



# Università degli Studi di Padova

---

Dipartimento di Matematica “Tullio  
Levi-Civita” Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

Allocazione dinamica del budget per  
una campagna pubblicitaria su social  
media

Laureando  
**Simone Bianchi**  
Matricola: 1186525

Relatore  
**Bruno Viscolani**

---

Anno accademico 2021-2022

20/07/2022



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>La pubblicità nei social network online</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Una revisione dei modelli di allocazione del budget pubblicitario</b>	<b>11</b>
3.1	Modelli tradizionali di allocazione dinamica dei fondi pubblicitari	11
3.2	Allocazione del budget nella pubblicità online (basata sulla ricerca) . . . . .	14
<b>4</b>	<b>I modelli di Nerlove-Arrow &amp; Vidale-Wolfe e le loro estensioni</b>	<b>17</b>
4.1	Il modello di Nerlove-Arrow e le sue estensioni . . . . .	17
4.1.1	I modelli di introduzione di un nuovo prodotto . . . . .	18
4.1.2	Il modello di interfaccia Marketing e operazioni . . . . .	19
4.1.3	I modelli di tariffazione pubblicitaria . . . . .	20
4.2	Il modello di Vidale-Wolfe e le sue estensioni . . . . .	21
4.2.1	I modelli pubblicitari ad intermittenza mediante una funzione di risposta a forma di S o concava . . . . .	22
4.2.2	La pubblicità ottimale e le decisioni sui prezzi nell'adozione di un nuovo prodotto . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Il modello L-P-K</b>	<b>24</b>
5.1	Condizioni di ottimalità e metodologia di soluzione . . . . .	27
5.2	L'Algoritmo . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Strategie pubblicitarie ottimali per diverse funzioni di efficacia</b>	<b>39</b>
6.1	Funzione stazionaria concava . . . . .	39
6.2	Funzione stazionaria a forma di S . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Modelli di Diffusione</b>	<b>45</b>
7.1	Estensione dei modelli di Bass . . . . .	45
<b>8</b>	<b>Studi empirici per problemi pubblicitari dinamici</b>	<b>47</b>
8.1	Studi empirici tramite i modelli Nerlove & Arrow . . . . .	47
8.2	Studi empirici tramite i modelli Vidale & Wolfe . . . . .	47



# 1 Introduzione

L'aspetto chiave della strategia pubblicitaria di una qualsiasi azienda è quello di determinare come allocare i fondi pubblicitari nel tempo in modo tale da utilizzare un budget limitato in grado di esporre il brand al maggior numero possibile di potenziali clienti. I diversi modelli di allocazione del budget pubblicitario sono stati sviluppati nel corso degli anni (a cominciare dai lavori di Nerlove e Arrow, 1962 [5]; Vidale e Wolfe, 1957 [4]), tenendo conto dei seguenti fattori: la consapevolezza basata sull'esposizione del brand pubblicitario, l'inclinazione dei consumatori a dimenticare nel tempo la pubblicità e il fenomeno del *decadimento* (per esempio Pekelman & Sethi, 1978 [8]), in cui l'efficacia di un annuncio decade mediante l'esposizione prolungata. Tuttavia, questi modelli non sono in grado di riprodurre i problemi di allocazione del budget tipici degli ambienti pubblicitari contemporanei, e in particolar modo agli ambienti digitali, dove si sta verificando una quota crescente di comunicazione e consumo. Le piattaforme di social network (SN) presentano agli inserzionisti opportunità e sfide uniche che i modelli di allocazione del budget devono considerare. Forniscono dati dettagliati dei clienti e sulle loro interazioni con i contenuti di marketing, influenzando allo stesso tempo l'esposizione degli utenti a tali contenuti in modi, che non sempre sono trasparenti per gli inserzionisti. La necessità di adattare il problema dell'allocazione del budget agli ambienti di SN è molto importante, in quanto le piattaforme SN stanno diventando i detentori della più alta percentuale di segmento di mercato servito dall'azienda all'interno del loro settore di competenza. L'obiettivo di questo studio è quello di concentrarsi sull'ottimizzazione dell'allocazione del budget nel tempo per una campagna pubblicitaria lanciata su un Social Network (ad es. Facebook o Instagram). Lo scopo specifico è ottimizzare le spese dell'inserzionista nel tempo per segmenti di pubblico specifici, oltre alla durata della campagna pubblicitaria, per raggiungere il livello richiesto di esposizione tra questi segmenti di pubblico per un determinato budget totale. Nel formulare il problema, considereremo le seguenti caratteristiche chiave della pubblicità su SN:

1. Le SN raccolgono continuamente dati personali e sociali sui propri utenti, consentendo a specifici segmenti di consumatori di essere "presi di mira" in modo altamente efficace in un dato momento della giornata
2. Le piattaforme SN forniscono agli inserzionisti informazioni accurate ed in tempo reale in merito all'esposizione degli utenti alla campagna, in

termini di numero di “impressioni” (visualizzazioni di un annuncio) e le loro risposte (ad es. il numero di utenti che hanno cliccato sull’annuncio).

Infine, negli ambienti SN, è probabile che il legame tra le spese pubblicitarie e l’efficacia della pubblicità sia complesso, in quanto:

- Le SN utilizzano un ambiente di mercato monopolistico, in cui la concentrazione dell’offerta di un bene o di un servizio è nelle mani di un solo venditore.
- Le impressioni pubblicitarie sono vendute tramite un meccanismo d’asta non banale
- I servizi di SN comportano intrinsecamente ad interazioni sociali tra gli utenti e queste ultime possono aumentare la cognizione della campagna anche tra gli individui che non sono stati direttamente esposti alla pubblicità.

Yossi Luzon, Rotem Pinchover e Eugene Khmelnsky nell’articolo “European Journal of Operational Research” [2] affermano in base alla loro esperienza che queste caratteristiche non sono state contemporaneamente introdotte nei modelli di allocazione del budget pubblicitario.

La pubblicità è una forma comune di comunicazione che può essere utilizzata per indurre i clienti ad intraprendere alcune azioni riguardo ai prodotti o servizi. Per influenzare il comportamento dei clienti in relazione ad un’offerta pubblicitaria, un’azienda può pagare per distribuire messaggi pubblicitari attraverso vari mass media tradizionali come i giornali, le riviste, gli spot televisivi, le pubblicità radiofoniche, la pubblicità esterna, o la posta diretta; o tramite alcuni nuovi media come, ad esempio, siti Web, messaggi di testo, ecc. La pubblicità possiede due funzioni principali per indurre i consumatori ad acquistare i prodotti o servizi. La prima riguarda il ruolo informativo della pubblicità, con il quale la pubblicità è in grado di fornire alcune informazioni preziose ai consumatori consentendo loro di effettuare scelte razionali in grado di ridurre così la differenziazione della produzione informativa. La seconda si occupa del ruolo di “diversificazione” della pubblicità, con il quale la pubblicità persuade i consumatori per mezzo di differenziatori intangibili e/o psichici creando così delle discrepanze tra i prodotti. Poiché la pubblicità ha un impatto significativo sui comportamenti di acquisto dei clienti, ogni impresa dovrebbe impegnarsi (facendo investimenti pubblicitari) a “promuovere” il proprio prodotto o servizio ai compratori tramite mezzi pubblicitari, i quali

