



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE DII

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Boundary element method applicato alla teoria Peridynamics

Relatore:

Prof. MIRCO ZACCARIOTTO

Correlatore:

Prof. UGO GALVANETTO

Laureando:

SIMONE GUADAGNINI

1236487

Anno Accademico 2021/2022

Sommario

Una recente teoria del continuo per la meccanica dei solidi è la teoria introdotta da Silling [34] nota come Bond-Based Peridynamics. Questa teoria risulta di particolare interesse per problemi riguardanti il danneggiamento e la propagazione di cricche [42] [43] [23]. Le discontinuità nel dominio possono essere studiate con le stesse relazioni che si utilizzano nelle zone integre grazie all'utilizzo di una formulazione integrale, a differenza di quella differenziale della meccanica classica.

La Bond-Based Peridynamics utilizza un approccio non-locale quindi prevede l'interazione a distanza tra coppie di punti materiali nel dominio continuo. A causa di questo i metodi numerici che la utilizzano sono computazionalmente molto più onerosi rispetto ai metodi agli elementi finiti tradizionali. Per risolvere la Peridynamics esistono tre categorie di metodi.

La prima categoria prevede di risolvere le equazioni integro-differenziali peridinamiche discretizzandole rispetto al tempo e alle coordinate spaziali [35] [18] [3] [9]. Nella seconda categoria si vogliono risolvere le equazioni della Peridynamics attraverso i metodi numerici tradizionali come elementi finiti e volumi finiti [24] [17] [5].

Con tutti questi metodi, però, si riscontrano quattro problematiche: l'indebolimento ai bordi a causa di un orizzonte non completo [20], il problema con domini infiniti [40], l'imposizione di condizioni al contorno [10] e l'elevato costo computazionale.

A causa di questi problemi si è introdotta la terza categoria di algoritmi risolutivi in cui si prevede l'accoppiamento tra metodi numerici locali, nel dominio intatto, e metodi non-locali nelle zone con discontinuità [19] [22] [14] [44]. Con quest'ultima categoria di metodi numerici si hanno dei problemi di connessione nelle zone di accoppiamento e delle riflessioni spurie delle onde elastiche [30].

Come lavoro di tesi si vuole sviluppare il Boundary Element Method per la Peridynamics [21], quindi calcolando le soluzioni dell'equazione che governano la Peridynamics tramite la discretizzazione dei bordi del dominio. I vantaggi presentati da questo metodo sono quelli di risolvere le problematiche di accoppiamento precedentemente elencate. Il primo e il terzo problema vengono risolti tramite la discretizzazione dei bordi.

Indice

Sommario	2
Indice	3
Introduzione	5
1 Teoria Peridynamics	8
1.1 Equazioni del moto	8
1.2 Danneggiamento	12
1.3 Implementazione numerica	13
1.4 Tipi di convergenza	16
1.5 Condizioni al contorno e skin effect	17
1.6 Densità di forza areale	18
1.7 Peridynamics tramite Elementi Finiti	19
1.7.1 Generalità sugli elementi finiti	20
1.7.2 Elemento Asta	22
1.7.3 Elemento quadrilatero a 4 nodi	24
1.7.4 Rigidezza equivalente dei bond	28
2 Boundary Element Method	29
2.1 Concetti fondamentali	30
2.1.1 Soluzioni approssimate	31
2.1.2 Tecniche dei residui pesati	32
2.2 Formulazione debole	35
2.3 Soluzioni al bordo e nel dominio	37
2.4 Equazione integrale di base	39
2.4.1 Soluzione fondamentale	40
2.5 Boundary Element Method	41
2.6 Integrazione numerica	43
2.6.1 Integrazione di integrali regolari	44
2.6.2 Integrazione di integrali quasi singolari	44

2.7	Tipologie di elementi	45
3	BEM per Peridynamics	48
3.1	Calcolo non-locale	48
3.1.1	Flussi locali e non-locali	49
3.1.2	Operatori non-locali	50
3.1.3	Calcolo vettoriale non-locale	53
3.2	Static boundary integral equation	56
3.3	Trattamento numerico dei problemi statici	61
3.3.1	Formulazione discreta degli elementi di bordo	61
3.3.2	Calcolo della formulazione discreta degli elementi di bordo	63
4	Implementazione del BEM per problemi peridinamici	67
4.1	Processo logico di implementazione	67
4.2	Implementazione in MATLAB	68
4.2.1	Codice FEM	68
4.2.2	Codice Peridynamics	71
4.2.3	Soluzione Fondamentale	72
4.2.4	Interpolazione	76
4.2.5	Codice BEM	85
4.3	Esempi	90
4.3.1	Trazione mono-assiale	90
4.3.2	Carico di taglio	96
4.3.3	Spostamento imposto	100
4.3.4	Foro su piastra infinita	105
	Conclusioni	112
A	Appendici: Calcolo tensoriale	114
A.1	Tipologia tensori	114
A.2	Algebra tensoriale	115
A.2.1	Somma algebrica	116
A.2.2	Prodotto tensore scalare	116
A.2.3	Prodotto scalare	116
A.2.4	Doppio prodotto scalare	116
A.2.5	Prodotto tensoriale	117
	Bibliografia	118

Introduzione

Nell'ultimo secolo i bisogni dell'industria aerospaziale hanno contribuito a sviluppare nuove teorie scientifiche. Nonostante ci siano molti problemi che hanno trovato soluzione il fenomeno della frattura non è ancora pienamente compreso. La predizione di questo fenomeno risulta molto complicata perché esso è un evento che si può sviluppare in diverse condizioni, quali possono essere: fenomeni di impatto, di fatica o di reazioni chimiche come il caso della corrosione.

Data la complessità del fenomeno il modo principale per affrontare il danneggiamento dei materiali risulta quello di sovrastimare le dimensioni dei componenti. Questo tipo di progettazione, però, risulta molto critico per il settore aerospaziale in cui uno dei principali vincoli di progetto è dato dalla massa della struttura.

Essendo la nucleazione un fenomeno inevitabile per qualsiasi struttura risulta necessario effettuare dei controlli durante la loro vita operativa. Questi controlli, però, richiedono un'elevata quantità di soldi e di tempo dato che la struttura in esame dovrà essere tolta dal servizio.

Per poter utilizzare un design delle strutture che non ne preveda un eccessivo sovradimensionamento e per ridurre i controlli delle cricche occorre sviluppare dei metodi per prevedere computazionalmente la nucleazione e la propagazione delle cricche. A tale proposito sono stati sviluppati numerosi metodi numerici per riuscire a catturare tali meccanismi, questi ultimi si differenziano principalmente nella teoria su cui si basano: la teoria locale e la teoria non-locale.

Nella categoria della teoria locale ricadono tutti quei metodi che utilizzano equazioni del moto in cui le forze interne sono forze di contatto che si trasmettono attraverso superfici. Tra queste tecniche si ha il metodo degli elementi finiti (FEM) il quale utilizza equazioni differenziali del campo di spostamenti del dominio spaziale analizzato. La principale difficoltà nell'utilizzo di equazioni differenziali sta nel fatto che non sono definibili in corrispondenza di discontinuità del campo degli spostamenti. Esempi di queste discontinuità sono vuoti e cricche nel mezzo materiale.

Per poter valutare le derivate spaziali in corrispondenza delle superfici della cricca è necessario predisporre alcune strategie. In genere si integrano le equazioni del moto della teoria classica con delle relazioni supplementari che vadano a governare i pro-

cessi di nucleazione della cricca, tra cui la velocità e la direzione in cui si propaga. Tra questi metodi si hanno: il Cohesive Zone Model (CZM) [1] [29] [39], il Phase Field [26], l'Element Erosion [31] e l'X-FEM [28] [45]. Tali approcci incontrano però delle difficoltà nel gestire problemi di biforcazione o interazione fra le cricche, oltre ad utilizzare modelli di danneggiamento complessi.

I metodi che utilizzano una teoria non-locale prevedono l'interazione a distanza tra punti materiali. Alcuni metodi non-locali sono in grado di prevedere la nucleazione di cricche senza dover conoscere a priori la posizione delle discontinuità. Tra questi metodi non-locali si ha la teoria *Peridynamics* proposta da Silling [34].

La *Peridynamics* assume che le particelle di un continuo interagiscano con tutte le altre che si trovano all'interno di una distanza finita, chiamata orizzonte, e per questo è definita come una teoria non-locale. Le equazioni integrali su cui è basata riescono a gestire la presenza di discontinuità nel dominio di integrazione e consentono di utilizzare le stesse relazioni sia nelle parti integre che nelle zone danneggiate del modello.

Rispetto ai metodi numerici locali quelli non locali richiedono dei costi computazionali molto più elevati dato che le connessioni tra i nodi della griglia sono molto più numerose. Avendo più connessioni si generano matrici di rigidezza più complesse da calcolare ed equazioni di equilibrio che richiedono tempi più lunghi per la risoluzione. A causa delle elevate risorse di calcolo necessarie per eseguire le simulazioni questa teoria ha avuto una scarsa diffusione all'infuori di enti di ricerca ed istituti accademici.

Diversi metodi numerici sono stati sviluppati per la risolvere la *Peridynamics* e essi possono essere raccolti in tre categorie.

La prima categoria prevede di risolvere le equazioni integro-differenziali peridinamiche discretizzandole rispetto al tempo e alle coordinate spaziali [35] [18] [3] [9]. Nella seconda categoria si vogliono risolvere le equazioni della *Peridynamics* attraverso i metodi numerici tradizionali come elementi finiti e volumi finiti [24] [17] [5].

Con tutti questi metodi, però, si riscontrano quattro problematiche: l'indebolimento ai bordi a causa di un orizzonte non completo [20], il problema con domini infiniti a causa dell'introduzione di bordi artificiali [40], l'imposizione di condizioni al contorno volumetriche [10] e l'elevato costo computazionale.

A causa di questi problemi si è introdotta la terza categoria di algoritmi risolutivi in cui si prevede l'accoppiamento tra metodi numerici locali, nel dominio intatto, e metodi non-locali nelle zone con discontinuità [19] [22] [14] [44]. Con quest'ultima categoria di metodi numerici si hanno dei problemi di connessione nelle zone di accoppiamento e delle riflessioni spurie delle onde elastiche [30].

Come lavoro di tesi si vuole sviluppare il Boundary Element Method per la *Peridynamics* [21], quindi calcolando le soluzioni dell'equazione che governano la *Peridyna-*

mics tramite la discretizzazione dei bordi del dominio. I vantaggi presentati da questo metodo sono quelli di risolvere le problematiche di accoppiamento precedentemente elencate. Il primo e il terzo problema vengono risolti tramite la discretizzazione dei bordi mentre, grazie alla riduzione delle dimensioni del dominio di calcolo, si riduce il costo computazionale.

I contenuti di questa tesi sono organizzati come di seguito. Inizialmente viene presentata una descrizione generale delle teorie che si prendono in esame: nel primo capitolo viene presentata la teoria Peridynamics, nel secondo capitolo si introduce il Boundary Element Method (BEM). Nel capitolo 3 si descrive la teoria di accoppiamento tra BEM e Peridynamics. Nel quarto capitolo si descrive lo schema logico dello script Matlab che implementa questa teoria e si valida l'accuratezza dello script con alcuni esempi numerici. Infine nell'ultimo capitolo vengono tratte le conclusioni di questo lavoro.

Capitolo 1

Teoria Peridynamics

In questi ultimi anni è stata sviluppata una nuova teoria non-locale della meccanica del continuo che a differenza di quella classica è basata su equazioni integrali e non richiede il calcolo di derivate [8]. Questa teoria non locale è stata introdotta dal Dr. Silling [34] (2000) ed è nota con il nome di Bond-Based Peridynamics (BBP).

In questo capitolo verrà descritta la teoria alla base della Peridynamics presentando le equazioni che la regolano e le caratteristiche che la distinguono dalla teoria classica.

1.1 Equazioni del moto

La Bond-Based Peridynamics risulta un'estensione del continuo della Molecular Dynamic (MD) che prevede l'integrazione a livello atomico/molecolare e la frattura come conseguenza della rottura delle forze di coesione atomiche. Nella BBP è prevista l'interazione a distanza tra coppie di punti materiali, un punto sorgente e il relativo punto famiglia, in un mezzo continuo e all'interno di una certa zona di interazione, il cui raggio è detto orizzonte. I risultati ottenuti dalla Peridynamics convergono a quelli della teoria classica quando l'orizzonte tende a zero.

Il grosso vantaggio di questa teoria è che essendo una teoria non-locale, le sue equazioni risultano valide anche in presenza di discontinuità. In questa teoria l'equazione del moto è del tipo integro-differenziale temporale:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(x, t) = \int_{H_x} \mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV_{x'} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

dove: \mathbf{u} è il campo vettoriale di spostamento, $\ddot{\mathbf{u}}$ è il campo vettoriale di accelerazione, ρ è la densità di massa del materiale nella configurazione iniziale di riferimento, \mathbf{b} rappresenta la densità di forza volumetrica, mentre \mathbf{f} , detta *pairwise force function*, esprime la densità di forza vettoriale che la particella di coordinata \mathbf{x}' esercita sulla particella

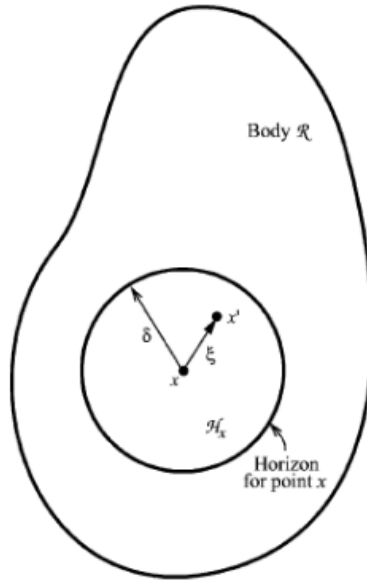


Figura 1.1: Interazione del punto materiale x con gli altri punti della sfera H_x attraverso i bond [35].

di coordinata x . Nel caso lineare elastico la pairwise force function rappresenta l'azione dovuta alla presenza di una rigidezza.

La regione di integrazione H_x è definita come $H_x = \{x' \in R_0 : |x - x'| \leq \delta\}$, con δ che rappresenta l'orizzonte. Questa regione definisce la dimensione dell'interazione non locale, infatti un punto materiale con coordinata x non può interagire con punti oltre il suo orizzonte.

Introducendo $\xi = x' - x$ come bond tra nodo famiglia e nodo sorgente nella condizione di riferimento e $\eta = \mathbf{u}(x', t) - \mathbf{u}(x, t)$ come vettore di spostamento relativo, si può scrivere:

$$\mathbf{f}(\eta, \xi) = f(y, \xi, t) \frac{\xi + \eta}{\|\xi + \eta\|} \quad (1.2)$$

in cui f è detta *scalar bond force* e $y = \|\xi + \eta\|$ è la distanza tra particelle nell'istante considerato.

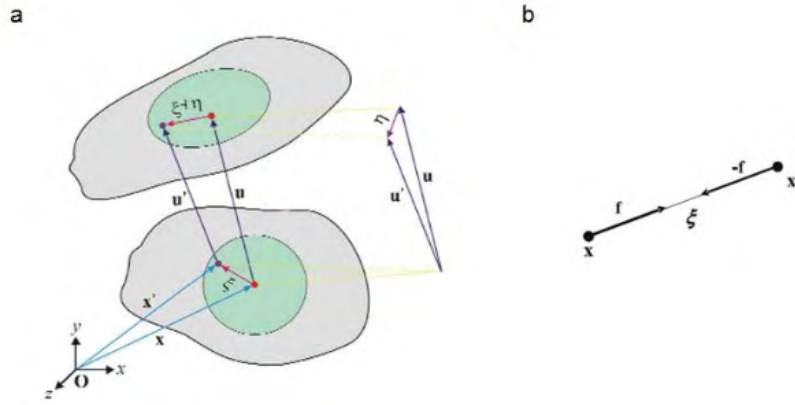


Figura 1.2: Immagine rappresentativa dell'interazione non locale e della pairwise force function[35].

La forma che assume la pairwise force function è dovuta alla conservazione della quantità di moto e del momento angolare locale, essa esprime un'interazione, quindi il bond, tra coppie di particelle. Si ha la conservazione di queste grandezze perché le forze dei bond sono uguali ed opposte. A causa di questo si hanno dei limiti sul valore che può assumere il coefficiente di Poisson: nel caso 2D nella condizione di "plane stress" è limitato al valore di 1/3 mentre nella condizione di "plane strain" e analisi 3D al valore di 1/4. La dimostrazione di questo vincolo può essere osservata in [16] ed essi possono essere superati passando alla State-Based Peridynamics [36].

La scalar bond force racchiude il modello costitutivo del materiale e per questo si introduce una grandezza che funge da deformazione ingegneristica nella direzione del bond, la quale è detta *relative elongation*:

$$s = \frac{y - \|\xi\|}{\xi} \quad (1.3)$$

Se il bond è soggetto a trazione si ha una deformazione positiva, ossia $s > 0$. Se il materiale è isotropo non si ha dipendenza in f della direzione di ξ . Per introdurre il concetto di limite di rottura si ipotizza che il bond si rompa quando subisce un allungamento relativo s oltre un limite predefinito. Dopo la rottura del bond esso non esercita più alcuna forza, dato che resta rotto per tutta la durata della simulazione.

Un materiale è definito microelastico se esiste una funzione scalare, detta micropotenziale, tale per cui la pairwise force function assume la forma:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial w(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (1.4)$$

Il micropotenziale rappresenta l'energia di ogni singolo bond ed è una grandezza che ha le dimensioni di un'energia per unità di volume al quadrato.

Nel caso di materiale microelastico e lineare il micropotenziale è definito come:

$$w(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{c(\|\boldsymbol{\xi}\|)s^2\|\boldsymbol{\xi}\|}{2} \quad (1.5)$$

dove $c(\|\boldsymbol{\xi}\|)$ è la funzione micromodulo ed ha il significato di rigidità elastica del bond.

In queste condizioni, e considerando $\zeta = \|\boldsymbol{\xi}\|$, la pairwise force function diventa:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} c(\zeta)s\frac{\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}\|} & \zeta \leq \delta \\ 0 & \zeta > \delta \end{cases} \quad (1.6)$$

Nella BBP un materiale omogeneo, lineare, elastico e isotropo è caratterizzato dalla sola funzione micromodulo c , dato che il coefficiente di Poisson ν è vincolato, mentre nella meccanica classica questo materiale è caratterizzato dal modulo di Young E e dal coefficiente di Poisson ν .

La funzione micromodulo è posta in relazione con le proprietà elastiche del materiale uguagliando la densità di energia di deformazione elastica, prevista dalla teoria classica in condizione di deformazione isotropa, con quella definita dalla teoria peridinamica.

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti l'equazione del moto può essere scritta in forma linearizzata come:

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}(x, t) = \int_{H_x} [\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})](\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}' - \mathbf{x})dV_{x'} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (1.7)$$

in cui si ha il tensore micromodulo $[\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})]$ definito come

$$[\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})] = \frac{\partial \mathbf{f}(0, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \quad (1.8)$$

Per un materiale microelastico lineare e micromodulo costante il valore di quest'ultimo dipende da quante dimensioni si considerano:

$$\begin{aligned} c &= \frac{12E}{\pi\delta^4} & 3\text{D} \\ c &= \frac{9E}{\pi t_h \delta^3} & 2\text{D plane stress} \\ c &= \frac{2E}{A\delta^2} & 1\text{D} \end{aligned} \quad (1.9)$$

dove: t_h rappresenta lo spessore dell'elemento 2D mentre A rappresenta l'area della sezione dell'elemento 1D.

1.2 Danneggiamento

Il principale vantaggio della Peridynamics è che permette di affrontare l'analisi di propagazione, sia statica che dinamica, di cricche introducendo la probabilità che il bond si rompa se stirato oltre una certa quantità, definita *critical relative elongation* s_0 . Essendo che la rottura di un bond è irreversibile allora il modello diventa "history-dependent" e con la rottura dei bond si perde la condizione di simmetria.

L'energia richiesta, per unità di lunghezza di frattura in 2D, per separare completamente un corpo in due metà è detta energia di frattura G_0 . Questa energia è misurabile e nel caso 2D può essere correlata a s_0 tramite

$$G_0 = 2 \int_0^\delta \int_z^\delta \int_0^{\arccos(z/\xi)} \left(\frac{c(\xi)s_0^2\xi}{2} \right) \xi d\theta d\xi dz \quad (1.10)$$

dove $c(\xi)$ è costante. Per il caso di "plane stress" la critical relative elongation assume la forma

$$s_0 = \sqrt{\frac{4\pi G_0}{9E\delta}} \quad (1.11)$$

Osservando che s_0 dipende dalle proprietà elastiche del materiale e dall'orizzonte allora al diminuire del suo valore aumenta la forza necessaria a rompere il bond. Per un materiale microelastico lineare, detto Prototype Microelastic Brittle, si può introdurre un modello di danneggiamento che porta la scalar bond force nella forma:

$$f(y, \xi, t) = \mu(t, \xi)c(\xi)s \quad (1.12)$$

in cui il parametro μ è definito

$$\mu(t, \xi) = \begin{cases} 1 & s < s_0 \quad 0 \leq t' \leq t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.13)$$

Aver introdotto il modello di danneggiamento all'interno del legame costitutivo del materiale permette di definire univocamente lo stato di danneggiamento locale tramite la relazione:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = 1 - \frac{\int_{H_x} \mu(x, t, \xi) dV_x}{\int_{H_x} dV_x} \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \quad (1.14)$$

dove $\varphi = 0$ rappresenta lo stato vergine del materiale mentre $\varphi = 1$ corrisponde ad avere la rottura di tutti i bond interni all'orizzonte.

Quando un bond si rompe non è più in grado di sostenere alcun carico però, se il carico persiste, aumenta la sollecitazione dei bond integri, causando un indebolimen-

to localizzato nel materiale. Pertanto da un singolo bond rotto si possono creare le condizioni affinché altri bond cedano creando un effetto a cascata che fa propagare la frattura.

1.3 Implementazione numerica

Per risolvere numericamente le equazioni del moto della teoria Bond-Based Peridynamics Silling [35] propose un metodo "mesh-free" in cui il corpo è rappresentato in forma discretizzata con una griglia di nodi. A ognuno di questi nodi è associato un volume noto nella configurazione di riferimento, il quale è determinato dalle dimensioni del grid spacing nelle tre direzioni x, y, z .

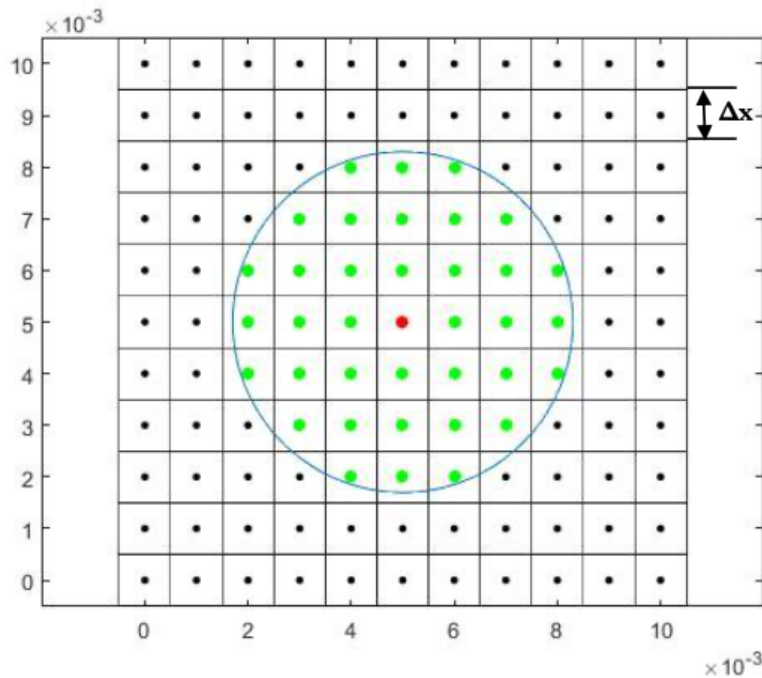


Figura 1.3: Griglia discretizzata. Ad ogni nodo è associata una cella con un volume, in rosso il nodo sorgente, in verde i nodi famiglia appartenenti all'orizzonte δ considerando $m=3.2$ [38].

Il metodo introdotto è detto mesh-free perché non si hanno elementi tra nodi, quindi si ha anche l'assenza di funzioni di forma. La forma discretizzata delle equazioni del moto è:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_p \mathbf{f}(\mathbf{u}_p^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i) V_p + \mathbf{b}_i^n \quad \forall p \in H_{x_i} \quad (1.15)$$

dove: p indica il nodo famiglia appartenente all'orizzonte del nodo i -esimo della griglia, cioè del nodo sorgente, l'apice n indica lo step temporale e V_p il volume

associato al corrispettivo nodo famiglia. A causa della discretizzazione si forma un insieme finito di bond che connettono tutti i nodi che interagiscono tra di loro. Questo network è lagrangiano, dato che viene definito nella configurazione di riferimento non deformata, perciò le connessioni non cambiano durante la deformazione.

La forma discretizzata del modello peridinamico linearizzato risulta:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_p \mathbf{C}(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i)(\mathbf{u}_p^n - \mathbf{u}_i^n) V_p + \mathbf{b}_i^n \quad \forall p \in H_{x_i} \quad (1.16)$$

in cui l'accelerazione $\ddot{\mathbf{u}}_i^n(x, t)$ viene calcolata mediante l'uso di un algoritmo basato su uno schema alle differenze centrali esplicito, come lo schema Velocity-Verlet:

$$\ddot{\mathbf{u}}_i^n = \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - 2\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_i^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (1.17)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_i^{n+1/2} = \dot{\mathbf{u}}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_i^n \quad (1.18)$$

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_i^{n+1/2} \quad (1.19)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_i^{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_i^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_i^{n+1} \quad (1.20)$$

Il time step Δt viene assunto costante e viene definito in modo da rispettare la condizione di stabilità alla Von Neumann [37].

Nel caso 2D con spessore unitario e nodi equispaziati si ha il volume definito come $V_p = \Delta x^2$ e lo si può utilizzare per calcolare la pairwise force function, anche se così facendo si ottengono delle inaccurately dei risultati, indipendentemente dalla dimensione del passo di griglia utilizzato.

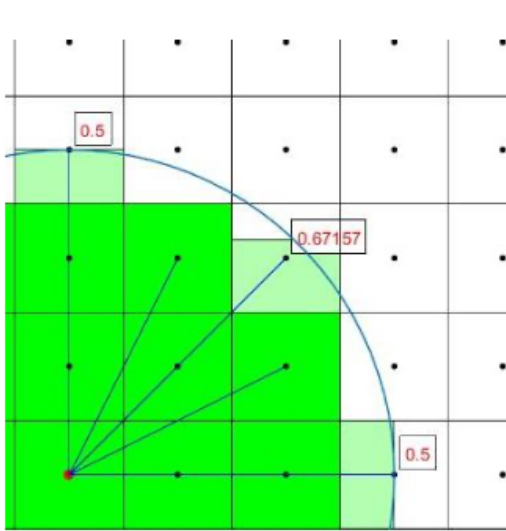
Per migliorare l'accuratezza dell'integrazione si può introdurre un fattore correttivo β tale per cui $V_p = \beta_p \Delta x^2$, in questo modo solo la frazione di volume del nodo famiglia racchiuso entro l'orizzonte contribuisce al calcolo integrale. Considerando griglie uniformi questo fattore correttivo può essere calcolato come:

$$\beta = \begin{cases} 1 & \|\xi\| \leq \delta - 0.5\Delta x \\ \frac{\delta + 0.5\Delta x - \|\xi\|}{\Delta x} & \delta - 0.5\Delta x < \|\xi\| \leq \delta + 0.5\Delta x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.21)$$

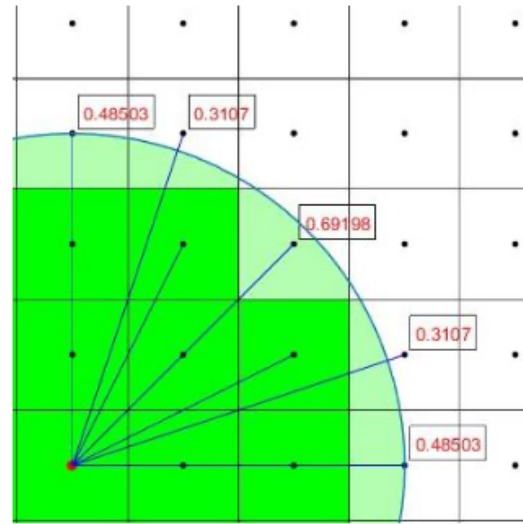
L'implementazione numerica consente di effettuare il calcolo esatto dei contributi in volume consentendo di calcolare i valori esatti del coefficiente β . Un metodo è quello di indicare la percentuale di area della cella compresa all'interno dell'orizzonte:

$$\beta = \begin{cases} \frac{A_{intersezione}}{\Delta x^2} & \|\zeta\| \leq \delta + 0.5\Delta x \\ 0 & \|\zeta\| > \delta + 0.5\Delta x \end{cases} \quad (1.22)$$

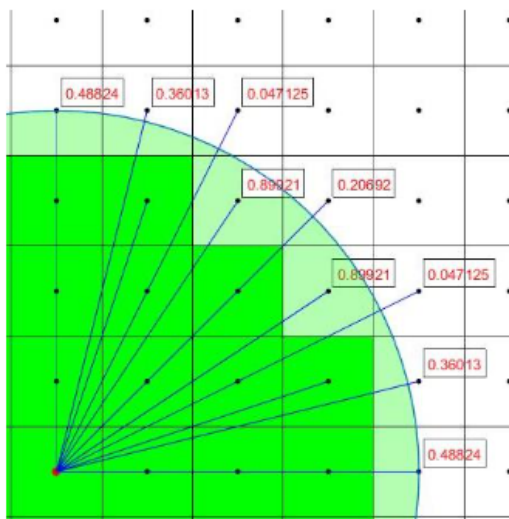
Per ridurre il costo computazionale si possono escludere le celle appartenenti a nodi famiglia posizionati ad una distanza dal nodo sorgente superiore a $\delta + 0.5\Delta x$, come si può vedere in fig. 1.4.



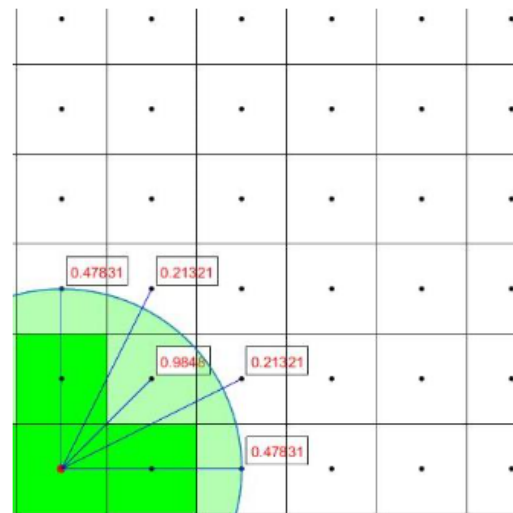
(a) Valori di β calcolati tramite l'equazione (1.21) con $m=3$.



(b) Valori di β calcolati tramite l'equazione (1.22) con $m=3$.



(c) Valori di β calcolati tramite l'equazione (1.21) con $m=4$.



(d) Valori di β calcolati tramite l'equazione (1.22) con $m=4$.

Figura 1.4: Valori di β calcolati tramite le equazioni precedenti [38].

1.4 Tipi di convergenza

Considerando una griglia peridinamica i parametri che la caratterizzano sono il passo di griglia Δx , la lunghezza di scala data dall'orizzonte δ e il coefficiente $m = \delta/\Delta x$. Per poter scegliere correttamente questi valori, in modo da valutare la capacità della soluzione di convergere sui risultati della meccanica classica, si definiscono tre modelli di convergenza [15], visibili in fig. 1.5:

- δ -convergenza in cui $\delta \rightarrow 0$ e m è costante o aumenta, anche se in modo da far crescere il rapporto m/δ . In questo caso la soluzione fornita dalla Peridynamics converge alla soluzione della meccanica classica. All'aumentare del valore di m migliora l'approssimazione raggiungibile.
- m -convergenza dove $m \rightarrow \infty$ e δ è fisso. Con questi parametri la soluzione numerica converge su una soluzione esatta non-locale prevista dalla Peridynamics per l'orizzonte δ dato.
- δm -convergenza in cui $\delta \rightarrow 0$ mentre m cresce più velocemente di quanto non diminuisca δ , pertanto si ha l'aumento del rapporto m/δ . In questo modo la soluzione numerica converge sulla soluzione analitica data dalla Peridynamics e, in maniera uniforme, sulla soluzione della meccanica classica.

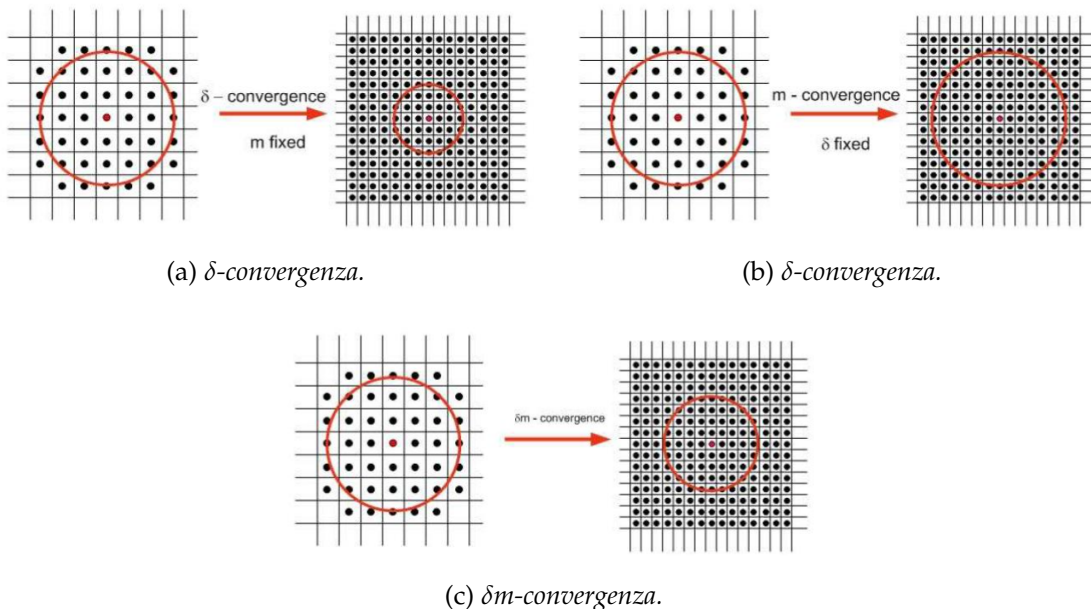


Figura 1.5: Metodi di convergenza [15].

Tipicamente i valori che vengono scelti per le simulazioni numeriche dipendono dalla qualità della soluzione ma anche dalle risorse computazionali a disposizione.

Per questo motivo i valori di m solitamente utilizzati sono tra 3 e 4. Questo perché con valori più piccoli si ha la comparsa di effetti di griglia indesiderati come linee di frattura che seguono righe o colonne della griglia, mentre con valori più elevati i tempi di calcolo aumentano esponenzialmente.

1.5 Condizioni al contorno e skin effect

La Bond-Based Peridynamics è una teoria non-locale e per questo motivo le condizioni al contorno vengono applicate in modo differente rispetto a come sono applicate nell'ambito della meccanica classica.

Nelle equazioni del moto non si ha la presenza di forze superficiali pertanto le forze agenti sul corpo devono essere applicate sotto forma di forze per unità di volume, piuttosto che di superficie. Per l'implementazione nel modello mesh-free si converte la tensione superficiale σ in una tensione volumetrica σ_{eq} come

$$\sigma_{eq} = \frac{\sigma \Delta x \Delta z N_{nodi}}{V_{load}} \quad (1.23)$$

in cui N_{nodi} indica il numero di nodi a cui sarebbe applicata la tensione superficiale e V_{load} rappresenta il volume su cui sarebbe applicata la tensione volumetrica.

