$ un indice i_a che indichi la copertura $\{a\}$ dell'elemento a. Poniamo $D(a,i_a) = \sum(S,\{a\})$ e la funzione d sia estesa al dominio $D(a,i_a)$ ponendo $d(a,i_a,j) = a$ per ogni $j \in D(a,i_a)$. La misura dell'insieme $\{a\}$ è nulla, quindi $\delta(a,a) = 0$. Inoltre se $\delta(a,b) = 0$ allora $a = b$, perché abbiamo chiesto che la misura sia tale che $\mu(U) = 0 \Leftrightarrow (\exists a \in S)\{a\} = U$. Con l'aggiunta di questi due indici la nuova definizione di $I(a,b)$ diventa

$$I(a,b) \equiv \{(i,i') \mid i \in I(a) \cup \{i_a, i_s\}, i' \in I(b) \cup \{i_b, i_s\}, \mathsf{Im}[d(b,i')] \subseteq \mathsf{Im}[d(a,i)]\}$$

e quella di δ rimane $\delta(a,b) = \mathsf{min}_{(i,i') \in I(a,b)} \mu(\mathsf{Im}[d(a,i)])$.

Attraveso la definizione di δ andiamo a definire la *valutazione di distanza* d_S fra a e b

$$d_S : S \times S \to [0, 1]$$

in modo che sia direttamente proporzionale a $\delta(a, b)$:

$d_S(a, b) = 0$ si ha quando $\delta(a, b)$ raggiunge un minimo.

$d_S(a, b) = 1$ si ha quando $\delta(a, b)$ raggiunge un massimo.

Abbiamo già osservato che è $\delta(a, b) = 0$ se e solo se $a = b$. Osserviamo anche che $\delta(a, b)$ è massimo quando l'unica coppia contenuta in $I(a, b)$ è la coppia (i_s, i_s).

Queste due osservazioni motivano la seguente definizione di *valutazione di distanza*:

$$d_S : S \times S \to [0, 1]$$

$$d_S(a, b) \equiv \frac{\delta(a, b)}{\mu(S)}$$

Possiamo rendere la definizione simmetrica ponendo

$$d_S^{simm}(a, b) = \frac{d_S(a, b) + d_S(b, a)}{2}$$

In seguito useremo la definizione simmetrica d_S^{simm} che per semplicità indicheremo ancora d_S.

La funzione d_S soddisfa le proprietà

(m_1) $d_S(a, b) \geq 0$

(m_2) $d_S(a, b) = d(b, a)$

(m_3) $d_S(a, b) = 0$ se e solo se $a = b$

Non è però transitiva, per questo motivo abbiamo preferito chiamarla *valutazione di distanza* anzichè *metrica*, che abitualmente è associata ad una funzione che soddisfa le proprietà (m_1), (m_2) (m_3) e transitiva.

Per ogni $a \in S$ e ogni sottoinsieme U di S definiamo infine la valutazione di distanza di a da U:

$$d_S : S \times \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$$

$$d_S(a, U) \equiv \mathsf{min}_{u \in U} d_S(a, u)$$

4.3.2 Utilità per $- \lhd -$

Andiamo a definire la funzione utility per la valutazione dello stato del gioco che adotteremo nel gioco per determinare $- \lhd -$.

A per vincere deve far in modo di costringere B ad avvicinarsi ad U. Una posizione sarà valutata tanto più vicina ad uno stato che decreti la vittoria di A quanto più è vicina a U.

Con questo possiamo dare la definizione della funzione di utilità. Fissato U, definiamo

$$\mathsf{utility}^U : S \to [0, 1]$$

$$\mathsf{utility}^U(a) \equiv 1 - d_S(a, U)$$

che misura quanto uno stato a del gioco è vicino ad uno stato che permetta di decretare la vittoria del giocatore A. La funzione di utilità permette di valutare la situazione dei giocatori in un momento della partita, in particolare $\mathsf{utility}^U(a)$ sarà 1, il valore massimo, se e solo se A ha vinto, quindi se e solo se ha costretto B ad una mossa che porti allo stato a in U.

La valutazione dello stato del gioco tramite $\mathsf{utility}^U(a)$ viene espressa solo in riferimento allo stato, quindi viene fatta trascurando le possibilità che le mosse successive potrebbero aprire, è una valutazione statica della situazione in cui si trova il gioco.

4.3.3 Algoritmo per determinare $- \lhd -$

Nella sezione (2.2) abbiamo mostrato che $a \lhd U$ se e solo se esiste una strategia di gioco che partendo dallo stato a porta ad un elemento di U. Nella (4.3.2) abbiamo introdotto la funzione di utilità. Descriviamo ora un algoritmo che simuli l'esecuzione del gioco da parte dei giocatori e che fornisca come risultato la sequenza di mosse effettuate e l'utilità dello stato finale del gioco (nell'algoritmo c'è una chiamata alla funzione *alphabeta*, sottointendiamo che tale funzione utilizzi la funzione di utilità $\mathsf{utility}^U$ al posto della generica $\mathsf{utility}$ indicata nel suo pseudocodice).

Algoritmo copertura(a,U)

```
if end-test(a) = true then
    print: "Stato finale del gioco: a"
    return utility^U(a)
i, j ← alphabeta(a, 0)
print: "Mossa del giocatore A: i"
print: "Mossa del giocatore B: j"
print: "Nuovo stato del gioco: d(a, i, j)"
return copertura(d(a, i, j), U)
```

La funzione $\mathsf{utility}^U(a)$ valuta quanto è vicino l'elemento $a \in S$ ad un fissato sottoinsieme U di S. Le variabili i, j ritornate da *alphabeta* sono le mosse della strategia ottimale che i giocatori effettuano partendo dallo stato a. Queste portano il gioco nel nuovo stato $d(a, i, j)$.

L'algoritmo ritorna l'utilità dello stato finale del gioco. Possiamo utilizzare il risultato che l'algoritmo ci fornisce in questo modo:

> sia f lo stato finale del gioco, se $\mathsf{utility}^U(f) = 1$ allora $a \lhd U$, altrimenti $\mathsf{utility}^U(f)$ è una stima della probabilità con cui continuando il gioco si sarebbe arrivati a stabilire che $a \lhd U$

Nei paragrafi seguenti descriveremo gli algoritmi per gli altri due giochi

4.4 Algoritmo per determinare $- \ltimes -$

La costruzione dell'insieme $\ltimes(F)$ ricalca quella dell'insieme $\lhd(U)$. Mostriamo come determinare se vale $a \ltimes F$ per un $a \in S$, fatto questo potremo trovare l'insieme $\ltimes(F)$ collezionando tutti gli elementi di S tali che $a \ltimes F$.

4.4.1 Utilità per $- \ltimes -$

Abbiamo già accennato nel paragrafo (4.1) al fatto che in nel gioco per la determinazione del predicato $- \ltimes -$ il giocatore B per poter dichiarare di aver vinto deve saper dimostrare di sapersi mantenere indefinitivamente all'interno di un sottoinsieme di S. La valutazione dello stato di un gioco può solamente dire quanto si è vicini dall'uscire da un sottoinsieme di S. Con l'algoritmo che stiamo per descrivere quindi, dato un elemento $a \in S$ e un sottoinsieme $F \subseteq S$, andiamo a determinare:

1. $\neg(a \ltimes F)$ se il gioco con stato iniziale a porta ad uno stato di $\neg F$
2. una stima della probabilità con cui continuando il gioco si sarebbe arrivati ad uno stato di $\neg F$ se il gioco non ha raggiunto uno stato di $\neg F$

In sostanza quindi da queste informazioni (sottraendo ad 1 il valore del punto **2.**) sembra possiamo ricavare solo la determinazione di $\neg\neg(a \ltimes F)$, che intuizionisticamente non equivale a $a \ltimes F$.