sono soggetti al budget limitato dell'azienda. Pertanto, per ciascuna azienda, una corretta decisione sulla spesa pubblicitaria è fondamentale per aumentare le vendite e migliorare il profitto dell'azienda. Dal momento che l'impatto della pubblicità sulla domanda solitamente varia nel tempo, sorge spontanea la seguente domanda: in che modo un'azienda deve allocare dinamicamente la sua spesa limitata per aumentare le vendite o massimizzare i profitti? Per affrontare questo problema potrebbe essere necessario costruire un modello pubblicitario dinamico appropriato per caratterizzare le vendite dipendenti dal tempo. Tutto ciò ha motivato i ricercatori a costruire una varietà di modelli per i diversi problemi di economia, marketing e campi di gestione delle operazioni. Dopo l'entusiasmo iniziale derivante dalle applicazioni di modelli dinamici ai problemi pubblicitari nei primi anni '60, un gran numero di modelli dinamici formulati in forma differenziale a tempo discreto e continuo sono apparsi negli ultimi cinque decenni per analizzare le politiche pubblicitarie delle aziende nel tempo. I modelli dinamici solitamente coinvolgono un intervallo di tempo rilevante per valutare la dipendenza dal tempo della decisione pubblicitaria. Anche se esistono alcuni modelli a tempo discreto, i modelli a tempo continuo sono ancora, significativamente, i più comuni nelle pubblicazioni reperibili. Di conseguenza, si concentrerà lo studio sui modelli a tempo continuo, che sono ordinariamente utilizzati nei problemi di controllo ottimo (o per i giochi differenziali). In particolare, se un'impresa monopolistica determina il suo livello pubblicitario ottimo in assenza di concorrenza, allora si dovrà costruire un modello di controllo ottimo tramite variabili decisionali che sono funzioni sull'intervallo che rappresenta il tempo; mentre, se due o più aziende determinano le loro politiche pubblicitarie per competere in un mercato, allora si dovrà formulare un modello di gioco differenziale a tempo continuo. Nei modelli dinamici si ritiene che le variabili di stato critiche, come ad esempio le vendite, la quota di mercato, il brand, il goodwill ecc., cambino rispetto al tempo, come delineato dalle equazioni differenziali che verranno presentate successivamente. Erickson [17], Feichtinger et al. [15], e Sethi [7] hanno fornito tre recensioni complete per la pubblicazione dei modelli pubblicitari dinamici prima del 1995; Erickson discusse i modelli dinamici dal punto di vista dei giochi differenziali nella concorrenza pubblicitaria, mentre, Feichtinger et al [15] e Sethi [7] hanno eseguito le loro revisioni dal punto di vista del controllo ottimo. La letteratura pubblicitaria dinamica contiene sia un gran numero di modelli di ottimizzazione dinamica a tempo continuo e sia un gran numero di modelli di giochi differenziali in diverse forme matematiche per i diversi problemi pubblicitari esistenti. Per alleggerire

lo studio in maniera ordinata, classificheremo i modelli in quattro gruppi in base alle loro peculiarità matematiche:

1. Modello di Nerlove-Arrow e le sue estensioni
2. Modello di Vidale-Wolfe e le sue estensioni
3. Modelli di diffusione
4. Studi empirici per problemi pubblicitari dinamici



## 2 La pubblicità nei social network online

La pubblicità online ha cominciato ad emergere all'inizio degli anni '90, quando i proprietari dei siti Web cercavano flussi di entrate aggiuntive per supportare i loro contenuti. Inizialmente, la maggior parte degli annunci pubblicitari consistevano in banner pubblicitari visualizzati su singoli siti Web, con un prezzo deciso in base ad un periodo prestabilito e successivamente in base anche alle visualizzazioni. Alla fine degli anni '90, con la crescita dei motori di ricerca, iniziò a guadagnare importanza la pubblicità basata sulla ricerca e negli anni '2000 fu introdotto il programma pubblicitario di ricerca di AdWords di Google (Jansen e Mullen, 2008 [28]). La pubblicità di SN è entrata in scena nel 2006 quando Facebook ha presentato il suo primo annuncio (Gil, 2017 [39]); il 6 novembre 2007, la piattaforma ha introdotto Facebook Ads come sistema pubblicitario “self-service” che consentì alle aziende di connettersi direttamente con i gruppi target degli utenti. All'interno delle social communities, gli utenti forniscono informazioni personali come: età, sesso, informazioni demografiche, interessi, immagini, ecc. Queste informazioni possono essere altamente valide: ad esempio, Golbeck, Robles e Turner (2011) [35] hanno scoperto che i cinque grandi tratti della personalità degli utenti possono essere intuiti attraverso le informazioni pubbliche provenienti dai social media. Gli inserzionisti possono utilizzare queste informazioni personali per identificare specifici segmenti di utenti con lo stesso interesse e, successivamente, adattare i propri annunci pubblicitari a tali utenti in modo più efficace di quanto non facciano con gli approcci di “targeting” tradizionali che si basano sulla proiezione statistica standard. Inoltre, molti SN offrono strumenti avanzati che facilitano tale “targeting”: Facebook, ad esempio, consente agli inserzionisti di selezionare segmenti di utenti secondo criteri altamente specifici e quindi pubblicare gli annunci adatti alle caratteristiche particolari degli utenti. Una delle opzioni che Facebook offre agli inserzionisti è un servizio di mercato chiamato “Lookalike Audiences” (“Pubblico Simile”) che consente ai professionisti del marketing di analizzare i propri clienti per determinate le loro attitudini e a Facebook di individuare altri utenti con tendenze simili. Inoltre, gli amici degli utenti esposti nella piattaforma che appartengono allo stesso segmento hanno maggiori probabilità di essere presi di mira mediante la stessa campagna pubblicitaria. Questo servizio crea una situazione in cui gli utenti esposti influenzano gli utenti non esposti, un effetto noto in altri processi come l'adozione di nuovo prodotto (Bass, 1969 [6]) che è unico nel campo della pubblicità. Dal punto di vista dell'inserzionista, la

capacità di orientare la pubblicità ad un specifico gruppo di utenti rispetto ad un altro è un vantaggio importante di SN rispetto alle altre forme pubblicitarie. Le aziende dei social media affermano giustamente che anche gli utenti traggono vantaggio da tale “targeting”, poiché fornisce loro informazioni su misura in base ai loro interessi. Un obiettivo di molte aziende è quello di utilizzare le campagne pubblicitarie per aumentare le vendite, tuttavia, la schematizzazione che potrebbe spiegare il legame tra la consapevolezza e le vendite è piuttosto articolata: dipende dalla grafica della campagna, dal design dei contenuti e richiede un profilo preciso degli aspetti comportamentali dei potenziali clienti. Questi ultimi tre aspetti non sono inclusi in questo studio. Giustificiamo la formulazione del problema in questo documento con il fatto che l’inserzionista paga in base ai clic, alle visualizzazioni, ecc., vale a dire per la *awareness*. La consapevolezza può essere vista come un modo moderno e popolare con cui le aziende cercano di raggiungere l’interesse pubblico attraverso il web. Alcune campagne sono puramente commerciali dove l’obiettivo e l’interesse saranno tradotti in vendite, mentre l’obiettivo delle altre campagne è quello di sfruttare la reputazione e la percezione positiva della folla. Queste ultime sono denominate campagne di immagine progettate per creare un’identità specifica nella mente del pubblico di interesse quando pensano: ad un prodotto, ad un’azienda o ad un’organizzazione. In ogni caso, indipendentemente dal fatto che la campagna sia puramente commerciale o meno, massimizzare la consapevolezza è sempre ragionevole, ed il costo della campagna pubblicitaria viene sostenuto indipendentemente dalle vendite future che verranno effettuate. Le piattaforme SN utilizzano meccanismi di vendita d’asta per stabilire la priorità tra diversi inserzionisti che competono per l’attenzione di un particolare pubblico target e determinare quali annunci mostrare ad un utente specifico che accede alla piattaforma in una determinata ora. Per partecipare ad un’asta pubblicitaria, l’inserzionista delinea i criteri del pubblico di destinazione (ad esempio il segmento di mercato) e le specifiche di visualizzazione. Fornisce un prezzo di offerta e un collegamento all’annuncio da visualizzare. Ad ogni asta, la piattaforma SN analizza questi dati tra gli inserzionisti e sceglie un vincitore, il cui annuncio viene presentato nella sezione personalizzata delle notizie dell’utente. I dettagli specifici del meccanismo di offerta utilizzato dai servizi di social network solitamente cambiano nel tempo e non vengono rivelati agli inserzionisti. Le condizioni per aggiudicarsi il pubblico di interesse sono vagamente presentate all’inserzionista, il quale può ipotizzare che maggiore sarà il valore dell’offerta degli altri inserzionisti, maggiore sarà il numero di utenti previsti all’esposizione della

campagna. Infine, le piattaforme SN forniscono agli inserzionisti un feedback accurato ed in tempo reale sulle misure di esposizione della campagna in base al numero di visualizzazioni e di clic; tali informazioni faranno parte del modello proposto da Yossi Luzon, Rotem Pinchover, Eugene Khmel'nitsky (L-P-K).