Una delle problematiche della Peridynamics sta nel *surface effect*, detto anche *skin effect*. Questo problema è dovuto al fatto che i parametri che definiscono le interazioni peridinamiche sono computati considerando che i punti di griglia abbiano un volume di intorno completo. Quando questi parametri vengono computati vicino alla superficie il comportamento del materiale peridinamico cambia. In particolare si ha un aumento di cedevolezza manifestato dai punti materiali in prossimità del bordo del corpo.

Questo effetto è dovuto alla perdita di interazioni che un punto materiale manifesta se localizzato entro la regione di spazio compresa tra la superficie libera e il proprio orizzonte, come si può osservare in fig. 1.6.

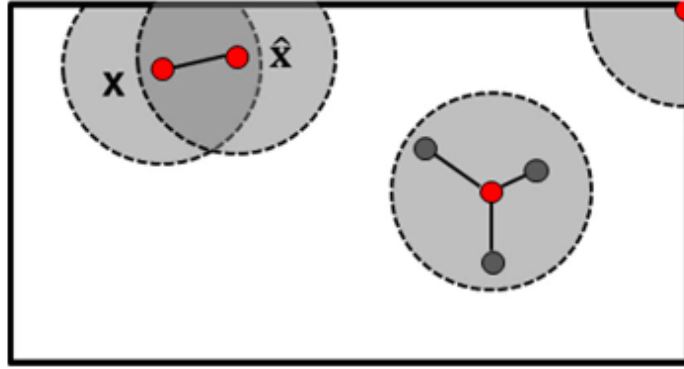


Figura 1.6: Orizzonte dei punti peridinamici all'interno del dominio e vicino ai bordi [20].

Alcuni modi per ridurre questo effetto di perdita di rigidità vicino ai bordi sono:

- applicare le condizioni al contorno in una striscia di materiale di ampiezza pari all'orizzonte δ ;
- applicare un fattore di compensazione alla perdita di rigidità.

I metodi di correzione dell'effetto di bordo nella Bond-Based Peridynamics (BBP) tramite l'utilizzo di un fattore di compensazione sono molto numerosi e tra questi si hanno: il metodo della forza normalizzata [24] e il metodo energetico [25].

Altri metodi sono descritti in [20] sia per la Bond-Based Peridynamics (BBP) che per la State-Based Peridynamics (SBP). Un ulteriore metodo è mostrato in [32] per la SBP.

1.6 Densità di forza areale

In modo differente rispetto alla teoria classica è il modo in cui si calcolano le tensioni nella Peridynamics [16], [34].

Si considera un corpo \mathcal{R} di materiale omogeneo e microelastico sottoposto ad una deformazione omogenea. Di questo corpo si considera un punto x e su di esso si fa passare un piano normale al vettore unitario \mathbf{n} , ciò divide il corpo in due parti:

$$\mathcal{R}^+ = \{x' \in \mathcal{R} : (x' - x) \cdot \mathbf{n} \geq 0\} \quad (1.24)$$

$$\mathcal{R}^- = \{x' \in \mathcal{R} : (x' - x) \cdot \mathbf{n} \leq 0\} \quad (1.25)$$

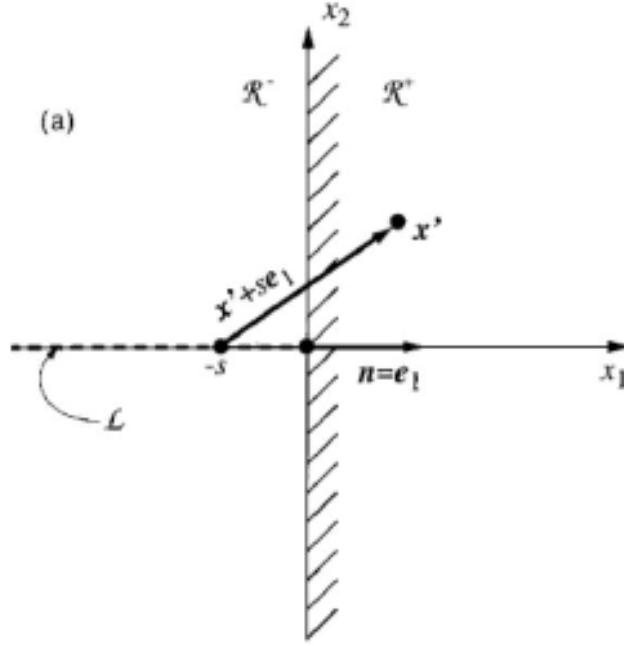


Figura 1.7: Definizione del corpo \mathcal{R} [34].

La porzione di corpo \mathcal{R}^+ esercita sulla porzione \mathcal{R}^- una forza che non è applicata solamente alla superficie ma anche ai punti sottostanti. La forza risultante divisa per l'area della superficie fornisce la densità di forza areale.

Considerando l'insieme di punti allineati

$$\mathcal{L} = \{\hat{x} \in \mathcal{R}^- : \hat{x} = x - s\mathbf{n}, \quad 0 \leq s \leq \infty\} \quad (1.26)$$

Si definisce la forza areale $\tau(x, \mathbf{n})$ nel punto $x \in \mathcal{R}^+$ nella direzione del vettore \mathbf{n} come:

$$\tau(x, \mathbf{n}) = \int_{\mathcal{L}} d\hat{l} \int_{\mathcal{R}^+} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{x}' - \hat{\mathbf{x}}) \quad (1.27)$$

Per una deformazione omogenea il tensore dello stress σ , indipendente da x , può essere espresso come:

$$\tau(x, \mathbf{n}) = \sigma \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{n} \quad (1.28)$$

1.7 Peridynamics tramite Elementi Finiti

Un metodo per risolvere computazionalmente i problemi peridinamici è quello di considerare i bond tra nodi come degli elementi finiti paragonabili ad elementi di tipo asta [38].

L'equazione (1.15) è l'equazione del moto per un sistema discretizzato:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_p \mathbf{f}(\mathbf{u}_p^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i) V_p + \mathbf{b}_i^n \quad (1.29)$$

Il nodo sorgente ha associato un volume V_i e questo valore si moltiplica per entrambi i lati dell'equazione:

$$V_i \rho \ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_p \mathbf{f}(\mathbf{u}_p^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i) V_p V_i + \mathbf{b}_i^n V_i \quad (1.30)$$

Si può osservare che l'equazione è diventata un'uguaglianza di forze la cui forma è la medesima dell'equazione alla base degli elementi finiti:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_i^n + \mathbf{F}_T^n = \mathbf{F}_e^n \quad (1.31)$$

in cui \mathbf{M} è la matrice di massa, \mathbf{F}_e^n è il vettore delle forze esterne e \mathbf{F}_T^n è il vettore delle forze interne.

A seguito di questi semplici passaggi matematici si può dedurre che la griglia peridinamica può essere rappresentata con degli elementi di tipo asta, di cui dovranno essere definite opportunamente le caratteristiche elastiche.

Nel presente elaborato si utilizzerà il metodo degli elementi finiti per rappresentare elementi bidimensionali all'interno di mesh e per descrivere i bond peridinamici come elementi 1D, pertanto si presentano di seguito alcuni concetti teorici alla base del metodo FEM (emphFinite Element Method). Per ulteriori approfondimenti fare riferimenti ai testi [38], [6], [27].

1.7.1 Generalità sugli elementi finiti

Agli elementi finiti viene applicata una forma linearizzata delle equazioni della meccanica strutturale. Ogni elemento ha dei nodi, ciascuno dei quali, possiede un numero variabile di gradi di libertà di spostamento e sarà su di essi che verranno applicate le forze, opportunamente discretizzate.

La matrice di rigidezza $[\mathbf{K}]_e$ di un elemento lega gli spostamenti $\{\mathbf{u}\}_e$ alle forze $\{\mathbf{f}\}_e$ applicate sui suoi nodi secondo la relazione:

$$[\mathbf{K}]_e \{\mathbf{u}\}_e = \{\mathbf{f}\}_e \quad (1.32)$$

La matrice di rigidezza è una matrice simmetrica, ossia $K_{ij} = K_{ji}$, e le sue dimensioni dipendono dal numero di gradi di libertà dei singoli nodi e dal numero di nodi che contiene. Per questo un elemento con 4 nodi, ognuno con 2 gradi di libertà, possiede in totale 8 gradi di libertà, cioè $[\mathbf{K}]_e$ assume una dimensione 8×8 .

Con questo metodo si considerano solamente gli spostamenti che avvengono ai nodi quindi per determinarli in altri punti dell'elemento si devono utilizzare delle apposite funzioni di forma. Le funzioni di forma dell'elemento vengono raccolte nella matrice $[\mathbf{N}]$ pertanto gli spostamenti in ogni punto dell'elemento possono essere ottenuti tramite interpolazione dei risultati sui nodi, secondo l'equazione:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}(x, y, z)]\{\mathbf{u}\}_e \quad (1.33)$$

Un'importante caratteristica delle funzioni di forma, valida per ogni tipo di elemento è che le funzioni devono essere tali da garantire che lo spostamento in un nodo sia coincidente con lo spostamento già calcolato in quel nodo e non dipendente dagli spostamenti su altri nodi:

$$N_i = \begin{cases} 1 & \text{al nodo } i \\ 0 & \text{negli altri nodi} \end{cases} \quad (1.34)$$

Considerando la teoria classica esiste una legge costitutiva $[\mathbf{D}]$ che mette in relazione tensioni $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ e deformazioni $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (1.35)$$

Inoltre si ha una relazione tra deformazioni e spostamenti:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \partial[\mathbf{N}]\{\mathbf{u}_e\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{u}\}_e \quad (1.36)$$

Quindi si possono legare le tensioni con gli spostamenti attraverso la relazione:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\mathbf{u}\}_e \quad (1.37)$$

Per garantire la conservazione dell'energia, tramite il principio dei lavori virtuali si può dimostrare che:

$$[\mathbf{K}]_e = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \quad (1.38)$$

In questo modo si può calcolare la matrice di rigidità di ogni elemento. Le matrici di rigidità dei singoli elementi andranno poi assemblate per costruire la matrice di rigidità globale della struttura.

1.7.2 Elemento Asta

L'elemento asta, mostrato in fig. 1.8, possiede alle sue estremità due nodi e ad ognuno di essi è assegnato un grado di libertà di spostamento nella direzione dell'asse dell'asta, pertanto ha un totale di 2 gradi di libertà reali.

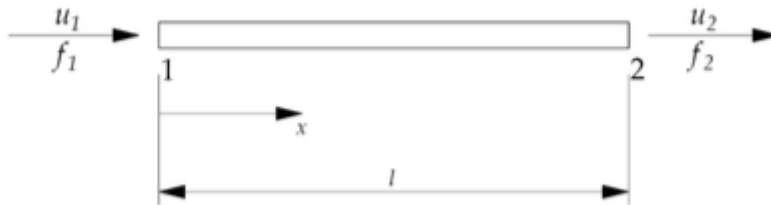


Figura 1.8: Elemento asta [38].

Per questo elemento si può scrivere l'equazione (1.32) come:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_e \quad (1.39)$$

Per elementi 1D la legge costitutiva del materiale è data dal modulo di Young E :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.40)$$

mentre la matrice delle funzioni di forma $[N]$ è:

$$[N] = \left[\frac{L-x}{L}, \frac{x}{L} \right] \quad (1.41)$$

Pertanto i valori di spostamento in un qualsiasi punto dell'elemento asta possono essere interpolati secondo la relazione:

$$\mathbf{u}(x) = \left[\frac{L-x}{L}, \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (1.42)$$

Derivando la matrice $[N]$ si trova la matrice $[B]$ e da essa la matrice di rigidezza $[K]_e$:

$$[B] = \left[-\frac{1}{L}, \frac{1}{L} \right] \quad (1.43)$$

$$[K]_e = \int_L [\mathbf{B}]^T E [\mathbf{B}] A dl = EA \int_L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dl = EA \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \int_L dl \quad (1.44)$$

Assumendo l'area della sezione costante, l'integrale di volume si trasforma in un integrale sulla lunghezza dell'asta stessa:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

La matrice di rigidezza assume questa forma quando l'asse dell'asta è allineato con una delle direzioni principali del sistema di riferimento adottato. Le strutture possono essere costituite da un numero di elementi superiore a uno e possono essere caratterizzate da aste orientate in direzioni diverse tra loro.

Per questo motivo occorre ricalcolare il valore matrice di rigidezza dell'elemento in un sistema di riferimento globale della struttura. Questo può essere fatto utilizzando delle matrici di rotazione.

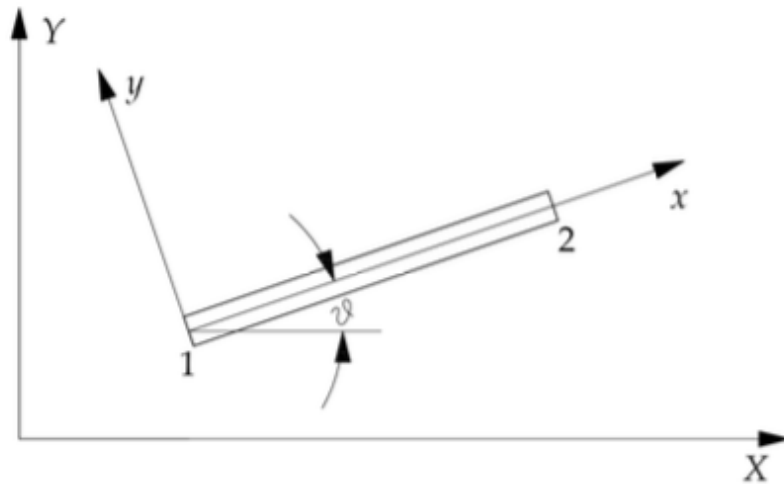


Figura 1.9: Elemento asta nel sistema di riferimento globale [38].

Si considera un sistema di riferimento locale $x - y$ dell'elemento inclinato di un angolo ϑ rispetto al sistema di riferimento globale $X - Y$, come mostrato in fig. 1.9. La matrice di rotazione $[\mathbf{R}]$ è costituita da coseni direttori:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (1.47)$$

Si riscrive l'equazione (1.45) tenendo conto degli spostamenti nel piano, cioè aggiungendo i gradi di libertà per forze e spostamenti in direzione y :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} t_{x1} \\ t_{y1} \\ t_{x2} \\ t_{y2} \end{Bmatrix}_e \quad (1.48)$$

A seguito di questa relazione anche la matrice di rotazione assume una forma nuova:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

Applicando le matrici di rotazione all'equazione (1.32) si ottiene:

$$[\mathbf{K}]_e[\mathbf{R}]\{\mathbf{u}\}_e = [\mathbf{R}]\{\mathbf{f}\}_e \quad (1.50)$$

Indicando con $c = \cos\vartheta$ e $s = \sin\vartheta$ si può scrivere la matrice di rigidezza dell'elemento asta in coordinate globali:

$$[\mathbf{K}]_e = [\mathbf{R}]^T[\mathbf{K}]_e[\mathbf{R}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

1.7.3 Elemento quadrilatero a 4 nodi

Per analizzare il comportamento di corpi bidimensionali si sono utilizzati elementi quadri, quindi di essi si è calcolato i valori dei coefficienti della matrice di rigidezza considerando il caso di stato piano di tensione. In questo caso la legge costitutiva del materiale è:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.52)$$

L'elemento è costituito da 4 nodi e ognuno di essi possiede due gradi di libertà di spostamento nelle direzioni x e y , quindi il numero totale di gradi di libertà è pari ad 8, come si può vedere in fig. 1.10.

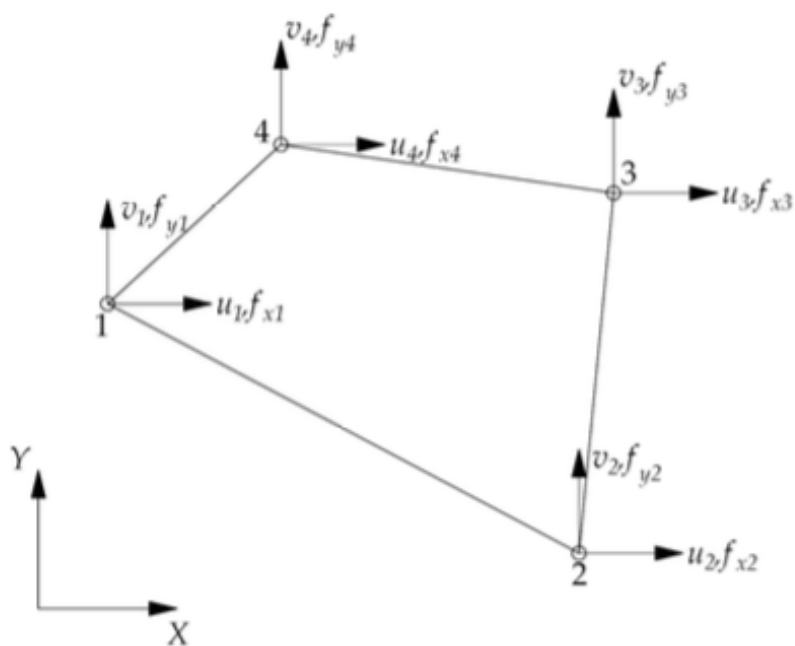


Figura 1.10: Elemento quadrangolare a 4 nodi nel sistema di riferimento globale [38].

Avendo funzioni di forma di tipo bilineare si hanno delle difficoltà nella loro integrazione e, quindi, nel calcolo della matrice di rigidità dell'elemento. Per risolvere queste difficoltà si definisce l'elemento tramite una geometria quadra in un sistema di riferimento adimensionale ξ, η , come in fig. 1.11. La denominazione dei nodi sarà la stessa che si ha nel sistema di riferimento della struttura.

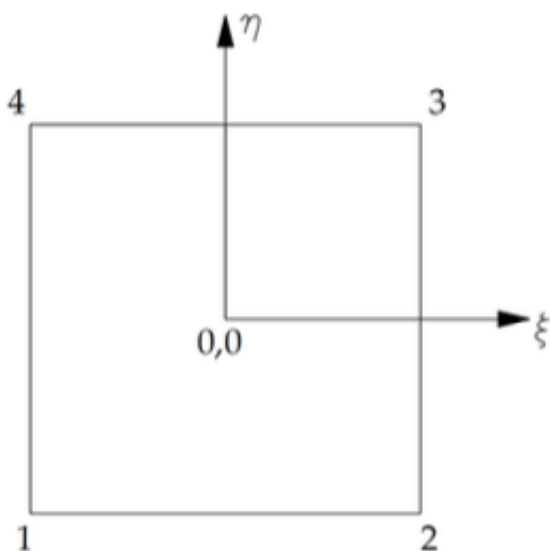


Figura 1.11: Elemento quadrangolare isoparametrico [38].

Le funzioni di forma vengono definite come:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{cases} \quad (1.53)$$

pertanto si ha:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

Utilizzando questa strategia è necessario possedere delle relazioni che mappino il passaggio tra i due sistemi di riferimento. Poiché esse sono del tutto identiche alle funzioni di forma già espresso, questo particolare tipo di elemento è definito come isoparametrico.

A causa del cambiamento di variabili è necessario definire la matrice Jacobiana $[\mathbf{J}]$ tale che:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (1.55)$$

I cui valori sono:

$$\begin{cases} J_{11} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4 \\ J_{12} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} x_4 \\ J_{21} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} y_4 \\ J_{22} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} y_4 \end{cases} \quad (1.56)$$

Definendo $[\mathbf{G}] = [\mathbf{J}]^{-1}$ allora si ha:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (1.57)$$

Poiché $\varepsilon = [\mathbf{B}]\{u\}$ partendo da $[\mathbf{N}]$ si può ottenere la matrice $[\mathbf{B}]$:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} G_{11} \frac{\partial}{\partial \xi} + G_{12} \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & G_{21} \frac{\partial}{\partial \xi} + G_{22} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ G_{21} \frac{\partial}{\partial \xi} + G_{22} \frac{\partial}{\partial \eta} & G_{11} \frac{\partial}{\partial \xi} + G_{12} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

Inserendo la matrice $[\mathbf{B}]$ nell'equazione (1.38) si ha:

$$[\mathbf{K}]_e = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV = \int_A [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] h dx dy = h \int_A [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] |\mathbf{J}(\zeta, \eta)| d\zeta d\eta \quad (1.59)$$

L'integrale di volume si trasforma in un integrale di superficie sull'area del elemento dato che il valore dello spessore h è ritenuto costante. Poiché la matrice $[\mathbf{B}]$ dipende dal punto in cui viene calcolata non può essere portata fuori dal segno di integrazione. L'integrale (1.59), se risolto tramite il metodo di Gauss con un punto di integrazione al centro consente di calcolare il valore della matrice di rigidezza $[\mathbf{K}]_e$. Per elementi appartenenti a griglie regolari e con lati paralleli tra di loro si giunge banalmente al calcolo della matrice di rigidezza dell'elemento:

$$[\mathbf{K}]_e = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_4 & C_5 & -C_1/2 & -C_2 & C_7 & -C_5 \\ C_2 & C_3 & -C_5 & C_6 & -C_2 & -C_3/2 & C_5 & C_8 \\ C_4 & -C_5 & C_1 & -C_2 & C_7 & C_5 & -C_1/2 & C_2 \\ C_5 & C_6 & -C_2 & C_3 & -C_5 & C_8 & C_2 & -C_3/2 \\ -C_1/2 & -C_2 & C_7 & -C_5 & C_1 & C_2 & C_4 & C_5 \\ -C_2 & -C_3/2 & C_5 & C_8 & C_2 & C_3 & -C_5 & C_6 \\ C_7 & C_5 & -C_1/2 & C_2 & C_4 & -C_5 & C_1 & -C_2 \\ -C_5 & C_8 & C_2 & -C_3/2 & C_5 & C_6 & -C_2 & C_3 \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

dove:

$$\begin{cases} C_1 = \left(\frac{b}{3a} + \frac{1-\nu}{6} \frac{a}{b} \right) \\ C_2 = \left(\frac{\nu}{4} + \frac{1-\nu}{8} \right) \\ C_3 = \left(\frac{a}{3b} + \frac{1-\nu}{6} \frac{b}{a} \right) \\ C_4 = \left(-\frac{b}{3a} + \frac{1-\nu}{12} \frac{a}{b} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} C_5 = \left(\frac{\nu}{4} - \frac{1-\nu}{8} \right) \\ C_6 = \left(\frac{a}{6b} - \frac{1-\nu}{6} \frac{b}{a} \right) \\ C_7 = \left(\frac{b}{6a} - \frac{1-\nu}{6} \frac{a}{b} \right) \\ C_8 = \left(-\frac{a}{3b} + \frac{1-\nu}{12} \frac{b}{a} \right) \end{cases} \quad (1.61)$$

1.7.4 Rigidezza equivalente dei bond

Tutti i bond vengono considerati come degli elementi asta [38] per gli elementi finiti solo con un coefficiente diverso rispetto a quello che si ha per le aste della meccanica classica:

$$[\mathbf{K}]_{mecc.clas.} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

Prendendo l'equazione (1.15) e moltiplicando per entrambe le parti per il volume assegnato al nodo sorgente V_i si hanno entrambi i lati che hanno la dimensione di una forza. Per il singolo bond diventa:

$$V_i \rho \ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_i, \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i) \cdot \beta V_p V_i + \mathbf{b}_i V_i \quad (1.63)$$

Il valore della *pairwise force function*, dato dall'equazione (1.2), per un materiale PMB non danneggiato e in cui si trascurano le forze di volume \mathbf{b} è:

$$F = cs\beta V_p V_i \quad (1.64)$$

dove: s è la *relative elongation* definita in (1.3) e c è il micromodulo del materiale.

Considerando la *relative elongation* paragonabile ad una deformazione si può definire la matrice di rigidezza per il bond peridinamico come:

$$[\mathbf{K}]_{PD} = \frac{c\beta V_p V_i}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

Capitolo 2

Boundary Element Method

Molti problemi ingegneristici vengono descritti con leggi fisiche in termini di equazioni differenziali. Spesso queste equazioni possono essere riscritte con formulazioni alternative, e matematicamente equivalenti, in termini di equazioni integrali. La tecnica numerica più generale ed efficiente per risolvere le equazioni integrali è data dal Boundary Element Method (BEM) [2].

La soluzione approssimata del problema al contorno, tramite il BEM, ha la caratteristica di essere la soluzione esatta dell'equazione differenziale nel dominio ed è parametrizzata da un numero finito di parametri nel bordo [7].

Rispetto ai metodi numerici agli elementi finiti e alle differenze finite il BEM ha diversi vantaggi:

- Si ha la necessità di discretizzare solamente i bordi del dominio, riducendo di un ordine il costo computazionale rispetto ai metodi che considerano l'intero dominio.
- I problemi su domini infiniti, ma con bordi finiti, possono essere studiati facilmente come problemi interni.
- In alcune applicazioni i risultati di maggiore interesse sono dati dalla soluzione, o le sue derivate, in corrispondenza del dominio. Questi valori si possono ottenere direttamente dalla soluzione delle equazioni integrali sul bordo.
- La soluzione nel dominio interno viene approssimata con un alto ordine di accuratezza, quest'ordine si mantiene anche per le derivate della soluzione. Nonostante questo si hanno delle difficoltà a valutare la soluzione vicino al bordo ma non su di esso.

Alcune difficoltà nel BEM sono:

- Le equazioni integrali di bordo richiedono la conoscenza esplicita della soluzione fondamentale dell'equazione differenziale. Questa soluzione è nota solamente per equazioni differenziali alle derivate parziali lineari con coefficienti costanti, o al più variabili ma in modo particolare. Per questo motivo problemi con disomogeneità o descritti da equazioni differenziali non-lineari sono problemi di difficile soluzione.
- Per un dato problema al contorno esistono diverse equazioni integrali di bordo e, per ognuna di esse, si hanno diversi metodi di approssimazione. Per questo motivo la scelta del metodo che fornisca l'errore più contenuto richiede molto lavoro di analisi matematica.
- La teoria classica delle equazioni integrali si concentra su equazioni integrali di Fredholm del secondo tipo con kernel regolari, mentre le equazioni integrali di bordo spesso non sono di questa categoria. I kernel sono tipicamente con singolarità e se esse non sono integrabili risulta necessario riorganizzare gli integrali tramite delle distribuzioni.
- Se il bordo non è liscio a causa di spigoli, o di discontinuità, allora la soluzione su di esso ha delle singolarità il cui trattamento numerico ha alcune difficoltà.
- La matrice dei coefficienti è densamente popolata e non è simmetrica quindi cercare la soluzione tramite metodi numerici diretti richiede un tempo che è proporzionale al cubo del numero totale di gradi di libertà [2].

2.1 Concetti fondamentali

Si considera un'equazione differenziale 1D nel dominio che va $x = 0$ a $x = 1$:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u - b = 0 \quad (2.1)$$

dove u è la funzione incognita che governa l'equazione, λ^2 è una costante positiva e b è una funzione nota di x [4, Chapter 1].

La soluzione dell'equazione (2.1) può essere trovata assumendo una variazione per u composta da una serie di forme note moltiplicate per coefficienti incogniti. Per trovare questi coefficienti si deve forzare l'equazione (2.1) ad essere soddisfatta in un determinato numero di punti.

Si considera una funzione arbitraria w continua nel dominio x e con derivate continue fino ad un ordine voluto. Per investigare le proprietà dell'equazione (2.1) si effettua il prodotto interno:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u - b \right) w dx = 0 \quad (2.2)$$

Integrando per parti due volte, come mostrato in [4], si ottiene:

$$\int_0^1 \left\{ u \frac{d^2w}{dx^2} + (\lambda^2 u - b)w \right\} dx + \left[\frac{du}{dx} w \right]_0^1 - \left[u \frac{dw}{dx} \right]_0^1 = 0 \quad (2.3)$$

che per essere risolta è richiesta la conoscenza di u o du/dx in $x = 0$ e $x = 1$.

L'equazione (2.3) mette in luce il tipo di condizioni al contorno necessarie per risolvere il problema. Per incorporare esplicitamente queste condizioni nel problema si considerano:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} && \text{per } x=0 \\ q &= \frac{du}{dx} = \bar{q} && \text{per } x=1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

in cui i termini \bar{u} e \bar{q} rappresentano i valori noti della funzione e della sua derivata. Il primo tipo di condizione in (2.4) è nota come "essenziale", mentre la seconda è detta "naturale". Sostituendo questi valori in (2.3) si ottiene:

$$\int_0^1 \left\{ u \frac{d^2w}{dx^2} + (\lambda^2 u - b)w \right\} dx + \{ [\bar{q}w]_{x=1} - [qw]_{x=0} \} - \left\{ \left[u \frac{dw}{dx} \right]_{x=1} - \left[\bar{u} \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} \right\} = 0 \quad (2.5)$$

Considerando l'espressione (2.3) e integrandola per parti, rispetto all'altra variabile, si ottiene una nuova espressione, visibile in [4], che comparata con l'equazione (2.3) fornisce:

$$\int_0^1 \left\{ u \frac{d^2w}{dx^2} + (\lambda^2 u - b)w \right\} dx + [(q - \bar{q})w]_{x=1} + \left[(\bar{u} - u) \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} = 0 \quad (2.6)$$

Questa espressione implica che, oltre a dover soddisfare l'equazione differenziale in x , si debbano soddisfare anche le due condizioni al contorno.

Il processo appena descritto è un metodo generale per investigare le equazioni differenziali.

2.1.1 Soluzioni approssimate

Nella pratica ingegneristica soluzioni analitiche possono essere trovate solamente in casi semplici, per questo motivo è importante vedere come si comporta una soluzione quando si introducono delle approssimazioni.

Si considera la funzione u come un'approssimazione, piuttosto che una soluzione esatta:

$$u = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \dots \quad (2.7)$$

dove α_i sono coefficienti incogniti e ϕ_i sono funzioni linearmente indipendenti, dette funzioni interpolanti. Nella pratica ingegneristica si considerano valori nodali per i coefficienti α_i perché essi hanno un chiaro significato fisico. In questo modo l'approssimazione di u può essere scritta come:

$$u = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + \dots = \sum_{j=1}^N u_j\phi_j \quad (2.8)$$

Introducendo l'approssimazione di u nell'equazione differenziale iniziale essa non risulta più identicamente soddisfatta e questo produce un errore, detto anche funzione residuo.

Introducendo il valore approssimato di u nell'equazione (2.1) si può definire la funzione residuo R nel dominio:

$$R = \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2u - b \quad (2.9)$$

e nel contorno si hanno:

$$\begin{aligned} R_1 &= u - \bar{u} \\ R_2 &= q - \bar{q} \end{aligned} \quad (2.10)$$

I metodi numerici usati in ingegneria provano a ridurre questi errori al minimo tramite diverse tecniche. Questa riduzione viene operata forzando gli errori ad essere nulli in certi punti o zone oppure in termini di media. Questa operazione è generalmente interpretata come *distribuzione* degli errori e il modo con cui avviene questa distribuzione differenzia i diversi metodi.

Le tecniche dei residui pesati effettuano la distribuzione dell'errore forzando l'integrale dei residui, pesati da una certa funzione, ad essere nullo.

2.1.2 Tecniche dei residui pesati

Per approssimare la funzione u si hanno tre tipi di metodi:

- Se si assume che la soluzione approssimata soddisfi identicamente tutte le condizioni al contorno ma non le equazioni nel dominio Ω si ha un puro *domain method*.
- Se la soluzione approssimata soddisfa l'equazione di campo ma non le condizioni al contorno si ha un *boundary method*.
- Assumendo che la soluzione non soddisfi né l'equazione di campo né le condizioni al contorno si ha un *mixed method*.

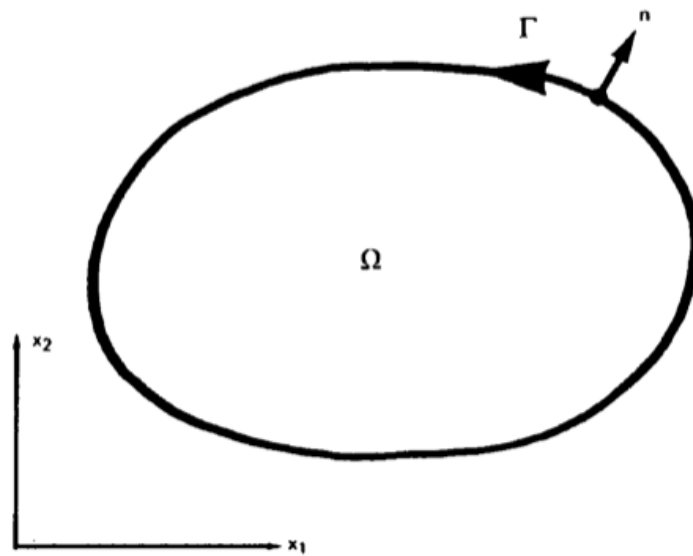


Figura 2.1: Definizione del dominio in considerazione per l'equazione di Poisson [4].

Assumendo che le funzioni ϕ_j , definite per approssimare u , soddisfino tutte le condizioni al contorno si ha una funzione residuo R che non soddisfa identicamente le equazioni di campo nel dominio. Ciò che si vuole fare è rendere R il più piccolo possibile tramite residui pesati pari a zero per diversi valori della funzioni pesate. Si hanno delle funzioni linearmente indipendenti tali che:

$$\int_{\Omega} R\psi_j d\Omega = 0 \quad \text{in } \Omega \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.11)$$

Un modo per scrivere l'equazione (2.11) in modo più compatto è quello di introdurre una nuova funzione:

$$w = \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 + \dots + \beta_n\psi_N = \sum_{j=1}^N \beta_j\psi_j \quad (2.12)$$

dove β_j sono coefficienti arbitrari. In questo modo si ottiene:

$$\int_{\Omega} R w_j d\Omega = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.13)$$

I diversi tipi di funzioni ψ_j o w definiscono i diversi metodi di approssimazione, il quali sono detti metodi dei residui pesati dato che si basano sull'equazione (2.13).

Tra questi metodi si hanno:

- *Subdomain Collocation*

In questo metodo il dominio Ω è diviso in M sottodomini e l'integrale dell'errore in ognuno di essi è posto a zero:

$$\int_{\Omega_j} R dx = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.14)$$

in cui le funzioni pesate sono:

$$\psi_j = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in \Omega_j \\ 0 & \text{per } x \notin \Omega_j \end{cases} \quad (2.15)$$

- *Galerkin Method*

Con questo metodo le funzioni pesate sono le stesse delle funzioni di approssimazione:

$$\phi_j = \psi_j \quad (2.16)$$

pertanto l'equazione (2.11) diventa

$$\int_{\Omega} R \phi_j d\Omega = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.17)$$

mentre l'equazione (2.13) viene scritta come

$$\int_{\Omega} R w d\Omega = 0 \quad (2.18)$$

dove $w = \beta_1 \phi_1 + \beta_2 \phi_2 + \dots + \beta_N \phi_N$.

Questo metodo è alla base di molte formulazioni agli elementi finiti per cui la simmetria di $\phi_j = \psi_j$ viene ereditata dal campo delle equazioni.

- *Point Collocation Method*

In questo caso si scelgono N punti x_1, x_2, \dots, x_N del dominio in cui i residui sono nulli. Questa operazione può essere interpretata come la definizione di funzioni pesate in termini della delta di Dirac Δ :

$$\psi_j = \Delta(x - x_j) \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.19)$$

Il valore della delta di Dirac in un punto $x - x_j$ è infinito ma è tale per cui l'integrale sotteso da essa sia unitario:

$$\int_{\Omega} \Delta(x - x_j) d\Omega = 1 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.20)$$

Con queste considerazioni l'equazione (2.11) diventa:

$$\int_{\Omega} R\Delta(x - x_j) d\Omega = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.21)$$

Questo metodo consiste nel porre a zero le funzioni dell'errore in tanti punti quanti sono i coefficienti incogniti della soluzione approssimata.

2.2 Formulazione debole

La formulazione dell'integrale fondamentale di BEM e FEM può essere interpretata come una combinazione di residui pesati e di un processo di integrazione per parti che riduca l'ordine di continuità richiesto per la funzione u [4].