La causa di questo sta nel fatto che la vittoria di B (quindi l'affermazione della verità di $a \ltimes F$) non dipende dalla constatazione di un fatto, ma dalla dimostrazione dell'esistenza della possibilità di mantenenrsi indefinitivamente dentro un sottoinsieme di S. La risposta che possiamo aspettarci da un algoritmo è invece il calcolo di un dato la cui interpretazione è la constatazione di un fatto. Solo il nostro modo di pensare ci può spingere ad interpretare il valore ottenuto sottraendo ad 1 il valore del punto **2.** come la probabilità con cui continuando il gioco il giocatore B sarebbe riuscito a mantenersi dentro F in ogni momento. Con questo vogliamo dire che l'algoritmo può solo fornirci una stima di probabilità, sta a noi l'interpretazione di questa stima.

Andiamo a definire una funzione di utilità per questo gioco. Lo scopo del giocatore B è quello di riuscire a mantenersi indefinitivamente all'interno di un sottoinsieme F di S, quindi ad ogni mossa di forzare A a scegliere un elemento $i \in I(a)$, se a è lo stato in cui si trova il gioco, tale che B con una contromossa possa rimanere in F. Per una valutazione dello stato del gioco abbiamo bisogno di determinare numericamente quanto B si è avvicinato alla vittoria, cioè "quanto" B è riuscito a rimanere dentro F. Riutilizziamo la metrica d_S definita alla (4.3.1) per misurare quanto il giocatore B è rimasto lontano dall'uscire da F, cioè quanto è rimasto lontano da $\neg F$, negazione di F. Interpreteremo questo valore come "quanto" B è riuscito a rimanere dentro F.

Definiamo la funzione di utilità per questo gioco. Sia dato $F \subseteq S$:

$$\mathsf{utility}^F : S \to [0, 1]$$

$$\mathsf{utility}^F \equiv d_S(a, \neg F)$$

che misura quanto B è riuscito a non uscire da F. In particolare $\mathsf{utility}^F$ vale zero, il valore minimo, se e solo se B ha perso, cioè se il gioco ha raggiunto uno stato che non sta in F.

4.4.2 Algoritmo per determinare $- \ltimes -$

Nella sezione (2.2) abbiamo mostrato che $a \ltimes F$ se e solo se esiste una strategia di gioco che partendo dallo stato a pormette di rimanere sempre dentro F. Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto la funzione di utilità e abbiamo detto che prenderemo come stima di quanto il giocatore B sa mantenersi dentro F partendo da uno stato a di S, la stima di quanto poco è probabile che esista un percorso che dallo stato a porti ad uno stato di $\neg F$. L'algoritmo che simuli l'esecuzione del gioco da parte dei giocatori è quindi l'algoritmo **Algoritmo copertura(-,-)** descritto al paragrafo (4.3.3) a cui venga dato in ingresso lo stato $a \in S$ e il sottoinsieme $\neg F$.

L'algoritmo ritorna l'utilità dello stato finale del gioco. Possiamo utilizzare il risultato che l'algoritmo ci fornisce in questo modo:

> sia f lo stato finale del gioco, se $\mathsf{utility}^F(f) = 0$ allora $\neg(a \ltimes F)$, altrimenti $\mathsf{utility}^F(f)$ è una stima della probabilità con cui continuando il gioco si sarebbero incontrati solamente stati di F

Quindi, se non abbiamo constatato $\neg(a \ltimes F)$, $\mathsf{utility}^F(f)$ ci da una stima della probabilità per cui l'affermazione $a \ltimes F$ può considerarsi vera.

Nel prossimo capitolo vedremo che la possibilità di costruire insiemi del tipo $\lhd(-)$, $\ltimes(-)$ (e quindi anche quelli del tipo $\Gamma^{(-)}$ e $\Pi_{(-)}$), ci permetterà di sviluppare dei metodi di ricerca di oggetti in un insieme utilizzando le proprietà che li caratterizzano.

Capitolo 5

Topologia formale e metodi di ricerca

La parte rimanente di questa tesi sarà dedicata a mostrare come si può utilizzare la topologia formale per sviluppare un metodo di ricerca dei sottoinsiemi di oggetti appartenenti ad un insieme X che siano caratterizzati da dati sottoinsiemi finiti di proprietà di un insieme S. Lo scopo che ci prefiggiamo è quello di definire una topologia formale sull'insieme S per fornire un metodo di ricerca che ci permetta di isolare delle classi di oggetti partendo da una approssimata descrizione attraverso le proprietà di S che essi soddisfano.

Lo sviluppo di un metodo di ricerca che lavori solo sulla parte formale del problema, cioè solo sull'insieme delle proprietà soddisfatte dagli elementi dell'insieme X, è motivato dalla convinzione che nella ricerca di una classe di oggetti appartenenti ad un insieme X non sia possibile isolare uno ad uno tutti gli elementi che vogliamo siano presenti nella classe, ma che sia necessaria una caratterizzazione di questi attraverso le proprietà che vogliamo soddisfino. La topologia formale diventa allora uno strumento adatto alla gestione del problema della ricerca.

In questo capitolo daremo quindi una soluzione del seguente problema: dato un insieme di oggetti, vogliamo un modo per isolare l'interno e la chiusura del sottoinsieme composto da tutti gli oggetti che soddisfano un sottoinsieme finito di proprietà da noi definito.

Allo scopo di stabilire una connessione fra l'insieme di oggetti X e l'insieme S di proprietà soddisfacibili dagli oggetti, definiamo una relazione binaria $- \Vdash -$ fra X e S. Scegliamo di utilizzare una relazione binaria che leghi un oggetto x ad ogni proprietà a nel seguente modo:

$$x \Vdash a \text{ se e solo se l'oggetto } x \in X \text{ soddisfa la proprietà } a \in S$$

Definiamo anche una operazione $\wedge : S \times S \to S$: siano a, b elementi di S, vogliamo definire l'elemento $a \wedge b$ come la congiunzione logica delle proprietà a e b. Chiediamo quindi che l'insieme S sia chiuso per congiunzione logica, cioè chiediamo che se a e b sono proprietà di S, allora anche $a \wedge b$ è una proprietà di S tale che

$$x \in X \text{ soddisfa } a \wedge b \text{ se e solo se } x \text{ soddisfa } a \text{ e } x \text{ soddisfa } b$$

L'operazione $- \wedge -$ è chiaramente associativa e commutativa, quindi $(S, \wedge)$ è un semigruppo commutativo.