## 3 Una revisione dei modelli di allocazione del budget pubblicitario

### 3.1 Modelli tradizionali di allocazione dinamica dei fondi pubblicitari

La letteratura scientifica del marketing contiene una varietà di formulazioni di modelli aggregati di risposta pubblicitaria. Questi modelli analizzano la relazione tra le spese pubblicitarie e le vendite dei prodotti (o altre variabili che si traducono in vendite) nel tempo per un intero mercato. Ora si andrà a descrivere in maniera preliminare il modello di Nerlove-Arrow (1962) [5] e il modello di Vidale-Wolfe (1957) [4].

- **Nerlove-Arrow (N-A):** Un lavoro in questo senso è il modello di accumulazione del goodwill proposto da Nerlove e Arrow. Questo modello definisce il concetto di “goodwill”, che rappresenta in maniera generale gli effetti delle spese pubblicitarie passate e correnti sulla domanda presente. Si suppone che qualsiasi spesa aggiuntiva della pubblicità produca un aumento del goodwill che decade nel tempo. Data un’impresa monopolistica che investe nella pubblicità, la dinamica del goodwill aderirà alla seguente equazione:

$$\frac{d}{dt}A(t) = qu(t) - \delta A(t) \quad (3.1)$$

dove  $A$  è il livello del goodwill al tempo  $t$ ,  $\delta > 0$  è il tasso di decadimento del goodwill,  $u(t)$  è la spesa pubblicitaria al tempo  $t$ , e  $q > 0$  è il coefficiente costante corrispondente all’efficacia pubblicitaria. Traducendo l’equazione in termini pertinenti alla concettualizzazione della pubblicità proposta da L-P-K. Si può dire che  $A$  rappresenta la cognizione dei consumatori di un brand fondamentale, mentre  $\delta$  rappresenta il decadimento della cognizione del tempo a causa della possibile dimenticanza dei clienti. Pertanto, l’equazione di N-A implica che il tasso di crescita della consapevolezza  $\frac{d}{dt}A(t)$  aumenta linearmente con il tasso della spesa  $u(t)$  e diminuisce a causa della dimenticanza.

- **Vidale-Wolfe (V-W):** Vidale e Wolfe hanno proposto un modello diverso che stabilisce una relazione diretta tra la spesa pubblicitaria

per un'impresa monopolista e la risposta alle vendite. Il loro modello è basato sulla seguente equazione di stato:

$$\frac{d}{dt}S(t) = q(1 - S(t))u(t) - \delta S(t) \quad (3.2)$$

l'aumento delle vendite (o, nel caso proposto da L-P-K, la conoscenza del brand) è dovuto alla spesa pubblicitaria,  $u(t)$ , che influenza il segmento di mercato che non ha ancora acquistato (che non è a conoscenza del brand). L'attrito del segmento di mercato consapevole si verifica a causa del decadimento delle vendite di un brand non sostenuto.

Sia V-W che N-A hanno utilizzato i loro modelli per determinare la politica di spesa pubblicitaria  $u^*(t)$  che massimizza il profitto attualizzato e cumulato su un orizzonte infinito, soggetto alle suddette equazioni dinamiche.

Pekelman e Sethi (1978) [8] hanno studiato gli effetti di saturazione, per cui l'efficacia marginale di uno spot pubblicitario (in particolare di uno spot televisivo) decresce dopo aver raggiunto una determinata soglia di esposizioni ripetute alla campagna pubblicitaria. In altre parole, gli autori hanno ipotizzato che l'effetto di un annuncio pubblicitario abbia la configurazione di un "life cycle", la cui struttura dipende da tre decisioni:

1. L'investimento iniziale nella produzione di testi pubblicitari
2. Le spese per il posizionamento degli annunci nel tempo
3. La tempistica della campagna o della sostituzione dell'annuncio

Gli autori hanno perfezionato queste tre variabili decisionali utilizzando una tecnica di ottimizzazione composta incentrata sulla programmazione dinamica e sulla teoria del controllo ottimo. Notiamo che la compra-vendita attraverso Facebook, per esempio, è meno influenzabile dai seguenti aspetti:

- Dagli effetti di saturazione
- Da come e quando l'inserzionista sceglie di caricare l'annuncio
- Dal fatto che gli obiettivi della compra-vendita stabiliti dall'annuncio possono essere raggiunti solo una volta per utente

Naik, Mantrala e Sawyer (1998) [18] hanno esteso il modello N-A incorporando le seguenti nozioni: le nozioni di usura ripetuta rappresentate dal decadimento dell'efficacia di inserzioni pubblicitarie a causa della frequente ed eccessiva esposizione; le nozioni del testo d'usura, che sono descritte dal declino della qualità del testo nel tempo indipendentemente dalla frequenza di esposizione (ad esempio, il testo diventa obsoleto); ed, infine, dalle nozioni di ripristino della qualità dell'annuncio. In particolare, basandosi sulla ricerca comportamentale e sull'esposizione alla pubblicità, gli autori hanno teorizzato che gli effetti di saturazione portano ad una diminuzione dell'efficienza degli annunci durante periodi prolungati ed ininterrotti di pubblicità. Inoltre, ipotizzano che i clienti tendono a dimenticare questi effetti durante i periodi di assenza di pubblicità permettendo, così, un possibile ripristino dell'efficienza pubblicitaria sospendendo la campagna per un pó (una volta che la qualità diventa bassa) e poi riprendendola. Gli autori hanno suggerito che, in queste condizioni, una strategia pubblicitaria ad "intermittenza" può generare una maggiore consapevolezza totale rispetto ad una pubblicità continua. I modelli di allocazione del budget pubblicitario discussi in precedenza si riferiscono ai canali di marketing tradizionali. Invece, negli ambienti pubblicitari consueti ed usuali, anche quando è possibile misurare le risposte di interesse dei consumatori (come vendite, consapevolezza del brand o del goodwill) è difficile stabilire con certezza che le eventuali modifiche a queste misure siano effettivamente il risultato delle spese pubblicitarie. Ad esempio, negli ambienti pubblicitari di SN, l'esposizione degli utenti ad una campagna si traduce in un'azione diretta (come un clic sull'annuncio) che può essere misurata accuratamente per catturare il ritorno dell'investimento dell'inserzionista (ROI). Tuttavia, diversamente dalle ipotesi sostanziali, la relazione tra l'esposizione dell'utente (tasso di risposta) e il tasso della spesa pubblicitaria non è necessariamente lineare. Ciò è dovuto alla complessa natura (nascosta) del meccanismo d'asta utilizzato per selezionare le campagne da mostrare in base alla sezione personalizzata dell'utente. Per rispondere a queste preoccupazioni e per accettare le caratteristiche aggiuntive che contraddistinguono le impostazioni pubblicitarie di SN, il modello proposto da L-P-K in [2] si estende e si differenzia dai modelli sopra citati nei seguenti aspetti:

- In quanto entrambi i modelli N-A e V-W presumono che vi sia una relazione lineare tra il tasso di spesa e l'esposizione del brand, si va a considerare una funzione di efficacia del budget più generale. Questa funzione include:

- Il complesso meccanismo d’asta
- Il ruolo delle dinamiche sociali degli utenti di SN nell’influenzare l’efficacia dell’annuncio (ad esempio, l’effetto degli utenti che sono stati esposti all’annuncio su altri utenti che non sono stati ancora esposti)

Inoltre, si ipotizza che analizzando lo schema della funzione di efficacia si possa immettere la risposta di mercato. All’interno del metodo proposto da L-P-K vi sono diverse opzioni per le relazioni di efficacia e viene consigliata una procedura di adattamento della curva.

- Il modello preso in esame considera un’unica campagna in cui il “targeting” e la misurazione dell’efficacia si basano sulle caratteristiche rigorose della piattaforma SN:
  - Le dimensioni esatte delle popolazioni target
  - Le quote di tali popolazioni che sono state esposte.
- Poiché il pagamento per l’esposizione dell’utente può essere sostenuta solo una volta, non vengono presi in considerazione gli effetti di saturazione.