Considerando l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ in Ω con alcuni passaggi, riportati in [4], si può ottenere la forma:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w d\Omega - \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (2.22)$$

che in termini di funzioni dei residui diventa:

$$\int_{\Omega} R w d\Omega - \int_{\Gamma_2} R_2 w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} R_1 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (2.23)$$

Una forma più tipica di questa espressione può essere ottenuta integrando per parti:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma \quad (2.24)$$

In genere l'ultimo termine dell'equazione (2.24) è forzato ad essere identicamente nullo dato che la funzione w deve soddisfare la versione lagrangiana della condizio-

ne al contorno essenziale. Con questa considerazione l'equazione (2.24) può essere interpretata in termini di lavori virtuali, dato che ha la forma:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma \quad (2.25)$$

L'integrale nel lato sinistro risulta una misura dei lavori virtuali interni mentre quello nel lato destro esprime il lavoro virtuale prodotto dalle forze esterne \bar{q} .

L'equazione (2.25) risulta la base di molti schemi agli elementi finiti per problemi laplaciani ed è chiamata formulazione variazionale *debole*. Viene chiamata debole per due ragioni:

- per ridurre l'ordine di continuità di u viene ridotto l'ordine delle derivate.
- le condizioni al contorno naturali sono soddisfatte tramite un'approssimazione rispetto che in modo esatto.

La formulazione degli elementi di bordo può essere interpretata come l'introduzione di un ulteriore step formale nel processo di integrazione per parti della derivata du e, di conseguenza, dell'indebolimento del requisito di continuità di u .

Prendendo l'equazione (2.24) e integrandola per parti si può ottenere un'espressione più completa:

$$- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (2.26)$$

Si integra ulteriormente in modo da eliminare tutte le derivate di u nell'integrale nel lato sinistro:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w) u d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (2.27)$$

Questa equazione rappresenta la formulazione iniziale per il Boundary Element Method per l'equazione di Laplace.

Per vedere come la formulazione debole viene usata e come si ottengono gli elementi del dominio e di bordo si considera l'equazione (2.1) integrata per parti e applicandoci le condizioni al contorno:

$$\int_0^1 \left\{ u \frac{d^2 w}{dx^2} + (\lambda^2 u - b) w \right\} dx - [(q - \bar{q}) w]_{x=1} + \left[(u - \bar{u}) \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} = 0 \quad (2.28)$$

che si può scrivere in forma più compatta con le funzioni residuo:

$$\int_0^1 Rwdx - [R_2w]_{x=1} + \left[R_1 \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} = 0 \quad (2.29)$$

Si assume che la funzione u soddisfi la condizione al contorno essenziale $u = \bar{u}$ a $x = 0$ quindi le equazioni (2.28) e (2.29) diventano, rispettivamente:

$$\int_0^1 \left[u \frac{d^2w}{dx^2} + (\lambda^2 u - b)w \right] dx = [(q - \bar{q}w)]_{x=1} \int_0^1 Rwdx = [R_2w]_{x=1} \quad (2.30)$$

$$\int_0^1 Rwdx = [R_2w]_{x=1} \quad (2.31)$$

Integrando per parti l'equazione (2.30) essa diventa

$$\int_0^1 \left\{ u \frac{d^2w}{dx^2} + (\lambda^2 u - b)w \right\} dx = [qw]_{x=0} - [qw]_{x=1} \quad (2.32)$$

Se la funzione pesata w è forzata a soddisfare la versione omogenea delle condizioni al contorno essenziali a $x = 0$, si ottiene:

$$\int_0^1 \left\{ u \frac{d^2w}{dx^2} + (\lambda^2 u - b)w \right\} dx = -[\bar{q}w]_{x=1} \quad (2.33)$$

che è analoga all'equazione (2.24) ottenuta per l'equazione di Laplace.

2.3 Soluzioni al bordo e nel dominio

Si sono definiti i *Boundary methods* come quelli per cui la soluzione approssimata soddisfa l'equazione di campo in modo che le uniche incognite del problema si trovino sul bordo. Un boundary method può essere ottenuto scegliendo una funzione pesata w in uno dei seguenti modi:

1. selezionando una funzione w che soddisfi l'equazione di governo nella sua forma omogenea.
2. usando funzioni speciali che soddisfino le equazioni in modo che sia possibile ridurre il problema solamente ai bordi. Una funzione tipica che si utilizza è la delta di Dirac.

Si applicano entrambe le tecniche all'equazione (2.1) o alla sua forma con i residui pesati:

$$\int_0^1 \left[u \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \lambda^2 w \right) - bw \right] dx + \left[\frac{du}{dx} w \right]_0^1 - \left[u \frac{dw}{dx} \right]_0^1 = 0 \quad (2.34)$$

Il primo approccio, noto come metodo di Trefftz, implica che la soluzione sia nota senza tenere conto delle condizioni al contorno:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \lambda^2 w \equiv 0 \quad (2.35)$$

Se si considera la forma con i residui si ottiene:

$$-\int_0^1 b w dx + \left[\frac{du}{dx} w \right]_0^1 - \left[u \frac{dw}{dx} \right]_0^1 = 0 \quad (2.36)$$

Il secondo approccio si basa sull'utilizzo di una funzione w tale per cui

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \lambda^2 w = -\Delta_i \quad (2.37)$$

In questo caso si ha

$$\int_0^1 \left[u \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \lambda^2 w \right) \right] dx = -\int_0^1 u \Delta_i dx = -u_i \quad (2.38)$$

dove u_i rappresenta il valore della funzione u nel punto x_i . Con questo approccio l'equazione (2.34) diventa

$$-u_i - \int_0^1 b w dx + \left[\frac{du}{dx} w \right]_0^1 - \left[u \frac{dw}{dx} \right]_0^1 = 0 \quad (2.39)$$

Quando il punto x_i è scelto sul contorno allora questa equazione fornisce una relazione tra le variabili al contorno.

Il secondo approccio è quello tipicamente applicato agli elementi ai bordi dove la funzione w è detta *soluzione fondamentale* dell'equazione (2.37). Vale la pena notare che questa soluzione è ottenuta senza considerare le condizioni al contorno del problema.

Le soluzioni nel dominio sono ottenute dai residui pesati quando la soluzione approssimata assunta non soddisfa le equazioni di governo. Riprendendo l'equazione (2.1) dopo aver integrato per parti si ha:

$$\int_0^1 \left\{ -\frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} + (\lambda^2 u - b) w \right\} dx + \left[\frac{du}{dx} w \right]_0^1 = 0 \quad (2.40)$$

Questa è un'equazione del tipo agli elementi finiti in cui l'ultimo termine è pari a zero nei punti del contorno in cui $q = du/dx$ è incognito, dato che $w \equiv 0$ in essi. Sostituire una soluzione approssimata u in termini di coefficienti incogniti e funzioni pesate note conduce ad un sistema di equazioni che risolve il problema. Nel caso di elementi finiti la funzione incognita u è definita in modo esplicito in tutto il dominio.

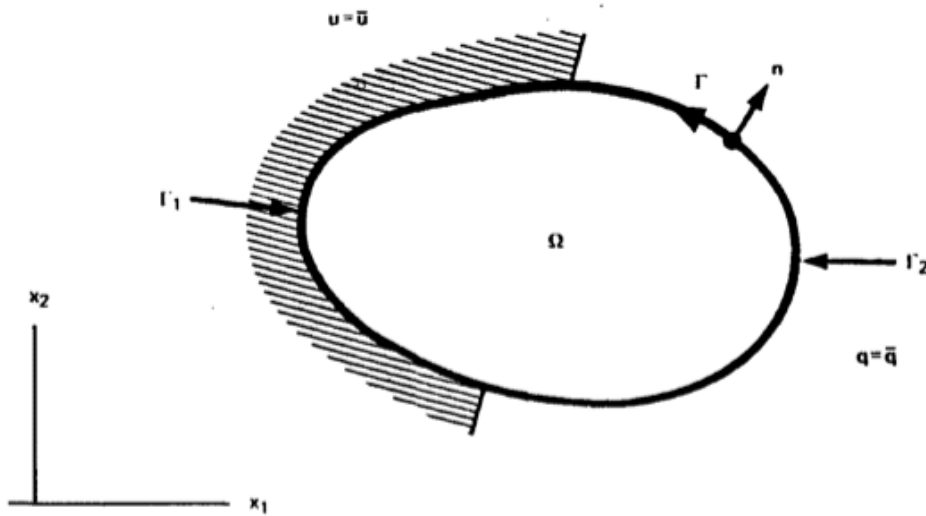


Figura 2.2: Definizione geometrica dell'equazione di Laplace [4].

2.4 Equazione integrale di base

L'equazione integrale di bordo richiesta inizialmente dal metodo può essere dedotta basandosi su considerazioni sui residui pesati. I residui pesati permettono di estendere questo metodo alla soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali più complesse [4, Chapter 2].

Si considera l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ in Ω con le condizioni al contorno essenziale $u = \bar{u}$ in Γ_1 e naturale $q = \partial u / \partial n = \bar{q}$ in Γ_2 . Si possono avere condizioni al contorno più complesse come, ad esempio, una combinazione lineare delle precedenti $\gamma = \alpha u + \beta q$ con α, β e γ che sono parametri noti.

Introducendo soluzioni approssimate di u e q rispetto a quelle esatte nell'equazione di Laplace si ha un errore che deve essere minimizzato. Questa riduzione dell'errore si opera ortogonalizzando le funzioni u e q rispetto alle funzioni pesate u^* e $q^* = \partial u^* / \partial n$.

Indicando i residui come in (2.10) e $R = \nabla^2 u \neq 0$ si può scrivere

$$\int_{\Omega} R u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} R_2 u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} R_1 q^* d\Gamma \quad (2.41)$$

o come

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (2.42)$$

Integrando per parti il termine sinistro due volte, come in [4], si ottiene l'equazione alla base del Boundary Element Method:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (2.43)$$

2.4.1 Soluzione fondamentale

La soluzione fondamentale u^* soddisfa l'equazione di Laplace e rappresenta il campo generato da una carica unitaria concentrata nel punto i . L'effetto di questa carica si propaga dal punto i all'infinito senza considerare le condizioni al contorno. Per questo la soluzione può essere scritta come

$$\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0 \quad (2.44)$$

L'uso della delta di Dirac risulta un modo elegante di rappresentare cariche concentrate come forze quando si utilizzano equazioni differenziali. Dato che l'integrale della delta di Dirac moltiplicato per qualsiasi altra funzione è pari al valore di quest'ultima nel punto x_i , quindi

$$\int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Omega} u (-\Delta_i) d\Omega = -u_i \quad (2.45)$$

A questo punto si può riscrivere l'equazione (2.43) come

$$u_i + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma \quad (2.46)$$

In cui i valori di u^* e q^* sono quelli corrispondenti alla posizione della carica, quindi al punto i , e questo risulta valido per ogni punto del dominio Ω .

Per ragioni di tipo computazionale l'equazione (2.43) viene applicata sul contorno quindi si vuole valutare cosa accade quando il punto x_i si trova su Γ . Per fare questo si considera il dominio aumentato di un'emisfera centrata in x_i e di raggio ε che tende a zero.

Bisogna tenere presente che si hanno due tipi di integrali di bordo nell'equazione (2.46) dato che la soluzione fondamentale e la sua derivata si comportano diversamente.

Considerando per semplicità l'equazione (2.46) prima che vengano applicate le condizioni al contorno essa risulta

$$u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma \quad (2.47)$$

Gli integrali presenti nel lato destro dell'equazione (2.47) sono facili da gestire dato che possiedono singolarità di basso ordine. Per questo motivo non si hanno problemi con questi integrali quando vengono portati sul bordo:

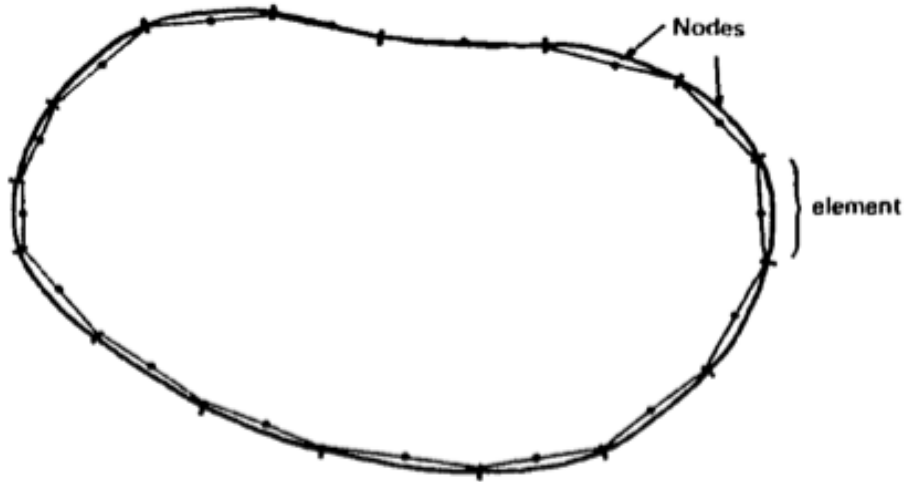


Figura 2.3: Elementi di contorno costanti [4].

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q u^* d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \frac{1}{4\pi\varepsilon} d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ q \frac{2\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon} \right\} \equiv 0 \quad (2.48)$$

L'integrale nel lato sinistro, invece, si comporta diversamente e produce un termine libero:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u q^* d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{1}{2\pi\varepsilon} d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -u \frac{\pi\varepsilon^2}{2\pi\varepsilon} \right\} = -\frac{1}{2} u_i \quad (2.49)$$

A seguito di queste considerazioni risulta possibile definire la seguente espressione per problemi 2D e 3D:

$$\frac{1}{2} u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad (2.50)$$

dove gli integrali sono nel senso del valore principale di Cauchy.

2.5 Boundary Element Method

Considerando l'equazione (2.50) la si vuole discretizzare in modo da ottenere un sistema di equazioni da cui ricavare i valori al bordo. I punti in cui i valori incogniti vengono calcolati sono detti *nodi*, essi sono nella mezzeria degli elementi *costanti*. Nel caso di elementi costanti il contorno è assunto diviso in N elementi, in essi i valori di u e q sono costanti e pari al valore che hanno al nodo [4].

Considerando un punto i , prima di applicare le condizioni al contorno, si può scrivere l'equazione (2.50) discretizzata come

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} uq^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} qu^* d\Gamma \quad (2.51)$$

dove Γ_j rappresenta il contorno dell'elemento j . Essendo i valori di u e q costanti in ogni elemento si possono portare all'esterno dell'integrale

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \right) u_j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right) q_j \quad (2.52)$$

Gli integrali che compaiono tra parentesi sono relativi al nodo i dove la soluzione fondamentale agisce ogni altro nodo j e per questo sono talvolta chiamati *coefficienti di influenza*. Questi coefficienti di influenza possono venire rinominati come \hat{H}^{ij} e G^{ij} :

$$\hat{H}^{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \quad G^{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (2.53)$$

Con questa notazione si può scrivere per un punto i

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G^{ij} q_j \quad (2.54)$$

Chiamando ora

$$H^{ij} = \begin{cases} \hat{H}^{ij} & \text{se } i \neq j \\ \hat{H}^{ij} + \frac{1}{2} & \text{se } i = j \end{cases} \quad (2.55)$$

si può scrivere l'equazione (2.54) come

$$\sum_{j=1}^N H^{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G^{ij} q_j \quad (2.56)$$

Considerando tutti i nodi del bordo si ottiene un sistema di equazioni che in forma matriciale sono

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{Q} \quad (2.57)$$

dove \mathbf{H} e \mathbf{G} sono matrici $N \times N$ mentre \mathbf{U} e \mathbf{Q} sono vettori di lunghezza N . Per introdurre le condizioni al contorno bisogna riordinare il sistema in modo che tutte le incognite siano sul lato sinistro:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (2.58)$$

dove \mathbf{X} è il vettore con le incognite u e q .

Si può osservare che le incognite sono un misto di potenziale e della sua derivata, rispetto al solo potenziale che si ha con gli elementi finiti.

A questo punto è possibile risolvere l'equazione (2.58) ottenendo tutti i valori al contorno. Noti i valori al contorno si possono i valori di u , e della sua derivata, su tutti i punti interni:

$$u_i = \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma \quad (2.59)$$

Il processo risolutivo prevede che vengano valutati gli integrali presenti nelle equazioni e questo viene fatto, tipicamente, tramite metodi numerici [4].

Considerando il problema discretizzato per trovare il valore della funzione u in un punto i si utilizza la relazione

$$u_i = \sum_{j=1}^N G^{ij} q_j - \sum_{j=1}^N \bar{H}^{ij} u_j \quad (2.60)$$

I coefficienti \bar{H}^{ij} e G^{ij} devono essere calcolati nuovamente per ognuno dei punti interni.

Gli integrali di \bar{H}^{ij} e G^{ij} possono venire calcolati con formule di integrazione numerica:

- per i casi in cui $i \neq j$ si può utilizzare la quadratura gaussiana.
- nel caso in cui $i = j$ si hanno delle singolarità che richiedono dei metodi di integrazione a più alto ordine.

2.6 Integrazione numerica

L'equazione integrale di bordo permette di ottenere una soluzione esatta del problema in esame. Nelle soluzioni si hanno degli errori che sono dovuti principalmente alla discretizzazione e al metodo di integrazione numerica [2, Chapter 11].

Molte difficoltà sorgono perché il kernel dell'equazione integrale risulta spesso singolare. Le singolarità non sono di difficile trattamento se si è effettuata una discretizzazione con elementi costanti, dato che si possono trovare soluzioni analitiche degli integrali. In molti problemi strutturali, però, il processo numerico deve essere ulteriormente sofisticato tramite l'uso di elementi curvi.

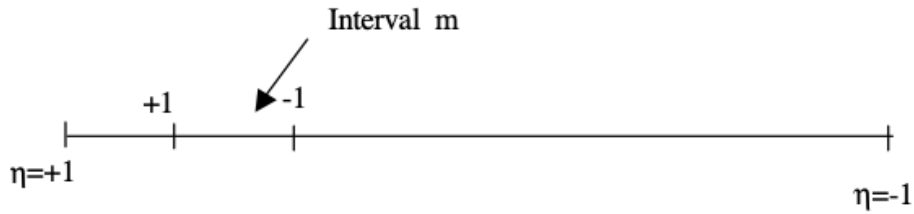


Figura 2.4: Suddivisione dell'intervallo di integrazione in M sottointervalli con $-1 \leq \bar{\eta}_s \leq 1$ [2].

2.6.1 Integrazione di integrali regolari

Si definiscono integrali regolari quegli integrali che non hanno singolarità e che il loro integrando non varia in modo netto nella regione di integrazione [2]. Il metodo comune di integrazione di questi integrali è dato dalla quadratura gaussiana.

L'integrale 1D del BEM può essere valutato numericamente tramite la formula di Gauss-Legendre:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \sum_{s=1}^S A_s f(\eta_s) \quad (2.61)$$

in cui A_s sono i pesi e S è il numero di punti di Gauss.

Gli integrali 2D possono essere valutati tramite una ripetizione ripetuta dell'equazione (2.61) lungo le direzioni η_1 e η_2 :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 = \sum_{s_1=1}^{S_1} \sum_{s_2=1}^{S_2} A_{s_1} A_{s_2} f(\eta_{s_1}, \eta_{s_2}) \quad (2.62)$$

La valutazione degli integrali regolari richiede il maggior costo computazionale nel definire le matrici dei coefficienti, quindi questo deve essere il processo maggiormente ottimizzato.

2.6.2 Integrazione di integrali quasi singolari

Un integrale è definito quasi singolare se il punto di collocazione è vicino all'elemento considerato. Uno speciale trattamento è richiesto quando l'integrando varia in modo netto se il punto sorgente si avvicina all'elemento [2].

Per trattare questi integrali si hanno diverse tecniche come l'integrazione gaussiana adattativa e la tecnica di trasformazione della variabile.

Tra le tecniche di trasformazione della variabile si ha l'*Element Subdivision Technique* in cui l'elemento di integrazione viene diviso in M sottointervalli di uguale lunghezza [2].

Dividere l'intervallo di integrazione in M intervalli, come in fig. 2.4, porta a

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{s=1}^{S(m)} A_{s(m)} f(\bar{\eta}_{s(m)}) \quad (2.63)$$

dove $\bar{\eta}_s = [M - 2m + 1 + \eta_{s(m)}] / M$, in cui $1/M$ è lo Jacobiano di $d\bar{\eta}/d\eta$, e per ogni sottointervallo si può avere un diverso ordine di quadratura.

2.7 Tipologie di elementi

Per risolvere numericamente le equazioni risulta necessario discretizzare il dominio. Il metodo di discretizzazione da utilizzare dipende dal problema in esame e dalle dimensioni del dominio considerato.

Nel caso del Boundary Element Method sarà il contorno a dover essere discretizzato attraverso nodi ed elementi. Si definiscono come nodi i punti sul contorno in cui vengono calcolati esattamente i risultati delle equazioni, mentre si definiscono elementi le porzioni di spazio costruite intorno ai nodi.

A differenza dei nodi sugli elementi la soluzione delle equazioni non viene calcolata ma se ne ha una approssimazione tramite delle funzioni di forma che interpolano i valori calcolati sui nodi.

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \Phi_i \mathbf{u}_i \quad (2.64)$$

Sia nel caso 2D, in cui si hanno segmenti, che nel caso 3D dove gli elementi sono poligoni, essi si possono parametrizzare in modo da descrivere in modo più accurato la curvatura della zona di interesse del contorno.

Considerando il caso bidimensionale il contorno è una linea quindi si possono calcolare i valori di una funzione \mathbf{u} in ogni punto dell'elemento tramite l'utilizzo di funzioni interpolanti, dette funzioni di forma. Queste funzioni sono definite all'interno dell'elemento e dipendono solamente dalle coordinate locali (ξ, η, \dots) del punto in cui si vuole conoscere la funzione.

Si considerano elementi monodimensionali contenenti N nodi in cui si hanno le soluzioni di u in forma scalare. Le funzioni di forma più utilizzate sono funzioni polinomiali che assumono valore nullo in corrispondenza dei nodi. Alcuni tipi di funzioni di forma sono:

- Con $N = 1$ si ha un elemento costante in cui il nodo si trova sulla mezzeria dell'elemento e si impone il valore della soluzione calcolata sul nodo su tutti i punti dell'elemento. Per questo motivo la funzione di forma risulta unitaria:

$$\Phi_1 = 1 \quad (2.65)$$

- Con $N = 2$ si ha un elemento lineare con i nodi posti alle sue estremità. Dovendo avere tante funzioni di forma quanti sono i nodi considerati, si hanno due funzioni:

$$\begin{cases} \Phi_1 = -\frac{1}{2}(\xi - 1) \\ \Phi_2 = \frac{1}{2}(\xi + 1) \end{cases} \quad (2.66)$$

in cui la coordinata adimensionale ξ varia da -1 a 1.

Si può osservare che in corrispondenza dei nodi si ha una delle due funzioni di forma che si annulla.

- Con $N = 3$ si ha un elemento quadratico in cui i nodi si trovano agli estremi e sulla mezzeria. Per questi elementi le funzioni di forma sono:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\ \Phi_2 = (1 - \xi^2) \\ \Phi_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \end{cases} \quad (2.67)$$

Gli andamenti delle diverse funzioni di forma nell'intervallo $-1 \leq \xi \leq 1$ sono mostrati in fig. 2.5.

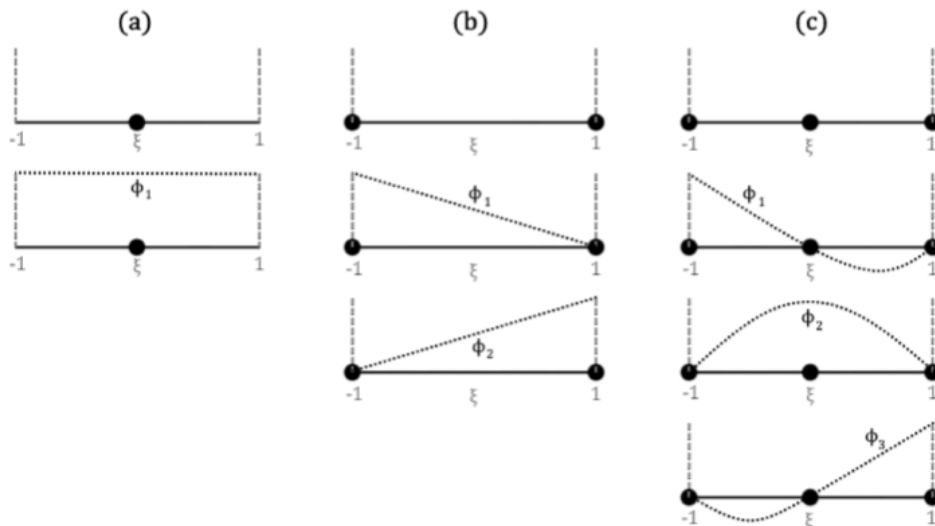


Figura 2.5: Funzioni di forma polinomiali 1D per: a) elementi costanti, b) elementi lineari e c) elementi quadratici [4].

Con l'aumentare del numero di nodi per elemento si ottiene un miglioramento della precisione dei risultati anche se cresce il costo computazionale delle operazioni. Nel processo di scelta della tipologia di elementi e della loro quantità bisogna tenere conto sia dell'accuratezza richiesta per le soluzioni che dei tempi di calcolo. Un buon compromesso tra queste due richieste lo si ha con l'utilizzo di elementi lineari o, al più, quadratici.

Capitolo 3

BEM per Peridynamics

Il tema centrale di questo lavoro risulta quello di sviluppare un metodo con gli elementi di bordo per la Peridynamics che sia basato sulla soluzione delle equazioni che governano la peridinamica tramite la discretizzazione del contorno [21]. Il metodo proposto ha la caratteristica di poter risolvere le quattro problematiche descritte nel capitolo introduttivo.

Per derivare le equazioni integrali di bordo per la Bond-Based Peridynamics, sia statica che dinamica, si utilizza la funzione infinita di Green [41] e il calcolo non-locale [11]. Per problemi statici il metodo fornisce un'equazione esplicita che non deve essere risolta iterativamente, mentre per problemi dinamici bisogna effettuare uno studio nel dominio di Laplace, attraverso la trasformata di Laplace.

3.1 Calcolo non-locale

Per affrontare il calcolo non-locale risulta necessario definire due tipi di funzioni e due tipi di operatori non-lineari. Le *point functions* sono funzione definite in un punto mentre le *two-point functions* sono funzioni definite in coppie di punti. I *point operators* mappano two-point functions su point functions mentre i *two-point operators* mappano point functions su two-point functions [11].

Point operators coinvolgono integrali di two-point functions mentre two-point operators coinvolgono esplicitamente point functions valutate in due punti distinti.

Per definire in modo più formale le definizioni precedenti si denotano con m, k e n interi positivi. Per ogni dominio $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ funzioni da $\tilde{\Omega}$ a $\mathbb{R}^{m \times k}$ o \mathbb{R}^m o \mathbb{R} sono definite come *point functions* o *point mappings* e sono denotate con lettere romane. Funzioni da $\tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega}$ a $\mathbb{R}^{m \times k}$ o \mathbb{R}^m o \mathbb{R} sono definite *two-point functions* o *two-point mappings* e sono denotate con lettere greche.

Per semplicità di scrittura si utilizza la seguente notazione $\alpha := \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\alpha' := \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ e in modo analogo per le altre funzioni.

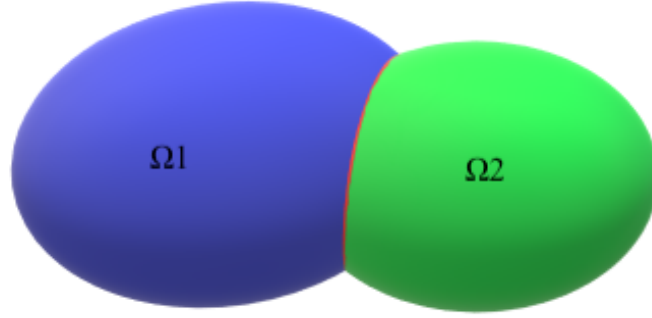


Figura 3.1: Rappresentazione del contorno locale. Il dominio Ω_1 in blu interseca il dominio Ω_2 in verde, i loro contorni $\overline{\Omega}_1$ e $\overline{\Omega}_2$, rispettivamente, si intersecano in $\partial\Omega_{12} = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$ che è evidenziato in rosso. Nella superficie avente $\partial\Omega_{12}$ come contorno viene calcolato il flusso tra i due domini.

3.1.1 Flussi locali e non-locali

Un concetto fondamentale nello sviluppo di calcoli vettoriali è quello di flusso che misura l'interazione di punti in un dominio con punti all'esterno del dominio. Per interazioni locali le interazioni avvengono sul contorno del dominio mentre nel caso non-locale le interazioni avvengono su volumi esterni al dominio.

Siano $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ due distinte regioni aperte con bordi lipschitziani. Se Ω_1 e Ω_2 hanno un contorno comune non nullo $\partial\Omega_{12} = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$ allora si può definire il flusso *locale* classico di Ω_1 in Ω_2 come

$$\int_{\partial\Omega_{12}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_1 dA \quad (3.1)$$

dove: \mathbf{n}_1 indica la normale su $\partial\Omega_{12}$ uscente da Ω_1 , dA indica una misura di superficie in \mathbb{R}^n e $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_1$ rappresenta la densità di flusso lungo $\partial\Omega_{12}$ in direzione della normale \mathbf{n}_1 . Il flusso introduce una nozione di direzionalità tra i due domini.

Se le due regioni non hanno bordi in comune, cioè sono ad una distanza finita, allora il flusso sarà nullo e, per questo motivo, il flusso classico è detto locale.

Si può osservare che il flusso classico soddisfa il principio di azione-reazione:

$$\int_{\partial\Omega_{12}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_1 dA + \int_{\partial\Omega_{21}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_2 dA = 0 \quad (3.2)$$

Per ogni punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, per una funzione integrabile $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ si identifica la densità *non-locale* di flusso in \mathbf{x} in un volume misurabile $\tilde{\Omega}$ come

$$\int_{\tilde{\Omega}} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \forall \tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (3.3)$$

A causa della non-località \mathbf{x} non deve necessariamente appartenere alla chiusura di $\tilde{\Omega}$.

Considerando i domini Ω_1 , Ω_2 e $\tilde{\Omega}$ come misurabili i seguenti risultati sono equivalenti [11]:

- L'asimmetria di una two-point function

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (3.4)$$

per quasi tutti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

- Il principio di non autointerazione

$$\int_{\tilde{\Omega}_1} \int_{\tilde{\Omega}_2} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (3.5)$$

- Il principio di azione-reazione non locale

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n \quad (3.6)$$

- Additività per regioni distinte

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_1} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_2} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\ \forall \Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n \text{ tale che } \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \quad (3.7)$$

Risultati analoghi si hanno per vettori e tensori asimmetrici two-point functions.

Con l'equazione (3.3) si denota una densità di flusso non-locale quindi per ogni due regioni aperte $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ si identifica un'interazione scalre, o flusso non locale da Ω_1 a Ω_2 , come:

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \quad (3.8)$$

Da questa espressione si ha che il flusso è non-locale perché l'interazione può essere non nulla anche quando la chiusura di Ω_1 e Ω_2 ha un'intersezione vuota.

3.1.2 Operatori non-locali

Gli operatori non-locali riproducono il comportamento degli operatori classici locali: divergenza, gradiente e rotore. In questa tesi verrà utilizzato solamente l'operatore

divergenza non-locale quindi ci si focalizzerà su di esso, per la trattazione degli altri operatori non-locali si rimanda a [11].

Considerando il teorema di Gauss

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla \cdot \mathbf{q} d\mathbf{x} = \int_{\partial\tilde{\Omega}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \quad \forall \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \quad (3.9)$$

esso mostra che l'integrale della divergenza di un vettore \mathbf{q} in un dominio $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ è pari al flusso uscente da quella regione.

In modo analogo si definisce la divergenza non-locale \mathcal{D} . In generale un punto $\mathbf{x} \in \tilde{\Omega}$ può interagire con tutti gli altri punti $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ quindi la densità di flusso non-locale uscente da un punto $\mathbf{x} \in \tilde{\Omega}$ è data da $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$. Pertanto si ha che l'integrale della divergenza non-locale di un vettore $\boldsymbol{\nu}$ in una regione $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ è pari al flusso uscente da quella regione:

$$\int_{\tilde{\Omega}} \mathcal{D}(\boldsymbol{\nu})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\tilde{\Omega}} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \quad \forall \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \quad (3.10)$$

Per definire l'azione dell'operatore divergenza non-locale sul vettore $\boldsymbol{\nu}$ bisogna determinare come l'operando $\boldsymbol{\nu}$ è relazionato con $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dove, per la non-località, $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è un vettore two-point function. Con le informazioni che si hanno a disposizione si ha che:

- non avendo autointerazioni, per l'equazione (3.4) la funzione scalare $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ deve essere antisimmetrica.
- per come si è definito l'operatore divergenza non lineare l'equazione (3.10) relaziona \mathcal{D} con ψ .
- per emulare l'operatore $\nabla \cdot$, che è lineare, allora $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e, di conseguenza, $\mathcal{D}(\boldsymbol{\nu})$ devono essere lineari in $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Queste informazioni sono sufficienti per applicare il teorema dei nuclei di Schwartz [11], il quale permette di determinare la relazione tra ψ e $\boldsymbol{\nu}$ che conduce alla definizione dell'operatore di divergenza non-locale. Siano $U = [C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)]^k$ un vettore two-point functions e $V = C^\infty(\tilde{\Omega})$ uno scalare point function. I due spazi duali sono dati da $U' = [D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)]$ e $V' = D'(\tilde{\Omega})$, dove D' indica lo spazio delle distribuzioni.

Teorema 3.1 (Schwartz kernel theorem). Sia $\mathcal{D} : U \rightarrow V'$ una mappa lineare continua e $\langle x, y \rangle$ il prodotto scalare tra x e y , allora esiste un unico kernel $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in (U \times V)'$ tale che:

$$\langle v, \mathcal{D}\boldsymbol{\nu} \rangle_{V, V'} = \langle v\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho} \rangle_{(U \times V), (U \times V)'} \quad v \in V, \boldsymbol{\nu} \in U$$

o, usando la definizione di coppia duale [11],

$$\int_{\tilde{\Omega}} v(\mathbf{x})(\mathcal{D}\boldsymbol{\nu})(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\tilde{\Omega}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{z}, \mathbf{y})v(\mathbf{x})d\mathbf{z}d\mathbf{y}d\mathbf{x} \quad \forall v \in V, \boldsymbol{\nu} \in U \quad (3.11)$$

Assumendo che le informazioni precedenti siano rispettate la densità di flusso non-locale per unità di volume $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è unicamente espressa in termini del vettore $\boldsymbol{\nu} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ da

$$(\mathcal{D}\boldsymbol{\nu})(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{z}, \mathbf{y}))d\mathbf{z}\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.12)$$

L'equazione (3.12) rappresenta la definizione generale di divergenza non-locale. Risulta possibile semplificare questa definizione, senza compromettere la validità del calcolo vettoriale non-locale, tramite l'assunzione semplificativa:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 2\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \quad (3.13)$$

Sostituendo nell'equazione (3.12) si ottiene:

$$(\mathcal{D}\boldsymbol{\nu})(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}, \mathbf{x})d\mathbf{y} \quad (3.14)$$

A questo punto non si hanno restrizioni sulla two-point function $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ fintanto che risulta rispettata la simmetria o l'antisimmetria. Per ragioni descritte in [11] la funzione $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ deve essere antisimmetrica quindi la definizione di divergenza non-locale semplificata assume la forma:

$$(\mathcal{D}\boldsymbol{\nu})(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}, \mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (3.15)$$

Definizione 3.1 (Operatori non-locali). Dati una two-point function vettoriale $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ e una two-point function vettoriale antisimmetrica $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, l'azione dell'operatore divergenza non-locale puntuale $\mathcal{D}(\boldsymbol{\nu}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ su $\boldsymbol{\nu}$ è definita come

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\nu})(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}') \cdot \boldsymbol{\alpha}d\mathbf{y} \quad \text{per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.16)$$

Questo operatore non-locale puntuale mappa i vettori in degli scalari.

Essendo l'integrando antisimmetrico vale la relazione

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}(\boldsymbol{\nu})d\mathbf{x} = 0 \quad (3.17)$$

I vice operatori, detti *adjoint operators*, corrispondenti agli operatori non-locali puntuali sono two-point operators definiti come di seguito.