Tramite la relazione $- \Vdash -$ definiamo una mappa $\mathsf{ext} : S \to \mathcal{P}(X)$:

$$\mathsf{ext}(a) \equiv \{x \in X \mid x \Vdash a\} \text{ per ogni } a \in S$$

Vogliamo ora dare delle condizioni tali che $(X, \mathsf{ext}, S, \wedge)$ sia uno spazio topologico concreto. L'operazione $- \wedge -$ è definita in modo tale che $\mathsf{ext}(a \wedge b) = \mathsf{ext}(a) \cap \mathsf{ext}(b)$, quindi la condizione

($B2$) della definizione (1.1) di spazio topologico concreto è rispettata. Chiediamo inoltre che ogni oggetto di X soddisfi almeno una proprietà e quindi che sia $\mathsf{Ext}(S) = X$ (condizione ($B1$) della definizione 1.1), dove Ext è la mappa derivata da ext ponendo $\mathsf{Ext}(U) \equiv \bigcup_{a \in U} \mathsf{ext}(a)$ per ogni sottoinsieme U di S. Con queste richieste la terna $\mathcal{X} = (X, \mathsf{ext}, S, \wedge)$ è uno spazio topologico concreto.

L'idea principale è quella di caratterizzare l'interno e la chiusura della classe formata dagli elementi dell'insieme X che soddisfano determinate richieste, lavorando solo con sottoinsiemi dell'inseme delle proprietà e utilizzando le mappe Ext e Rest per ottenere sottoinsiemi di oggetti da sottoinsiemi di proprietà.

Per far questo useremo le definizioni e metodi della topologia formale che viene indotta su S da $\mathcal{X}$. Nel prossimo paragrafo daremo degli assiomi che ci permetteranno di costruire le relazioni $- \lhd -$ e $- \ltimes -$ di tale topologia formale.

5.1 Formulazione induttiva del problema della ricerca

Nel capitolo (1) abbiamo introdotto la relazione di copertura e il predicato binario di positività e li abbiamo usati per caratterizzare gli insiemi aperti e chiusi di uno spazio topologico. Poi nel capitolo (2) abbiamo dato una definizione induttiva di topologia formale e mostrato come generare per approssimazioni successive le relazioni $- \lhd -$ e $- \ltimes -$. Vogliamo ora definire una collezione di assiomi che ci permetta di considerare la topologia formale indotta su S dallo spazio topologico concreto $\mathcal{X}$ come induttivamente generata.

Dato uno spazio topologico concreto possiamo sempre definire un axiom-set tramite il quale si possano generare induttivamente le relazioni $- \lhd -$ e $- \ltimes -$ (vedi [IGFT]). L'axiom-set associato allo spazio topologico concreto $\mathcal{X} = (X, \mathsf{ext}, S, \wedge)$ è:

$$I(a) \equiv \{i \in \mathsf{ext}(a) \to S \mid (\forall x \in X)(x \in \mathsf{ext}(a) \to x \in \mathsf{ext}(i(x)))\} \ \mathsf{set}\ [a : S]$$

$$C(a, i) \equiv \mathsf{Im}[i] \subseteq S \ [a : S, i : I(a)]$$

Si dimostra (vedi (**Appendice 1**)) che questi assiomi definiscono una topologia formale induttivamente generata $(S, \wedge, \lhd, \ltimes)$, come definita nella definizione (2.2), e che le relazioni $- \lhd -$ e $- \ltimes -$ coincidono con quelle della topologia formale indotta su $(S, \wedge)$ dallo spazio topologico concreto $(X, \mathsf{ext}, S, \wedge)$.

Scriviamo ora i corrispondenti assiomi nella forma I, D, d:

$$I(a) \equiv \{i \in \mathsf{ext}(a) \to S \mid (\forall x \in X)(x \in \mathsf{ext}(a) \to x \in \mathsf{ext}(i(x)))\} \ \mathsf{set}\ [a : S]$$

$$D(a, i) \equiv \sum(S, C(a, i)) = \{(c, \pi) \mid c \in S, \pi \text{ prova del fatto che } c \in C(a, i)\} \ \mathsf{set}\ [a : S, i : I(a)]$$

$$d(a, i, j) \equiv \mathsf{fst}(j) \in S \ [a : S, i \in I(a), j \in D(a, i)]$$

e con questo otteniamo che $C(a, i) = \mathsf{Im}[d(a, i)]$ e quindi che $a \lhd \mathsf{Im}[d(a, i)]$. Gli assiomi in questa forma ci permettono di costruire le relazioni $- \lhd -$ e $- \ltimes$-.

Prima di vedere come utilizzare queste costruzioni nel problema della ricerca, richiamiamo le equivalenze che esprimono il significato della relazione di copertura e del predicato binario di positività. La relazione di copertura è tale che

$$a \lhd U \text{ se e solo se } \mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$$

Applicata al caso in cui X sia l'insieme degli oggetti e S l'insieme delle proprietà da loro soddisfatte, la relazione dice che $a \lhd U$ vale se e solo se tutti gli oggetti che soddisfano a sono oggetti che soddisfano almeno una proprietà di U.

Similmente il significato inteso del predicato binario di positività è:

$$a \ltimes F \text{ se e solo se } \mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$$

e dice che $a \ltimes F$ significa che esiste almeno un oggetto in X che soddisfa la proprietà a e che soddisfa solo proprietà che stanno nel sottoinsieme F di S.

Vediamo ora come possiamo utilizzare questa struttura per implementare un metodo di ricerca di sottoinsiemi di oggetti.

5.2 Interpretazione di aperti e chiusi

Un primo contributo allo sviluppo di metodi di ricerca che utilizzano la topologia formale si trova in [FTSE] in cui viene proposta una lettura della definizione di aperti e chiusi come strumenti per caratterizzare due diversi tipi di classi di oggetti. Riportiamo in questo paragrafo le idee principali dell'articolo.

Le nozioni di sottoinsieme aperto e sottoinsieme chiuso sono le due principali nozioni della topologia. Un sottoinsieme chiuso di X è un sottoinsieme che contiene tutti gli elementi di X che non possono essere separati da esso tramite un intorno di base. Potremmo pensare ad un sottoinsieme chiuso come ad un sottoinsieme che contiene tutti gli elementi che non gli sono "sufficientemente distanti". In formule gli elementi di un sottoinsieme chiuso $C \subseteq X$ sono così caratterizzati:

$$x \in C \text{ se e solo se, per ogni } a \in S, \text{ se } x \in \mathsf{ext}(a) \text{ allora } \mathsf{ext}(a) \between C$$

Quindi costruendo la chiusura di un sottoinsieme D di X, costruiamo quel sottoinsieme di X che contiene tutti gli elementi che non sono "sufficientemente distanti" da D.

La definizione di sottoinsieme aperto è duale a quella di sottoinsieme chiuso. Un sottoinsieme aperto è un sottoinsieme che, per ogni suo elemento, contiene completamente almeno un intorno di base della topologia che contiene quel elemento. Potremmo quindi pensare ad un sottoinsieme aperto come ad un sottoinsieme che contiene solo gli elementi che gli sono "sufficientemente dentro". In formule gli elementi di un aperto $A \subseteq X$ sono caratterizzati

$$x \in A \text{ se e solo se, esiste un } a \in S, \text{ tale che } x \in \mathsf{ext}(a) \text{ e } \mathsf{ext}(a) \subseteq A$$

Costruendo l'interno di un sottoinsieme D di X, costruiamo quel sottoinsieme di X che contiene solo gli elementi che sono "sufficientemente dentro" a D.