### **3.2 Allocazione del budget nella pubblicità online (basata sulla ricerca)**

Nonostante esistano poche ricerche sull’allocazione del budget nel tempo nella pubblicità basata su SN, la maggior parte dei ricercatori sostengono che l’allocazione del budget nella pubblicità sia incentrata sulla ricerca online. Sebbene tale visione sia sostanzialmente diversa da quella dei tre autori L-P-K in [2] si riesce lo stesso a dare un valore aggiunto al loro lavoro. A differenza della pubblicità basata su SN, dove gli annunci pubblicitari vengono pubblicati dinamicamente sulle sezioni personali delle notizie degli utenti, nella pubblicità basata sulla ricerca, gli utenti che avviano una ricerca online vengono sommersi da annunci pubblicitari situati accanto ai loro risultati di ricerca. In maniera analoga agli annunci presentati su SN, le visualizzazioni degli annunci, basate sulla ricerca, vengono vendute tramite i differenti meccanismi d’asta. In queste aste, l’inserzionista emette delle offerte riguardo a parole chiave specifiche e

riguardo a segmenti di pubblico specifici a cui desidera rivolgersi.

Alcuni studi solitamente considerano il budget come un vincolo e determinano le strategie di offerta relative in base a parole chiave specifiche adeguando in questo modo l'allocazione del budget all'interno della pubblicità di ricerca. Le decisioni che riguardano il budget nelle aste di ricerca avvengono su tre livelli:

1. Allocazione del budget attraverso le ricerche di mercato
2. Distribuzione del budget nel tempo mediante una serie di slot (per esempio tramite i giorni)
3. Regolazione del budget rimanente una volta che una parte di esso è stato utilizzato (per esempio il budget giornaliero)

Yang et al. (2013) [38] hanno sostenuto che le allocazioni del budget nelle aste pubblicitarie basate sulla ricerca debbano considerare l'intero ciclo di un annuncio di ricerca. Gli autori hanno proposto una rappresentazione gerarchica di ottimizzazione del budget e hanno sviluppato le strategie del suo smistamento tramite una sequenza di intervalli di tempo. Alcuni ricercatori vedono il processo pubblicitario online (basato sulla ricerca) come un gioco sofisticato a cui più inserzionisti giocano per ottimizzare il proprio ROI. Il mercato offre molti "targets" per la pubblicità (per esempio, combinazioni specifiche di termini di ricerca o popolazioni di utenti). Ogni "target" è associato ad una raccolta di giochi all'interno di un insieme che coinvolge virtualmente diversi giocatori. L'obiettivo principale consiste nel trovare un metodo per allocare il budget pubblicitario attraverso i "targets" formulando la migliore strategia di risposta dei giocatori. Questi studi in genere considerano una singola situazione pronosticabile in cui si suppone che le strategie degli altri inserzionisti siano esatte. DasGupta e Muthukrishnan (2013) [37] hanno proposto un modello in cui l'inserzionista ha a disposizione un insieme di parole chiave ("targets") e alcune informazioni stocastiche sul futuro. Tali informazioni tengono conto della distribuzione di probabilità delle diverse combinazioni possibili di costo vs. clic in cui le strategie degli altri inserzionisti sono corrette. Gli autori hanno formulato un problema di ottimizzazione stocastica del budget per comprendere come distribuire un fissato budget su queste parole chiave per massimizzare il numero di clic previsto. Prasad e Sethi (2004) [23] hanno studiato un gioco differenziale in cui il termine di decadimento delle vendite esprime il decadimento causato dalla competitività



della pubblicità e dall'abbandono non competitivo che agisce per pareggiare le quote di mercato in assenza di pubblicità.

Lo studio proposto da Yossi Luzon, Rotem Pinchover e Eugene Khmelnsky nell'articolo "European Journal of Operational Research" [2] si concentrerà sullo sviluppo di un *framework* mediante procedimenti di ottimizzazione per determinare una politica ottima di allocazione dinamica del budget. Poiché i dettagli dei meccanismi d'asta impiegati dalle piattaforme SN sono per lo più sconosciuti, come discusso sopra, agli inserzionisti conviene conoscere l'impatto di un'offerta sul numero di utenti esposti ad una campagna pubblicitaria online. Gli inserzionisti studiano la risposta di mercato di una specifica campagna pubblicitaria tramite una funzione di efficacia senza assumere neanche una suddivisione in grado di cogliere le incertezze generali di mercato. Sarà, dunque, possibile utilizzare in modo esplicito la funzione di efficacia per risolvere il problema di ottimizzazione che stabilisce la durata della campagna e la distribuzione dinamica di un fissato budget durante la campagna stessa.

## 4 I modelli di Nerlove-Arrow & Vidale-Wolfe e le loro estensioni

### 4.1 Il modello di Nerlove-Arrow e le sue estensioni

Nerlove e Arrow (1962) [5] hanno sviluppato il loro modello standard per descrivere la domanda dipendente dal tempo tramite una funzione generale. In particolare, usando tale modello, si può calcolare la domanda per il prodotto di un'azienda al tempo  $t$  come  $S(t) = f(A(t), p(t), Z(t))$ , dove  $A(t)$  denota lo stock del goodwill che riassume gli impatti delle spese pubblicitarie attuali e passate dell'azienda sulla domanda presente. Tale aspetto si evolve nel tempo secondo la seguente equazione dinamica:

$$\frac{d}{dt}A(t) = u(t) - \delta A(t), \text{ con } A(0) = A_0 \quad (4.1)$$

in cui  $u(t)$  è l'esborso pubblicitario dell'impresa al tempo  $t$  e  $\delta$  è il tasso proporzionale costante al momento dell'ammortamento. Tuttavia, nel modello N-A  $p(t)$  è il prezzo effettivo del prodotto al tempo  $t$ , e  $Z(t)$  è una variabile che rappresenta gli altri fattori (tranne lo stock del goodwill e il prezzo) che influenzano la domanda che però non sono sotto il controllo dell'azienda; come ad esempio, il reddito dei consumatori, la popolazione, e i prezzi dei prodotti sostitutivi e complementari.

Alcuni studiosi di economia, marketing e di aree di gestione delle operazioni hanno esteso il modello standard di N-A per costituire una varietà di funzioni di domanda a tempo continuo. I modelli più rilevanti pubblicati prima del 1995 sono stati rivisti da Erickson (1995) [17], Feichtinger et al. (1994) [15], e Sethi (1977) [7]. Si può evincere che, nei modelli prima del 1995, i titoli di capitale di un'azienda come il goodwill e la reputazione dipendono dall'esborso pubblicitario dell'azienda. Nonostante gli articoli [7], [15], [17], abbiano esaminato il modello di N-A e le sue estensioni pubblicate prima del 1995, si osserva che, dopo il 1995, un certo numero di studiosi hanno continuato ad estendere il modello per svilupparne di nuovi volti all'analisi di vari problemi legati al business e all'economia. Si esaminano ora le estensioni successive al 1995 del modello di N-A, in cui una singola impresa senza concorrenza affronta il problema della domanda dipendente dal costo pubblicitario.

### 4.1.1 I modelli di introduzione di un nuovo prodotto

Mosca e Viscolani (2004) [24] sono riusciti a determinare un percorso di goodwill ottimale che massimizza il profitto previsto per l'introduzione di un nuovo prodotto all'interno di un mercato. Generalizzando il modello originale di N-A in (4.1), gli autori hanno caratterizzato lo stock del goodwill nella seguente equazione:

$$\frac{d}{dt}A(t) = f(u(t)) - \delta A(t) \quad (4.2)$$

dove  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  è una funzione strettamente crescente e concava, la quale illustra come il costo pubblicitario possa produrre un nuovo goodwill. Si osserva che, prima di Mosca e Viscolani (2004) [24], Buratto e Viscolani (1994), (2002) [14], [20] avevano considerato un caso speciale del modello appena esibito esprimendo la funzione  $f(u(t))$  nel seguente modo:  $f(u(t)) = [u(t)]^\alpha$ ; dove  $\alpha \in (0, 1]$  è una costante. Mosca e Viscolani sono riusciti ad ottenere una soluzione ottimale che massimizza il profitto previsto di un'azienda che considera due diverse forme specifiche di funzione di costo:

1. Funzioni lineari/quadratiche di costo
2. Funzioni tariffarie di tipo N-A (funzioni di tassazione del costo di tipo N-A)