Definizione 3.2 (Adjoint operators). Dato un operatore \mathcal{Q} puntuale che mappa two-point functions F in una point function definita su \mathbb{R}^n , il vice operatore \mathcal{Q}^* è un two-point operator che mappa point functions G su two-point functions definite su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ che soddisfa

$$(G, \mathcal{Q}(F))_{\mathbb{R}^n} - (\mathcal{Q}(G), F)_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} = 0 \quad (3.18)$$

dove con $\mathcal{Q} = \mathcal{D}$ si ha che F e G denotano una coppia vettore-scalare.

3.1.3 Calcolo vettoriale non-locale

Il calcolo vettoriale non-locale sviluppato in [11] mima il calcolo vettoriale classico per operatori differenziali.

Con interazioni non-locali i punti esterni a $\bar{\Omega}$ interagiscono con punti in Ω in modo tale che le interazioni non possono essere valutate tramite la semplice integrazione sul contorno $\partial\Omega$. Ciò che bisogna valutare sono le interazioni con punti nel dominio complementare $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Definizione 3.3 (Dominio di interazione). Dato un sottoinsieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ il dominio di integrazione corrispondente a Ω è dato da

$$\Omega_{\mathcal{I}} := \{y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \text{ tale che } \alpha(x, y) \neq 0 \text{ per qualche } x \in \Omega\} \quad (3.19)$$

così che $\Omega_{\mathcal{I}}$ consista in quei punti esterni a Ω che interagiscono con i punti in Ω .

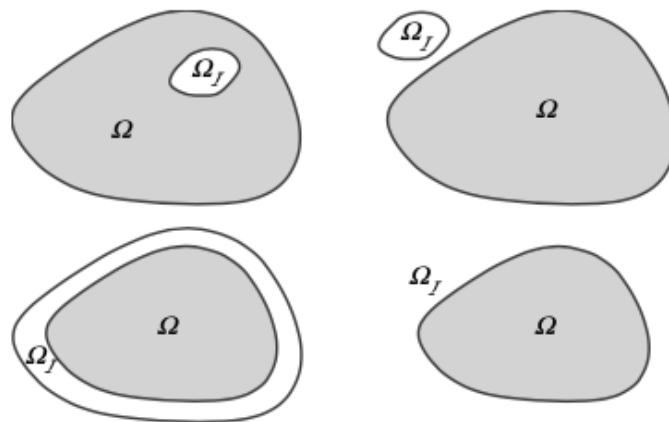


Figura 3.2: Quattro possibili configurazioni del dominio Ω , in grigio, e il dominio di interazione $\Omega_{\mathcal{I}}$ [11].

Dall'equazione (3.19) si osserva che i punti in $\mathbb{R}^n \setminus (\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}})$ non interagiscono con i punti in Ω :

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in \Omega \text{ e } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus (\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}}) \quad (3.20)$$

Non si è assunto che i punti in $\Omega_{\mathcal{I}}$ interagiscano solo con punti in $\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}}$ quindi, in generale, i punti in $\Omega_{\mathcal{I}}$ possono interagire anche con i punti in $\mathbb{R}^n \setminus (\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}})$.

Per definire operatori che presentino l'interazione di punti in $\Omega_{\mathcal{I}}$ con punti in $\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}}$ si sfrutta l'antisimmetria di α in (3.5) e la linearità degli operatori integrali in (3.20) e (3.16) [11]:

$$0 = \int_{\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}}} \int_{\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}}} (\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}') \cdot \alpha d\mathbf{y}d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathcal{D}(\boldsymbol{\nu})d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{\mathcal{I}}} \int_{\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}}} (\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}') \cdot \alpha d\mathbf{y}d\mathbf{x} \quad (3.21)$$

Si può identificare l'ultimo termine in (3.21) come il flusso da $\Omega_{\mathcal{I}}$ in $\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}}$ e $\int_{\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}}} (\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}') \cdot \alpha d\mathbf{y}d\mathbf{x}$ come la densità di flusso a $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{I}}$ in $\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}}$, perciò si può usare questo integrale per definire l'operatore cercato:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_{\mathcal{I}}} \int_{\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}}} (\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}') \cdot \alpha d\mathbf{y}d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega_{\mathcal{I}}} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}') \cdot \alpha d\mathbf{y}d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega_{\mathcal{I}}} (\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}') \cdot \alpha d\mathbf{y}d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Risulta conveniente avere l'integrale su $\Omega_{\mathcal{I}}$ dell'operatore non-locale cercato come flusso uscente da $\Omega_{\mathcal{I}}$ ed entrante in Ω .

Definizione 3.4 (Nonlocal interaction operator). Dato un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia il dominio di integrazione $\Omega_{\mathcal{I}}$ definito come in (3.19). Allora, corrispondente all'operatore divergenza puntuale $\mathcal{D}(\boldsymbol{\nu}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definito in (3.12), si definisce l'operatore di interazione puntuale $\mathcal{N}(\boldsymbol{\nu}) : \Omega_{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{R}$ tramite la sua azione su $\boldsymbol{\nu}$ da

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{\nu})(\mathbf{x}) := - \int_{\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}}} (\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}') \cdot \alpha d\mathbf{y} \quad \text{per } \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{I}} \quad (3.23)$$

Come conseguenza di (3.19) l'operatore \mathcal{N} può essere equivalentemente definito come $\mathcal{N}(\boldsymbol{\nu})(\mathbf{x}) := - \int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}') \cdot \alpha d\mathbf{y}$ per $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{I}}$. Questo non implica che l'operatore \mathcal{N} sia indipendente da $\Omega_{\mathcal{I}}$. Dalla (3.20) non si può definire il dominio $\Omega_{\mathcal{I}}$ di \mathcal{N} senza prima definire Ω .

Teorema 3.2 (Teorema integrale non-locale). Dalle definizioni (3.1) e (3.4) si può esprimere il teorema di Gauss non-locale:

$$\int_{\Omega} \mathcal{D}(\boldsymbol{\nu}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{\mathcal{I}}} \mathcal{N}(\boldsymbol{\nu}) d\mathbf{x} \quad (3.24)$$

L'operatore non-locale \mathcal{N} corrisponde all'operatore classico di trazione superficiale mentre \mathcal{D} corrisponde all'operatore divergenza classico.

Corollario 3.1 (Formula di integrazione non-locale per parti). Si adottano le ipotesi del teorema (3.4) e si considera il nonlocal adjoint operator definito in (3.2). Data la funzione puntuale $u(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si ha

$$\int_{\Omega} u \mathcal{D}(\boldsymbol{\nu}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}}} \int_{\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}}} \mathcal{D}^*(u) \cdot \boldsymbol{\nu} dy d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{\mathcal{I}}} u \mathcal{N}(\boldsymbol{\nu}) d\mathbf{x} \quad (3.25)$$

Le identità di Green non-locali risultano una semplice conseguenza del corollario (3.1)

Corollario 3.2 (Prima identità di Green non-locale). Date le funzioni scalari puntuali $u(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $v(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e la *two-point second-order tensor function* $\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$ allora:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{D}(\boldsymbol{\Theta} \cdot \mathcal{D}^*(v)) d\mathbf{x} - \int_{\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}}} \int_{\Omega \cup \Omega_{\mathcal{I}}} \mathcal{D}^*(u) \cdot (\boldsymbol{\Theta}) \cdot \mathcal{D}^*(v) dy d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega_{\mathcal{I}}} u \mathcal{N}(\boldsymbol{\Theta} \cdot \mathcal{D}^*(v)) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Corollario 3.3 (Seconda identità di Green non-locale). Assumendo le stesse notazioni del corollario (3.2) e assumendo che il tensore $\boldsymbol{\Theta}$ presente in (3.26) sia simmetrico, allora:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \mathcal{D}(\boldsymbol{\Theta} \cdot \mathcal{D}^*(v)) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} v \mathcal{D}(\boldsymbol{\Theta} \cdot \mathcal{D}^*(u)) d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega_{\mathcal{I}}} u \mathcal{N}(\boldsymbol{\Theta} \cdot \mathcal{D}^*(v)) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_{\mathcal{I}}} v \mathcal{N}(\boldsymbol{\Theta} \cdot \mathcal{D}^*(u)) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.2 Static boundary integral equation

Per definire le equazioni della meccanica si considera un tensore del secondo ordine quindi si devono utilizzare operatori generalizzati per l'uso sui tensori.

Per derivare l'equazione integrale di bordo si introducono due vettori $\chi(\mathbf{x})$ e $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e un tensore del secondo ordine $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tali che $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \chi(\mathbf{x}) \cdot \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Considerando le equazioni (3.16) e (3.23) riferite a $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ si ottengono:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\kappa)(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \chi(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{D}(\Psi)(\mathbf{x}) + \int_{\Omega \cup \Omega_\tau} [\chi(\mathbf{y}) - \chi(\mathbf{x})] \cdot \Psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\kappa)(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega \cup \Omega_\tau} [\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \cdot \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \chi(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{N}(\Psi)(\mathbf{x}) + \int_{\Omega \cup \Omega_\tau} [\chi(\mathbf{y}) - \chi(\mathbf{x})] \cdot \Psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.29)$$

La differenza tra gli integrali delle equazioni (3.28) e (3.29) rispetto a \mathbf{x} è:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \mathcal{D}(\kappa) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_\tau} \mathcal{D}(\kappa) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \chi \cdot \mathcal{D}(\Psi) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_\tau} \chi \cdot \mathcal{N}(\Psi) d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega \cup \Omega_\tau} \int_{\Omega \cup \Omega_\tau} \mathcal{D}^*(\chi)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Per il teorema di Gauss non-locale il termine a sinistra dell'uguale è nullo quindi si ottiene

$$\int_{\Omega} \chi \cdot \mathcal{D}(\Psi) d\mathbf{x} - \int_{\Omega \cup \Omega_\tau} \int_{\Omega \cup \Omega_\tau} \mathcal{D}^*(\chi)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_{\Omega_\tau} \chi \cdot \mathcal{N}(\Psi) d\mathbf{x} \quad (3.31)$$

Da [11] si ottengono: l'equazione che governa la dinamica del problema e le condizioni al contorno nel formalismo della Peridynamics

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\Theta : \mathcal{D}^*(\mathbf{v}))(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_d(\mathbf{x}) & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega_{\tau_d} \\ \mathcal{N}(\Theta : \mathcal{D}^*(\mathbf{v}))(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_n(\mathbf{x}) & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega_{\tau_n} \end{cases} \quad (3.32)$$

dove Θ è il tensore elastico del quarto ordine, che soddisfa $\Theta_{ijkl} = \Theta_{jikl} = \Theta_{ijlk} = \Theta_{klij}$ e $\Theta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Theta_4(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, \mathbf{v} è il campo degli spostamenti e \mathbf{b} è la forza esterna. Ω_{τ_n} rappresenta il contorno della forza, Ω_{τ_d} rappresenta il contorno degli spostamenti e si hanno: $\Omega_{\tau_n} \cap \Omega_{\tau_d} = \emptyset$ e $\Omega_{\tau_n} \cup \Omega_{\tau_d} = \Omega_\tau$. \mathbf{g}_d è il vincolo volumetrico degli spostamenti mentre \mathbf{g}_n è il vincolo volumetrico delle forze.

La prima equazione in (3.32) corrisponde alla versione statica dell'equazione del moto peridynamica quando l'inerzia viene trascurata.

Si può derivare il teorema di reciprocità come in [11] ottenendo

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{D}(\Theta_4 : \mathcal{D}^*(\mathbf{v}_2)) - \mathbf{v}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{D}(\Theta_4 : \mathcal{D}^*(\mathbf{v}_1))] d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} [\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{N}(\Theta_4 : \mathcal{D}^*(\mathbf{v}_2)) - \mathbf{v}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{N}(\Theta_4 : \mathcal{D}^*(\mathbf{v}_1))] d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Si può osservare che il dominio di integrazione del termine destro dell'equazione (3.33) è il vincolo volumetrico del contorno che ha misura non nulla. Per questo motivo se si definisse un boundary element method basato sull'equazione (3.33) si perderebbero i vantaggi di poter trattare contorni complessi e di avere la riduzione di dimensioni, che sono i vantaggi di questo metodo.

Si introduce un vincolo addizionale al precedente in modo da trasformare l'integrale in uno con contorno classico per l'equazione (3.33).

Lo spostamento a $\partial\Omega$ dato in (3.32) è denotato con

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (3.34)$$

dove $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ rappresenta il campo di spostamento dato dalla soluzione del problema (3.32) mentre $\partial\Omega$ è il contorno locale. Quando la soluzione di $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ è data si può calcolare la trazione superficiale tramite la definizione di stress di Cauchy nella Peridynamics:

$$\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{v})(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} : ([\mathbf{F}(\mathbf{v})]^T + \mathbf{F}(\mathbf{v}) - 2\mathbf{I}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (3.35)$$

dove \mathbf{I} è il tensore metrico, \mathbf{C} è il tensore elastico, $\bar{\mathbf{T}}$ è l'operatore di trazione superficiale non-locale, \mathbf{n} è la normale al bordo e \mathbf{F} è il gradiente di deformazione per la Peridynamics:

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \left[\int_{\mathcal{H}_x} \underline{\omega}(\boldsymbol{\xi}) (\mathbf{v}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, \mathbf{t}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t})) \otimes \boldsymbol{\xi} d\mathbf{V}_{\boldsymbol{\xi}} \right] \cdot \left[\int_{\mathcal{H}_x} \underline{\omega}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} d\mathbf{V}_{\boldsymbol{\xi}} \right]^{-1} \quad (3.36)$$

Il contorno $\partial\Omega$ può essere diviso in due parti: il contorno dello spostamento locale

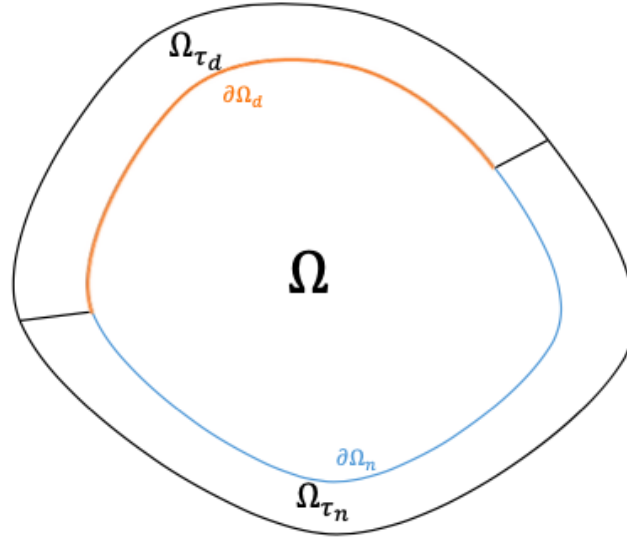


Figura 3.3: Rappresentazione del contorno locale [21]. Il dominio Ω è contenuto dal contorno non-locale $\partial\Omega_{\tau_d} \cup \partial\Omega_{\tau_n}$, l'intersezione tra il dominio e il contorno non-locale fornisce il contorno locale $\partial\Omega_d \cup \partial\Omega_n$.

$\partial\Omega_d = \text{Encl}(\Omega_{\tau_d}) \cap \Omega$ e il contorno della forza locale $\partial\Omega_n = \text{Encl}(\Omega_{\tau_n}) \cap \Omega$. Questo contorno può essere visto in fig. 3.3.

Si vuole convertire l'integrale nel dominio volumetrico Ω_{τ} in un integrale su $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{\tau}} \mathbf{v}_p(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{N}(\Theta : \mathcal{D}^*(\mathbf{v}))(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial\Omega_n} \mathbf{v}_p(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{v})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_d} \mathbf{v}_p(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{v})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.37)$$

in cui \mathbf{v}_p è un possibile stato deformato e \mathbf{v} è lo stato deformato che dipende da \mathbf{g}_d e \mathbf{g}_n .

Il possibile stato deformato è un qualsiasi stato che rispetta il seguente vincolo:

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{d_p}(\mathbf{x}) \quad \text{per } \mathbf{x} \in \Omega_{\tau_d} \quad (3.38)$$

Si può osservare che l'integrale nel lato sinistro dell'equazione (3.37) rappresenta il lavoro fatto dalla forza di massa imposta sulla possibile deformazione mentre l'integrale nel lato destro rappresenta il lavoro fatto dalla trazione superficiale nel senso classico. Pertanto la condizione di equivalenza nell'equazione (3.37) può essere considerata come il principio dei lavori virtuali che collega il vincolo volumetrico con le condizioni al contorno classiche.

Inserendo il vincolo matematico (3.38) nell'equazione (3.37) e considerando due problemi aventi spostamenti $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$, si può riscrivere il

teorema di reciprocità (3.33) come:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{D}(\Theta : \mathcal{D}^*(\mathbf{v}_2))(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{D}(\Theta : \mathcal{D}^*(\mathbf{v}_1))(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}_2)(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}_1)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Usando il teorema di reciprocità in equazione (3.39) si può derivare l'equazione integrale al bordo che risolve il problema statico per la Peridynamics seguendo il processo sviluppato per la teoria classica.

Si considerano: il *problema 1* nel teorema di reciprocità che è il problema in esame

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\Theta : \mathcal{D}^*(\mathbf{u}))(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_d(\mathbf{x}) & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega_{\tau_d} \\ \mathcal{N}(\Theta : \mathcal{D}^*(\mathbf{u}))(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_n(\mathbf{x}) & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega_{\tau_n} \end{cases} \quad (3.40)$$

e il *problema 2* che è la soluzione fondamentale $\bar{\mathbf{v}}_k$ del dominio infinito

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\Theta : \mathcal{D}^*(\mathbf{v}_k))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\mathbf{e}_k = \mathbf{0} & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{v}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \bar{\mathbf{v}}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) & \text{per } \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega_{\tau_d} \\ \mathcal{N}(\Theta : \mathcal{D}^*(\mathbf{v}_k))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathcal{N}(\Theta : \mathcal{D}^*(\mathbf{v}_k))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega_{\tau_n} \end{cases} \quad (3.41)$$

dove \mathbf{e}_k è il vettore delle coordinate della base, $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ è la delta di Dirac e $\bar{\mathbf{v}}_k$ soddisfa

$$\mathcal{D}(\Theta : \mathcal{D}^*(\bar{\mathbf{v}}_k))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\mathbf{e}_k = \mathbf{0} \quad (3.42)$$

Applicando $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}$ e $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_k$ all'equazione (3.39) si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{D}(\Theta : \mathcal{D}^*(\mathbf{v}_k))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{v}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathcal{D}(\Theta : \mathcal{D}^*(\mathbf{u}))(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{v}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.43)$$

A questo punto si possono inserire le prime equazioni di (3.40) e (3.41) nell'equazione (3.43):

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mathbf{u}(-\delta \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{e}_k dx + \int_{\Omega} \mathbf{v}(-\delta \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dx \\
&= \int_{\partial \Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{v}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) dx
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Per ottenere l'equazione integrale di bordo statica occorre valutare il limite $\mathbf{x} \rightarrow \partial \Omega$ dell'equazione (3.44). Per valutare questo limite si divide $\partial \Omega$ in due parti S e $\partial \Omega - S$. Si costruisce un piccolo arco S^+ avente \mathbf{x}_0 come centro e ε come raggio, quindi si usa $\partial \Omega - S \cup S^+$ per sostituire $\partial \Omega$ come nuovo bordo, come in fig. 3.4. In questo modo l'integrale nel nuovo contorno non risulta singolare.

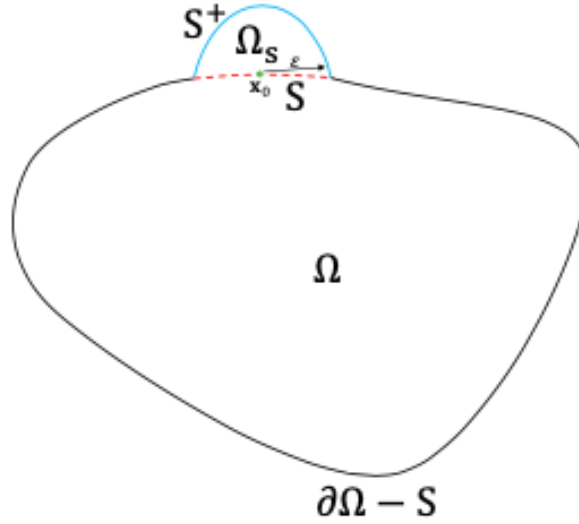


Figura 3.4: Rappresentazione geometrica del processo limite al contorno [21]. Al contorno $\partial \Omega$ si sostituisce il tratto S con S^+ che è il contorno della calotta Ω_s , di raggio ξ e centro \mathbf{x}_0 .

Si valuta il limite $\varepsilon \rightarrow 0$ in modo da far convergere il nuovo contorno a quello originale. In questo modo l'equazione (3.44) diventa:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega + \Omega_s} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot (-\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{e}_k) dx \right) + \int_{\Omega + \Omega_s} \mathbf{v}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial \Omega - S} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{v}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) dx \right. \\
&\quad \left. + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S^+} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{v}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) dx \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

dove Ω_s è l'area tra S e S^+ .

Il limite del lato sinistro all'uguale dell'equazione (3.45) è $-u_k(\mathbf{x}_0)$ a causa della delta di Dirac. Il limite del primo termine del lato destro è il valore principale di Cauchy per l'integrale in $\partial\Omega$.

Per il limite del secondo termine del lato destro si deve analizzare la singolarità dell'integrando e dell'intervallo di integrazione. L'integrando ha due tipi di singolarità: la singolarità logaritmica e la delta di Dirac. Per la delta di Dirac l'integrale è identicamente nullo dato che $\mathbf{x}_0 \notin S^+$. La singolarità logaritmica, invece, si sa che è integrabile quindi il limite risulta nullo.

A seguito di queste considerazioni si può semplificare l'equazione (3.45) come:

$$\begin{aligned} & -u_k(\mathbf{x}_0) + \int_{\Omega} \mathbf{v}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{T}(\mathbf{v}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{v}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.46)$$

dove con f si denota il valore principale di Cauchy. Dividendo $\partial\Omega$ in $\partial\Omega_n$ e $\partial\Omega_d$ si riscrive l'equazione (3.46) come

$$\begin{aligned} & -u_k(\mathbf{x}_0) = - \int_{\partial\Omega_d} \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{v}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ & \int_{\partial\Omega_n} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{T}(\mathbf{v}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{v}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{v})(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{v}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.47)$$

L'equazione (3.47) è l'equazione integrale al bordo, per la Peridynamics statica, che si stava cercando che si può osservare avere una forma diversa rispetto a quella della teoria classica. Quando l'orizzonte tende a zero, però, l'operatore non-locale tende a quello locale mentre il vincolo volumetrico converge al contorno classico, pertanto la soluzione dell'equazione (3.47) convergerà alla soluzione classica.

3.3 Trattamento numerico dei problemi statici

Per problemi statici il procedimento risolutivo è analogo a quello del boundary element method classico. La differenza sta nel modo in cui vengono calcolati gli integrali nella formulazione discretizzata degli elementi di bordo [21].

3.3.1 Formulazione discreta degli elementi di bordo

La forma discreta della griglia di interpolazione è:

$$\begin{cases} u_j(\mathbf{x}') = \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^{N_e^i} \bar{N}_s^i(\mathbf{x}') u_j(\mathbf{x}_s^i) \\ T_j(\mathbf{x}') = \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^{N_e^i} \bar{N}_s^i(\mathbf{x}') T_j(\mathbf{x}_s^i) \\ \partial\Omega = \sum_{i=1}^m \partial\Omega_i \end{cases} \quad (3.48)$$

dove: m indica il numero di elementi in cui si divide il contorno geometrico, i è il numero dell'elemento, N_e^i è il numero totale di nodi per elemento, \bar{N}_s^i è la funzione di forma del nodo s dell'elemento i , s è il numero del nodo interno all'elemento e \mathbf{x}_s^i sono le coordinate del nodo s dell'elemento i .

Considerando le equazioni in (3.48) si può discretizzare l'equazione (3.47) come:

$$\begin{aligned} u_k(\mathbf{x}_\alpha) + \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^{N_e^i} \sum_{j=1}^{dm} \int_{\partial\Omega_i} T_{kj}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha) \bar{N}_s^i(\mathbf{x}') u_j(\mathbf{x}_s^i) d\mathbf{x}' \\ = \sum_{j=1}^{dm} \int_{\Omega} v_{kj}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha) f_j(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^{N_e^i} \sum_{j=1}^{dm} \int_{\partial\Omega_i} v_{kj}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha) \bar{N}_s^i(\mathbf{x}') T_j(\mathbf{x}_s^i) d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (3.49)$$

in cui α indica il numero del nodo rispetto al bordo, quindi il numero totale di nodi è pari a n . La relazione tra le diverse numerazioni può essere vista in fig. 3.5.

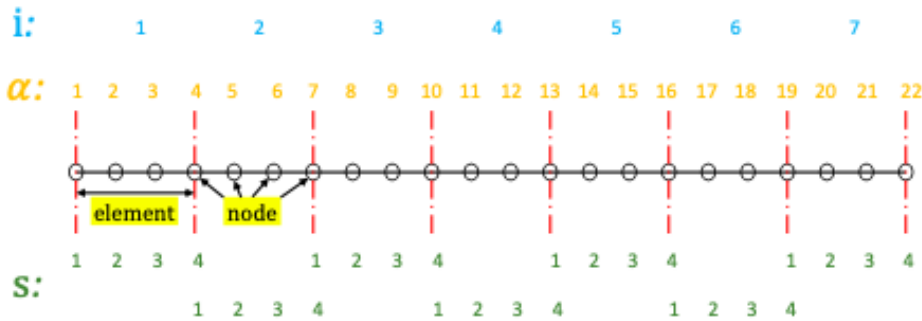


Figura 3.5: Relazione tra i numeri degli elementi e dei nodi [21]. L'indice i indica l'elemento considerato, l'indice s è riferito al nodo all'interno dell'elemento mentre α fa riferimento al nodo in ordine sequenziale.

Il termine u_{jk} rappresenta la componente j -esima della funzione di Green quando una forza di massa unitaria in direzione \mathbf{e}_k è applicata ad un materiale infinitamente esteso. T_{jk} è la j -esima componente direzionale della forza superficiale che corrisponde alla funzione di Green, mentre \mathbf{x}_α è la coordinata nodale.

Da [41] si trova la funzione di Green infinita espressa come:

$$u_{ij}(\mathbf{x}) = u_A(x) \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{x^2} u_B(x) \quad (3.50)$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker, $u_A(x)$ e $u_B(x)$ sono relative alle dimensioni. Introducendo la seguente notazione

$$\begin{cases} A_k^{isj}(\mathbf{x}_\alpha) \equiv \int_{\partial\Omega_i} T_{kj}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha) \bar{N}_s^i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ B_k^{isj}(\mathbf{x}_\alpha) \equiv \int_{\partial\Omega_i} u_{kj}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha) \bar{N}_s^i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ F_k(\mathbf{x}_\alpha) \equiv \sum_{j=1}^{dm} \int_{\Omega} u_{kj}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha) \mathbf{f}_j(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \end{cases} \quad (3.51)$$

si può semplificare l'equazione (3.49) come

$$u_k(\mathbf{x}_\alpha) + \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^{N_e^i} \sum_{j=1}^{dm} A_k^{isj}(\mathbf{x}_\alpha) u_j(\mathbf{x}_s^i) = \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^{N_e^i} \sum_{j=1}^{dm} B_k^{isj}(\mathbf{x}_\alpha) T_j(\mathbf{x}_s^i) + F_k(\mathbf{x}_\alpha) \quad (3.52)$$

che in forma compatta risulta

$$[\mathbf{I}][\mathbf{U}] + [\mathbf{A}][\mathbf{U}] = [\mathbf{B}][\mathbf{T}] + [\mathbf{F}] \quad (3.53)$$

dove $[\mathbf{U}]$ è il vettore delle componenti di spostamento di tutti i nodi, $[\mathbf{T}]$ è il vettore con le componenti della forza superficiale di tutti i nodi.

Unendo due termini nel lato sinistro dell'equazione (3.54) la si può scrivere come

$$[\mathbf{C}][\mathbf{U}] = [\mathbf{B}][\mathbf{T}] + [\mathbf{F}] \quad (3.54)$$

con $[\mathbf{C}] = [\mathbf{I}] + [\mathbf{A}]$.

3.3.2 Calcolo della formulazione discreta degli elementi di bordo

Per poter definire il problema discreto occorre calcolare i tre integrali presenti in (3.51). Questo viene fatto sostituendo le equazioni (3.36), (3.50) e (3.35) in (3.51), ottenendo:

$$\begin{cases} A_k^{isj}(\mathbf{x}_\alpha) = \\ \sum_{l=1}^{dm} \sum_{p=1}^{dm} \sum_{q=1}^{dm} \sum_{w=1}^{dm} \int_{\partial\Omega_i} [P_{kpw}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha) K_{wp}^{-1} + P_{kqw}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha) K_{wp}^{-1}] \mathbf{n}_l \mathbf{C}_{ljpq}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha) \bar{N}_s^i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ B_k^{isj}(\mathbf{x}_\alpha) = \\ \int_{\partial\Omega_i} u_A(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha|) \delta_{kj} \bar{N}_s^i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \int_{\partial\Omega_i} \frac{(x' - x_\alpha)_k (x' - x_\alpha)_j}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha|^2} u_B(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha|) \bar{N}_s^i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ F_k(\mathbf{x}_\alpha) = \\ \int_{\Omega} u_A(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha|) f_k(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \sum_{j=1}^{dm} \int_{\Omega} \frac{(x' - x_\alpha)_k (x' - x_\alpha)_j}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha|^2} u_B(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha|) f_j(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \end{cases} \quad (3.55)$$

Le definizioni di $P_{kpw}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha)$ e K_{wq} sono:

$$\begin{aligned}
& P_{kpw}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha) = \\
& \int_{\mathcal{H}_x} \underline{\omega}(\boldsymbol{\xi}) \left(u_A(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha + \boldsymbol{\xi}|) \delta_{kp} + \frac{(x' - x_\alpha + \xi)_k (x' - x_\alpha + \xi)_p}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha + \boldsymbol{\xi}|^2} u_B(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha + \boldsymbol{\xi}|) \right) \xi_w dV_\xi \\
& - \int_{\mathcal{H}_x} \underline{\omega}(\boldsymbol{\xi}) \left(u_A(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha|) \delta_{kp} + \frac{(x' - x_\alpha)_k (x' - x_\alpha + \xi)_p}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha|^2} u_B(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha|) \right) \xi_w dV_\xi
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$K_{wq} = \int_{\mathcal{H}_x} \underline{\omega}(\boldsymbol{\xi}) \xi_w \xi_q dV_\xi \tag{3.57}$$

dove $\underline{\omega}(\boldsymbol{\xi})$ è la funzione peso non-locale. Due tipi di funzioni peso non-locali molto usate in peridinamica sono: la distribuzione costante (3.58) e la distribuzione di Gauss (3.59):

$$\underline{\omega}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1 & |\boldsymbol{\xi}| \leq h_r \\ 0 & |\boldsymbol{\xi}| > h_r \end{cases} \tag{3.58}$$

$$\underline{\omega}(\boldsymbol{\xi}) = \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{(h_r)^2}\right) \tag{3.59}$$

dove h_r è la lunghezza caratteristica.

Si può osservare che solamente l'integrale che coinvolge u_A come parte della funzione di Green infinita richiede un trattamento speciale, a causa di singolarità, mentre gli altri integrali possono essere gestiti con l'integrazione gaussiana.

Gli integrali contenenti u_A vengono divisi in due categorie di contorni e volumi:

$$\int_{\partial\Omega} u_A(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0|) \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{3.60}$$

$$\int_{\Omega} u_A(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0|) \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{3.61}$$

dove $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in C^\infty$ e $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$.

Sostituendo l'equazione (3.56) nella prima equazione di (3.55) si ottengono i seguenti integrali:

$$\int_{\partial\Omega_i} \int_{\mathcal{H}_x} \underline{\omega}(\boldsymbol{\xi}) u_A(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha + \boldsymbol{\xi}|) \delta_{kp} \xi_w K_{wp}^{-1} n_l C_{ljpq}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha) \bar{N}_s^i(\mathbf{x}') dV_\xi d\mathbf{x}' \tag{3.62}$$

$$\int_{\partial\Omega_i} \int_{\mathcal{H}_x} \underline{\omega}(\boldsymbol{\xi}) u_A(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha|) \delta_{kp} \xi_w K_{wp}^{-1} n_l C_{ljpq}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha) \bar{N}_s^i(\mathbf{x}') dV_\xi d\mathbf{x}' \tag{3.63}$$

che hanno la stessa forma delle equazioni (3.61) e (3.60) rispettivamente. Il primo integrale del termine destro della seconda equazione in (3.55) è

$$\int_{\partial\Omega_i} u_A(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha|) \delta_{kj} \bar{N}_s^i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.64)$$

che ha la stessa forma di (3.60). Il primo integrale del termine destro della terza equazione in (3.55) è

$$\int_{\Omega} u_A(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\alpha|) \delta_{kj} \mathbf{f}_k(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.65)$$

che ha la stessa forma di (3.61).

Secondo [41] per problemi 2D u_A può essere decomposto in tre parti: la parte classica (3.66), la parte non-locale e convergente (3.67) e la parte divergente (3.68):

$$(u_A)^{classical}(x) = -\frac{8 \ln x}{9\pi E} \quad (3.66)$$

$$(u_A)^{nonlocal}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0(kx) k \left(\frac{1}{M_{\perp}^{II}(k)} - \frac{1}{M^{II}(\infty)} - \frac{8}{3Ek^2} \right) dk \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{J_1(kx)}{x} \left(\frac{1}{M_{\parallel}^{II}(k)} - \frac{1}{M_{\perp}^{II}(k)} + \frac{16}{9Ek^2} \right) dk \quad (3.67)$$

$$(u_A)^{divergent}(x) = \frac{\delta^{II}(\mathbf{x})}{M^{II}(\infty)} \quad (3.68)$$

$$u_A(x) = (u_A)^{classical}(x) + (u_A)^{nonlocal}(x) + (u_A)^{divergent}(x) \quad (3.69)$$

dove gli apici II indicano il numero di dimensioni.

Gli integrali nelle equazioni (3.60) e (3.61) sono divisi in tre parti. La parte relativa all'equazione (3.67) è non singolare quindi può essere risolta con l'integrazione gaussiana ordinaria. La parte che corrisponde all'equazione (3.66) corrisponde all'elemento di bordo classico, perciò può essere calcolata seguendo il boundary element method classico.

Focalizzandosi sugli integrali dell'equazione (3.68) si ha che essi sono la convoluzione della delta di Dirac in $\partial\Omega$ e Ω :

$$\int_{\partial\Omega} \delta^{II}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.70)$$

$$\int_{\Omega} \delta^{II}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.71)$$

Per la definizione del valore principale di Cauchy l'equazione (3.70) si può esprimere come:

$$\oint_{\partial\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega \setminus \{U_0(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \cap \partial\Omega\}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad (3.72)$$

Usando la proprietà della delta di Dirac di essere invariante alla convoluzione l'equazione (3.71) risulta $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. In aggiunta, per la matrice \mathbf{A} non si computano direttamente i singoli integrali nelle equazioni (3.62) e (3.63) perché risulta possibile rimuovere le singularità applicando uno spostamento rigido.

Da [41] è possibile ricavare i termini $M_{\perp}^{II}, M_{\parallel}^{II}(k)$ e $M^{II}(\infty)$ che compaiono nell'equazione (3.67) come:

$$M_{\parallel}^{II} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \lambda(\xi) (\xi \cos\theta)^2 (1 - \cos(k\xi \cos\theta)) \xi d\theta d\xi = 2\pi \int_0^l \lambda(\xi) \xi^3 A_1(k\xi) d\xi \quad (3.73)$$

$$M_{\perp}^{II} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \lambda(\xi) (\xi \sin\theta)^2 (1 - \cos(k\xi \cos\theta)) \xi d\theta d\xi = 2\pi \int_0^l \lambda(\xi) \xi^3 A_2(k\xi) d\xi \quad (3.74)$$

$$M^{II}(\infty) = \pi \int_0^l \lambda(\xi) \xi^3 d\xi \quad (3.75)$$

$$A_1^{II}(k\xi) = \frac{1}{2} - J_0(k\xi) + \frac{J_1(k\xi)}{k\xi} \quad (3.76)$$

$$A_2^{II}(k\xi) = \frac{1}{2} - \frac{J_1(k\xi)}{k\xi} \quad (3.77)$$

dove: $\lambda(\xi)$ è il micromodulo del materiale, ξ indica la lunghezza del bond, k rappresenta il numero d'onda mentre J_0 e J_1 sono funzioni di Bessel del primo tipo di ordine 0 e 1, rispettivamente.