Saper trovare l'interno e la chiusura di un sottoinsieme di X ci permette quindi di dare interpretazioni diverse ai risultati di una ricerca in X.

Nel prossimo paragrafo mostreremo come caratterizzare l'interno e la chiusura della classe formata dagli elementi dell'insieme X che soddisfano determinate richieste.

5.3 Utilità della topologia nei metodi di ricerca

Dato un sottoinsieme di proprietà U, lo sappiamo rapportare all'insieme degli oggetti X attraverso le mappe Ext, Rest:

1. $\mathsf{Ext}(U)$ è composto dagli oggetti che soddisfano almeno una proprietà in U. In formule, sono gli oggetti $x \in X$ tali che $U \between \alpha(x)$ dove $\alpha(x) = \{a \in S \mid x \in \mathsf{ext}(a)\}$.

2. $\mathsf{Rest}(F)$ è composto dagli oggetti concreti che sono totalmente caratterizzati dalle proprietà in F, i.e. tutto quello che, dato l'insieme delle proprietà S, possiamo dire su questi oggetti è contenuto in F. In formule sono gli oggetti $x \in X$ tali che $\alpha(x) \subseteq F$. F rappresenta quindi una limitazione delle proprietà che possono essere soddisfatte dagli oggetti di $\mathsf{Rest}(F)$.

Supponiamo ora di voler utilizzare le proprietà delle topologie formali e delle mappe Ext e Rest per trovare i due sottoinsiemi di X composti, rispettivamente, da tutti gli oggetti che non sono "sufficientemente distanti" e da solo gli oggetti che sono "sufficientemente dentro" agli oggetti che soddisfano tutte le proprietà di U. Quindi supponiamo di voler trovare la chiusura e l'interno del sottoinsieme $\{x \in X \mid (\forall u \in U)\ x \in \mathsf{ext}(u)\}$, ovvero la chiusura e l'interno del sottoinsieme composto da tutti gli elementi $x \in X$ per cui vale $U \subseteq \alpha(x)$. Questo ci porta a definire un altro modo per rapportare sottoinsiemi di S a sottoinsiemi di X, ossia a definire un'altra mappa fra $\mathcal{P}(S)$ e $\mathcal{P}(X)$ che chiameremo Expr.

Definizione 5.1 *La funzione* $\mathsf{Expr} : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(X)$ *è definita*

$$\mathsf{Expr}(U) \equiv \{x \in X \mid (\forall u \in U)\ x \in \mathsf{ext}(u)\}$$

per ogni sottoinsieme U *di* S.

$\mathsf{Expr}(U)$ è composto dagli oggetti concreti che soddisfano tutte le proprietà di U. Gli elementi di U possono quindi essere visti come dei requisiti che devono essere soddisfatti dagli oggetti di $\mathsf{Expr}(U)$.

Vogliamo analizzare le caratteristiche della funzione Expr e cercare di caratterizzare, attraverso le funzioni Ext e Rest, gli elementi della chiusura e dell'interno dei sottoinsiemi $\mathsf{Expr}(U)$ con $U \subseteq S$.

Dalla definizione di $\mathsf{Expr}(U)$ ricaviamo l'uguaglianza

$$\mathsf{Expr}(U) = \{x \in X \mid (\forall u \in U)\ x \in \mathsf{ext}(u))\} = \bigcap_{u \in U} \mathsf{ext}(u)$$

Supponiamo d'ora in avanti di lavorare con un sottoinsieme U finito. Allora $\mathsf{Expr}(U)$ è un aperto essendo intersezione finita di aperti; quindi $\mathsf{Expr}(U)$ coincide con il suo interno. Per definizione dell'operazione $- \wedge -$ possiamo dire inoltre che vale l'uguaglianza:

$$\mathsf{Expr}(U) = \bigcap_{a \in U} \mathsf{ext}(a) = \mathsf{ext}(w) \text{ con } w = \bigwedge_{u \in U} u$$

Quindi $\mathsf{Expr}(U)$ coincide con $\mathsf{Int}(\mathsf{Expr}(U))$, dove:

$$\mathsf{Int}(\mathsf{Expr}(U)) = \{x \in X \mid (\exists a \in S)(x \in \mathsf{ext}(a)\ \&\ \mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Expr}(U))\}$$

$\mathsf{Int}(\mathsf{Expr}(U))$ è quindi formato da tutti gli elementi di X che soddisfano almeno una proprietà $a \in S$ tale che $(\forall y \in X)(a \in \alpha(y) \to U \subseteq \alpha(y))$.

Osserviamo ora che in una topologia formale $\mathcal{S}$ derivata da uno spazio topologico concreto $(X, \mathsf{ext}, S, \wedge)$, la collezione dei punti formali $Pt(\mathcal{S})$ può essere considerata come una struttura che fa da controparte formale all'insieme X, ma in genere non esiste una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di X e i punti formali della topologia (per un controesempio vedi (**Appendice 2**)). Vogliamo definire un sottoinsieme $\mathsf{Int}^{Form}(\mathsf{Expr}(U))$ che ricalchi la definizione di $\mathsf{Int}(\mathsf{Expr}(U))$ ma che al posto dell'inclusione $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Expr}(U)$ utilizzi l'espressione "*per ogni* $\alpha \in Pt(\mathcal{S}), a \in \alpha \to U \subseteq \alpha$". Definiamo quindi $\mathsf{Int}^{Form}(\mathsf{Expr}(U))$:

$$x \in \mathsf{Int}^{Form}(\mathsf{Expr}(U)) \equiv (\exists a \in S)(x \in \mathsf{ext}(a)\ \&\ (\forall \alpha \in Pt(\mathcal{S}))(a \in \alpha \to U \subseteq \alpha))$$

Sappiamo che, per ogni $x \in X$, il sottoinsieme $\alpha(x)$ di S è un punto formale, quindi ogni elemento di $\mathsf{Int}^{Form}(\mathsf{Expr}(U))$ è anche un elemento di $\mathsf{Int}(\mathsf{Expr}(U))$. Dimostriamo che in realtà $\mathsf{Int}^{Form}(\mathsf{Expr}(U)) = \mathsf{Int}(\mathsf{Expr}(U))$.

Nel paragrafo (3.4), abbiamo mostrato che gli elementi di S che stanno solo in punti formali che contengono anche il sottoinsieme U sono tutti e soli gli elementi di Π_w, dove $w = \bigwedge_{u \in U} u$.