Buratto et al. (2006), (2006) [25],[26] hanno esaminato la politica pubblicitaria di un'azienda in un mercato con un numero finito di segmenti costituiti da una popolazione di consumatori. Buratto et al. (2006) in [25] hanno considerato un mercato di dimensione  $M$ , dove ogni segmento di consumo è specificato da un attributo di segmentazione  $a \in \Omega$ , dove  $\Omega$  rappresenta un insieme di proprietà. Per l'intervallo di tempo  $[0, T]$  con  $T \leq +\infty$ , attribuito alla pubblicità per l'introduzione di un nuovo prodotto, Buratto et al. (2006) [25] hanno esteso il modello standard di Nerlove & Arrow nella seguente equazione di sviluppo del goodwill:

$$\begin{aligned} \dot{A}(t, a) &= \frac{\partial A(t, a)}{\partial t} = u(t, a) - \delta(a)A(t, a), \\ A(0, a) &= \alpha(a) \geq 0, \quad a \in \Omega \end{aligned} \quad (4.3)$$

dove, nel segmento con l'attributo di segmentazione  $a$ ,  $A(t, a)$  rappresenta lo stock del goodwill del prodotto al tempo  $t \in [0, T]$ ,  $\delta(a) > 0$  indica il

tasso di ammortamento del goodwill per i membri del segmento, e  $u(t, a)$  rappresenta l'intensità pubblicitaria effettiva al tempo  $t$  diretta al segmento. Buratto et al. (2006) in [26] hanno esteso il modello in (4.3) per analizzare il caso in cui sono disponibili diversi canali pubblicitari con differenti spettri di diffusione. In primo luogo, per un unico canale pubblicitario, gli autori hanno sostituito il termine  $u(t, a)$  nella funzione di evoluzione del goodwill in (4.3) con  $\gamma(a)\varphi(u(t))$ ; dove  $\gamma(a)$  denota lo spettro del canale in modo tale che  $\sum_{a \in \Omega} \gamma(a) = 1$  e  $\varphi(u(t)) \geq 0$  rappresenta il livello di pubblicità effettivo del canale esprimendo il fatto che l'effetto dell'intensità pubblicitaria sulla variabile del goodwill possa variare in base al canale pubblicitario. Ogni canale pubblicitario è caratterizzato da  $(\gamma(a), \varphi(u(t)))$ . Quindi, assumendo che  $\varphi(u(t)) = S_i \sqrt{u_i(t)}$ , Buratto et al. hanno esaminato il caso speciale in cui un'azienda deve scegliere un solo canale pubblicitario tra gli  $n$  disponibili per condurre la campagna di pre-lancio di un nuovo prodotto.

#### 4.1.2 Il modello di interfaccia Marketing e operazioni

Erickson (2011) [34] ha osservato le decisioni congiunte sui prezzi e sulla pubblicità per un'azienda coinvolgendo due aree funzionali che solitamente mirano ad obiettivi diversi e sono:

1. Il marketing
2. Le operazioni

In particolare, il primo tenta di far aumentare la domanda ed il secondo mira a ridurre al minimo i costi operativi (ad esempio, la produzione). Erickson ha adottato il modello standard di N-A in (4.1) per descrivere l'evoluzione del goodwill interpretando il prezzo e la funzione di vendita, che dipende dalla pubblicità nel modo seguente:

$$S(t) = \alpha - \beta p(t) + \gamma A(t) \tag{4.4}$$

dove  $\alpha$  è una costante e  $\beta$  misura l'effetto negativo del prezzo sulle vendite. Ammesso che il "backlogging" sia consentito (ovvero, la possibilità di conoscere l'arretrato di un'azienda tramite i suoi registri in quanto queste informazioni possono essere utilizzate per effettuare delle stime sui guadagni futuri, poiché riflettono il lavoro che non è stato ancora completato il quale genererà del reddito una volta terminato), Erickson ha descritto la variabile dinamica del "backlog" (che rappresenta la quantità di ordini arretrati che sono in

attesa di essere ultimati dall'azienda) nel modo seguente:  $\dot{B}(t) = S(t) - K(t)$ , dove  $K(t)$  denota il tasso di produzione dinamico. All'interno dell'azienda il reparto di marketing determina  $p(t)$  e  $u(t)$  è un termine del goodwill  $A(t)$  stabilito in (4.1). Il dipartimento operativo possiede il potere decisionale sulla variabile  $K(t)$ .

### 4.1.3 I modelli di tariffazione pubblicitaria

Bertuzzi e Lambertini (2010) [33] hanno studiato un gioco differenziale, dove due imprese competono in un mercato per dei prodotti parallelamente differenziati determinando le loro locazioni, i loro prezzi ed i loro investimenti pubblicitari. In maniera analoga al modello di Hotelling (1929) [3], dove il numero possibile di consumatori all'istante  $t \in [0, +\infty)$  è  $M(t)$  e sono distribuiti uniformemente lungo l'intervallo unitario  $[0, 1]$ . Al tempo  $t$ , l'impresa  $i$ -esima ( $i = 1, 2$ ) sceglie la sua locazione  $y_i(t) \in [0, 1]$ . Quando un consumatore residente in  $l \in [0, 1]$  acquista una unità di prodotto dell'impresa  $i$ -esima, il consumatore può ottenere l'eccedenza  $U = s - p_i(t) - g(y_i(t) - l) \geq 0$ , dove  $s$  è il prezzo di prenotazione del consumatore,  $p_i(t)$  è il prezzo di vendita dell'impresa  $i$ -esima, e  $g(\cdot)$  è la funzione del costo di trasporto. Assumendo che  $g(y_i(t) - l) = k \times |y_i(t) - l|$ , Bertuzzi e Lambertini (2010) [33] hanno ottenuto che il consumatore residente in  $\bar{l}(t) \equiv [p_2(t) - p_1(t) + k(y_1(t) + y_2(t))]/(2k)$  non risente della diversificazione dei prodotti 1 e 2; e hanno calcolato le richieste sostenute dalle aziende 1 e 2 nel modo seguente:  $S_1(t) = M(t)l(t)$  e  $S_2(t) = M(t) - S_1(t)$ . Le due aziende possono aumentare le richieste totali dei loro prodotti nel tempo investendo sulle pubblicità che progrediscono secondo la seguente equazione:

$$\dot{M}(t) = \alpha[u_1(t) + u_2(t)] - \delta M(t) \quad (4.5)$$

dove  $u_i(t)$  è la spesa pubblicitaria dell'impresa  $i$ -esima,  $\alpha > 0$  misura l'efficacia della pubblicità, e  $\delta$  è il tasso di decadimento della richiesta. Simile a Bertuzzi e Lambertini (2010) [33], Cellini e Lambertini (2003) [22] hanno considerato un contesto di concorrenza di Cournot in cui  $n \geq 2$  e le imprese vendono un prodotto simile al tempo  $t$ . Si suppone che tutte le imprese debbano sostenere un identico costo di produzione marginale che è stato normalizzato a zero. La funzione che esprime la domanda *inversa*  $S(t)$  soddisfa la seguente equazione:  $p(t) = [p_R(t) - S(t)]^{\frac{1}{\alpha}}$ , dove  $p(t)$  è il prezzo del prodotto,  $p_R(t)$  è il prezzo di prenotazione dei consumatori,  $S(t) = \sum_{i=1}^n S_i(t)$  rappresenta la quantità

aggregata di prodotto, e  $\alpha \in (0, +\infty)$  determina la curvatura della domanda. La funzione  $S(t)$  è:

- Convessa quando  $\alpha > 0$
- Lineare quando  $\alpha = 1$
- Concava quando  $\alpha \in (1, +\infty)$

Le  $n$  imprese possono aumentare il valore di  $p_R(t)$  investendo in una pubblicità che aderisce alle seguenti dinamiche evolutive:  $p_R(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) - \delta p_R(t)$ , con  $p_R(0) = \bar{p}_R$ . Ogni impresa ha lo scopo di massimizzare il proprio profitto scontato. Risolvendo il gioco differenziale, Cellini e Lambertini hanno determinato gli equilibri ad open-loop e a closed-loop, e hanno illustrato che le proprietà degli equilibri dipendono dalla curvatura della funzione di domanda. Inoltre, hanno scoperto che i costi pubblicitari delle imprese nell'equilibrio ad open-loop sono maggiori di quelli nell'equilibrio a closed-loop.