Da [41] si può ricavare anche la funzione u_B come:

$$u_B = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[(a_1^{II}(kx) - a_2^{II}(kx)) \left(\frac{1}{M_{\perp}^{II}(k)} - \frac{1}{M_{\parallel}^{II}(k)} \right) \right] k dk \quad (3.78)$$

dove: $a_{1,2}^{II}(kx) = A_{1,2}^{II}(kx) - 1/2$.

Capitolo 4

Implementazione del BEM per problemi peridinamici

Nel capitolo precedente si sono descritte le equazioni che permettono di determinare gli spostamenti e le trazioni che si generano sul dominio in funzione delle condizioni al contorno imposte.

In questo capitolo verrà descritto il metodo logico-matematico con cui si è scritto il codice Matlab che permette di ottenere soluzioni numeriche di alcuni problemi.

4.1 Processo logico di implementazione

Nel capitolo 2 si è potuto capire che per risolvere problemi con il Boundary Element Method è necessario conoscere le soluzioni fondamentali, o soluzioni di Green, del problema. Ossia le soluzioni di spostamento u^* e tensione t^* , nelle direzioni principali di riferimento, in un punto j a seguito di una forza unitaria applicata in un punto i di un corpo infinitamente esteso.

Utilizzando la meccanica classica queste soluzioni tensoriali possono essere ottenute analiticamente tramite le soluzioni di Kelvin [13]. Per la Peridynamics si possono avere delle soluzioni come mostrato nel capitolo 3 la cui implementazione, però, può risultare difficoltosa. Per questo motivo si è voluto realizzare un codice MATLAB che riproduca numericamente le soluzioni fondamentali, utilizzando esse per l'implementazione del metodo BEM con la teoria peridinamica.

Per realizzare questo codice si sono inizialmente scritti due script MATLAB: uno che implementasse la teoria peridinamica per problemi statici e uno che implementasse in metodo degli elementi finiti (FEM). Per verificare la correttezza dei codici si sono effettuati alcuni problemi di validazione, le cui soluzioni sono note. Questi problemi sono gli stessi che verranno usati per validare il codice finale del BEM quindi tutti i risultati verranno presentati nelle sezioni seguenti 4.3.

Una volta validati questi codici si è simulato il problema della forza unitaria su piastra infinita, ossia utilizzando un dominio molto più grande di quello degli esempi e con dei vincoli che perturbassero il meno possibile la soluzione. Per evitare le perturbazioni dei vincoli si sono presi in considerazione solamente i risultati nella zona centrale del dominio.

I risultati ottenuti sono stati raccolti in un nuovo script MATLAB in modo da essere analizzati e raccolti in delle griglie di interpolazione. In questo modo è possibile ottenere i risultati delle soluzioni anche in punti intermedi a quelli analizzati o, tramite estrapolazione, in punti esterni al dominio considerato. Per verificare l'accuratezza dei risultati ottenuti dall'interpolazione li si è paragonati con le soluzioni analitiche proposte da Kelvin [13].

A questo punto si è potuto scrivere il codice finale in cui è stato implementato il metodo BEM per la risoluzione di problemi meccanici statici.

4.2 Implementazione in MATLAB

La descrizione in maggior dettaglio dei diversi codici viene presentata di seguito. Questi codici sono stati prodotti per la soluzione di problemi meccanici bidimensionali in cui il dominio ha una forma quadrangolare.

4.2.1 Codice FEM

Il codice MATLAB per la soluzione di problemi con gli elementi finiti viene nominato `FEM_Main.m` e la sua struttura può essere rappresentata con il diagramma di flusso in fig. 4.2.

Inizialmente vengono definiti i parametri del modello. Tra questi parametri si hanno quelli geometrici come: la lunghezza dei lati, l_x e l_y , del dominio e il passo di griglia dx . Altri parametri sono relativi al materiale, ossia: il modulo di Young E e il coefficiente di Poisson ν .

Una volta fatto questo si vuole discretizzare il dominio geometrico in una griglia di punti in cui verranno calcolate le soluzioni. Chiamando la funzione `Griglia.m` si effettua questo processo e il suo output viene fornito alla funzione `QUAD_El.m` che permette di ottenere una mesh composta da elementi quadrati con nodi ai vertici.

A questo punto si ha un dominio discretizzato in elementi e quindi si può calcolare la matrice di rigidezza del sistema che, dato che si stanno analizzando problemi statici lineari e con piccoli spostamenti, resterà costante. Il calcolo di questa matrice avviene tramite la funzione `K_FEM.m` e osservando che è una matrice composta da mol-

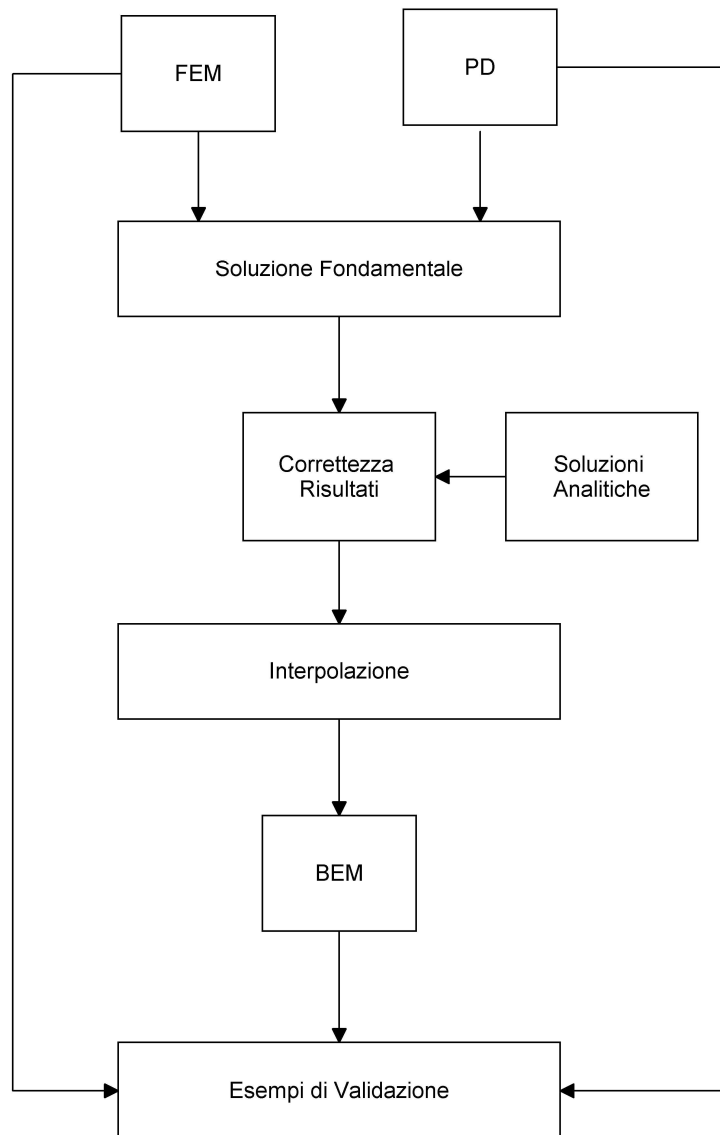


Figura 4.1: Flowchart del processo logico.

ti elementi nulli si utilizza il comando *sparse* per ridurre la memoria richiesta per il suo salvataggio.

Per ottenere le soluzioni si deve risolvere il sistema lineare:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (4.1)$$

dove $[\mathbf{K}]$ è la matrice di rigidezza, \mathbf{u} è il vettore degli spostamenti e \mathbf{f} è il vettore delle forze.

Per risolvere questo sistema è necessario conoscere le condizioni al contorno applicate ossia spostamenti e forze già note perché applicate esternamente. Infatti i vincoli forniscono ai gradi di libertà di movimento un valore noto e nullo mentre le forze esterne sono applicate ai nodi ed hanno un'intensità nota.

Nel codice MATLAB si inizializzano i vettori di spostamento e di forze tramite la funzione `bvinput.m`.

Conoscendo le condizioni al contorno si può risolvere il sistema lineare ridotto. Ossia dalla matrice di rigidezza $[\mathbf{K}]$ vengono eliminate le righe e le colonne corrispondenti ai gradi di libertà vincolati. In questo modo si ottiene un sistema lineare ridotto in cui tutte le incognite sono spostamenti.

Una volta noti gli spostamenti di tutti i nodi è possibile utilizzare il sistema iniziale per calcolare le forze che non sono note, ossia le reazioni vincolari che si hanno in corrispondenza dei gradi di libertà vincolati.

Una grandezza molto importante da calcolare nella meccanica classica sono le tensioni. Per il loro computo si calcolano inizialmente le deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$ tramite la relazione:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

dove: u sono gli spostamenti lungo la direzione x e v sono quelli lungo y .

Considerando materiali isotropi in regime elastico lineare si ha una relazione lineare tra deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$ e tensioni $\boldsymbol{\sigma}$ nella forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

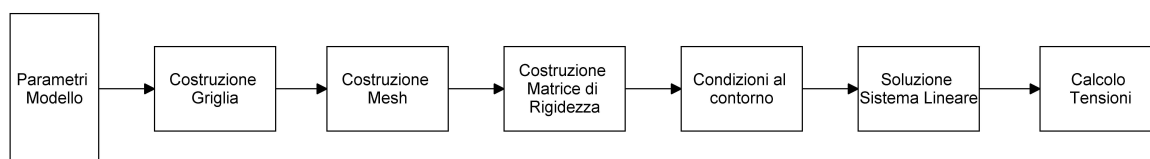


Figura 4.2: Flowchart dello script FEM.

Per il calcolo delle deformazioni è necessario calcolare delle derivate, le quali però sono definite nel continuo. Per valutarle nel caso discreto si sono utilizzate le differenze finite centrate del secondo ordine. Tramite esse la derivata spaziale di una funzione ϕ può essere calcolata tramite il valore numerico della funzione stessa nel punto antecedente e successivo al punto di interesse:

$$\phi_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2dx} \quad (4.4)$$

4.2.2 Codice Peridynamics

Lo script MATLAB `PD_Main.m` per la soluzione di problemi meccanici statici tramite la teoria peridinamica è molto simile allo script del codice FEM. In modo analogo a quanto fatto in `FEM_Main.m` vengono definiti i parametri del modello, però con l'utilizzo di questa teoria devono essere definiti: l'orizzonte δ , il rapporto m , da cui si otterrà il passo di griglia $dx = \delta/m$, e il micromodulo c .

La griglia di punti del dominio viene calcolata richiamando la funzione `Griglia.m`, che è la stessa usata per il caso FEM.

A questo punto non si creano degli elementi, dato che si utilizza un modello meshless, ma si definiscono i bond tra i vari nodi all'interno dell'orizzonte attraverso la funzione `Bond.m`. Questa funzione valuta per ogni nodo tutti i possibili nodi famiglia che può avere, la loro distanza relativa ξ e la *pairwise force function*, tenendo già conto del parametro correttivo β .

Tutti i bond vengono considerati come degli elementi asta, come visto nella sezione 1.7.4, quindi si può studiare il modello con elementi finiti in cui si avrà solo un coefficiente diverso rispetto a quello che si ha per le aste della meccanica classica:

$$[\mathbf{K}]_{PD} = \frac{c\beta V_p V_i}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

in cui: c è il micromodulo del materiale, β è il parametro correttivo del volume, V_p e V_i sono i volumi associati al nodo famiglia e sorgente, rispettivamente, mentre L indica la lunghezza del bond considerato.

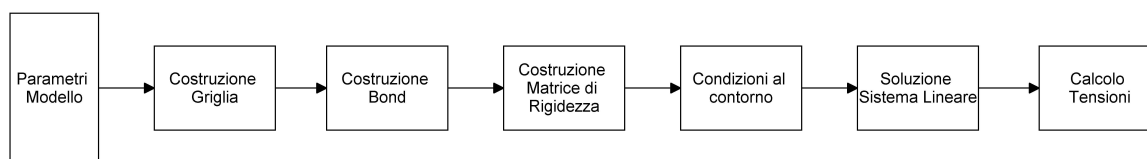


Figura 4.3: Flowchart dello script PD.

Questa relazione viene utilizzata dalla funzione `K.function.m` per costruire la matrice di rigidezza del sistema peridinamico.

Una volta costruita la matrice di rigidezza gli spostamenti vengono ottenuti allo stesso modo di come è stato fatto per il modello FEM.

In modo differente a come fatto nello script FEM è il calcolo delle tensioni. In peridynamics le tensioni vengono calcolate come descritto nella sezione 1.6 tramite la funzione `ForceFlux.m`.

4.2.3 Soluzione Fondamentale

Dopo aver validato l'accuratezza dei codici MATLAB degli elementi finiti e della peridinamica si è passati all'analisi del problema di interesse, ossia il calcolo delle soluzioni fondamentali.

Il codice utilizzato è quello descritto precedentemente, gli unici cambiamenti sono stati nelle condizioni al contorno e nelle dimensioni del dominio, ossia non potendo rappresentare un dominio infinito si è preso in esame un quadrato di lato pari a $l = 2m$, ossia 20 volte superiore rispetto alle dimensioni degli esempi di validazione degli algoritmi.

Per perturbare il meno possibile la soluzione si sono utilizzati i vincoli in modo da rispettare il più possibile il comportamento delle soluzioni analitiche. Infatti la scelta dei vincoli si è effettuata utilizzando i risultati forniti dalle equazioni di Kelvin, descritte in [13], che, per problemi 2D, per spostamenti e tensioni sono, rispettivamente:

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (4.6)$$

$$t_{ij}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j}] + (1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\} \quad (4.7)$$

dove: G è il modulo di taglio del materiale, ν è il coefficiente di Poisson, δ_{ij} è il delta di Kronecker, r è la distanza tra il punto di applicazione della forza e il punto dove si calcola la soluzione, i è la direzione della forza applicata mentre j è la direzione lungo

cui si valuta la direzione, la dicitura $r_{,i}$ indica che la grandezza r viene derivata rispetto ad i e, analogamente, questo vale per $r_{,j}$.

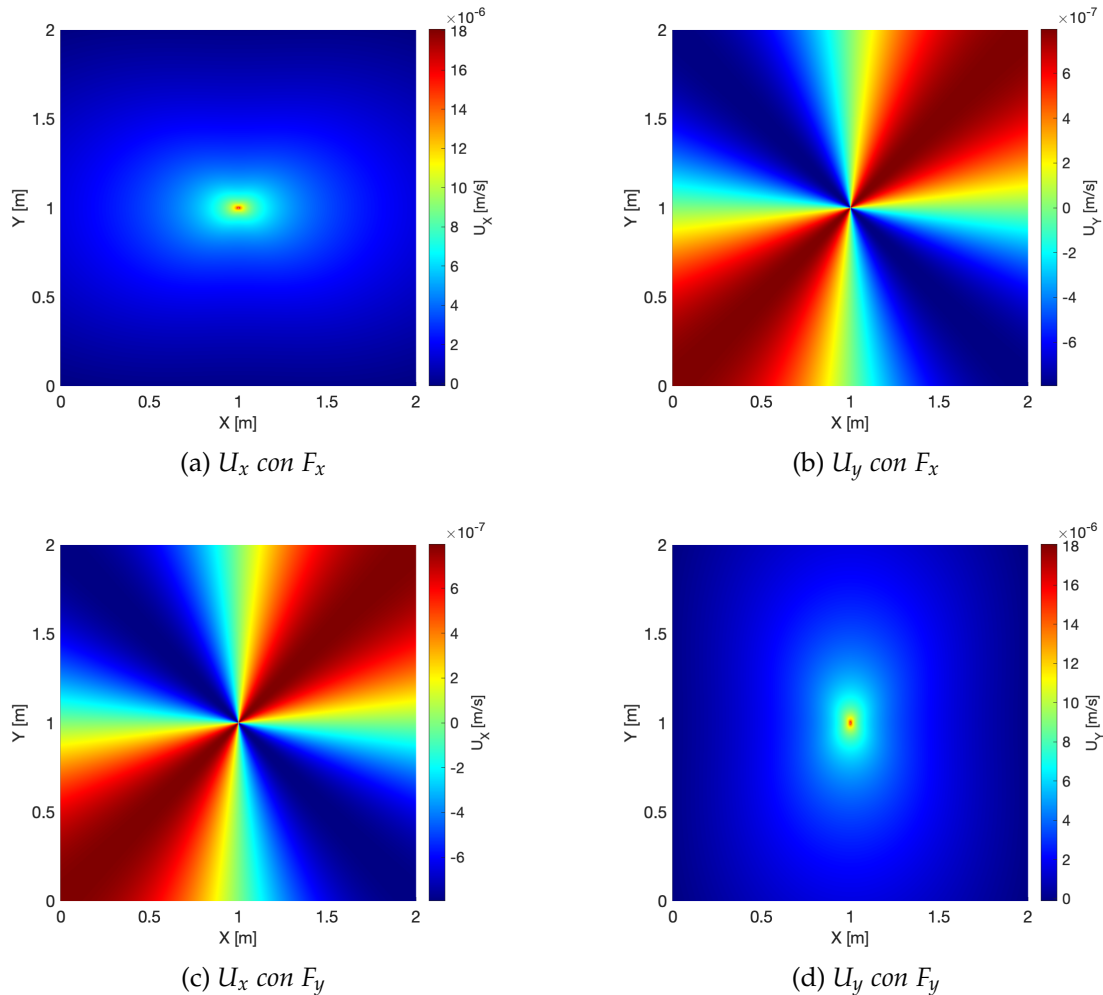


Figura 4.4: Soluzioni fondamentali di spostamento nel dominio considerato.

Considerando queste soluzioni di spostamento con forzanti aventi le direzioni principali del sistema di riferimento, mostrate in fig. 4.4, si può osservare, dalle immagini b) e c), che i nodi passanti per il il punto di applicazione della forza e allineati con gli assi principali del sistema di riferimento hanno spostamenti, in direzione ortogonale alla direzione della forza, che sono nulli, pertanto nella simulazione in loro corrispondenza verranno vincolati questi spostamenti.

Dalle fig. 4.4 a) e d) si osserva che gli spostamenti lungo la direzione della forza sono tanto più elevati quanto si è vicini al punto di applicazione della forza, però ai bordi paralleli alla forza si è ad una distanza tale per cui questi spostamenti tendono ad annullarsi. Prendendo visione di questo comportamento si applicheranno in questa zona i vincoli di spostamento del grado di libertà parallelo alla forza.

A sostegno di questa decisione si sono raccolti i valori di spostamento lungo la direzione della forza lungo la striscia di nodi orizzontali e verticali passanti per il centro e si sono tracciati i grafici semilogaritmici in fig. 4.5. Da essi si può osservare come in prossimità delle pareti si abbiano spostamenti i cui ordini di grandezza sono inferiori rispetto ai valori che si hanno nei nodi più vicini al centro, raggiungendo valori prossimi allo zero.

A seguito di queste osservazioni si è posto: in direzione ortogonale alla forza vincoli lungo le linee orizzontali e verticali passanti per il centro del dominio, mentre in direzione parallela alla forza dei vincoli in tutto il contorno del dominio considerato. Si sono scelti questi punti di applicazione dei vincoli perché risultano essere i luoghi in cui la soluzione analitica è nulla.

Imponendo questi vincoli si forzerà la simulazione numerica ad assumere un comportamento quanto più simile a quello che ha la soluzione analitica.

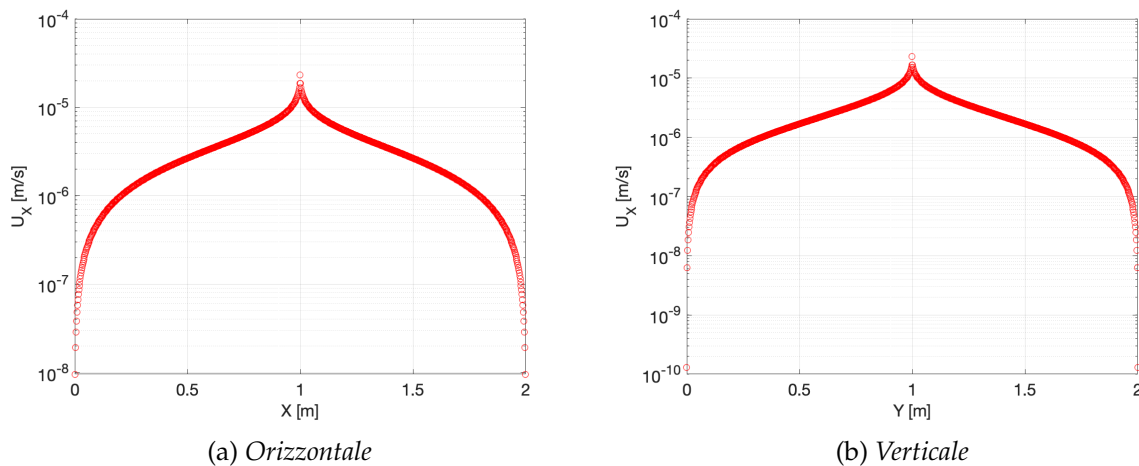


Figura 4.5: Spostamenti U_x con la forza F_x lungo le strisce di nodi orizzontali e verticali passanti per il centro.

Per questo problema si sono effettuate tre simulazioni, per ognuna delle direzioni principali che può assumere la forza unitaria, utilizzando una precisione di griglia sempre maggiore, ossia si è discretizzato ogni lato con un numero di nodi pari a: 300, 600 e 1000. L'utilizzo di griglie a diversa precisione permette di effettuare un'analisi di sensibilità dei risultati rispetto alle soluzioni analitiche. Ciò che si vuole è osservare è come l'errore che si commette, tra soluzioni numeriche ed analitiche, venga influenzato dal passo di griglia.

Considerando il caso che ci si aspetta essere più preciso, ossia quello in cui si utilizzano 1000 nodi per lato, si valuta l'errore relativo percentuale dei risultati di spostamento rispetto ai valori analitici in tutto il dominio considerato. Il grafico dell'errore è visibile in fig. 4.6 e da queste figure si può osservare che in prossimità dei bordi si

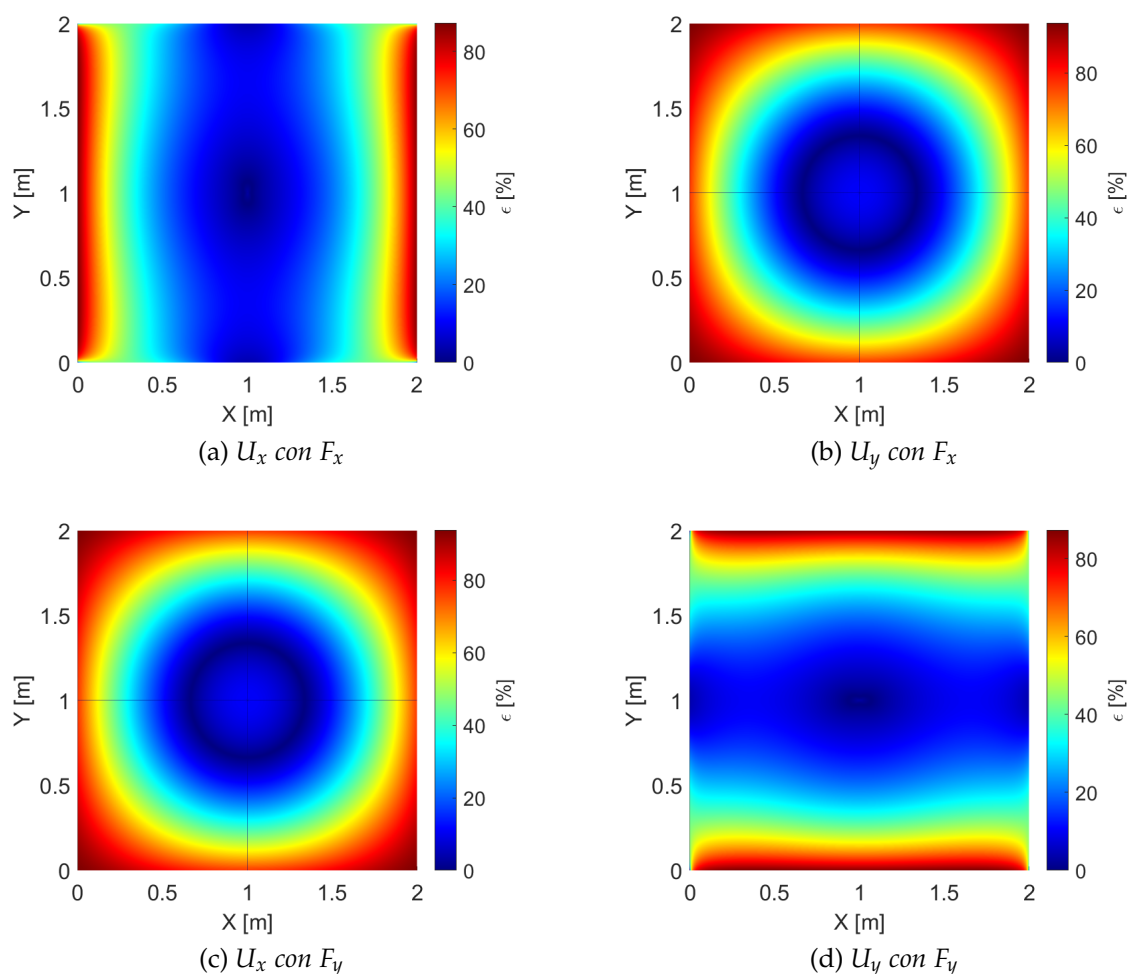


Figura 4.6: Errori relativi percentuale degli spostamenti nel dominio completo.

ha il picco degli errori. Questi errori sono dovuti alla presenza dei vincoli imposti che nel problema in esame della piastra infinita non sono presenti. Per questo motivo ci si focalizza nella zona centrale in cui l'effetto dei vincoli è trascurabile e ciò permette di apprezzare maggiormente le scale di valori in quella zona.

Per gli utilizzi delle soluzioni fondamentali nei codici successivi si è interessati ai risultati numerici attorno al punto di applicazione della forza, pertanto gli intervalli di valori considerati di seguito contengono solamente i valori che verranno utilizzati.

Osservando le soluzioni si può notare una simmetria tra la direzione della forza e direzioni degli spostamenti, pertanto per non appesantire l'elaborato si proporranno in seguito solamente i risultati dovuti alla forza F_x , essendo analoghi ai risultati calcolati con F_y .

Di seguito si mostrano gli errori relativi percentuali dei risultati di spostamento, con le soluzioni analitiche, nell'intervallo spaziale $[-0.15;0.15]m \times [-0.15;0.15]m$, dove la forza esterna è applicata nell'origine, per il modello FEM, in fig. 4.7, e per il modello

peridinamico, mostrato in fig. 4.8.

In fig. 4.7 a), c) ed e) si può osservare che l'errore relativo degli spostamenti in direzione della forza risulta sempre inferiore al 6%, quantità che si raggiunge agli estremi e che cala spostandosi verso il punto di applicazione della forza.

Dalle immagini b), d) ed f) si osserva che per gli spostamenti in direzione ortogonale alla forza si hanno degli errori relativi più elevati, con picchi fino al 12%, che non sono verso le estremità del dominio considerato ma, bensì, nella zona centrale, per poi ridursi con l'aumentare della distanza dalla forza applicata.

Da queste immagini si può anche osservare che la precisione di griglia non influenza l'accuratezza dei risultati, ciò significa che si è raggiunta la convergenza. Ciò che varia tra le diverse immagini è la nitidezza delle soluzioni, superiore dove sono superiori i nodi considerati. Essendo che questi risultati dovranno fungere da base per l'interpolazione si prenderanno in esame i quelli relativi alla simulazione con 1000 nodi per lato, questo per ridurre al minimo il numero di punti in cui non si conosce la soluzione.

Come detto in precedenza i risultati di spostamento dovuti ad una forza ortogonale a quella considerata possiedono il medesimo comportamento.

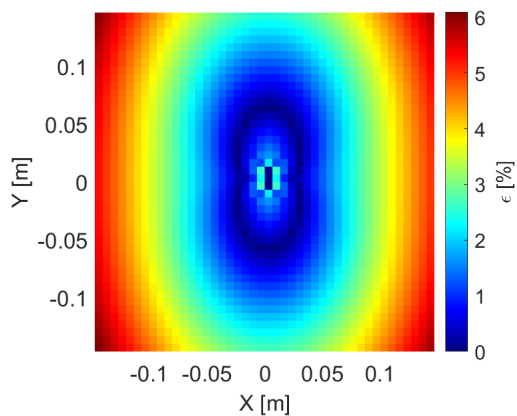
In fig. 4.8 sono mostrati gli spostamenti ottenuti con la teoria peridinamica. Ciò che si può osservare è che l'andamento qualitativo è lo stesso che si ha con il modello FEM però si hanno dei discostamenti nei valori numerici. Questo discostamento è previsto dalla teoria dato che la convergenza delle soluzioni peridinamiche con quelle della teoria classica si ha solamente quando l'orizzonte tende ad annullarsi.

Le immagini a), c) ed e) mostrano le differenze relative percentuali degli spostamenti allineati alla forza, si può osservare, come detto, il medesimo comportamenti degli errori ottenuti con il modello FEM però in questo caso si hanno degli scarti leggermente superiori, con un picco intorno all'8%.

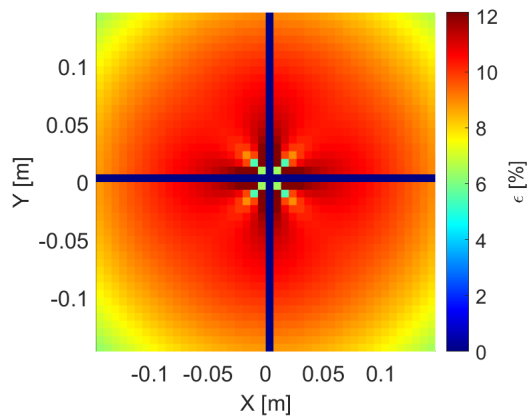
Nelle immagini b), d) ed f) sono mostrati gli scarti degli spostamenti ortogonali alla direzione della forza e anche in questo caso essi hanno dei valori più elevati rispetto al caso FEM, con un valore massimo del 14%. In fig. 4.8 si nota un lieve aumento della differenza relativa dei risultati con l'aumento di raffinatezza della griglia utilizzata. Questo comportamento può essere dovuto alla difficoltà del modello peridinamico nel trattare forze concentrate in un unico punto. Effetto che risulta più evidente con la presenza di bond di lunghezza minore.

4.2.4 Interpolazione

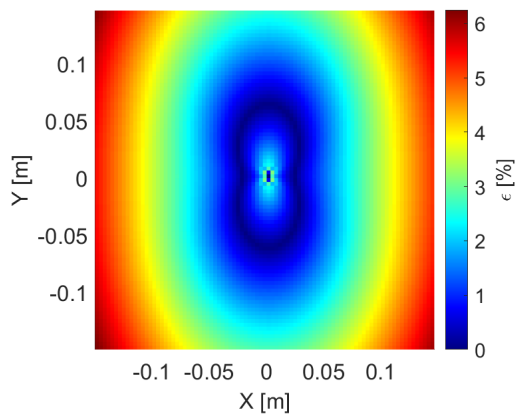
I risultati calcolati con le simulazioni numeriche sono definiti nei nodi della griglia che si è utilizzata per affrontare il problema da un punto di vista discreto. Risulta,



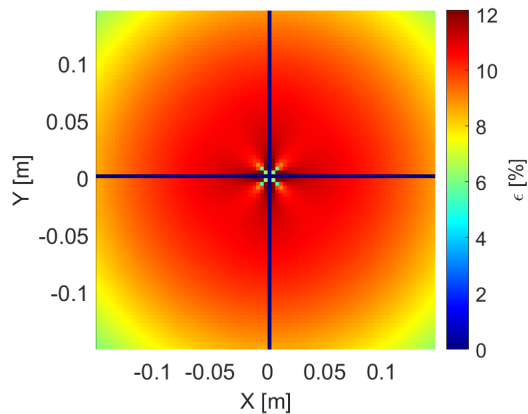
(a) U_x con 300 nodi



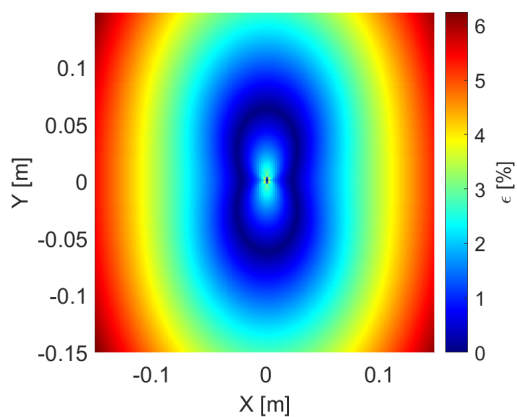
(b) U_y con 300 nodi



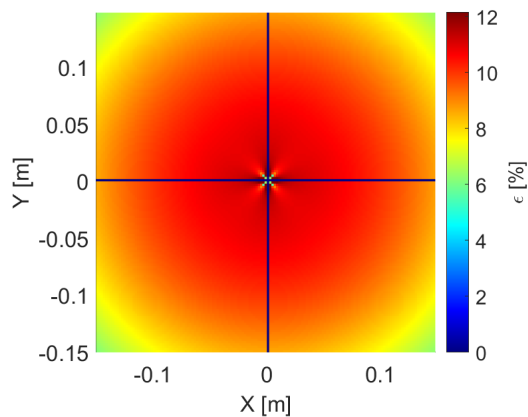
(c) U_x con 600 nodi



(d) U_y con 600 nodi



(e) U_x con 1000 nodi



(f) U_y con 1000 nodi

Figura 4.7: Errori relativi percentuali degli spostamenti nella zona centrale calcolati con il metodo FEM usando 300, 600 e 1000 nodi per lato.