Quindi $x \in \mathsf{Int}^{Form}(\mathsf{Expr}(U))$ se e solo se soddisfa almeno una proprietà $a \in S$ tale che $a \in \Pi_w$, quindi se e solo se $x \in \mathsf{Ext}(\Pi_w)$. Possiamo quindi dire che vale l'uguaglianza

$$\mathsf{Int}^{Form}(\mathsf{Expr}(U)) = \mathsf{Ext}(\Pi_w)$$

da cui deduciamo anche che $\mathsf{Int}^{Form}(\mathsf{Expr}(U))$ è un sottoinsieme aperto di X. Nel paragrafo (3.2) abbiamo dimostrato che per ogni topologia formale derivata da uno spazio topologico concreto, per ogni $U \subseteq S$, vale $\Pi_U = \lhd(U)$. Quindi $\Pi_w = \lhd(w)$, e quindi $\mathsf{Int}^{Form}(\mathsf{Expr}(U)) = \mathsf{Ext}(\lhd(w))$. Siccome $\mathsf{Ext}(\lhd(w)) = \mathsf{ext}(w)$, otteniamo che vale

$$\mathsf{Int}(\mathsf{Expr}(U)) = \mathsf{ext}(w) = \mathsf{Ext}(\lhd(w)) = \mathsf{Int}^{Form}(\mathsf{Expr}(U))$$

Vediamo ora quali sono gli elementi della chiusura di $\mathsf{Expr}(U)$:

$$\mathsf{Cl}(\mathsf{Expr}(U)) = \{x \in X \mid (\forall a \in S)(x \in \mathsf{ext}(a) \rightarrow \mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Expr}(U))\}$$

$\mathsf{Cl}(\mathsf{Expr}(U))$ è formata da tutti gli elementi di X che soddisfano solo proprietà che sono soddisfatte anche da un elemento in $\mathsf{Expr}(U)$, cioè che soddisfano solo proprietà $a \in S$ tali che $(\exists y \in X)(a \in \alpha(y)\ \&\ U \subseteq \alpha(y))$.

Anche per $\mathsf{Cl}(\mathsf{Expr}(U))$ possiamo definire un sottoinsieme $\mathsf{Cl}^{Form}(\mathsf{Expr}(U))$ che ricalchi la definizione di $\mathsf{Cl}(\mathsf{Expr}(U))$ ma che al posto di $\mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Expr}(U)$ utilizzi l'espressione "*esiste* $\alpha \in Pt(\mathcal{S})$ *tale che* $a \in \alpha\ \&\ U \subseteq \alpha$":

$$x \in \mathsf{Cl}^{Form}(\mathsf{Expr}(U)) \equiv (\forall a \in S)(x \in \mathsf{ext}(a) \rightarrow (\exists \alpha \in Pt(\mathcal{S}))(a \in \alpha\ \&\ U \subseteq \alpha))$$

$\mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Expr}(U)$ significa che esiste $x \in X$ tale che $x \in \mathsf{ext}(a)\ \&\ x \in \mathsf{Expr}(U)$, quindi $\alpha(x)$ è un punto formale tale che $a \in \alpha(x)\ \&\ U \subseteq \alpha(x)$. Quindi ogni elemento di $\mathsf{Cl}(\mathsf{Expr}(U))$ è anche un elemento di $\mathsf{Cl}^{Form}(\mathsf{Expr}(U))$. Dimostriamo che $\mathsf{Cl}^{Form}(\mathsf{Expr}(U)) = \mathsf{Cl}(\mathsf{Expr}(U))$.

Nel paragrafo (3.4) abbiamo chiamato Γ_U^S il sottoinsieme di S, composto da quei elementi che stanno in un punto formale contenente un sottoinsieme finito U di S, e abbiamo dimostrato che $\Gamma_U^S = \{a \in S \mid (a \wedge w) \ltimes S\}$, dove $w = \bigwedge_{u \in U} u$. Per semplicità indicheremo Γ_U^S semplicemente con Γ_U. Con questa notazione abbiamo che $x \in X$ sta in $\mathsf{Cl}^{Form}(\mathsf{Expr}(U))$ se e solo se soddisfa solo proprietà $a \in S$ tali che $a \in \Gamma_U$, cioè se e solo se è un elemento di $\mathsf{Rest}(\Gamma_U)$. Possiamo quindi dire che, dato un sottoinsieme finito U di S, vale l'uguaglianza

$$\mathsf{Cl}^{Form}(\mathsf{Expr}(U)) = \mathsf{Rest}(\Gamma_U)$$

da cui deduciamo anche che $\mathsf{Cl}^{Form}(\mathsf{Expr}(U))$ è un sottoinsieme chiuso di X. Nel paragrafo (3.3) abbiamo dimostrato che in una topologia formale derivata da uno spazio topologico concreto, per ogni $F \subseteq S$, il sottoinsieme Γ^F è definibile in modo costruttivo in quanto vale $\Gamma^F = \ltimes(F)$. Quindi possiamo considerare anche Γ_U un sottoinsieme completamente costruttivo, e di conseguenza anche $\mathsf{Cl}^{Form}(\mathsf{Expr}(U))$ è un sottoinsieme completamente costruttivo.

Inoltre, per ogni topologia formale derivata da uno spazio topologico concreto, possiamo dimostrare che $\mathsf{Cl}^{Form}(\mathsf{Expr}(U)) = \mathsf{Cl}(\mathsf{Expr}(U))$. Sappiamo infatti che, per tali topologie, $\Gamma_U = \{a \in S \mid (a \wedge w) \ltimes S\}$. Ma $(a \wedge w) \ltimes S$ vale se e solo se $\mathsf{ext}(a \wedge w) \between \mathsf{Rest}(S)$. Osservando che $\mathsf{Rest}(S) = X$, possiamo dire che $(a \wedge w) \ltimes S$ vale se e solo se $(\exists x \in X)(x \in \mathsf{ext}(a) \cap \mathsf{ext}(w))$, cioè se e solo se $(\exists x \in X)(x \in \mathsf{ext}(a)\ \&\ x \in \mathsf{Expr}(U))$, quindi se e solo se $\mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Expr}(U)$. Quindi vale $a \in \Gamma_U$ se e solo se $\mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Expr}(U)$. Confrontano le definizioni

$$\mathsf{Cl}(\mathsf{Expr}(U)) = \{x \in X \mid (\forall a \in S)(x \in \mathsf{ext}(a) \rightarrow \mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Expr}(U))\}$$

$$\mathsf{Cl}^{Form}(\mathsf{Expr}(U)) = \{x \in X \mid (\forall a \in S)(x \in \mathsf{ext}(a) \rightarrow a \in \Gamma_U)\}$$

si vede subito che $\mathsf{Cl}(\mathsf{Expr}(U)) = \mathsf{Cl}^{Form}(\mathsf{Expr}(U))$.

Quindi, dato un qualsiasi sottinsieme finito U di S, sappiamo definire in modo completamente costruttivo i sottoinsiemi $\mathsf{Int}(\mathsf{Expr}(U))$ e $\mathsf{Cl}(\mathsf{Expr}(U))$ di X, composti rispettivamente, da solo gli elementi di X contenuti in un aperto di base contenuto nel sottoinsieme $\mathsf{Expr}(U)$ e da tutti gli elementi di X che non sono separabili da $\mathsf{Expr}(U)$ per mezzo di un aperto di base.

Conclusioni

In questa tesi abbiamo mostrato che la possibilità di dare una definizione completamente induttiva di topologia formale ci permette di utilizzarla come strumento per risolvere un problema pratico come quello della ricerca di oggetti in un insieme.

Osserviamo però che la costruttività della topologia formale permette di usarla come strumento per lo studio di ogni problema pratico che ammetta una descrizione in termini di una relazione $- \Vdash -$ fra due insiemi che porti alla definizione di uno spazio topologico concreto. Il teorema di completezza dimostrato nel capitolo (3), ci dice inoltre che, se un problema descritto attraverso una relazione $- \Vdash -$ ammette una soluzione esprimibile in termini di sottoinsiemi aperti e chiusi (come nel caso del problema della ricerca), allora la topologia formale può essere utilizzata non solo come strumento di studio del problema, ma anche come strumento per costruirne la soluzione.