## 4.2 Il modello di Vidale-Wolfe e le sue estensioni

I modelli dinamici esaminati in questo paragrafo analizzano l'impatto pubblicitario sulle vendite che generalmente persistono oltre il periodo corrente in maniera decrescente. Il legame tra il tasso di variazione delle vendite e l'effetto di riporto pubblicitario era spesso caratterizzato dalle equazioni differenziali, come discusso da Sethi (1977) [7]. Il primo modello che incluse un tale effetto pubblicitario fu formulato da Vidale & Wolfe (1957) in [4]. Definendo  $\lambda$  come la costante di decadimento esponenziale delle vendite,  $M$  il livello di saturazione, e  $r$  la costante di risposta, Vidale e Wolfe (1957) [4] hanno espresso il tasso di vendita  $S(t)$  al tempo  $t$  nella seguente formulazione:

$$\dot{S}(t) = r \cdot \frac{u(t)[M - S(t)]}{M} - \lambda S(t) \quad (4.6)$$

dove  $u(t)$  indica il tasso della spesa pubblicitaria,  $[M - S(t)]/M$  rappresenta la frazione dei potenziali clienti, e  $\lambda S(t)$  è il numero di clienti persi. Come esprime l'equazione differenziale delle vendite, la variazione del tasso di vendita,  $\dot{S}(t)$ , è positivamente correlato alla spesa pubblicitaria  $u(t)$ . Il modello standard di V-W appena esibito è stato ampiamente esteso per analizzare i vari problemi legati al business e all'economia. Erickson (1995) [17], Feichtinger et al. (1994) [15], e Sethi (1977) [7] hanno rivisto le estensioni di V-W pubblicate prima del 1995. Si esaminano ora le estensioni dei modelli di V-W che sono stati pubblicati dopo il 1995 per studiare i problemi dinamici pubblicitari.

### 4.2.1 I modelli pubblicitari ad intermittenza mediante una funzione di risposta a forma di S o concava

Nelle estensioni di V-W analizzate prima del 1995 da Feichtinger et al. (1994) [15], Mahajan e Muller (1986) [12] vennero utilizzate delle funzioni di efficacia pubblicitarie a forma di S per studiare se una politica ad intermittenza pubblicitaria fosse superiore ad una politica uniforme. In modo simile a Mahajan e Muller (1986) [12], Mesak (1992) [13] ha generalizzato il modello di V-W in (4.6) e ha studiato la politica degli impulsi pubblicitari utilizzando sia la funzione di risposta pubblicitaria a forma di S che quella concava nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= \left\{ \lambda + \frac{r \cdot [u(t)]^\delta}{M} \right\} \cdot [\Lambda(u(t)) - S(t)] \\ &= \frac{r \cdot u(t)[M - S(t)]}{M} - \lambda S(t)\end{aligned}\tag{4.7}$$

dove  $\delta$  è una costante positiva e  $\Lambda(t) \equiv r[u(t)]^\delta / \left\{ \lambda + \frac{r[u(t)]^\delta}{M} \right\}$  rappresenta la funzione di risposta alla pubblicità nello stato stazionario. Si osserva che  $\Lambda(u(t))$  è concava per  $0 < \delta \leq 1$  e si ha una forma ad S per  $\delta > 1$ . Introducendo l'effetto di saturazione pubblicitaria in (4.7), Mesak è riuscito a descrivere la risposta di vendita ottima  $S(t)$  per una politica uniforme e per una politica ad intermittenza. Sia per la funzione concava che per quella a forma di S, Mesak ha derivato in presenza della saturazione pubblicitaria, le condizioni in cui la politica ad intermittenza è superiore alla politica uniforme. Sostituendo  $\frac{r[u(t)]^\delta}{M}$  in (4.7) con la funzione standard  $f(u(t))$ , l'autore in [21] ha sviluppato una misura basata sulla performance, non attualizzata, per studiare l'impatto del tasso di vendita iniziale sulla performance di differenti politiche pubblicitarie discrete e continue a tratti in un orizzonte di programmazione finito. Inoltre ha mostrato che, quando il tasso di vendita iniziale non è uguale a zero all'inizio del periodo di pianificazione e la risposta pubblicitaria è indipendente dalla struttura della funzione, il costo pubblicitario di un'azienda di una politica lampo è molto diverso da quello di una politica ad intermittenza pubblicitaria. Mesak, infine, ha osservato che il modello di politica pubblicitaria ottimale in presenza di un tasso di vendita iniziale differisce significativamente dai modelli in cui è assente.

#### 4.2.2 La pubblicità ottimale e le decisioni sui prezzi nell' adozione di un nuovo prodotto

Sethi et al. (2008) [29] hanno esteso il modello di Sethi (1983) [10] per prendere in considerazione la pubblicità ottimale e le decisioni sui prezzi per un'azienda che vuole introdurre un nuovo prodotto. Sia  $S(t)$  la vendita complessiva all'istante  $t$ ,  $p(t)$  denota il prezzo addebitato all'istante  $t$ , e  $D(p(t))$  indica la domanda dipendente dal prezzo avente  $\dot{D}(p) < 0$ . Dunque, Sethi et al. (2008) [29] sono giunti al seguente modello pubblicitario dinamico:

$$\dot{S}(t) = r \cdot u(t)D(p(t))\sqrt{1-S(t)} - \lambda S(t) \quad (4.8)$$

dove  $r$  e  $\lambda$  sono definite come nel modello standard di Vidale & Wolfe in (4.6). Analogamente a Sethi (1983) [10], il costo pubblicitario viene assunto da  $u^2(t)$  e la domanda  $D(p(t))$  può presentarsi nelle due forme seguenti:

1. Lineare:  $D(p(t)) = 1 - \eta p(t)$ , con  $\eta > 0$
2. Isoelastica:  $D(p(t)) = [p(t)]^{-\eta}$ , con  $\eta > 1$



## 5 Il modello L-P-K

Presentiamo il modello proposto da Yossi Luzon, Rotem Pinchover, Eugene Khmelnsky in [2]. Si considera un unico inserzionista che desidera lanciare una singola campagna pubblicitaria sulla piattaforma SN, rivolgendosi a diversi tipi di destinatari. Sia  $B$  il budget totale della campagna ed  $S$  l'insieme dei tipi di destinatari. Per ogni tipo di destinatario  $s$ , con  $s \in S$ , la dimensione dei potenziali consumatori, indicata da  $h_s$ , è nota all'inserzionista attraverso i dati forniti dalla piattaforma SN. Ad ogni istante di tempo  $t$ , l'inserzionista presenta un'offerta  $b_s(t)$  per esporre il tipo di destinatario  $s$  alla campagna pubblicitaria. La relazione tra il valore dell'offerta al tempo  $t$ ,  $b_s(t)$ , ed il numero dei nuovi spettatori esposti, che sono compresi nel pubblico, è determinato da una *funzione di efficacia* che verrà descritta in dettaglio in seguito. Il fine dell'inserzionista è quello di determinare la durata minima  $T$  della campagna e le funzioni d'offerta  $b_s(t)$ ,  $s \in S$ ,  $t \in [0, T]$ , in modo tale che:

- i) Una determinata percentuale minima di utenti in ciascun segmento del tipo di destinatario  $s$  (denotata con  $p_s$ ,  $0 < p_s < 1$ ) sia esposta alla campagna entro l'intervallo di tempo
- ii) La somma delle offerte nell'arco di tempo non superi il budget totale  $B$  della campagna

Modificando  $B$ , si ottiene la frontiera di Pareto delle strategie d'offerta: ovvero, si determinano le strategie che minimizzano  $T$  dato  $B$  e le strategie che minimizzano  $B$  dato  $T$ . Più formalmente:

### 1. Variabili decisionali

- La durata della campagna  $T$
- L'offerta  $b_s(t)$  che l'inserzionista presenta ad ogni tipo di destinatario  $s$  all'istante di tempo  $t \in [0, T]$

### 2. Variabili di stato

- Il numero di persone  $g_s(t)$  di ogni tipo di destinatario  $s$  che sono esposte alla campagna fino al tempo  $t$
- La somma totale  $z(t)$  delle offerte fino al tempo  $t$ .