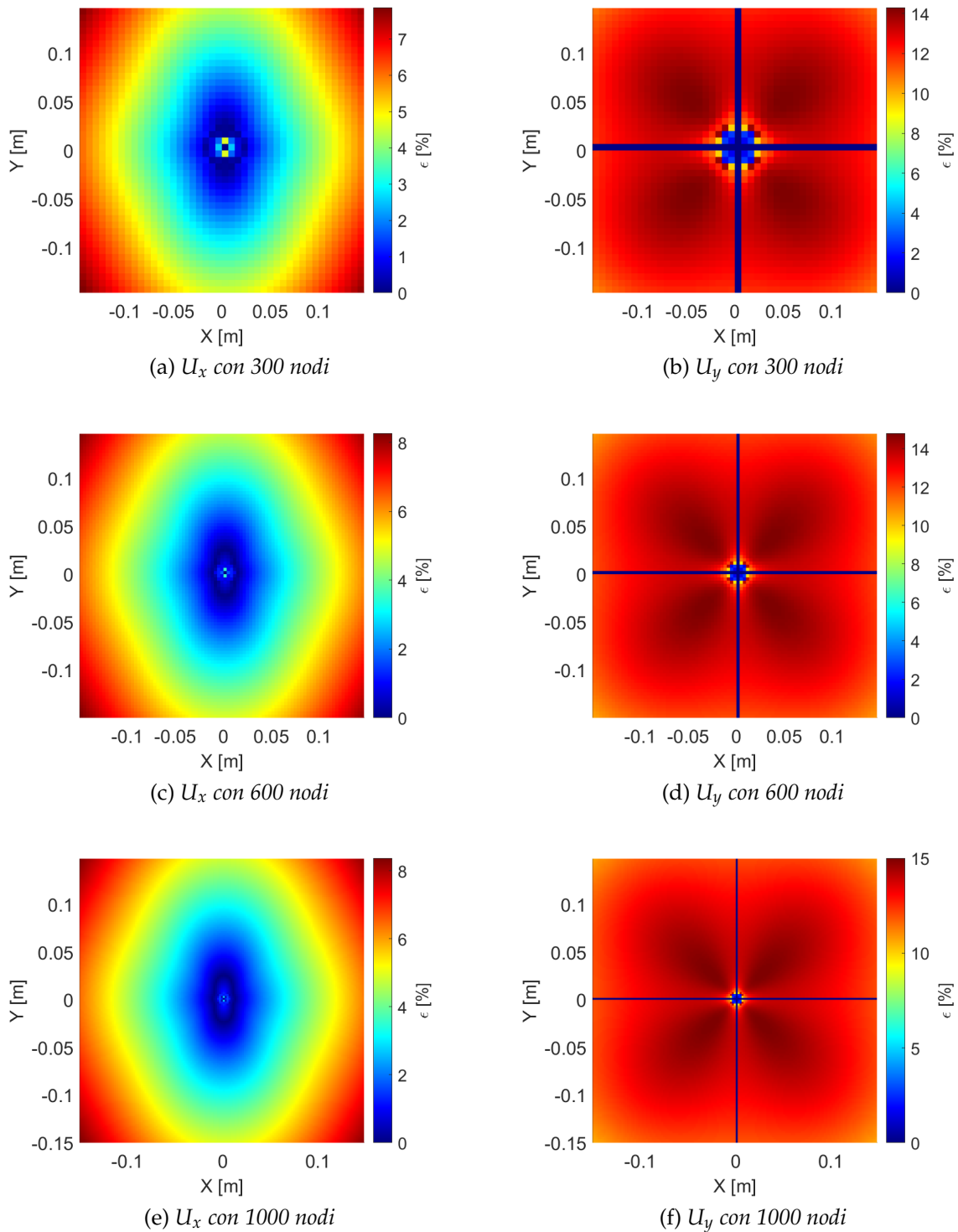


Figura 4.8: Differenza relativa percentuale degli spostamenti nella zona centrale calcolati con la Peridynamics usando 300, 600 e 1000 nodi per lato rispetto ai valori analitici forniti dalla meccanica classica.

però, importante conoscere i risultati anche in punti che non sono appartenenti alla griglia iniziale, questo perché i risultati verranno utilizzati anche per l'implementazione del BEM, in cui potrebbe venire richiesta la soluzione in punti differenti da quelli analizzati.

Per estendere i risultati anche in punti differenti da quelli della griglia si possono utilizzare i metodi di interpolazione. I metodi di interpolazione utilizzano i valori noti per creare delle funzioni passanti per i punti della griglia e che stimino i risultati altrove, pertanto si commetteranno degli errori rispetto alla soluzione reale. Questi errori possono essere ridotti utilizzando una griglia molto fitta di valori noti e con l'utilizzo di metodi ad ordine superiore al primo.

Il metodo di interpolazione più semplice è il metodo lineare. Esso è poco costoso computazionalmente, anche se poco preciso, ma la sua stabilità è sempre garantita. Per questo metodo si utilizzano i valori noti di due punti adiacenti $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ per calcolare la funzione lineare che li collega:

$$f(x) = \frac{x - x_B}{x_A - x_B} y_A - \frac{x - x_A}{x_A - x_B} y_B \quad (4.8)$$

Un altro metodo di interpolazione è quello dell'interpolazione polinomiale in cui si utilizza un insieme di $n + 1$ punti distinti per creare un polinomio di interpolazione di grado n che assuma esattamente il valore dato in corrispondenza dei punti iniziali.

Alcuni dei problemi di questo metodo sono:

- il fenomeno di Runge[12] secondo cui nonostante il polinomio di interpolazione assuma il valore esatto nei punti dati, avendo un grado elevato esso tenderà ad oscillare maggiormente tra un punto e l'altro, dando quindi una previsione del valore in quelle aree che sarà peggiore di quella data da un polinomio di grado inferiore che non passa per tutti i punti dati.
- il mal condizionamento della matrice dei coefficienti che richiede l'utilizzo di metodi non standard per calcolare la soluzione del sistema di equazioni. Il che richiede un maggior numero di operazioni aritmetiche e quindi un maggior costo computazionale.

Il metodo di interpolazione più accurato, invece, è quello basato su funzioni spline. Questo metodo divide l'intervallo di interesse in dei sotto-intervalli e per ciascuno di essi sceglie un polinomio di grado p , che non sia molto elevato, e imponendo che tra i polinomi adiacenti venga mantenuta la continuità delle prime $p - 1$ derivate. Il tipo di funzione spline tipicamente utilizzata è quella cubica, ossia di ordine $p = 3$.

L'interpolazione con questo metodo fornisce una funzione più liscia di quelle ottenute con altri metodi e non risente del fenomeno di Runge.

In fig. 4.9 a) vengono mostrati con un grafico 3D gli spostamenti U_x dovuti alla forza F_x , secondo la teoria peridinamica, nell'intervallo $[0.1; 0.1]m \times 0.1; 0.1]m$, utilizzando i risultati delle simulazioni con 300 nodi per lato, questo per poter visualizzare meglio i risultati rispetto alle immagini che si avrebbero con l'utilizzo di griglie più fitte. Per i codici successivi in cui si sfruttano questi risultati per le interpolazioni si utilizzeranno i valori ottenuti con le griglie più fitte.

Nel piano xy di fig. 4.9 si hanno le coordinate dei punti di griglia mentre lungo l'asse z viene rappresentata l'intensità degli spostamenti. Da questa figura si può vedere come nel punto di applicazione della forza si abbia un picco nei valori e per questo motivo l'interpolazione polinomiale non è accurata per la rappresentazione dei risultati, come si può vedere in fig. 4.9 c). Con l'utilizzo di interpolazione lineare e tramite spline, invece, si riescono a fittare tutti i valori considerati, come mostrato in fig. 4.9 b) e d), e a valutare i risultati anche in dei punti intermedi, in questo caso lo si è fatto su una griglia 4 volte più fine.

Le soluzioni fondamentali sono definite considerando che il corpo in esame sia infinito quindi si può pensare di utilizzare i valori numerici calcolati nella griglia precedente ed estrapolarli in punti a distanza superiore dal punto di applicazione della forza rispetto a quelle considerate. Il processo di estrapolazione è molto delicato da affrontare perché si stanno facendo previsioni in dei punti del dominio in cui non si ha conoscenza dell'effettivo comportamento e questa incertezza aumenta molto con l'aumentare della distanza dai punti noti.

Si effettua l'estrapolazione di valori con i metodi lineare e spline considerando i risultati noti nell'intervallo $[0.1; 0.1]m \times 0.1; 0.1]m$ di interesse, in modo da avere un set elevato di valori per effettuare l'estrapolazione, ed estrapolando per: 2 orizzonti in fig. 4.10, 7 orizzonti in fig. 4.11 e 12 orizzonti in fig. 4.12. In queste figure i valori numerici esatti sono rappresentati con dei pallini blu.

Delle estrapolazioni effettuate si vuole verificare anche l'errore relativo percentuale che si commette in ogni punto rispetto al valore numerico calcolato con le simulazioni. In fig. 4.10, fig. 4.11 e fig. 4.12 vengono mostrati gli errori dovuti all'estrapolazione con i metodi: a) lineare e b) tramite spline. Per identificare visivamente la zona in cui avviene l'interpolazione dei valori con quella in cui si ha l'estrapolazione si è definita l'interfaccia attraverso un riquadro di colore rosso.

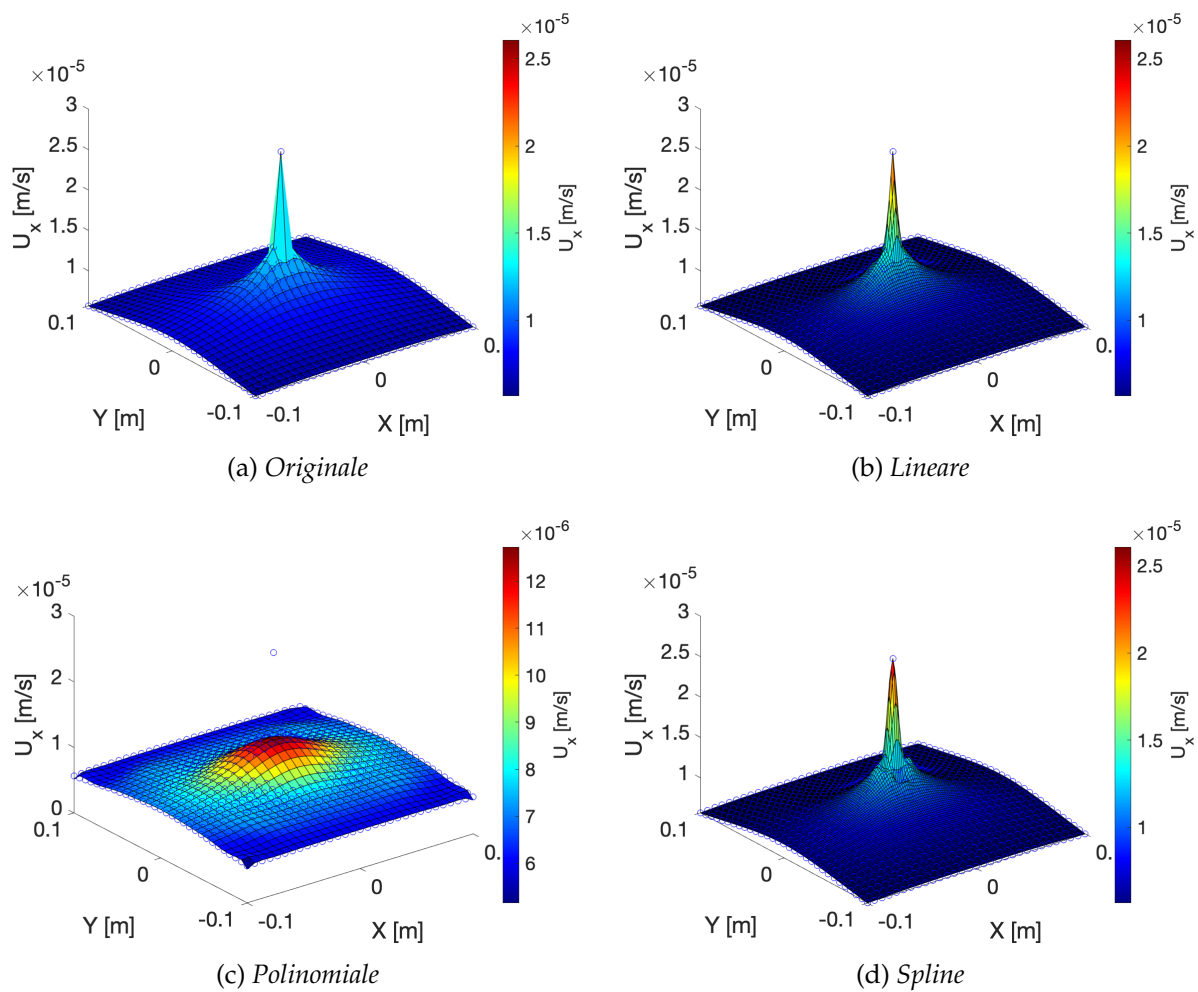


Figura 4.9: Interpolazione tramite diversi metodi. Con pallini blu si indicano i valori di riferimento per l'interpolazione.

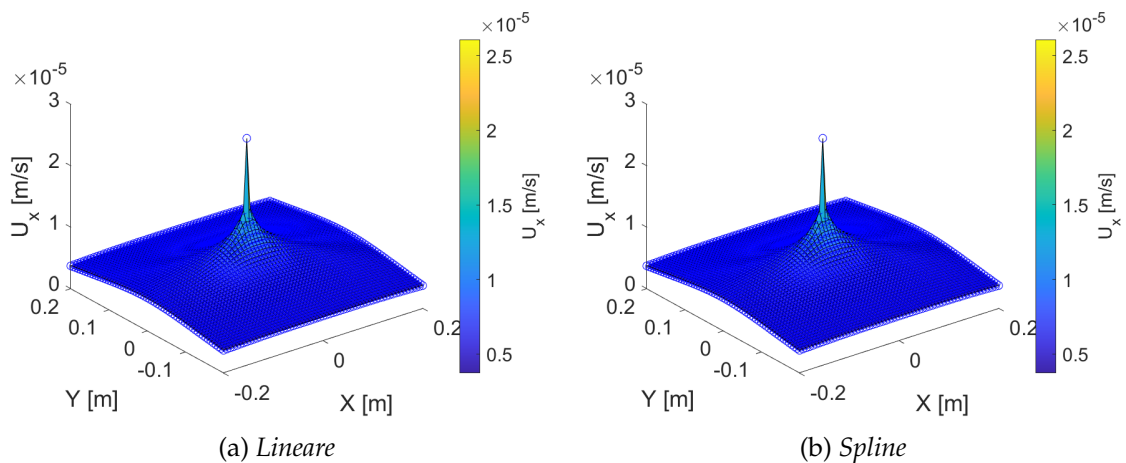


Figura 4.10: Estrapolazione lineare e tramite spline per 2 orizzonti. I pallini blu indicano i valori della soluzione analitica.

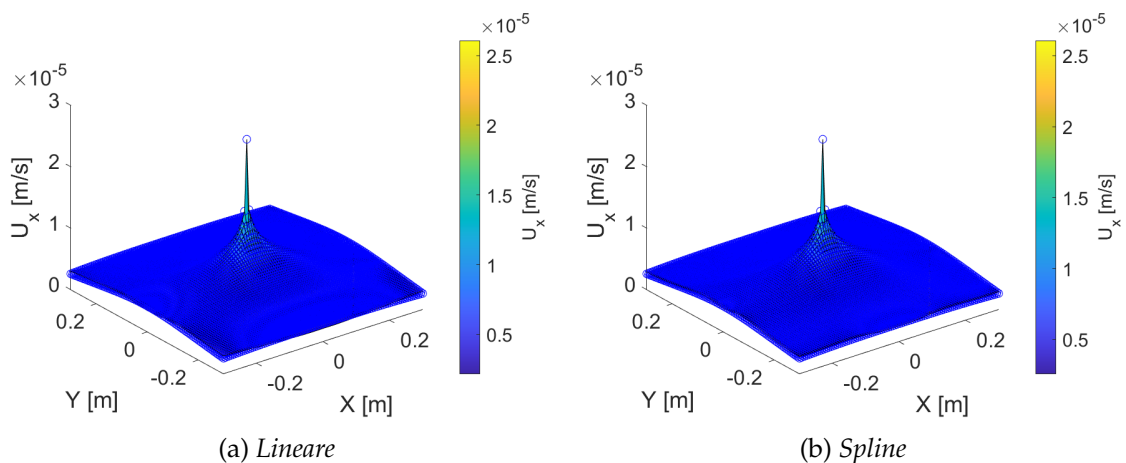


Figura 4.11: Estrapolazione lineare e tramite spline per 7 orizzonti. I pallini blu indicano i valori della soluzione analitica.

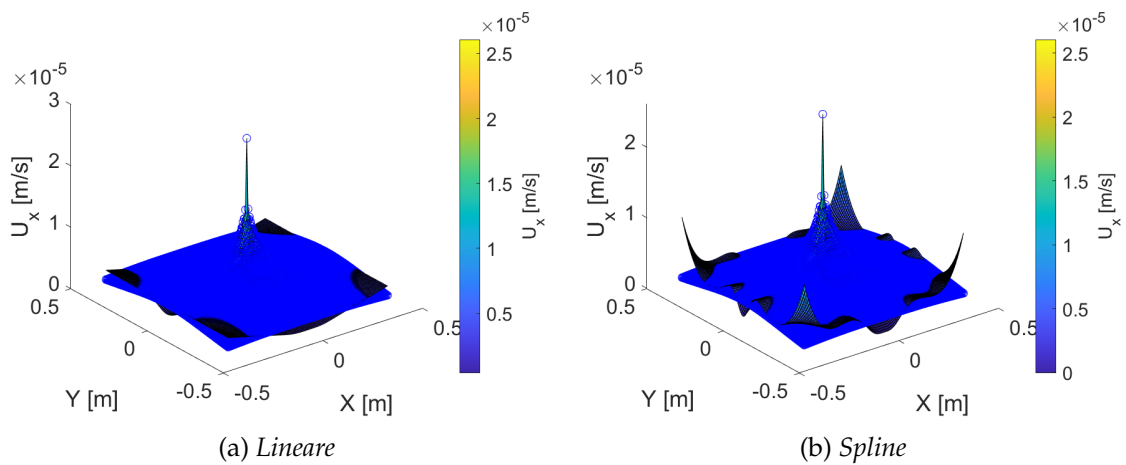


Figura 4.12: Estrapolazione lineare e tramite spline per 12 orizzonti. I pallini blu indicano i valori della soluzione analitica.

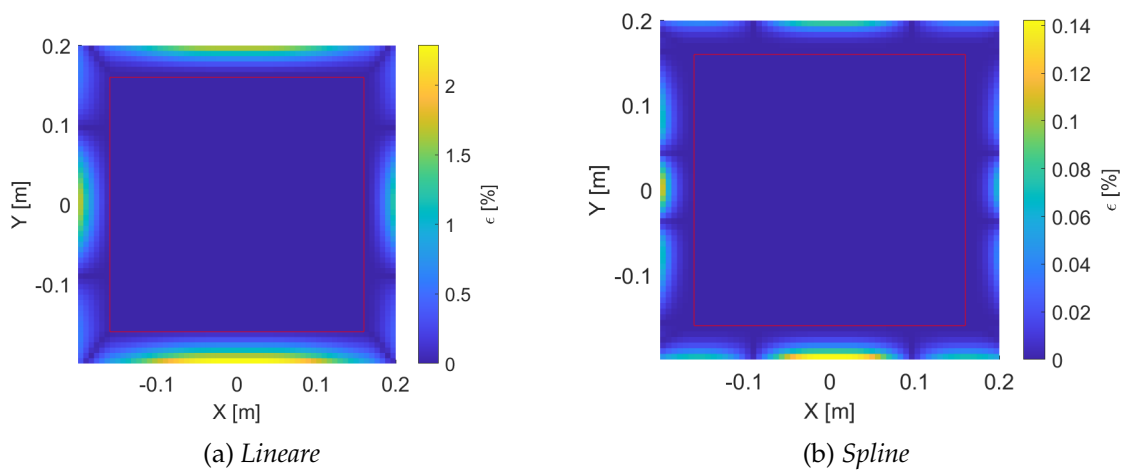


Figura 4.13: Errori di estrapolazione lineare e tramite spline per 2 orizzonti. Con un riquadro rosso si evidenzia la distinzione tra la zona interna, dove si interpolano risultati noti, con l'esterno in cui si effettua l'estrapolazione.

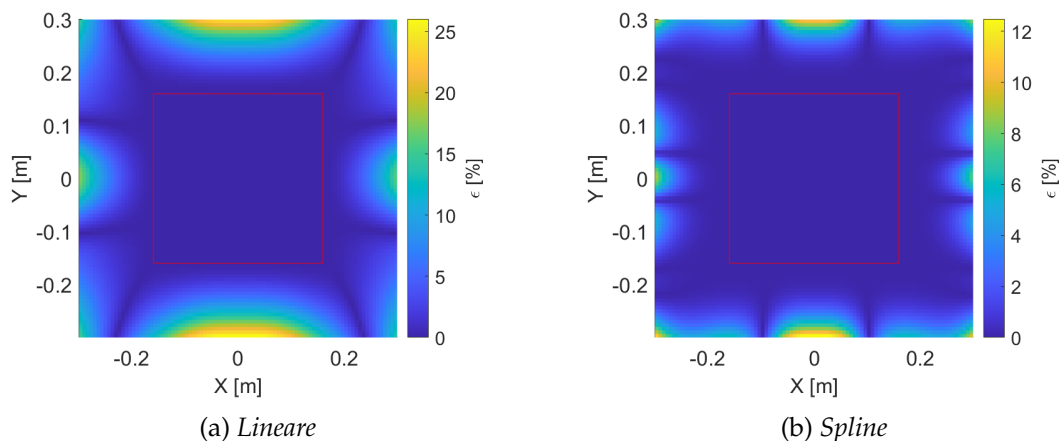


Figura 4.14: Errori di estrapolazione lineare e tramite spline per 7 orizzonti. Con un riquadro rosso si evidenzia la distinzione tra la zona interna, dove si interpolano risultati noti, con l'esterno in cui si effettua l'estrapolazione.

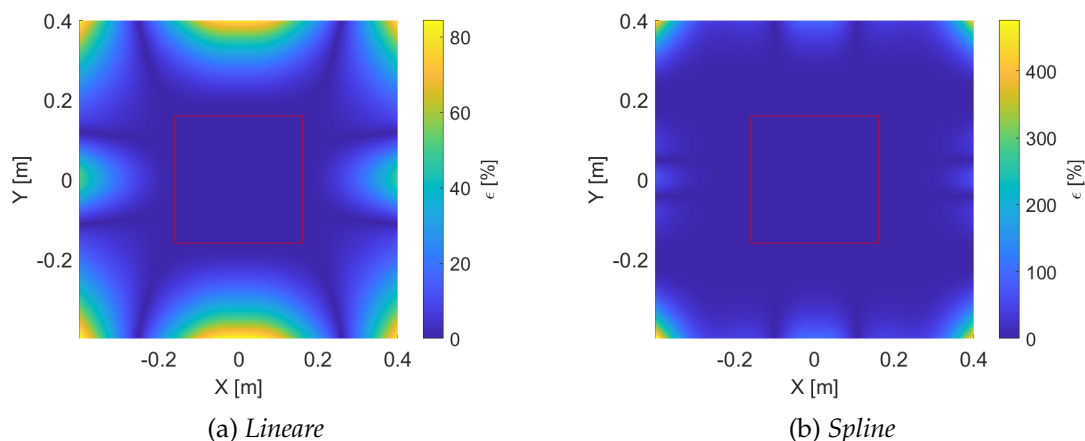


Figura 4.15: Errori di estrapolazione lineare e tramite spline per 12 orizzonti. Con un riquadro rosso si evidenzia la distinzione tra la zona interna, dove si interpolano risultati noti, con l'esterno in cui si effettua l'estrapolazione.

Da queste figure si può osservare come nella zona di interpolazione l'errore è nullo, dato che quei punti di griglia vengono utilizzati per creare le funzioni interpolanti, mentre questo non si può dire per la zona di estrapolazione. Ciò che si verifica è che estrapolare valori a distanze superiori provoca un aumento molto repentino degli errori dato che:

- il metodo lineare mantiene il coefficiente angolare che ha la funzione negli ultimi tratti quindi non riesce a prevedere le curvature che possono assumere i risultati reali.

- le funzioni spline utilizzano polinomi a basso grado in diversi sotto-intervalli quindi nelle estrapolazioni si mantiene l'ultimo polinomio utilizzato che, localmente, risulta molto accurato nella descrizione delle soluzioni ma lo stesso non si può dire a distanza.

In particolare si osserva che nelle zone iniziali di estrapolazione le funzioni spline sono più accurate rispetto a quelle lineari, con errori massimi del 0.14% rispetto al 2% di queste ultime, mentre a distanza il comportamento si inverte, ossia le funzioni spline commettono un errore relativo massimo del 600% mentre l'interpolazione lineare lo commette del 80%.

In entrambi i casi l'errore che si commette con l'estrapolazione a distanza non è trascurabile. Per questo motivo per l'implementazione del metodo BEM non si utilizzeranno estrapolazioni dei risultati ma si propenderà per lo sviluppo di esempi in domini spaziali di dimensioni inferiori rispetto alla zona centrale del calcolo della soluzione fondamentale. In altre parole per il calcolo della soluzione fondamentale si è considerato un dominio di lato $l = 2m$ e, per non risentire degli effetti di bordo si utilizzano solamente le soluzioni nella zona centrale, ossia ad una distanza massima $d = 0.15m$ dal centro. Gli esempi numerici che si eseguiranno in seguito saranno effettuati in corpi 2D di dimensioni tali per cui non sarà necessario l'utilizzo di estrapolazioni.

4.2.5 Codice BEM

Per descrivere un problema reale occorre definire dei parametri di input da cui si ricaveranno i valori di output che si vogliono trovare. Tra gli input che si devono fornire si hanno:

- la geometria dei corpi,
- le proprietà del materiale che compone il corpo,
- le sollecitazioni agenti sul dominio.

Come valori di output, invece, si vogliono ottenere gli spostamenti presenti sul corpo e le trazioni agenti su di esso.

Una volta nota la geometria si può creare una griglia di nodi ed elementi in modo da discretizzare il contorno. Conoscendo le coordinate dei diversi nodi si può definire un orizzonte e, per ogni nodo sorgente, determinare i bond peridinamici con i nodi famiglia al suo interno.

A questo punto si utilizzano le funzioni di Green, simulate numericamente e interpolate, per determinare i coefficienti delle matrici di influenza $[A]$ e $[B]$ tramite le

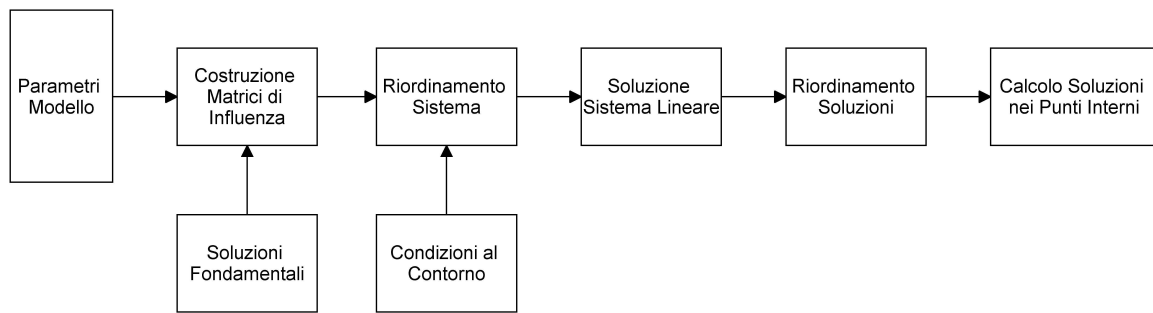


Figura 4.16: Flowchart dello script BEM.

equazioni (2.53). Essendo che le soluzioni fondamentali sono calcolate in modo discreto per effettuare le integrazioni lungo il contorno si discretizza l'elemento in esame in diversi punti, in cui verrà calcolata la soluzione, e lo si integrerà tramite il metodo dei trapezi.

Una volta ottenute le matrici di influenza si valutano le condizioni al contorno in modo da separare le colonne relative a incognite da quelle relative a termini noti.

Quando si conoscono i valori degli spostamenti e delle trazioni sui nodi del contorno è possibile ricavare queste incognite anche per i punti interni al dominio utilizzando l'identità di Somigliana.

Lo schema logico appena descritto è rappresentato con un diagramma di flusso in fig. 4.16.

Nel codice elaborato si ha un file principale `BEM_PD_Main.m` in cui vengono ricevuti in input i dati del problema dai file `geominput.m`, `matinput.m` e `bvinput.m`.

In `geominput.m` si definiscono le dimensioni l_x e l_y del corpo da rappresentare, il rapporto m voluto, il valore δ dell'orizzonte che si utilizzerà tra i diversi nodi e la tipologia di elementi desiderata, nel presente elaborato si utilizzeranno solamente elementi costanti.

Con questi valori si costruisce una griglia di punti in tutto il corpo e la si divide in: punti del contorno, numerati in ordine antiorario partendo dall'angolo in basso a sinistra, e i punti interni. Una volta noti i punti sul contorno si possono costruire: gli elementi dato che i vari punti ne rappresentano gli estremi, trovare i punti medi, che è dove si trovano i nodi e dove si calcoleranno le soluzioni, la dimensione degli elementi e la direzione delle loro normali.

Dal file `matinput.m` si ricavano le proprietà elastiche del materiale in oggetto come: il modulo di Young, il coefficiente di Poisson e il modulo di taglio.

Da `bvinput.m` vengono definite le condizioni al contorno che agiscono su ciascun nodo del contorno che possono essere di spostamento oppure di trazione.

Una volta definiti questi parametri si caricano i risultati delle soluzioni fondamentali dato che essi verranno forniti alla function `Fondamental.m` per effettuare i calcoli delle soluzioni fondamentali tramite interpolazione.

Per ogni combinazione di nodi ed elementi si chiama la funzione `Fondamental.m` per calcolare i coefficienti che comporranno le matrici di influenza. All'interno di questa funzione si considera il nodo come punto di applicazione della forza unitaria e lungo l'elemento si calcoleranno i valori di spostamento e tensione dovuti a questa forza. Per fare questo si discretizza l'elemento in una serie di intervalli e per ognuno di essi si calcolano le soluzioni: di spostamento, tramite l'interpolazione dei risultati delle simulazioni precedenti, e di tensione tramite le formule analitiche di Kelvin. Queste soluzioni vengono integrate con il metodo dei trapezi rispetto alla coordinata locale dell'elemento.

In uscita dalla funzione si ottengono due matrici 2×2 :

$$A_{ij} = \int_{\Gamma_j} t_{ij}^* = \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* \end{bmatrix} d\Gamma_j \quad (4.9)$$

$$B_{ij} = \int_{\Gamma_j} u_{ij}^* = \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} d\Gamma_j \quad (4.10)$$

Facendo questo procedimento per tutte le combinazioni nodi ed elementi si compongono le matrici di influenza.

In base alle condizioni al contorno le matrici $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{B}]$ devono essere riordinate nelle matrici $[\mathbf{H}]$ e $[\mathbf{G}]$ in modo da passare dal sistema:

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{f}\} \quad (4.11)$$

al sistema:

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{x}\} = [\mathbf{G}]\{\mathbf{k}\} \quad (4.12)$$

dove: $\{\mathbf{x}\}$ è il vettore delle incognite e $\{\mathbf{k}\}$ è il vettore contenente i termini noti. Questi vettori sono composti sia da spostamenti che da trazioni e ciò è dettato dalle condizioni al contorno utilizzate.

Una volta risolto questo sistema si riordinano le soluzioni dei nodi del contorno quindi da essi è possibile ottenere le soluzioni in qualsiasi punto interno al corpo. Questo procedimento è analogo a quanto fatto per i nodi del contorno, ossia per tutti i punti interni di interesse si computano le soluzioni fondamentali su ogni elemento del contorno.

Attraverso l'utilizzo di pseudocodi viene descritta in modo più accurato la struttura

degli script: principale BEMPD.Main.m e della funzione Fondamental.m per il calcolo delle soluzioni fondamentali.

Algorithm 1 Fondamental.m

```
1: INPUT: nodo, elemento, numero intervalli
2: coordinate nodo
3: coordinate intervalli elemento
4: creazione coordinate locali
5: interpolazione spostamenti su coordinate locali
6: calcolo trazione fondamentale
7: if nodo = nodo_elemento then
8:   soluzione fondamentale = risolvi singolarita'
9: else
10:  soluzione fondamentale = formula
11: end if
```

Algorithm 2 BEMPD_Main.m

```
1: geomdata = geominput
2: matdata = matinput
3: bc = bvinput
4: SolFond = load(soluzioni fondamentali)
5: for geomdata.midpoint do
6:   for geomdata.element do
7:     [A,B] = Fondamental(geomdata,SolFond)
8:   end for
9: end for
10: Riordinamento sistema
11: for width(H) do
12:   if condizione i = trazione then
13:     H(:,i) = A(:,i)
14:     G(:,i) = B(:,i)
15:   else
16:     H(:,i) = -B(:,i)
17:     G(:,i) = -A(:,i)
18:   end if
19: end for
20: Soluzione sistema
21: Ordinamento soluzioni
22: for width(H) do
23:   if condizione i = trazione then
24:     spostamento = soluzione contorno
25:     trazione = condizione contorno
26:   else
27:     spostamento = condizione
28:     contorno trazione = soluzione contorno
29:   end if
30: end for
31: Soluzioni interne
32: for geomdata.midpoint do
33:   for geomdata.element do
34:     [AA,BB] = Fondamental(geomdata)
35:     spostamento punto = somma BB× trazioni - AA× spostamenti
36:   end for
37: end for
```

4.3 Esempi

Per verificare che i codici di calcolo prodotti FEM_Main.m, PD_Main.m e BEMPD_Main.m siano corretti li si è utilizzati per risolvere degli esempi numerici le cui soluzioni sono note.

I primi tre esempi sono di validazione dei codici, essi studiano il comportamento di una piastra quadrata di lato $l = 0.1m$ di materiale avente modulo di Young $E = 10^5 Pa$ e coefficiente di Poisson $\nu = 1/3$ ma sottoposta a diverse condizioni al contorno. Gli esempi che si studiano sono: trazione mono-assiale, carico di taglio e spostamento imposto.

Si osservano i risultati che vengono forniti dai diversi metodi e li si paragonano con le previsioni teoriche.

Il quarto esempio prevede lo studio di un foro quadrato di lato $l = 0.1m$ contenente una pressione agente su un corpo infinito e si valuta come i diversi modelli stimino i valori di spostamento in diversi punti del dominio fisico.

4.3.1 Trazione mono-assiale

In questo esempio si considera una piastra quadrata vincolata su due lati e con una forza $F = 100N$ applicata come in fig. 4.17. A causa della forza applicata ci si aspetta uno spostamento orizzontale U_x lineare verso destra, ossia nel verso positivo dell'asse x , e uno spostamento verticale U_y verso il basso, cioè nel verso negativo dell'asse y . Il massimo dello spostamento verticale, che si troverà sui nodi del lato superiore, sarà di un'entità minore rispetto al massimo spostamento U_x , sul lato di applicazione della forza, e il suo valore dipenderà dal coefficiente di Poisson.

Per le simulazioni di tutti i modelli si è utilizzato lo stesso passo di griglia $dx = 10^{-3}m$ per discretizzare il problema, il che corrisponde ad un numero di 100 nodi per ogni lato.

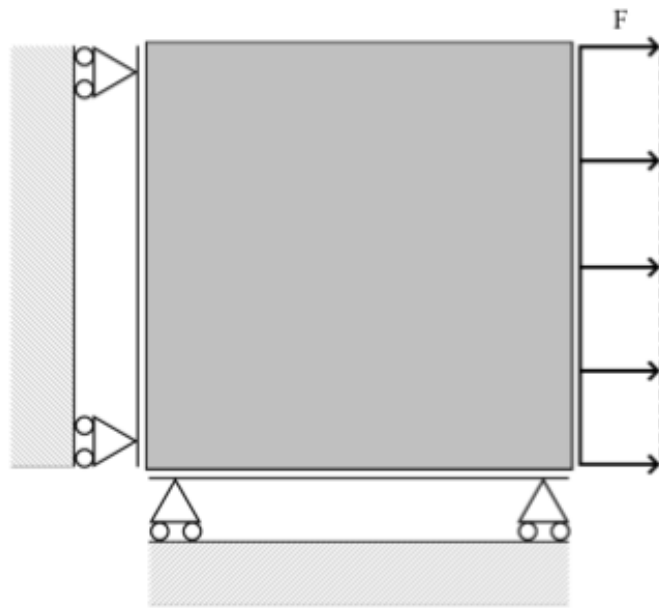


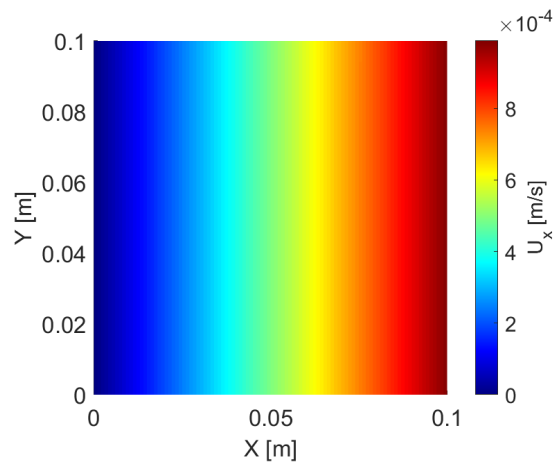
Figura 4.17: Piastra vincolata con forzante sul lato destro.