In realtà, per gli scopi di questa tesi sarebbe stato sufficiente dimostrare un teorema di completezza per le topologie formali derivate da spazi topologici concreti. Abbiamo preferito dimostrare un teorema più generale per rendere più completa l'esposizione della teoria delle topologie formali induttivamente generate.

Nell'esposizione della teoria delle topologie formali induttivamente generate abbiamo lasciato aperti i seguenti problemi:

1. La definizione (2.4) di topologia formale, si basa su una collezione di assiomi I, D, d che soddisfano alcune condizioni. Tali condizioni riguardano l'immagine $\mathsf{Im}[d(-,-)]$ della funzione d. Resta aperto il problema di tradurre le condizioni su $\mathsf{Im}[d(-,-)]$ in condizioni sull'assioma d.

2. Il teorema di completezza dimostrato nel capitolo (3), pone come ipotesi che esista una interpretazione ext tale che valgano le equivalenze $a \ltimes F \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$ e $a \lhd U \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$ per ogni $a \in S$ e ogni $F, U \subseteq S$. Sappiamo che queste equivalenze valgono per definizione negli spazi topologici concreti. Inoltre in [EIGFTSC] si dimostra che se la topologia formale è generata da una collezione di assiomi indicizzabile dai naturali, allora queste equivalenze valgono per l'interpretazione ext^{Pt}. Resta aperto il problema di trovare condizioni necessarie e sufficienti da dare sulla topologia formale per fare in modo che esista una interpretazione tale da far valere queste equivalenze.

Appendici

Appendice 1: Basic-pairs e axiom-sets

In questa appendice vogliamo dimostrare che, dato uno spazio topologico concreto $\mathcal{X} = (X, \mathsf{ext}, S, \wedge)$, è possibile trovare degli assiomi per la generazione induttiva della copertura della topologia formale associata a $\mathcal{X}$. Gli assiomi sono:

$$I(a) \equiv \{g \in \mathsf{ext}(a) \to S \mid \ (\forall x \in \mathsf{ext}(a))\ x \in \mathsf{ext}(g(x))\}\ \mathsf{set}\ [a : S]$$

$$C(a, i) = \mathsf{Im}[i] \subseteq S\ [a : S, i : I(a)]$$

(per una motivazione della scelta di questi assiomi si veda [IGFT]). Questi assiomi generano la più piccola relazione $- \lhd_{a.s.} -$ che rispetta reflexivity e $\lhd$-transitivity e che contentiene la relazione $R_{\lhd}$ così definita:

$$R_{\lhd}(a, U) \equiv (\exists i \in I(a))\ C(a, i) \subseteq U$$

Generano inoltre il più grande predicato binario $- \ltimes_{a.s.} -$ che soddisfa co-reflexivity e $\ltimes$-co-transitivity e che è contenuto nella relazione $R_{\ltimes}$ così definita :

$$R_{\ltimes}(a, F) \equiv (\forall i \in I(a))\ C(a, i) \between F$$

Dimostriamo subito che questi assiomi formano un axiom-set localizzato.

Proposizione 1 *Gli assiomi I, C definiti sopra formano un axiom-set localizzato.*

Dimostrazione: Dati $a, b \in S$, le funzioni $i_a : \mathsf{ext}(a \wedge b) \to S$ e $i_b : \mathsf{ext}(a \wedge b) \to S$ definite rispettivamente da $i_a(x) = a$ e $i_b(x) = b$ per ogni $x \in \mathsf{ext}(a \wedge b)$, sono tali che $\mathsf{Im}[i_a] = \{a\}$ e $\mathsf{Im}[i_b] = \{b\}$. Quindi $C(a \wedge b, i_a) = \{a\}$ e $C(a \wedge b, i_b) = \{b\}$. Dimostriamo che i_a e i_b sono elementi di $I(a \wedge b)$: infatti sia $x \in \mathsf{ext}(a \wedge b)$, allora $x \in \mathsf{ext}(a)$ e $x \in \mathsf{ext}(b)$ per definizione dell'operazione $\wedge$, e quindi $x \in \mathsf{ext}(i_a(x))$ e $x \in \mathsf{ext}(i_b(x))$. Quindi la prima condizione della definizione di axiom-set localizzato è ripettata.

Siano ora $a, b \in S$ e $i \in I(a)$. Allora $C(a, i) = \mathsf{Im}[i]$. Dimostriamo che $(\exists j \in I(a \wedge b))\ C(a \wedge b, j) \subseteq (b \wedge C(a, i))$. Abbiamo appena dimostrato che, per assioma, vale $(a \wedge b) \lhd a$, questo equivale a dire che $\mathsf{ext}(a) \cap \mathsf{ext}(a \wedge b) = \mathsf{ext}(a \wedge b)$, cioè che $\mathsf{ext}(a \wedge b) \subseteq \mathsf{ext}(a)$. Quindi $i : \mathsf{ext}(a) \to S$ ammette una restrizione al dominio $\mathsf{ext}(a \wedge b)$. Restringendo i ad $\mathsf{ext}(a \wedge b)$ otteniamo una funzione $j : \mathsf{ext}(a \wedge b) \to S$ tale che, per ogni $x \in \mathsf{ext}(a \wedge b)$, vale $x \in \mathsf{ext}(j(x))$ perchè $j(x) = i(x)$. Quindi j è un elemento di $I(a \wedge b))$ tale che $\mathsf{Im}[j] \subseteq \mathsf{Im}[i]$. Quindi j è tale che $C(a \wedge b, j) \subseteq C(a, i)$.

Infine, per ogni $a \in S$, la funzione $i_{\wedge} : \mathsf{ext}(a) \to S$, definita come $i_{\wedge}(x) = a \wedge a$ per ogni $x \in \mathsf{ext}(a)$, è tale che $C(a, i_{\wedge}) = a \wedge a$. Dimostriamo che $i_{\wedge} \in I(a)$: sia $x \in \mathsf{ext}(a)$, sappiamo che vale $\mathsf{ext}(a \wedge a) = \mathsf{ext}(a) \cap \mathsf{ext}(a) = \mathsf{ext}(a)$, quindi vale anche $x \in \mathsf{ext}(i(x))$. ■

Quindi l'axiom-set $I(a)$ set $[a : S]$, $C(a, i) \subseteq S$ $[a : S, i : I(a)]$ genera induttivamente una topologia formale come definita nella (2.2).

Gli assiomi sono costruiti in modo che la relazione di copertura $- \lhd_{a.s.} -$ coincida con la relazione di copertura $- \lhd_{\mathcal{A}} -$ della topologia formale derivata dallo spazio topologico concreto $\mathcal{X}$, definita come $a \lhd_{\mathcal{A}} U \Leftrightarrow \mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$. Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 1 *Date due relazioni di copertura definite come sopra vale l'equivalenza*

$$a \lhd_{\mathcal{A}} U \Leftrightarrow a \lhd_{a.s.} U$$

Dimostrazione: Sia $a \lhd_{\mathcal{A}} U$ e quindi $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$. Dimostriamo che esiste un $i^a \in I(a)$ tale che $C(a, i^a) \lhd_{a.s.} U$. Sappiamo che per ogni $x \in \mathsf{ext}(a)$ esiste $u_x \in U$ tale che $x \in \mathsf{ext}(u_x)$. Sia $i^a : \mathsf{ext}(a) \to S$ una funzione tale che ad ogni $x \in \mathsf{ext}(a)$ associa un $u_x \in U$ tale che $x \in \mathsf{ext}(u_x)$ (per l'assioma della scelta una tale mappa esiste). Allora per ogni $x \in \mathsf{ext}(a)$ vale $x \in \mathsf{ext}(i^a(x))$, quindi $i^a \in I(a)$, e inoltre vale $\mathsf{Im}[i^a] \subseteq U$, quindi $\mathsf{Im}[i^a] = C(a, i^a) \lhd_{a.s.} U$. Per infinity, possiamo dire che vale anche $a \lhd_{a.s.} U$.