### 3. La funzione di efficacia

Assumiamo che il numero di potenziali consumatori del tipo di destinatari  $s$  esposti alla campagna fino all'istante  $t$  evolva nel tempo come determinato dall'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}g_s(t) = (h_s - g_s(t)) \cdot r(b_s(t), g_s(t), t)$$

dove  $r : [0, +\infty) \times [0, h_s) \times [0, T] \rightarrow [0, +\infty)$  è la funzione di efficacia, dipendente da:

- valore dell'offerta  $b_s(t)$
- numero di potenziali consumatori del tipo  $s$  esposti fino al tempo  $t$
- tempo trascorso dall'inizio della campagna

In particolare, supponiamo che la funzione di efficacia esprima l'impatto diretto dell'offerta  $b_s(t)$  sull'esposizione degli utenti e l'esposizione legata alle interazioni sociali tra utenti esposti e non esposti utilizzando la forma funzionale:

$$r(b_s(t), g_s(t), t) = f(b_s(t), t) \cdot (1 + a g_s(t))$$

dove esiste positiva la derivata parziale  $\frac{\partial}{\partial b_s(t)} f(b_s(t), t)$ , poi  $a$  dipenderà dal tipo  $s$ . La funzione  $f(b_s(t), t)$  esprime l'effetto dell'offerta al tempo  $t$  sul numero dei nuovi spettatori esposti del tipo  $s$ , il coefficiente  $a_s$  definisce le interazioni tra gli spettatori esposti e non esposti del tipo  $s$ . Nello specifico il coefficiente  $a_s$  delimita la proporzione di utenza non esposta "presa di mira" dai social network per ciascun utente esposto che viene conteggiato in  $g_s(t)$ . Gli autori suppongono che  $a_s \geq 0$  in quanto il social network gestisce il meccanismo di "targeting" in modo tale che non possa operare contro gli utenti non esposti e prevenire l'esposizione. Se  $a_s$  fosse negativo significherebbe che l'utenza esposta andrebbe a ridurre il tasso di esposizione dell'utenza non esposta, però tale casistica non viene considerata dagli autori poiché non rientra nel meccanismo di "targeting" del SN. Nel peggiore dei casi si ha un modello in cui  $a_s = 0$  dove il "targeting" non espone i nuovi utenti.

Il problema si presenta nel seguente modo:

*Minimizzare*  $T$

soggetto a:

$$\dot{g}_s(t) = (h_s - g_s(t)) \cdot f(b_s(t), t) \cdot (1 + a_s g_s(t)) \quad (5.1)$$

$$\dot{z}(t) = \sum_{s \in S} b_s(t)$$

$$g_s(0) = q_s h_s, \quad g_s(T) \geq p_s h_s \quad \forall s \in S \quad (5.2)$$

$$z(0) = 0, \quad z(T) \leq B \quad (5.3)$$

$$b_s(t) \in [0, +\infty) \quad (5.4)$$

dove  $0 < q_s < p_s$  rappresenta l'esposizione iniziale nel segmento del tipo  $s$  e  $h_s$  indica la dimensione di ciascun segmento del tipo  $s$ . Sia  $q_s$  che  $h_s$  rimangono costanti nel tempo. Poiché  $h_s$  rimane costante nel tempo gli autori decidono di attuare una “normalizzazione” sul numero complessivo di utenti esposti alla campagna fino al tempo  $t$ ,  $g_s(t)$ , per la dimensione di ciascun segmento del tipo  $s$ ,  $h_s$ . Così facendo si va a modificare la variabile decisionale,  $g_s(t) := \frac{g_s(t)}{h_s}$ , ed il parametro  $a_s := a_s h_s$ . L'equazione dinamica di stato in (5.1) e le condizioni in (5.2) vengono riscritte nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \dot{g}_s(t) &= (1 - g_s(t)) \cdot f(b_s(t), t) \cdot (1 + a_s g_s(t)), \\ g_s(0) &= q_s, \quad g_s(T) \geq p_s \end{aligned} \quad (5.5)$$

inoltre gli autori hanno modificato le disuguaglianze non strette in (5.3) e (5.5) in uguaglianze in quanto la politica ottimale non può esporre a meno persone del minimo richiesto od utilizzare più del budget massimo a disposizione. Dunque:

$$g_s(T) = p_s, \quad z(T) = B \quad (5.6)$$

Gli autori hanno osservato che l'insieme dei tipi di destinatari si divide in due categorie: destinatari esposti e non esposti. Le interazioni tra le due categorie che conducono all'equazione (5.5) sono state utilizzate per descrivere i processi di innovazione di diffusione per l'adozione di un nuovo prodotto da parte della popolazione. Questi processi di diffusione si basano sul modello standard di Bass (1969) [6].

## 5.1 Condizioni di ottimalità e metodologia di soluzione

Il problema esposto precedentemente si presenta nella forma canonica di controllo ottimo in forma di Lagrange . Nello specifico, è un caso particolare di un problema di tempo minimo. Le condizioni di controllo ottimo del problema si derivano utilizzando il Principio del Massimo di Pontryagin.

### Richiami teorici:

In alcune situazioni è naturale trattare il tempo finale  $t_1$ , in un problema di controllo ottimo, come una variabile decisionale a valori in  $(t_0, +\infty)$ . Una soluzione è una terna ordinata  $(x(t), u(t), t)$  con  $t_1 > t_0$  e  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^r$   $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

*Problema di controllo ottimo con tempo finale variabile  $n$  dimensionale nella forma di Lagrange*

*Massimizza*

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt$$

*Soggetto a*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$\text{da intendere } \dot{x}_i(t) = f_i(x(t), u(t), t)$$

$$\text{con } f_i : \mathbb{R} \times \Omega \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i(t_0) = x_i^0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i(t_1) = x_i^1 \quad i = 1, \dots, l$$

$$x_i(t_1) \geq x_i^1 \quad i = l + 1, \dots, m$$

$$x_i(t_1) \in \mathbb{R} \quad i = m + 1, \dots, n$$

$$u(t) \in \Omega$$

$$t_1 \in (t_0, +\infty)$$

### Funzione Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \times [t_0, t_1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ H(x, u, p, t) &= p_0 f_0(x, u, t) + p f(x, u, t) = \\ &= p_0 f_0(x, u, t) + \sum_{i=1}^n p_i f_i(x, u, t) \\ &\text{dove } p \in \mathbb{R}^n \text{ è la variabile aggiunta} \end{aligned}$$

Se  $(u^*(t), x^*(t), t_1^*)$  è soluzione ottima del problema con tempo finale variabile allora  $(u^*(t), x^*(t))$  è soluzione ottima del problema con tempo finale fissato  $t_1 = t_1^*$ . Quindi le condizioni necessarie per l'ottimo nel secondo sono necessarie anche per l'ottimo nel primo, ma non ci danno informazioni su  $t_1^*$ .

### Principio del Massimo di Pontryagin

sia  $(u^*(t), x^*(t))$  soluzione ottima con  $u^*(t)$  controllo ottimo continuo a tratti su  $[t_0, t_1^*]$  a cui è associata la funzione di stato  $x^*(t)$ , allora esistono una costante  $p_0 \in \mathbb{R}$  e una funzione di classe  $C^1$  a tratti e continua  $p(t)$  ( $p : [t_0, t_1^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) tali che, per ogni  $t \in [t_0, t_1^*]$  valgono:

- i)  $(p_0, p(t)) \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$
- ii) il punto  $u^*(t)$  è di massimo per  $H(x^*(t), u, p(t), t)$ ,  $u \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^r$
- iii) in  $t$  in cui  $u^*(t)$  è continua,  $p(t)$  è differenziabile e

$$\dot{p}(t) = - \frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), p(t), t)}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n$$

sistema di  $n$  "equazioni aggiunte" lineari

- iv)  $p_0 \in \{0, 1\}$
- v.1)  $p_i(t_1) \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, l$
- v.2)  $p_i(t_1) \geq 0$  e  $p_i(t_1)(x_i^*(t_1) - x_i^1) = 0 \quad i = l + 1, \dots, m$
- v.3)  $p_i(t_1) = 0 \quad i = m + 1, \dots, n$
- vi)  $H(x^*(t_1^*), u^*(t_1^*), p(t_1^*), t_1^*) = 0$

Concludiamo la rassegna dei richiami teorici con la formulazione del problema di tempo minimo con le sue condizioni necessarie del Principio del Massimo di Pontryagin per una soluzione ottima.