Nel risolvere questo esempio con il codice FEM e quello peridynamico bisogna tenere in considerazione che la forza F è quella totale quindi sul singolo nodo agirà una forza $F_i = F/n$ dove n è il numero di nodi su cui si applica la forza. Inoltre i nodi che si trovano agli estremi di quel lato appartengono ad un unico elemento, mentre tutti gli altri sono comuni a due elementi, per questo motivo su di essi si deve applicare una forza che sia la metà delle forze agenti sugli altri nodi: $F_{corner} = F_i/2$.

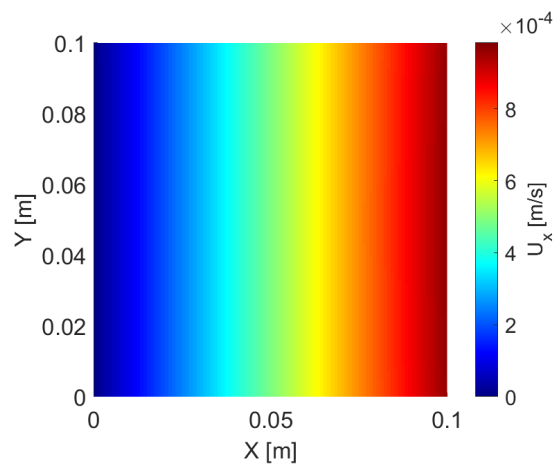
Nello studio del problema con il modello BEM le condizioni al contorno applicabili possono essere: di spostamento, come quelle utilizzate per vincolare dei gradi di libertà, oppure trazioni. Per questo motivo sul lato destro si dovrà applicare una trazione $t = F/l_x$.

Un altro aspetto da considerare nel modello BEM è che le condizioni al contorno utilizzate per risolvere il problema non sono in grado di rappresentare correttamente il comportamento sui lati della piastra. La soluzione può essere ottenuta utilizzando in prossimità degli angoli degli elementi di dimensioni ridotte, rispetto agli altri elementi, però anche con questi elementi si avranno degli errori in prossimità del contorno. Un possibile miglioramento si potrebbe avere utilizzando degli elementi con funzioni di forma di grado superiore.

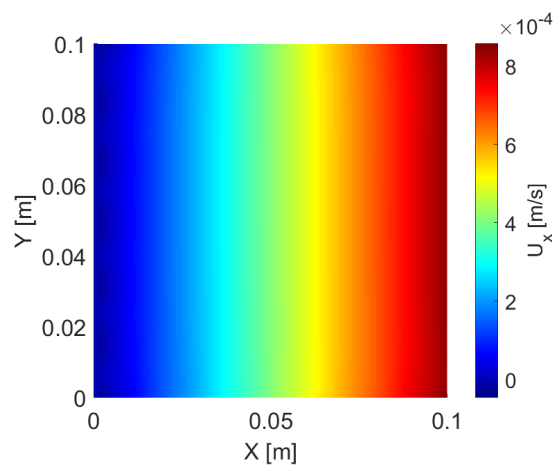
In seguito vengono mostrati i risultati degli spostamenti: u_x in fig. 4.18 e u_y in fig. 4.19, ottenuti con i metodi: a) FEM, b) Peridynamics, c) BEM-PD.



(a) *FEM*

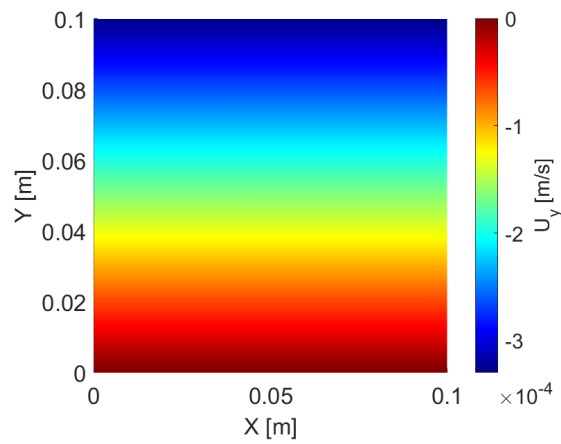


(b) *Peridynamics*

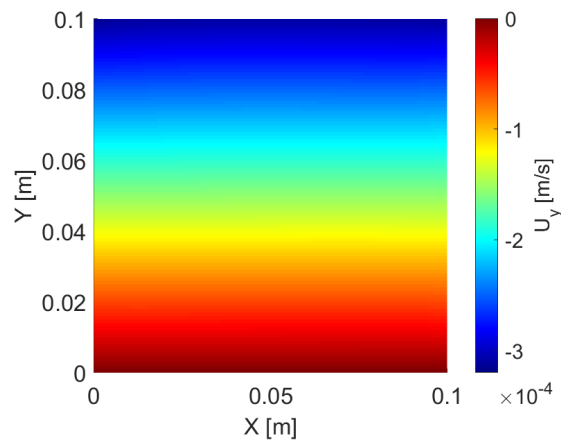


(c) *BEM-PD*

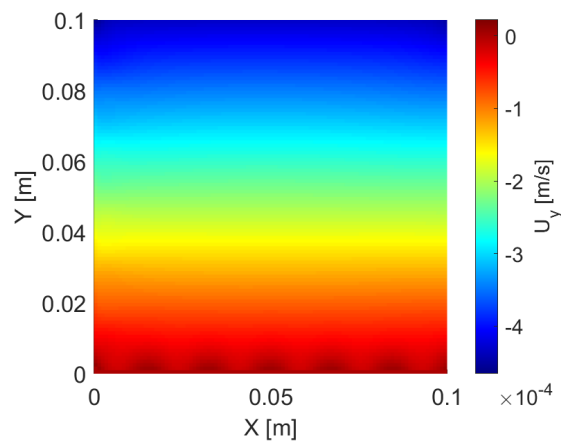
Figura 4.18: Spostamenti U_x nella piastra secondo i diversi modelli di calcolo.



(a) *FEM*



(b) *Peridynamics*



(c) *BEM-PD*

Figura 4.19: Spostamenti U_y nella piastra secondo i diversi modelli di calcolo.

Da queste figure si osserva che gli andamenti previsti sono rispettati da tutti i metodi di calcolo però analizzando da un punto di vista quantitativo i risultati si osservano dei discostamenti nei valori numerici. Per apprezzare queste variazioni si sono

stracciati gli spostamenti U_x lungo la linea orizzontale sulla mezzeria della piastra in fig. 4.20 e gli spostamenti U_y lungo la linea verticale sulla mezzeria del lato lungo X in fig. 4.21.

Da questi grafici si può osservare come la teoria peridinamica e FEM abbiano dei valori pressoché coincidenti ma nel primo caso si osserva il fenomeno del softening in corrispondenza dei bordi e i vincoli sono stati applicati su una fila di nodi. Questi due effetti nel modello PD non sono stati compensati con l'implementazione di tecniche avanzate come quelle presenti in letteratura [32], [33].

Il metodo BEM-PD fornisce dei risultati inferiori rispetto ai valori ottenuti con le altre due teorie. In particolare per gli spostamenti U_x si ha un errore relativo massimo del 33.95% mentre per gli spostamenti U_y l'errore massimo è del 17.68%. Entrambi questi picchi di errore si trovano in corrispondenza dei bordi dove, come ci si attendeva, la soluzione è meno precisa.

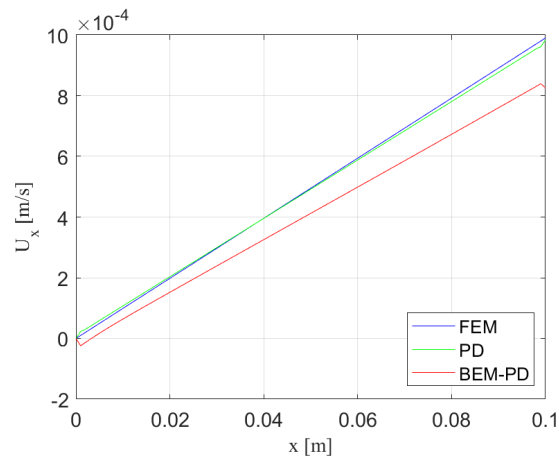


Figura 4.20: Spostamenti U_x lungo la linea orizzontale a $Y = 0.05m$.

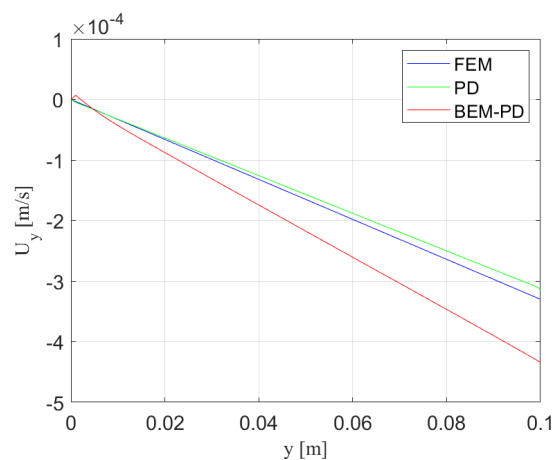


Figura 4.21: Spostamenti U_y lungo la linea verticale a $X = 0.05m$.

Dalle fig. 4.18 e fig. 4.19 si può anche osservare che in corrispondenza dei lati vincolati si hanno nelle oscillazioni delle soluzioni ortogonali ad essi. Per osservare questo fenomeno si sono raccolti gli spostamenti U_x ad una distanza di: a) $0.001m$, b) $0.01m$, c) $0.05m$ dal lato verticale sinistro e gli spostamenti U_y alla stessa distanza dal lato orizzontale inferiore e li si è mostrati in fig. 4.22 e in fig. 4.23 rispettivamente. Si sono analizzati i valori ad una distanza non nulla dal contorno perché su di esso si hanno valori esatti però in prossimità si ha l'insorgenza di queste oscillazioni.

Queste oscillazioni in prossimità dei bordi sono previste dalla teoria a causa dell'utilizzo di elementi costanti. Si può osservare che allontanandosi dai bordi il fenomeno oscillatorio si riduce fino ad annullarsi però aumenta il discostamento tra i valori calcolati con il BEM e gli altri metodi.

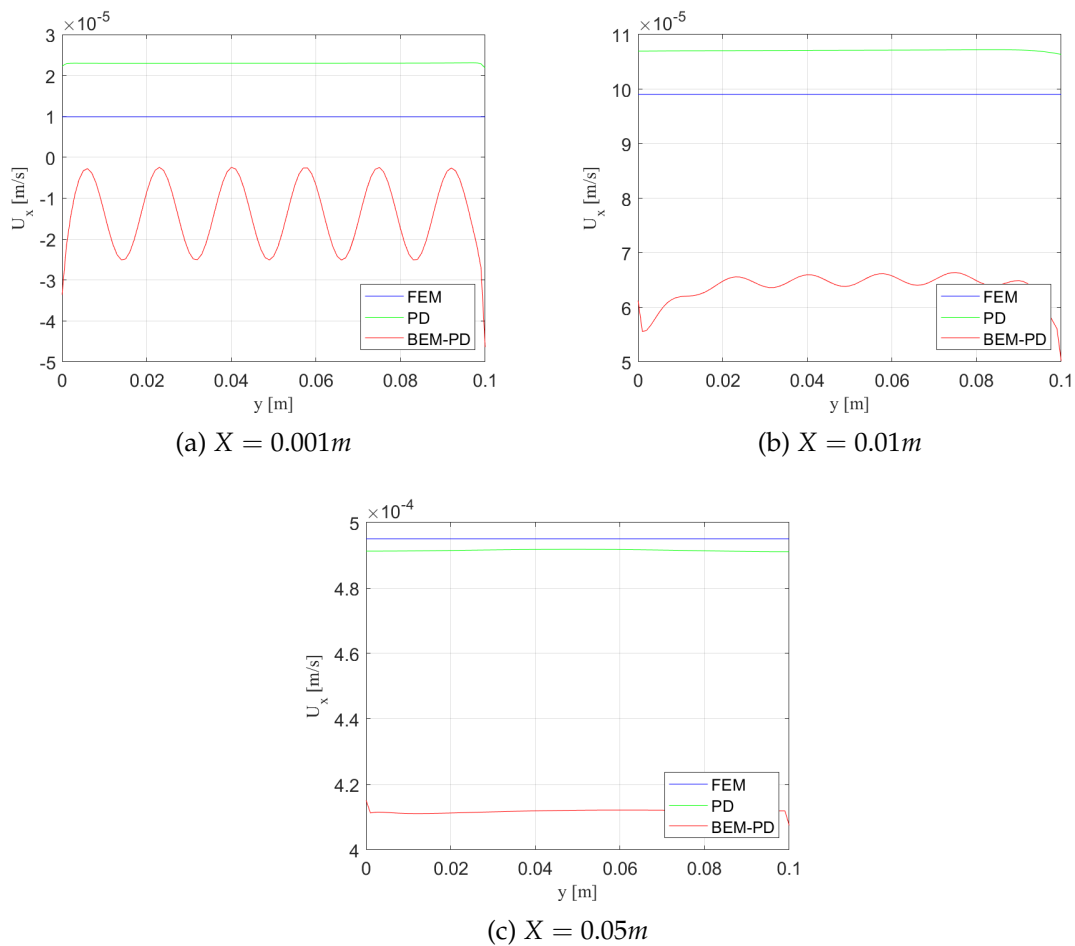


Figura 4.22: Spostamenti U_x in prossimità del lato sinistro.

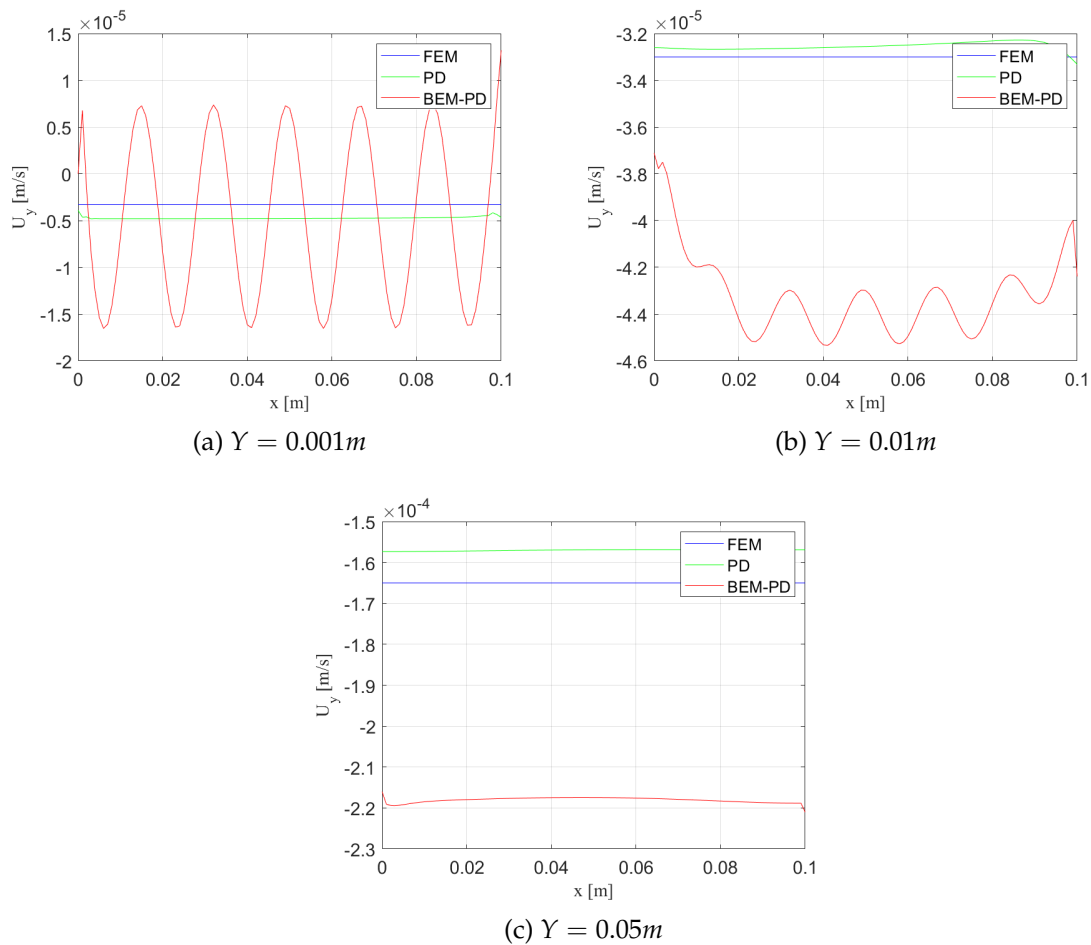


Figura 4.23: Spostamenti U_y in prossimità del lato inferiore.

4.3.2 Carico di taglio

In questo esempio si considera la piastra dell'esempio precedente, con stesse dimensioni geometriche e dello stesso materiale, però a cui viene applicato un carico di taglio. Nel lato inferiore e nel lato sinistro si hanno i gradi di libertà di spostamento in direzione parallela ai lati vincolati mentre è libero il movimento in direzione ortogonale. Sugli altri lati si hanno delle forze parallele ai lati e la cui somma totale è di 100N.

Anche in questo caso per i modelli FEM e peridynamico occorre dividere la forza nei vari nodi e prestare attenzione alla forza che si applica sui nodi alle estremità dei lati. Per il modello BEM invece si è in un set di condizioni al contorno per cui non bisogna effettuare correzioni alla discretizzazione dei contorni.

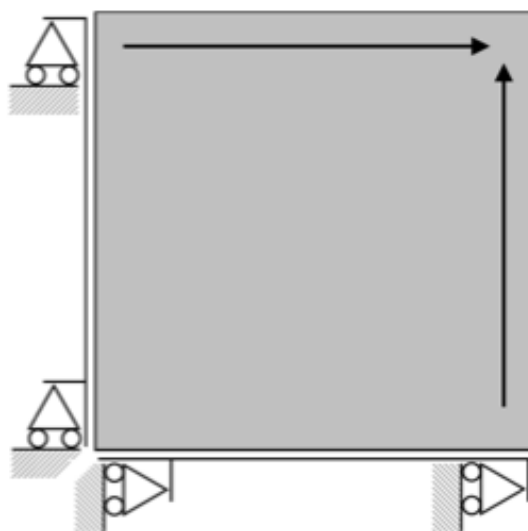


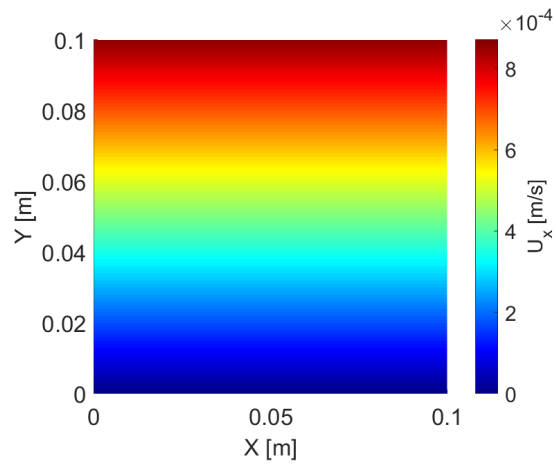
Figura 4.24: Piastra vincolata con carico di taglio.

In questo esempio ci si aspetta di avere delle variazioni degli spostamenti in modo lineare con il picco di U_x sul lato superiore e quello di U_y sul lato destro, ossia sui lati in cui sono applicate le forze.

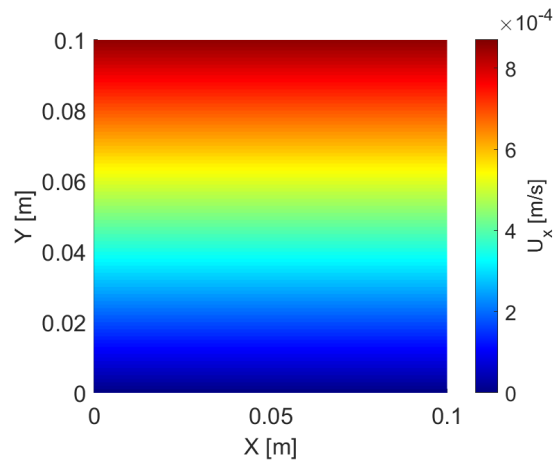
In fig. 4.25 e fig. 4.26 vengono mostrati gli spostamenti U_x e U_y , rispettivamente, all'interno della piastra. Ciò che si può vedere è che l'andamento dei risultati calcolati con i diversi metodi è il medesimo ed è lo stesso che ci si aspettava, inoltre anche i valori degli spostamenti risultano gli stessi qualitativamente. Si può verificare che gli spostamenti U_x e U_y sono tra loro speculari e con gli stessi valore, questo risulta dal fatto che si stanno applicando le stesse condizioni esterne su un materiale isotropo.

Per valutare in modo quantitativo i valori di spostamento nelle diverse direzioni si sono raccolti i risultati delle simulazioni lungo la linea di mezzeria verticale, per gli spostamenti U_x , in fig. 4.27, essendo che la soluzione è simmetrica il corrispettivo grafico degli spostamenti U_y risulterebbe identico.

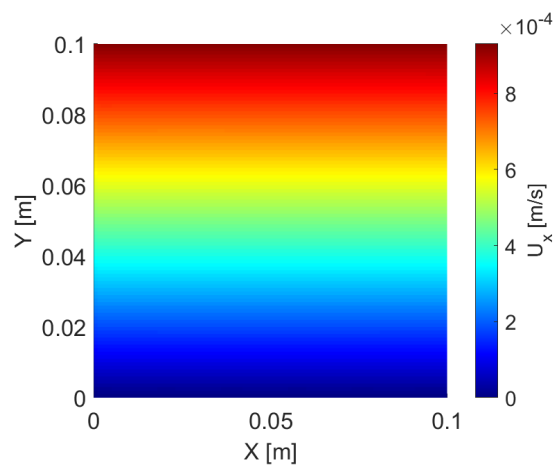
Da questi grafico si osserva come gli spostamenti calcolati con il metodo FEM e peridinamico hanno pressoché lo stesso valore mentre il modello BEM-PD ha un lieve scostamento con uno scarto massimo, rispetto al valore FEM, del 8.26%.



(a) FEM

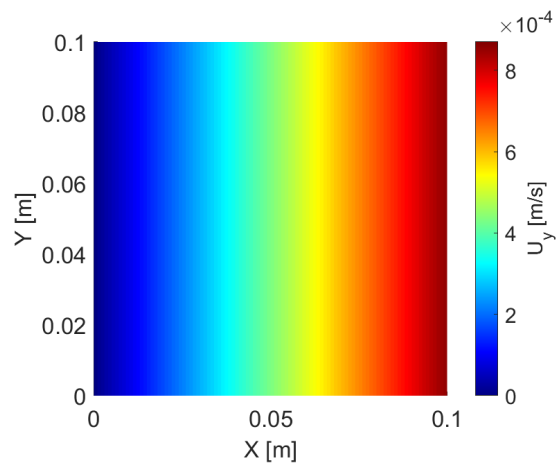


(b) Peridynamics

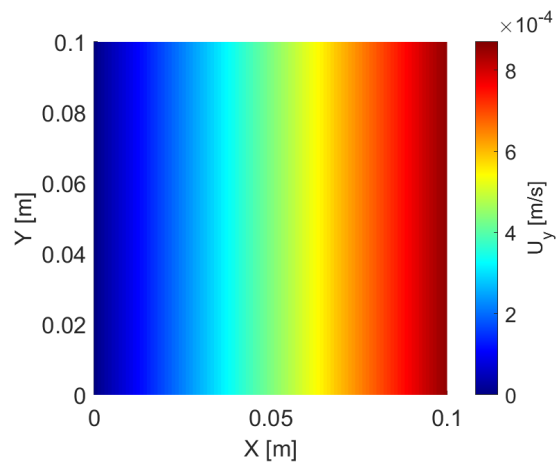


(c) BEM-PD

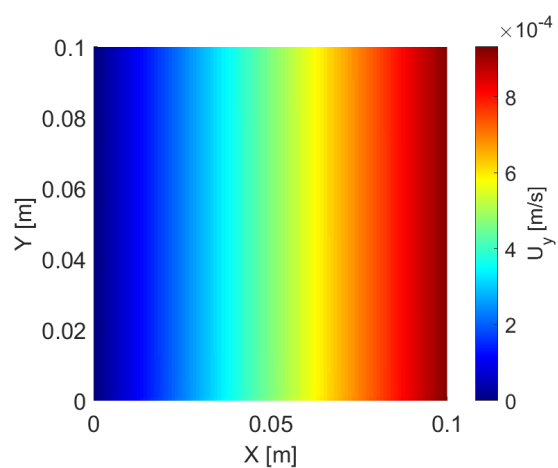
Figura 4.25: Spostamenti U_x nella piastra secondo i diversi modelli di calcolo.



(a) *FEM*



(b) *Peridynamics*



(c) *BEM-PD*

Figura 4.26: Spostamenti U_y nella piastra secondo i diversi modelli di calcolo.

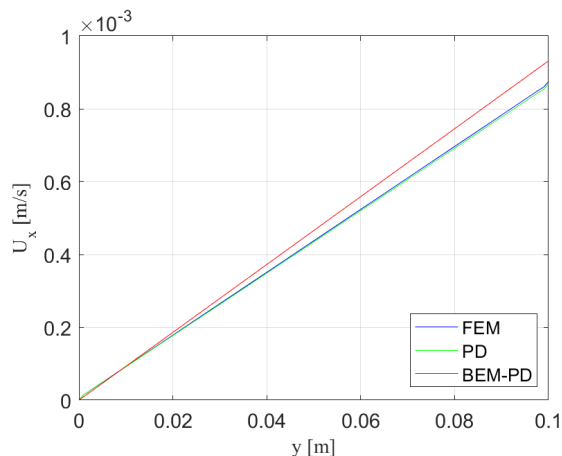


Figura 4.27: Spostamenti U_y lungo la linea orizzontale a $Y = 0.05m$.

4.3.3 Spostamento imposto

Nell'esempio preso in esame si considera la stessa piastra degli altri esempi e con le stesse condizioni del primo esempio, ciò che cambia è la forzante sul lato destro che non è più una forza ma bensì uno spostamento orizzontale $u = 0.003m$. Il problema in esame è mostrato in fig.4.28.

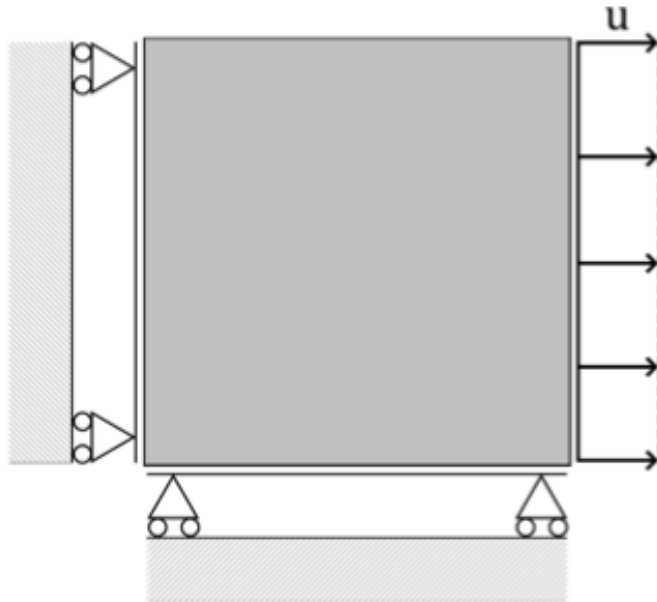


Figura 4.28: Piastra con spostamento imposto.

Per la simulazione di questo esempio con il metodo BEM è necessario considerare le stesse considerazioni sulla discretizzazione del contorno fatte nel primo esempio.

Per il codice di calcolo col metodo FEM e PD, invece, si è in una condizione di forze applicate tutte nulle mentre gli spostamenti imposti non sono solo nulli ai vincoli.

Pertanto non si può risolvere il problema come nei casi precedenti ma occorre prima riordinare i vettori delle incognite, dei termini noti e le matrici che li moltiplicano, come viene fatto nel codice BEM. Ossia si passa dal sistema:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{I}]\{\mathbf{f}\} \quad (4.13)$$

dove $[\mathbf{I}]$ è la matrice identità, al sistema:

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{k}\} \quad (4.14)$$

in cui $\{\mathbf{x}\}$ è il vettore contenente tutte le incognite e $\{\mathbf{k}\}$ è il vettore contenente tutti i termini noti.

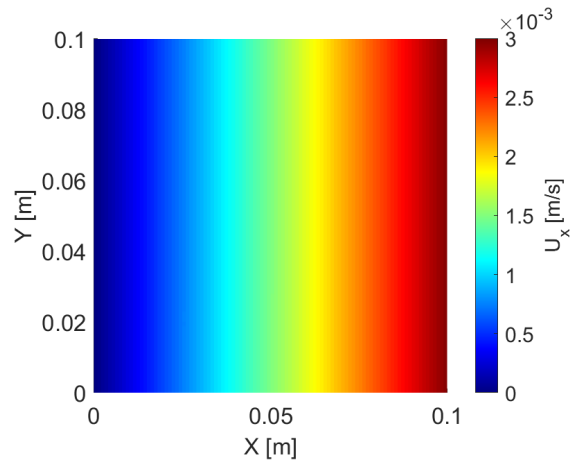
Avendo sul lato sinistro dei vincoli sul grado di libertà lungo l'asse X e sul lato destro uno spostamento imposto lungo la stessa direzione ciò che si avrà un aumento lineare degli spostamenti U_x in questa direzione, come mostrato in fig. 4.29. Come effetto di questi spostamenti si hanno, sull'altro grado di libertà, degli spostamenti U_y verso il basso ma che saranno di un'entità inferiore perché legati al valore del coefficiente di Poisson, questo andamento è visibile in fig. 4.30.

Gli spostamenti U_x assumono lo stesso comportamento secondo tutti i modelli, essendo vincolati agli stessi valori su entrambi i lati, infatti in fig. 4.31 si osserva che sulla linea media orizzontale della piastra si ha un incremento lineare degli spostamenti con le stesse quantità, infatti tra il modello FEM e quello BEM-PD si ha uno scarto relativo massimo dell'1.07%.

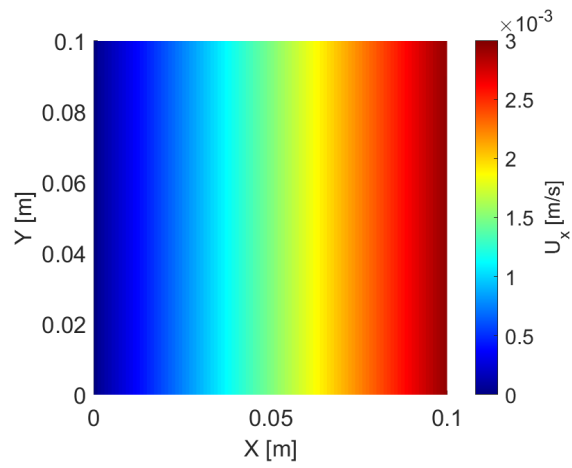
Osservando gli spostamenti U_y in fig. 4.32 sulla linea media verticale si nota, invece, come il modello FEM e PD siano tra loro estremamente accurati mentre i risultati dati dal codice BEM-PD, pur mantenendo lo stesso comportamento, calano di una quantità molto più elevata. Valutando lo scarto relativo rispetto ai risultati del modello FEM si trova un valore massimo del 60.1%, rendendo questa soluzione estremamente inaccurata.

Come per l'esempio della trazione mono-assiale questi errori sono dovuti al set di vincoli che non è adeguato a rappresentare le condizioni che si vogliono imporre con elementi costanti. Utilizzando elementi di ordine superiore si potrebbe ridurre queste incertezze nei risultati.

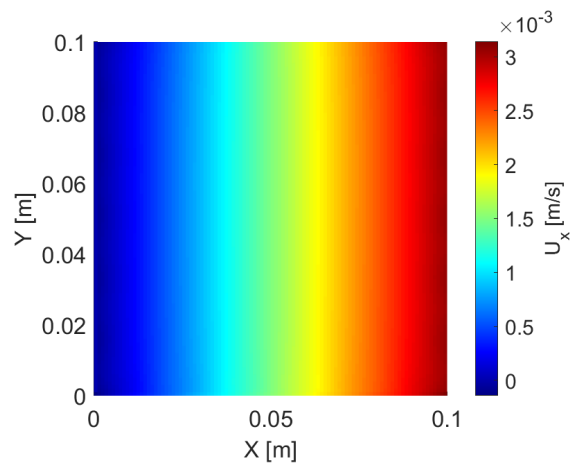
Un altro fenomeno che si verifica a causa dei vincoli imposti è quello dell'oscillazione delle soluzioni in prossimità dei lati vincolati. Per osservare questo effetto si sono raccolti i valori degli spostamenti ad una distanza di $0.001m$ dai lati. In fig. 4.33 sono mostrati gli spostamenti U_x lungo il lato inferiore mentre in fig. 4.34 sono mostrati gli spostamenti U_y in prossimità del lato sinistro.



(a) *FEM*

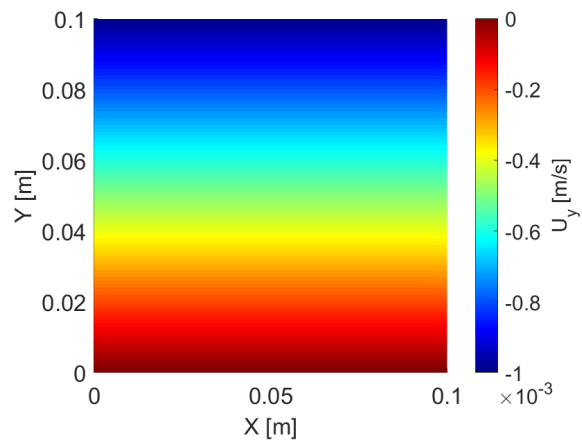


(b) *Peridynamics*

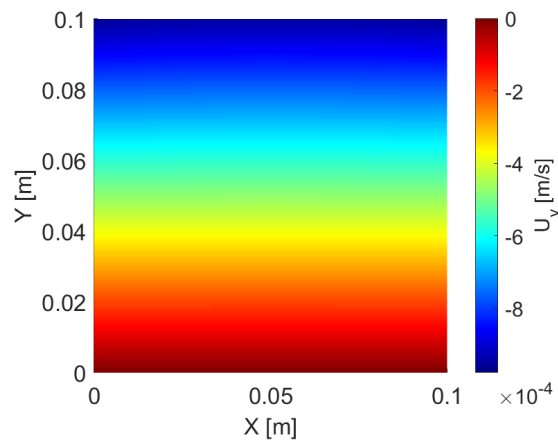


(c) *BEM-PD*

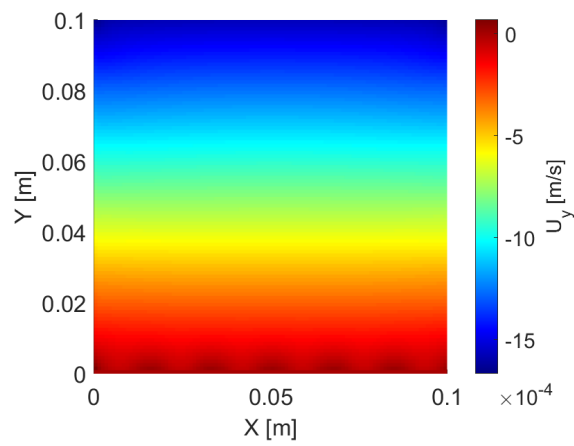
Figura 4.29: Spostamenti U_x nella piastra secondo i diversi modelli di calcolo.



(a) FEM



(b) Peridynamics



(c) BEM-PD

Figura 4.30: Spostamenti U_y nella piastra secondo i diversi modelli di calcolo.

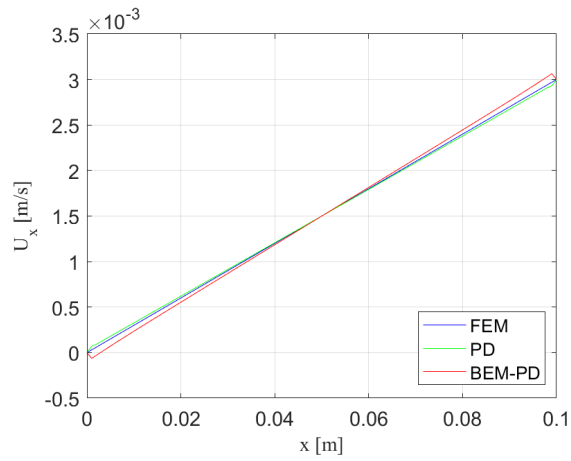


Figura 4.31: Spostamenti U_x lungo la linea orizzontale a $Y = 0.05m$.