Viceversa sia $a \lhd_{a.s.} U$. Se $a \lhd_{a.s.} U$ è derivato tramite reflexivity dall'ipotesi $a \in U$, allora vale certamente $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$. Sia invece $a \lhd_{a.s.} U$ derivato tramite infinity dalle ipotesi $i \in I(a)$ e $C(a, i) \lhd_{a.s.} U$. Sia $x \in \mathsf{ext}(a)$, allora vale $x \in \mathsf{ext}(i(x))$ e quindi l'ipotesi $\mathsf{Im}[i] = C(a, i) \lhd_{a.s.} U$ ci dice che $i(x) \lhd_{a.s.} U$. Per ipotesi induttiva possiamo dire che $i(x) \lhd_{\mathcal{A}} U$, quindi che $\mathsf{ext}(i(x)) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$ e quindi anche che $x \in \mathsf{Ext}(U)$. Questo vale per ogni $x \in \mathsf{ext}(a)$, quindi possiamo concludere che $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{Ext}(U)$, cioè che $a \lhd_{\mathcal{A}} U$. ■

Con l'axiom-set $I(a)$ set $[a : S]$, $C(a, i) \subseteq S$ $[a : S, i : I(a)]$ possiamo generare per co-induzione il predicato binario di positività $- \ltimes_{a.s.} -$. Le regole per la generazione induttiva di $- \ltimes_{a.s.} -$ sono quelle della definizione (2.2). Diamo una dimostrazione (classica) del fatto che il predicato $- \ltimes_{a.s.} -$ generato per co-induzione, coincide con il predicato binario definito attraverso lo spazio topologico concreto $\mathcal{X}$, che indicheremo $- \ltimes_{\mathcal{I}} -$, e che è definito come $a \ltimes_{\mathcal{I}} F = \mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$.

Teorema 2 *Dati due predicati binari di positività definiti come sopra vale l'equivalenza*

$$a \ltimes_{\mathcal{I}} F \Leftrightarrow a \ltimes_{a.s.} F$$

Dimostrazione: Entrambi i predicati rispettano la co-reflexivity. Mostriamo che $- \ltimes_{\mathcal{I}} -$ rispetta la proprietà $\ltimes$-infinity. Sia $a \ltimes_{\mathcal{I}} F$, allora $\mathsf{ext}(a) \between \mathsf{Rest}(F)$. Sia poi $i \in I(a)$, quindi, per assioma, $a \lhd_{\mathcal{A}} C(a, i)$, cioè $\mathsf{ext}(a) \subseteq \mathsf{ext}(C(a, i))$. Quindi possiamo dire che $\mathsf{ext}(C(a, i)) = (\bigcup_{c \in C(a,i)} \mathsf{ext}(c)) \between \mathsf{Rest}(F)$ cioè che esiste $c \in C(a, i)$ tale che $\mathsf{ext}(c) \between \mathsf{Rest}(F)$. Quindi $C(a, i) \ltimes_{\mathcal{I}} F$ e quindi che $- \ltimes_{\mathcal{I}} -$ soddisfa $\ltimes$-infinity. Allora $- \ltimes_{\mathcal{I}} -$ è contenuto in $- \ltimes_{a.s.} -$ che è il più grande predicato che rispetta co-reflexivity e $\ltimes$-infinity.

Dimostriamo che in realtà vale $a \ltimes_{a.s.} F \Leftrightarrow a \ltimes_{\mathcal{I}} F$: $- \ltimes_{a.s.} -$ è generato per co-induzione tramite le regole co-reflexivity e compatibility, è quindi il più grande predicato che soddisfa queste regole. Se dimostriamo quindi che anche $- \ltimes_{\mathcal{I}} -$ contiene ogni sottoinsieme di S che soddisfa co-reflexivity e compatibility otteniamo che $- \ltimes_{a.s.} -$ coincide con $- \ltimes_{\mathcal{I}} -$.

Supponiamo quindi che $G \subseteq S$ sia tale che $G \subseteq F$ e $(\forall a \in S)(a \in G \to (\forall i \in I(a)) C(a, i) \between G)$. Sia $a \in G$ tale che $\neg(a \ltimes_{\mathcal{I}} F)$. $\neg(a \ltimes_{\mathcal{I}} F)$ è classicamente equivalente a $(\forall x \in X)(x \in \mathsf{ext}(a) \to (\exists b \in S)(x \in \mathsf{ext}(b) \ \& \ b \in \neg F))$. Definiamo allora una funzione $i : \mathsf{ext}(a) \to S$ in modo tale che, ad ogni $x \in \mathsf{ext}(a)$, associ un elemento $b \in S$ tale che $(x \in \mathsf{ext}(b) \ \& \ b \in \neg F)$. La funzione i è tale che, se $x \in \mathsf{ext}(a)$, allora $x \in \mathsf{ext}(i(x))$ (quindi $i \in I(a)$) e che, se $b \in \mathsf{Im}[i]$, allora $b \in \neg F$, che implica anche $b \in \neg G$ perché $G \subseteq F$. Abbiamo così dimostrato che se $\neg(a \ltimes_{\mathcal{I}} F)$ allora $(\exists i \in I(a))\ \neg(\mathsf{Im}[i] \between G)$. La conclusione è assurda, possiamo quindi concludere che $a \ltimes_{\mathcal{I}} F$ per ogni $a \in G$, e quindi che $G \subseteq \ltimes_{\mathcal{I}}(F)$. ■

Abbiamo quindi una dimostrazione (classica) che i due predicati $- \ltimes_{\mathcal{I}} -$ e $- \ltimes_{a.s.} -$ coincidono.

Appendice 2: Punti formali e punti concreti

In questa appendice vogliamo mostrare un esempio di topologia formale rappresentabile in cui esiste un punto formale che non corrisponde a nessun punto concreto.

Sia S l'insieme degli intervalli aperti con estremi razionali:

$$S \equiv \{(p,q) \mid p,q \in \mathcal{Q} \text{ tali che } p < q\}$$

Sia $-\cap-$ l'intersezione formale fra intervalli definita ponendo $(p,q)\cap(r,s) \equiv (\mathsf{max}(p,r), \mathsf{min}(q,s))$. É facile dimostrare che $(S,\cap)$ è un semigruppo commutativo.

Per ogni elemento $(p,q) \in S$ sia $\mathsf{ext}((p,q)) \equiv \{u \in \mathcal{Q} \mid p < u < q\}$. É immediato verificare che $(\mathcal{Q}, \mathsf{ext}, S, \cap)$ è uno spazio topologico concreto.