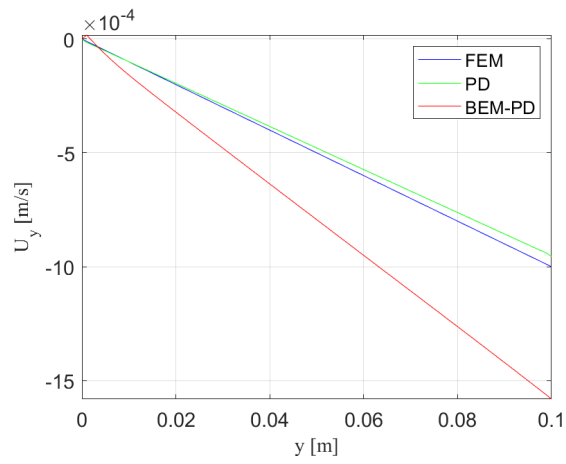


Figura 4.32: Spostamenti U_y lungo la linea verticale a $X = 0.05m$.

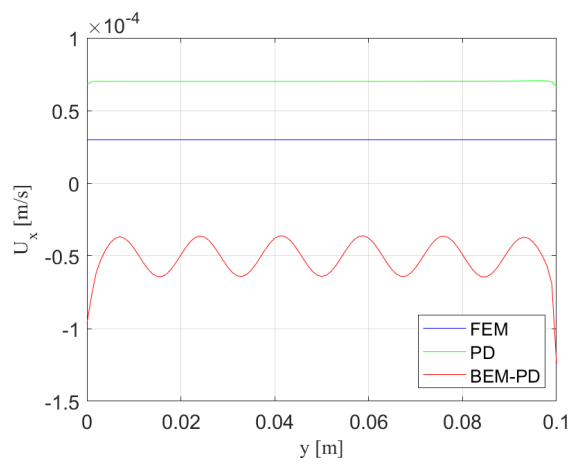


Figura 4.33: Spostamenti U_x in prossimità del lato sinistro.

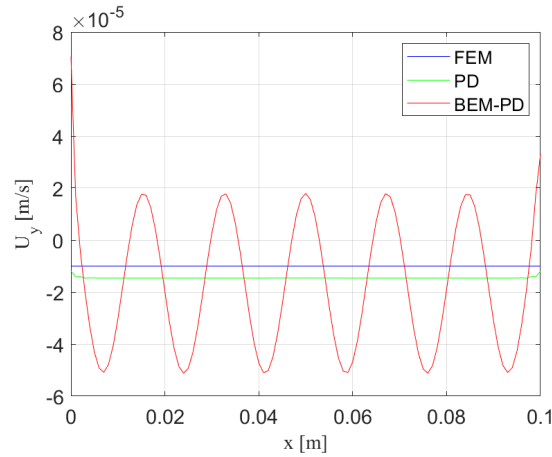


Figura 4.34: Spostamenti U_y in prossimità del lato inferiore.

4.3.4 Foro su piastra infinita

In presente problema tratta una piastra infinita contenente un foro quadrato di lato $l = 0.1m$ al cui interno è applicata una pressione di $100Pa$. Il materiale che compone la piastra è il medesimo degli altri esempi, quindi con modulo di Young $E = 10^5$ e coefficiente di Poisson vincolato al valore $\nu = 1/3$.

La scelta di un foro quadrato rispetto ad uno circolare è stata dettata dalla sua maggior semplicità di rappresentazione per la griglia FEM e peridinamica, però questo non vincola le simulazioni a questa sola tipologia di geometrie.

Questo problema è stato simulato con i diversi codici con tre diverse discretizzazioni di griglia, ossia con: 10, 20, 50 e 200 intervalli per lato. Ciò che si andrà a paragonare sono i valori di spostamento calcolati su un set di punti e i tempi di calcolo necessari ai diversi codici per raggiungere la soluzione.

Per le studio con i modelli FEM e tramite Peridynamics si devono simulare tutti i punti del corpo fisico per ottenere i risultati su punti interni. Per ridurre l'onere computazionale di questi metodi si sono sfruttate le simmetrie del problema, quindi simulando solamente un quarto di piano. Non potendo rappresentare corpi infiniti si simula unicamente la zona compresa nell'intervallo $[0.05; 0.2]m \times [0.05; 0.2]m$ dato che all'origine è posto il centro del foro.

La geometria del problema viene mostrata in fig. 4.35 dove con la linea azzurra si identifica la direzione dei punti in cui si calcoleranno i risultati.

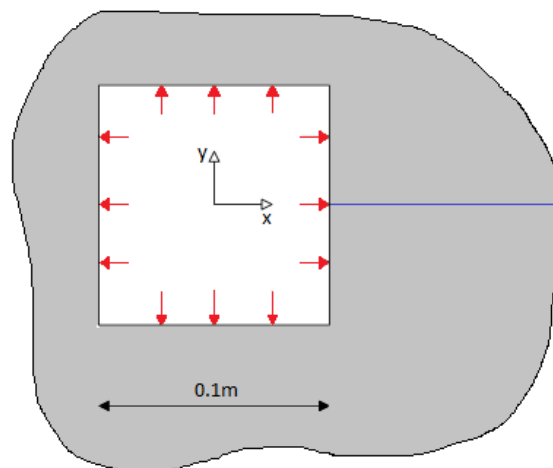


Figura 4.35: Piastra infinita con foro quadrato al cui interno è applicata una pressione di $100Pa$. Con la linea blu si rappresenta la direzione dei punti in cui si calcoleranno le soluzioni.

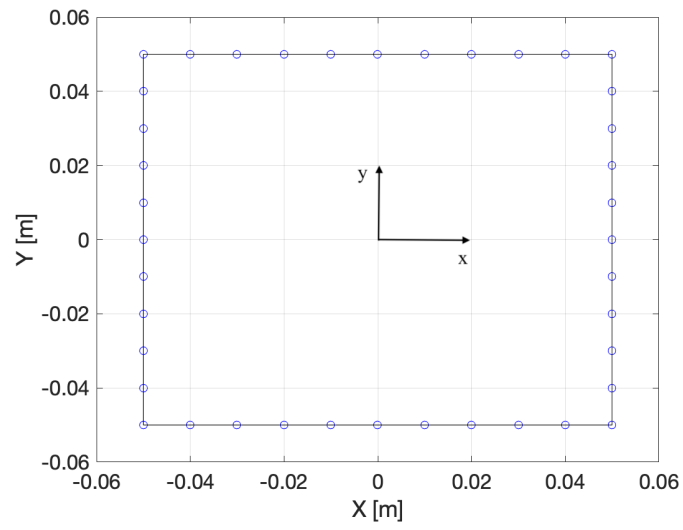
La forma del foro discretizzato, invece, viene mostrata nelle prime immagini delle figure seguenti.

Con il modello BEM-PD bisogna calcolare i valori su tutto il contorno per poter valutare le soluzioni nei punti interni. Il contorno di questa geometria è dato dal foro quindi esso dovrà essere completamente simulato, pertanto non si potrà sfruttare la simmetria del problema.

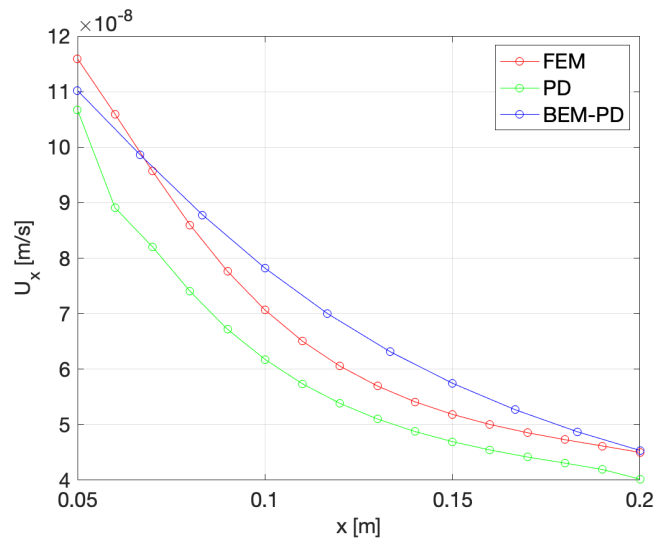
I punti in cui si vuole conoscere la soluzione sono i punti che vanno dal punto medio del lato destro ad ascisse superiori, fino a $x = 0.2m$ dal centro del foro, mantenendo costante l'ordinata $y = 0m$.

Nelle figure seguenti viene mostrato il valore degli spostamenti U_x nei punti di interesse. Non vengono mostrati i valori di spostamento U_y in tali punti perché, per la simmetria del problema essi sono identicamente nulli.

Come si può osservare dalle immagini con una discretizzazione poco precisa si ottengono dei valori che si differenziano molto tra i vari metodi. Al crescere del numero di nodi di discretizzazione si osserva che lo scarto tra i risultati dei diversi metodi tende ad annullarsi, ossia tutti i valori convergono alla stessa soluzione.

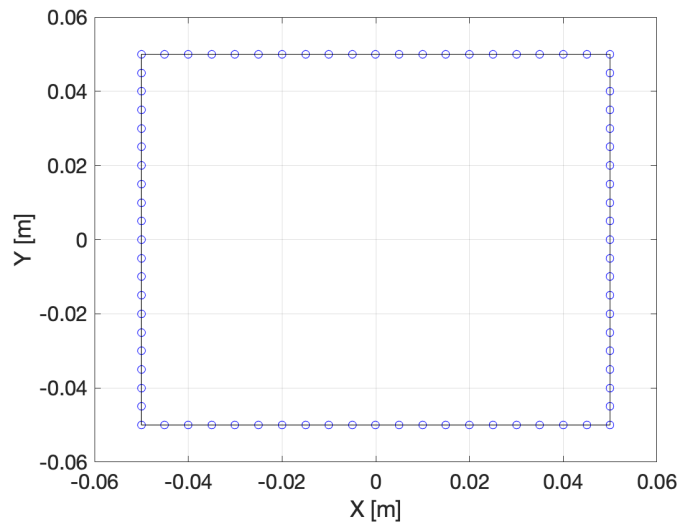


(a) Geometria

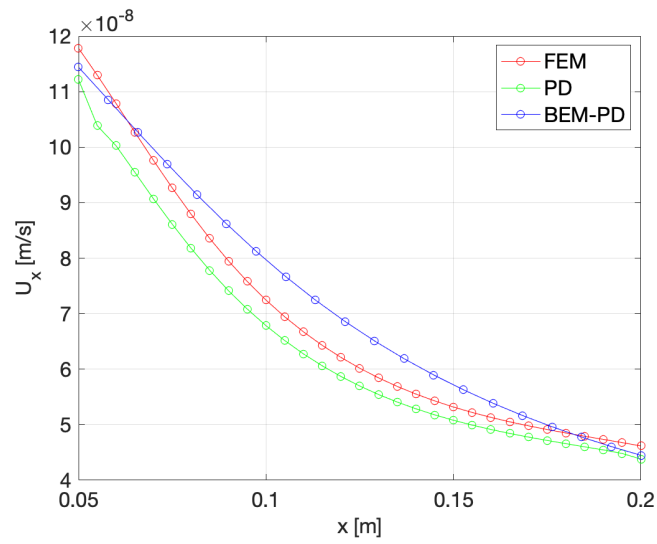


(b) Spostamenti U_x

Figura 4.36: Geometria del foro e spostamenti U_x nei punti di interesse con 10 elementi per lato.

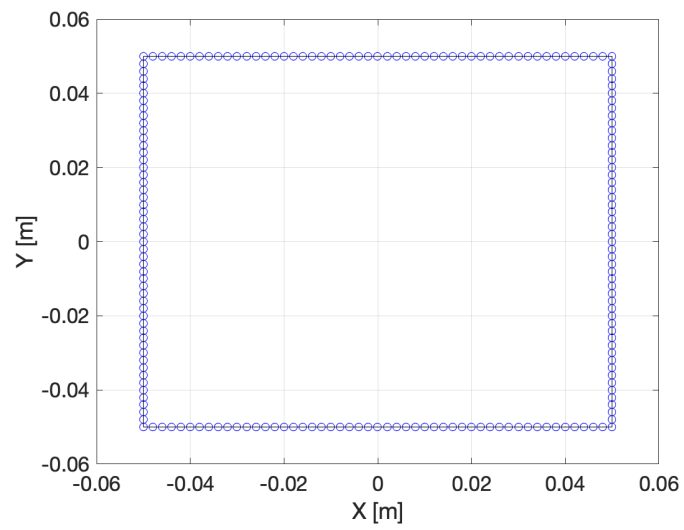


(a) Geometria

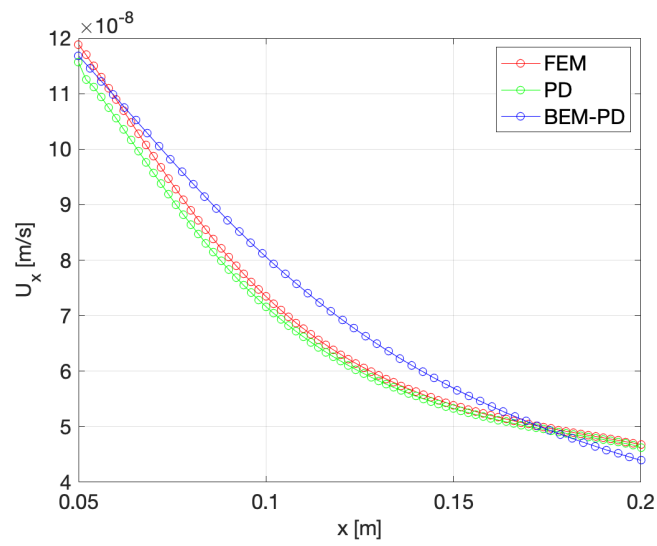


(b) Spostamenti U_x

Figura 4.37: Geometria del foro e spostamenti U_x nei punti di interesse con 20 elementi per lato.

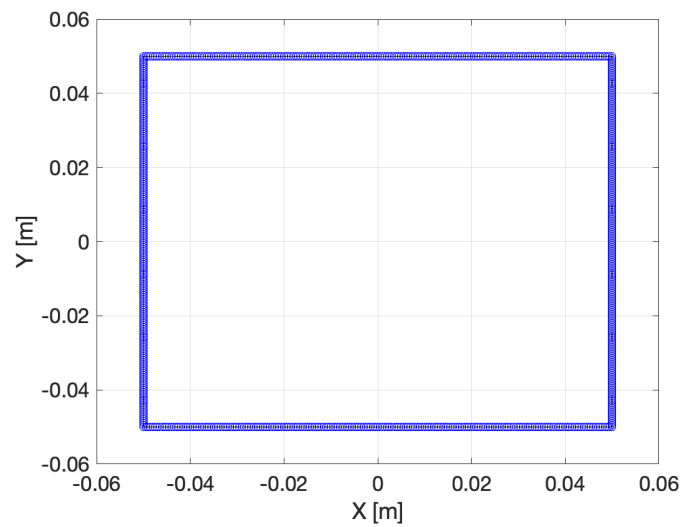


(a) *Geometria*

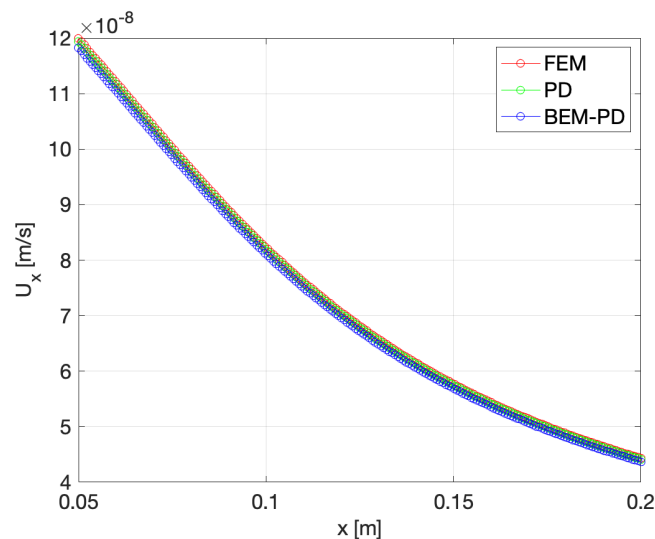


(b) *Spostamenti U_x*

Figura 4.38: Geometria del foro e spostamenti U_x nei punti di interesse con 50 elementi per lato.



(a) Geometria



(b) Spostamenti U_x

Figura 4.39: Geometria del foro e spostamenti U_x nei punti di interesse con 200 elementi per lato.

Un aspetto che si vuole osservare è relativo ad uno dei punti di forza del Boundary Element Method, ossia il ridotto onere computazionale. Questo aspetto risulta di particolare interesse quando si simula un corpo infinito.

Ciò che ci si aspetta è che con il BEM, grazie al minor numero di nodi su cui effettuare i calcoli, si avranno dei tempi di calcolo inferiori agli altri metodi, soprattutto con l'aumentare dei nodi.

In fi.4.40 si è tracciato un grafico contenente sulle ascisse il numero N di nodi di discretizzazione del singolo lato e sulle ordinate il tempo T di calcolo della simulazione. Si osserva che con griglie poco fitte sia il metodo FEM che PD hanno un tempo di calcolo inferiore a quello del BEM, risultato dovuto anche grazie all'utilizzo delle

simmetrie del problema che hanno permesso di analizzare solo un quarto del dominio. All'aumentare dei punti di griglia, però, si osserva l'effetto opposto, ossia che il BEM ha un tempo di calcolo inferiore agli altri modelli, il FEM risulta di poco più lento mentre il codice peridynamico risulta molto più lento a causa dell'elevato numero di bond originatesi.

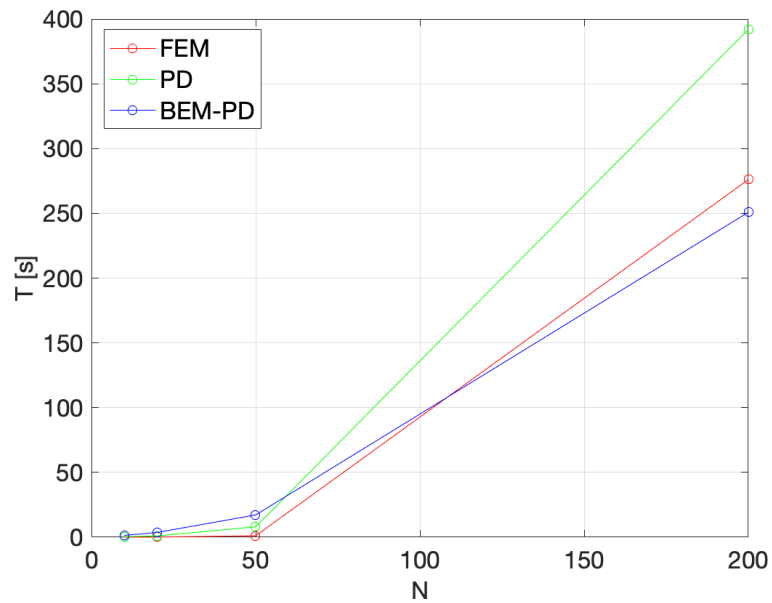


Figura 4.40: Tempo di calcolo in funzione del numero di punti per lato.

Conclusioni

Nella presente tesi si è fornita una panoramica sulla teoria Peridynamics e sul Boundary Element Method. Essendo la peridinamica una teoria non locale si è descritto un metodo recentemente proposto per definire questa teoria in un formalismo adatto all'implementazione del metodo BEM. In questo metodo proposto è stata definita in modo semi-analitico la funzione di Green per la Peridynamics, in questo modo il processo risolutivo risulta il medesimo del metodo BEM classico però le soluzioni che si ottengono hanno le potenzialità della teoria peridinamica di descrivere problemi con discontinuità al loro interno.

A causa della difficoltà nel realizzare un codice che utilizzi la soluzione analitica proposta per risolvere problemi strutturali in tempi accettabili si è optato per una strada alternativa. Non potendo valutare analiticamente la funzione di Green, o soluzione fondamentale, numericamente. Si è scritto un codice di calcolo MATLAB in grado di simulare numericamente il problema da cui si ricava l'equazione di Green, sia con la teoria della meccanica classica che con la teoria peridinamica. Questi risultati sono stati confrontati con le funzioni analitiche classiche e, una volta verificata la loro accuratezza, li si è utilizzati come base per l'interpolazione in punti del dominio non analizzati. La soluzione fondamentale fornita dalla teoria peridinamica si è utilizzata per risolvere l'identità di Somigliana, identità alla base del Boundary Element Method.

Per validare questo codice si sono effettuati degli esempi numerici e si sono paragonati i risultati ottenuti con valori forniti dal metodo agli elementi finiti per la teoria classica e la teoria peridinamica. L'accuratezza dei risultati simulati si è visto essere buona per "problemi adatti al metodo", ma se le condizioni al contorno non sono adatte questa accuratezza si riduce. Un metodo per migliorare questo comportamento è dato dall'utilizzo di elementi di ordine superiore, anche se questo aumenta l'onere computazionale. Un altro miglioramento può essere dato dall'utilizzo di metodi di quadratura che permettano di risolvere le singolarità delle funzioni fondamentali.

Nonostante queste problematiche si è visto che il metodo proposto fornisca soluzioni con tempi di calcolo inferiori rispetto al metodo FEM quando i corpi in esame sono caratterizzati da un alto rapporto tra volume e superficie.

Il metodo descritto in questo elaborato mostra l'implementazione del Boundary

Element Method secondo un approccio alternativo a quello classico che può avere molti spunti di miglioramento sia per quanto riguarda il tempo di calcolo, ottimizzando il codice scritto, che per l'accuratezza delle soluzioni fornite, attraverso l'utilizzo di elementi con funzioni di forma di grado più elevato. Un'altro sviluppo che si può ottenere dato dalla definizione della funzione di Green analitica per la Peridynamics dato che essa potrebbe, oltre che ridurre l'onere computazionale se scritta in modo ottimizzato, permettere di simulare con discontinuità.

Appendice A

Appendici: Calcolo tensoriale

A.1 Tipologia tensori

Tutti gli elementi matematici, come scalari, vettori, etc, possono essere definiti come tensori ma distinguendosi tra di essi per la loro dimensione e il loro ordine.

Come dimensione di un tensore si intende la dimensione d dello spazio a cui appartiene mentre l'ordine è l'intero $r \geq 0$ tale per cui il numero n delle componenti che descrivono il tensore corrisponde a $n = d^r$.

Tra i diversi tipi di tensori che si utilizzano si hanno:

- Gli scalari risultano dei tensori di ordine 0 dato che si ha un unico valore reale che rappresenta ogni proprietà. Nel caso euleriano sono grandezze dipendenti dal punto dello spazio considerato e dal tempo:

$$a = a(x, y, z, t) \quad (\text{A.1})$$

A questa categoria di tensori appartengono: la massa, la pressione, la temperature, etc.

- I vettori sono dei tensori di ordine 1 perché descrivono entità fisiche di cui si devono conoscere: intensità, direzione e verso. Essi associano ad ogni punto dello spazio una terna di valori. Essendo un'entità fisica non dipende dal modo in cui viene rappresentata. Un modo di rappresentarla è come una matrice colonna i cui elementi corrispondono alle componenti del vettore riferite a un particolare sistema di riferimento:

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T \quad (\text{A.2})$$

I vettori permettono di rappresentare molte quantità della meccanica del continuo: velocità, accelerazioni, campo magnetico, etc.

- I tensori del secondo ordine permettono di descrivere stati tensionali e gradienti di velocità. Considerando un dominio tridimensionale per rappresentare le entità fisiche si usano 9 componenti che possono essere contenute all'interno di una matrice:

$$\mathbf{T} = T_{ij} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Se un tensore di ordine 2 è simmetrico lo è rispetto alla sua diagonale per cui vale la relazione $T_{ij} = T_{ji}$.

- I tensori del terzo ordine vengono utilizzati per descrivere flussi turbolenti. Nel caso 3D sono composti da 27 componenti all'interno di una struttura tridimensionale mentre in forma indiciale sono scritti come T_{ijk} .

Un tensore simmetrico del terzo ordine ha 10 componenti libere al posto di 27 dato che vale la relazione:

$$T_{ijk} = T_{ikj} = T_{jik} = T_{jki} = T_{kji} = T_{kij} \quad (\text{A.4})$$

- I tensori del quarto ordine possiedono 81 componenti contenute all'interno di una struttura 4D. A questa categoria appartiene il tensore elastico quando si legano tra loro i tensori di deformazione e di sforzo del secondo ordine.

Quando questo tensore è simmetrico le componenti libere si riducono a 36 dato che vale la relazione: $\Theta_{ijkl} = \Theta_{klij} = \Theta_{jikl} = \Theta_{ijlk}$.

Considerando il tensore elastico del quarto ordine esso è simmetrico e, nel caso di anisotropia lineare elastica, si può scrivere la relazione tensione-deformazione come:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ & & & & C_{1313} & C_{1312} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

A.2 Algebra tensoriale

Nel calcolo tensoriale sono possibili diverse operazioni che vengono descritte di seguito.

A.2.1 Somma algebrica

La somma algebrica tra due tensori dello stesso ordine si effettua sommando membro a membro tutti i termini dei tensori ottenendo come risultato un tensore dello stesso ordine e dimensione dei precedenti:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T} + \mathbf{S} = T_{ij} + S_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} + S_{11} & T_{12} + S_{12} & T_{13} + S_{13} \\ T_{21} + S_{21} & T_{22} + S_{22} & T_{23} + S_{23} \\ T_{31} + S_{31} & T_{32} + S_{32} & T_{33} + S_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

A.2.2 Prodotto tensore scalare

Questa operazione gode della proprietà commutativa e associativa. Lo scalare s moltiplica tutti i termini del tensore \mathbf{T} :

$$\mathbf{R} = s\mathbf{T} = sT_{ij} = \begin{pmatrix} sT_{11} & sT_{12} & sT_{13} \\ sT_{21} & sT_{22} & sT_{23} \\ sT_{31} & sT_{32} & sT_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A.2.3 Prodotto scalare

Il prodotto scalare, detto anche prodotto interno, tra due tensori di ordine r_1 e r_2 è tale per cui l'ordine risultante è $r = r_1 + r_2 - 2$. A causa della contrazione tensoriale il prodotto scalare può essere fatto solamente tra tensori di ordine maggiore o uguale al primo.

Il prodotto scalare tra vettori è commutativo e fornisce uno scalare:

$$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (\text{A.8})$$

Il prodotto scalare tra un vettore e un tensore produce, invece, un vettore:

$$\mathbf{b} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b} = T_{ij} a_j = \sum_{j=1}^3 T_{ij} a_j = \begin{pmatrix} a_1 T_{11} & a_2 T_{12} & a_3 T_{13} \\ a_1 T_{21} & a_2 T_{22} & a_3 T_{23} \\ a_1 T_{31} & a_2 T_{32} & a_3 T_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

in cui gli indici ripetuti, detti indici muti, sottintendono la sommatoria e fanno in modo che j si saturi ma non i .

A.2.4 Doppio prodotto scalare

Considerando due tensori di almeno il secondo ordine è possibile effettuare un doppio prodotto scalare tra di loro. Questa operazione comporta una doppia contrazione

pertanto l'ordine del tensore risultante sarà dato dalla relazione $r = r_1 + r_2 - 4$.

Il doppio prodotto tra tensori del secondo ordine \mathbf{T} e \mathbf{S} è commutativo e produce uno scalare $s = \mathbf{T} : \mathbf{S}$, il quale deve essere valutato come la somma dei nove prodotti delle componenti dei tensori:

$$s = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} S_{ij} = T_{11}S_{11} + T_{12}S_{12} + T_{13}S_{13} + T_{21}S_{21} + T_{22}S_{22} + T_{23}S_{23} + T_{31}S_{31} + T_{32}S_{32} + T_{33}S_{33} \quad (\text{A.10})$$

Il doppio prodotto scalare gode anche di una proprietà per cui:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{Tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}^T) \quad (\text{A.11})$$

dove compare l'operatore traccia $\text{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$.

A.2.5 Prodotto tensoriale

Il prodotto tensoriale, o prodotto esterno, opera su tensori di qualsiasi ordine e fornisce un tensore risultante che subisce una dilatazione infatti risulta dell'ordine $r = r_1 + r_2$.

Considerando due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} il prodotto tensoriale non è commutativo e fornisce il tensore $\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$:

$$T_{ij} = a_i b_j = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Si può osservare che in questo caso tutti gli indici sono liberi.

Bibliografia

- [1] GaMAC Alfano and M.A Crisfield. Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues. *International journal for numerical methods in engineering*, 50(7):1701–1736, 2001.
- [2] Mohammad H Aliabadi. *The boundary element method, volume 2: applications in solids and structures*, volume 2. John Wiley & Sons, 2002.
- [3] Florin Bobaru and Youn Doh Ha. Adaptive refinement and multiscale modeling in 2d peridynamics. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 9(6), 2011.
- [4] Carlos A Brebbia and Jose Dominguez. *Boundary elements: an introductory course*. WIT press, 1994.
- [5] Xi Chen and Max Gunzburger. Continuous and discontinuous finite element methods for a peridynamics model of mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9-12):1237–1250, 2011.
- [6] Robert D Cook et al. *Concepts and applications of finite element analysis*. John wiley & sons, 2007.
- [7] Martin Costabel. Principles of boundary element methods. *Computer Physics Reports*, 6(1-6):243–274, 1987.
- [8] Daniele Dipasquale. Grid refinement adattativo applicato alla teoria peridynamics. *Tesi di laurea magistrale. Università degli studi di Padova*, 2013.
- [9] Daniele Dipasquale, Mirco Zaccariotto, and Ugo Galvanetto. Crack propagation with adaptive grid refinement in 2d peridynamics. *International Journal of Fracture*, 190(1-2):1–22, 2014.
- [10] Qiang Du, Max Gunzburger, Richard B Lehoucq, and Kun Zhou. Analysis and approximation of nonlocal diffusion problems with volume constraints. *SIAM review*, 54(4):667–696, 2012.

- [11] Qiang Du, Max Gunzburger, Richard B Lehoucq, and Kun Zhou. A nonlocal vector calculus, nonlocal volume-constrained problems, and nonlocal balance laws. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(03):493–540, 2013.
- [12] James F Epperson. On the runge example. *The American Mathematical Monthly*, 94(4):329–341, 1987.
- [13] Antonino Favata. On the kelvin problem. *Journal of Elasticity*, 109(2):189–204, 2012.
- [14] Ugo Galvanetto, Teo Mudric, Arman Shojaei, and Mirco Zaccariotto. An effective way to couple fem meshes and peridynamics grids for the solution of static equilibrium problems. *Mechanics Research Communications*, 76:41–47, 2016.
- [15] Youn Doh Ha and Florin Bobaru. Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics. *International Journal of Fracture*, 162(1):229–244, 2010.
- [16] Yu Kebing. Enhanced integration method for the peridynamic theory. *Departement of mechanical and Nuclear Engineering*, 2011.
- [17] Bahattin Kilic and Erdogan Madenci. Structural stability and failure analysis using peridynamic theory. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44(8):845–854, 2009.
- [18] Bahattin Kilic and Erdogan Madenci. An adaptive dynamic relaxation method for quasi-static simulations using the peridynamic theory. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 53(3):194–204, 2010.
- [19] Bahattin Kilic and Erdogan Madenci. Coupling of peridynamic theory and the finite element method. *Journal of mechanics of materials and structures*, 5(5):707–733, 2010.
- [20] QV Le and Florin Bobaru. Surface corrections for peridynamic models in elasticity and fracture. *Computational Mechanics*, 61(4):499–518, 2018.
- [21] Xue Liang, Linjuan Wang, Jifeng Xu, and Jianxiang Wang. The boundary element method of peridynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2020.
- [22] Wenyang Liu and Jung-Wuk Hong. A coupling approach of discretized peridynamics with finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 245:163–175, 2012.

- [23] Fabio Luongo, Mirco Zaccariotto, and Ugo Galvanetto. Static implementation of peridynamics for the simulation of crack propagation. In *The 19th International Conference on Composite Materials, Montréal, Canada*, 2013.
- [24] Richard W Macek and Stewart A Silling. Peridynamics via finite element analysis. *Finite elements in analysis and design*, 43(15):1169–1178, 2007.
- [25] Erdogan Madenci and Erkan Oterkus. Peridynamic theory. In *Peridynamic Theory and Its Applications*, pages 19–43. Springer, 2014.
- [26] Christian Miehe, Martina Hofacker, and Fabian Welschinger. A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(45-48):2765–2778, 2010.
- [27] AR Mitchell. Of the finite element method. In *The Mathematics of Finite Elements and Applications: Proceedings of the Brunel University Conference of the Institute of Mathematics and Its Applications Held in April 1972*, page 37. Academic Press, 2014.
- [28] Nicolas Moës and Ted Belytschko. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering fracture mechanics*, 69(7):813–833, 2002.
- [29] José Juan Muñoz, Ugo Galvanetto, and Paul Robinson. On the numerical simulation of fatigue driven delamination with interface elements. *International journal of fatigue*, 28(10):1136–1146, 2006.
- [30] Greta Ongaro, Pablo Seleson, Ugo Galvanetto, Tao Ni, and Mirco Zaccariotto. Overall equilibrium in the coupling of peridynamics and classical continuum mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 381:113515, 2021.
- [31] Anna Pandolfi and Michael Ortiz. An eigenerosion approach to brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(8):694–714, 2012.
- [32] Francesco Scabbia, Mirco Zaccariotto, and Ugo Galvanetto. A novel and effective way to impose boundary conditions and to mitigate the surface effect in state-based peridynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- [33] Francesco Scabbia, Mirco Zaccariotto, and Ugo Galvanetto. A novel and effective way to impose boundary conditions and to mitigate the surface effect in state-based peridynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122(20):5773–5811, 2021.

- [34] Stewart A Silling. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(1):175–209, 2000.
- [35] Stewart A Silling and Ebrahim Askari. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics. *Computers & structures*, 83(17-18):1526–1535, 2005.
- [36] Stewart A Silling, Paul N Demmie, and Thomas L Warren. Peridynamic simulation of high-rate material failure. Technical report, Sandia National Lab.(SNL-NM), Albuquerque, NM (United States), 2007.
- [37] Ivan Susana. Accoppiamento di elementi finiti e peridinamica in abaqus: sviluppo ed implementazione. *Tesi di laurea magistrale. Università degli studi di Padova*, 2017.
- [38] Davide Tomasi. Analisi dell'accoppiamento di mesh fem e griglie peridynamics per la soluzione di problemi di equilibrio statico. *Tesi di laurea magistrale. Università degli studi di Padova*, 2016.
- [39] Albert Turon, Carlos G Davila, Pedro Ponces Camanho, and Josep Costa. An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models. *Engineering fracture mechanics*, 74(10):1665–1682, 2007.
- [40] Linjuan Wang, Yongshuai Chen, Jifeng Xu, and Jianxiang Wang. Transmitting boundary conditions for 1d peridynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 110(4):379–400, 2017.
- [41] Linjuan Wang, Jifeng Xu, and Jianxiang Wang. Static and dynamic green's functions in peridynamics. *Journal of Elasticity*, 126(1):95–125, 2017.
- [42] Mirco Zaccariotto and Ugo Galvanetto. Peridynamic and cohesive zone model approaches for crack propagation modelling. In *CEAS 2011 The International Conference of the European Aerospace Societies, Venezia*, volume 24, page 28, 2011.
- [43] Mirco Zaccariotto, Fabio Luongo, Ugo Galvanetto, et al. Examples of applications of the peridynamic theory to the solution of static equilibrium problems. *The Aeronautical Journal*, 119(1216):677–700, 2015.
- [44] Mirco Zaccariotto, Teo Mudric, Davide Tomasi, Arman Shojaei, and Ugo Galvanetto. Coupling of fem meshes with peridynamic grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 330:471–497, 2018.
- [45] Goangseup Zi and Ted Belytschko. New crack-tip elements for x fem and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(15):2221–2240, 2003.