Sia $\mathcal{S} \equiv (S, \cap, \lhd, \ltimes)$ la topologia formale associata a questo spazio topologico concreto. Allora, per quanto visto nella precedente appendice, $\mathcal{S}$ è induttivamente generata dagli assiomi:

$$I((p,q)) \equiv \{i \in \mathsf{ext}((p,q)) \to \mathcal{Q} \mid (\forall u \in \mathsf{ext}((p,q)))\ u \in \mathsf{ext}(i((p,q)))\}\ \mathsf{set}[(p,q) : S]$$

$$C((p,q),i) = \mathsf{Im}[i] \subseteq S\ [(p,q) : S, i : I((p,q))]$$

Inoltre sappiamo che, per ogni $u \in \mathcal{Q}$, i sottoinsiemi $\alpha(u) \equiv \{(p,q) \in S \mid p < u < q\}$ sono punti formali di $\mathcal{S}$.

Definiamo ora il sottoinsieme U di S composto dagli intervalli il cui estremo sinistro è 0 e il cui estremo destro è $\frac{1}{n}$ per qualche naturale $n \geq 1$. Quindi $U \equiv \{(0, \frac{1}{n}) \mid n \ \mathit{naturale}\}$. Allora le seguenti affermazioni sono entrambe vere:

Proposizione 1 *U non è contenuto in nessun punto formale del tipo $\alpha(u)$ con $u \in \mathcal{Q}$.*

Dimostrazione: Supponiamo che esista un punto formale $\alpha(u)$ che contiene U. Allora per ogni n numero naturale vale $0 < u < \frac{1}{n}$. Assurdo. ■

Proposizione 2 *Il sottoinsieme $\alpha \equiv \{(p,q) \in S \mid p,q \in \mathcal{Q}, (\exists n)\ p \leq 0 < \frac{1}{n} \leq q\}$ è un punto formale che contiene U.*

Dimostrazione: É evidente che $U \subseteq \alpha$. Dimostriamo che α è un punto formale. α contiene U quindi contiene certamente almeno un elemento. Siano poi (p,q) e (r,s) elementi di α. Allora la loro intersezione formale $(p,q) \cap (r,s) = (\mathsf{max}(p,r), \mathsf{min}(q,s))$ è certamente ancora un elemento di α perchè p e r sono entrambi minori o uguali a 0, e q e s sono entrambi maggiori o uguali a $\frac{1}{n}$ per qualche n.

Dimostriamo che α-spezza $- \lhd -$. Siano $(p,q) \in \alpha$ e $(p,q) \lhd V$. Se $(p,q) \in V$ allora la condizione è banale. Supponiamo quindi che $(p,q) \lhd V$ sia derivato dalle ipotesi $i \in I((p,q))$ e $C((p,q),i) \lhd V$. Allora i è definita in modo tale che manda (p,q) in intervalli che lo contengono. Perchè, per definizione di α, ognuno di questi intervalli è un elemento di α e quindi, per ipotesi induttiva, sugli intervalli $i(u)$ tali che $u \in \mathsf{ext}((p,q))$ possiamo applicare la condizione α-spezza $- \lhd -$, e otteniamo

$$\frac{i(u) \in \alpha \quad i(u) \lhd V}{\alpha \between V}$$

Mostriamo infine che vale α-entra in $- \ltimes -$: sia $(p,q) \in \alpha$ e $\alpha \subseteq F$, dimostriamo che $(p,q) \ltimes F$. Sappiamo che $a \ltimes F$ vale se e solo se $(p,q) \in F$ & $(\forall i \in I((p,q)))(\exists i(u) \in C((p,q),i))\ i(u) \ltimes F$. Per ipotesi è $(p,q) \in F$. Supponiamo poi che sia $i \in I((p,q))$. i manda elementi $u \in \mathsf{ext}((p,q))$ in intervalli $i(u)$ che contengono (p,q), ma, per definizione di α, tutti gli intervalli che contengono (p,q) sono elementi di α, quindi certamente esiste un elemento $(r,s) \in C((p,q),i)$ tale che $(r,s) \in \alpha$ & $\alpha \subseteq F$. Quindi per co-induzione possiamo dire che se $(p,q) \in \alpha$ e $\alpha \subseteq F$ allora $(p,q) \ltimes F$. ■

Abbiamo così dimostrato che U è un sottoinsieme che non è contenuto in nessun punto formale associato ad un punto concreto ma che esiste un punto formale che lo contiene. Quindi non può esserci corrispondenza biunivoca fra la collezione dei punti formali e quella dei punti formali associati a punti concreti.

Appendice 3: Pseudo-codice

In questa appendice daremo una breve spiegazione del pseudocodice utilizzato per sviluppare gli algoritmi del capitolo (4).

L'istruzione
- *operando1* $\leftarrow$ *operando2*

indica che il valore di *operando2* viene assegnato a *operando1*.

L'istruzione
- *operando1*=*operando2*

è un test che restituisce *true* se i valori di *operando1* e *operando2* sono uguali, restituisce false altrimenti.

L'istruzione
- if *condizione* then
- *corpo dell'istruzione*
- *istruzione successiva*

funziona in modo tale che, se *condizione* è vera, viene prima eseguito il codice che sta in *corpo dell'istruzione*, e poi si passa all'esecuzione del codice che sta in *istruzione successiva*. Se invece *condizione* è falsa, viene eseguito direttamente il codice che sta in *istruzione successiva*.

L'istruzione
- for all $a \in A$ do
- *corpo dell'istruzione*
- *istruzione successiva*

funziona in modo tale che il codice che sta in *corpo dell'istruzione* sia eseguito una volta per ogni elemento a dell'insieme A, poi si passa all'esecuzione del codice che sta in *istruzione successiva*.

L'istruzione
- return *operando*

ritorna il valore di *operando* al chiamante della funzione che contiene questa istruzione.

L'istruzione
- print "..."

stampa la frase compresa nelle virgolette.

Bibliografia

[SPFT] G. Sambin, *Some points in formal topology*, Theoretical Computer Science 305 (2003), no. 1-3, 347-408.

[IGFT] T. Coquand, G. Sambin, J. Smith, S. Valentini *Inductively generated formal topology*, Ann. Pure Applicated Logic 124 (2003), no. 1-3, 71-106.

[FPFTBT] S. Valentini, *On the formal points of the formal topology of the binary tree*, Archive for Mathematical Logic.

[PFCT] S. Valentini, *The problem of the formalization of constructive topology*, Archive for Mathematical Logic 44 (2005), 115-129.

[BFTGT] S. Berardi, S. Valentini, *Between formal topology and game theory*, (2004), comunicazione personale.

[IID] T. Coquand *Introduction to inductive definitions*, (1996), non pubblicato (vedi http:\\www.math.chalmers.se\ ∼coquand).

[BP] G. Sambin con S. Gebellato, P. Martin-Löf, V. Capretta *The basic picture*, (2004), in pubblicazione.

[EIGFTSC] S. Valentini, *Every inductively generated formal topology is spatial, classically*, (2005), comunicazione personale.

[GT] R. Engelking, *General topology*, Polish Scientific Publisher, Warszawa (1977).

[MCABPGTS] Y. Björnsson, T. Marsland, *Multi-cut $\alpha\beta$-pruning in game-tree search*, Theoretical Computer Science 252, no. 1-2, 177-196.

[FTSE] S. Valentini, *Formal topology and search engine*, (2003), comunicazione personale.