*Problema di tempo minimo*

*Minimizza  $t_1$*

*Soggetto a*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$x(t_0) = x^0$$

$$x_i(t_1) = x_i^1 \quad i = 1, \dots, l$$

$$x_i(t_1) \geq x_i^1 \quad i = l + 1, \dots, m$$

$$x_i(t_1) \in \mathbb{R} \quad i = m + 1, \dots, n$$

$$u(t) \in \Omega$$

$$t_1 \in (0, +\infty)$$

minimizza  $t_1 \Leftrightarrow$  massimizza  $-t_1 + t_0 \Leftrightarrow$  massimizza  $J(u, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt$   
per qualche  $f_0(x, u, t)$ . La soluzione è  $f_0(x, u, t) = -1$

*Funzione Hamiltoniana*

$H(x, u, p, t) = -p_0 + pf(x, u, t)$  dunque massimizzare  $H(x^*(t), u, p(t), t) \Leftrightarrow$   
massimizzare  $p(t)f(x^*(t), u, t)$  e  $p_0$  non è coinvolta

*Principio del Massimo di Pontryagin*

sia  $(u^*(t), x^*(t), t_1^*)$  soluzione ottima allora esistono una costante  $p_0 \in \mathbb{R}$   
e una funzione di classe  $C^1$  a tratti e continua  $p(t)$  tali che, per ogni  
 $t \in [t_0, t_1^*]$  valgono:

- i)  $(p_0, p(t)) \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$
- ii) il punto  $u^*(t)$  è di massimo per  $p(t)f(x^*(t), u, t)$ ,  $u \in \Omega$
- iii) in  $t$  in cui  $u^*(t)$  è continua,  $p(t)$  è differenziabile e

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) &= - \frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), p(t), t)}{\partial x_i} = \\ &= -p(t) \frac{\partial f(x^*(t), u^*(t), t)}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

sistema di  $n$  "equazioni aggiunte" lineari

- iv)  $p_0 \in \{0, 1\}$
- v.1)  $p_i(t_1^*) \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, l$
- v.2)  $p_i(t_1^*) \geq 0$  e  $p_i(t_1^*)(x_i^*(t_1^*) - x_i^1) = 0 \quad i = l + 1, \dots, m$
- v.3)  $p_i(t_1^*) \neq 0 \quad i = m + 1, \dots, n$
- vi)  $H(x^*(t_1^*), u^*(t_1^*), p(t_1^*), t_1^*) = 0$  ovvero,  
 $p(t_1^*)f(x^*(t_1^*), u^*(t_1^*), t_1^*) = p_0$

Tornando al modello proposto da L-P-K in [2] si introduce la funzione Hamiltoniana:

$$H(g_s, z, b_s, \psi_s, \chi, t) = -\psi_0 + \sum_{s \in S} \psi_s(1 - g_s)f(b_s, t)(1 + a_s g_s) + \chi \sum_{s \in S} b_s$$

ed applicando il Principio del Massimo di Pontryagin:

sia  $(b_s^*(t), g_s^*(t), z^*(t), T^*)$  soluzione di offerta ottima per il segmento  $s$  al tempo  $t$  con  $b_s^*(t)$  la politica di offerta ottima continua a tratti su  $[0, T^*]$  a cui sono associate le variabili di stato  $g_s^*(t)$  e  $z^*(t)$ . Allora esistono una costante  $\psi_0 \in \mathbb{R}$  e  $|S| + 1$  funzioni aggiunte di classe  $C^1$  a tratti e continue  $\psi_s(t)$  e  $\chi(t)$  con  $s \in S$  tali che, per ogni  $t \in [0, T^*]$  valgono le seguenti proprietà:

- i)  $(\psi_0, \psi_s(t), \chi(t)) \neq 0 \in \mathbb{R}^{1+|S|+1}$
- ii) il punto  $b_s^*(t)$  è di massimo per  $H(x_s^*(t), b_s, \psi_s(t), \chi(t), t)$  per ogni  $t$ 

$$b_s^*(t) = \operatorname{argmax} H(g_s^*(t), z^*(t), b_s, \psi_s(t), \chi(t), t)$$
con  $b_s \in [0, +\infty)$  (5.7)

- iii) in  $t$  in cui  $b_s^*(t)$  è continua,  $\psi_s(t)$  e  $\chi(t)$  sono differenziabili. Dunque si ottengono le seguenti equazioni aggiunte:

$$\dot{\psi}_s(t) = -\frac{\partial H}{\partial g_s(t)} = \psi_s(t) \cdot f(b_s(t), t) \cdot (2a_s g_s(t) - a_s + 1) \quad (5.8)$$

$$\dot{\chi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial z(t)} = 0 \Rightarrow \chi(t) \text{ è costante nel tempo} \quad (5.9)$$

dove indichiamo con  $H$  la funzione Hamiltoniana  $H(g_s, z, b_s, \psi_s, \chi, t)$

- iv)  $\psi_0 \in \{0, 1\}$

v.1)  $\psi_s(T), \chi(T) \in \mathbb{R}$  con  $s \in S$

vi) La funzione Hamiltoniana si annulla in  $T^*$

$$H(g_s^*(T^*), z^*(T^*), b_s^*(T^*), \psi_s(T^*), \chi(T^*), T^*) = 0 \quad (5.10)$$

Per alleggerire la lettura nei conti si ometterà lo \* nelle variabili  $g_s(t)$ ,  $z(t)$ ,  $T$ . La seguente proposizione viene utilizzata per sviluppare la soluzione di offerta ottima in grado di soddisfare le condizioni di controllo ottimo in (5.8) e (5.10). La proposizione dimostra che una determinata combinazione tra le variabili di stato e le funzioni aggiunte rimane costante nel tempo.

**Lemma 1**

L'espressione

$$\psi_s(t) \cdot (1 - g_s(t)) \cdot (1 + a_s g_s(t)) \quad (5.11)$$

è costante nel tempo  $\forall s \in S$ .

**Dimostrazione**

Differenziando l'espressione (5.11) e sostituendo l'equazione di stato (5.5) e l'equazione aggiunta (5.8) si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\psi_s(t) \cdot (1 - g_s(t)) \cdot (1 + a_s g_s(t))) = \\ & = \frac{d}{dt} (\psi_s(t)) \cdot [(1 - g_s(t)) \cdot (1 + a_s g_s(t))] - \frac{d}{dt} (g_s(t)) \cdot [\psi_s(t) \cdot (1 + a_s g_s(t))] + \\ & + a_s \frac{d}{dt} (g_s(t)) \cdot [\psi_s(t) \cdot (1 - g_s(t))] = \\ & = \frac{d}{dt} (\psi_s(t)) \cdot [(1 - g_s(t)) \cdot (1 + a_s g_s(t))] - \frac{d}{dt} (g_s(t)) \cdot \\ & \cdot [\psi_s(t) \cdot (2a_s g_s(t) - a_s + 1)] = 0 \end{aligned}$$

□

Nelle condizioni necessarie del Principio del Massimo di Pontryagin si considera una funzione  $f(b_s, t)$  generica. Di conseguenza la massimizzazione della funzione Hamiltoniana come richiesto in (5.7) si semplifica notevolmente nei casi particolari in cui la funzione  $f(b_s, t)$  sia differenziabile, monotona crescente, concava o a forma di S nella variabile  $b_s$ . Nel caso esclusivamente concavo la funzione Hamiltoniana risulta concava in  $b_s$  in quanto la  $\frac{\partial^2 H}{\partial b_s^2} \leq 0$ . Nel caso a forma di S, in cui vi è più di una soluzione, la soluzione relativa



agli alti livelli di offerta  $b_s$  in cui la funzione Hamiltoniana risulta concava, in quanto la  $\frac{\partial^2 H}{\partial b_s^2} \leq 0$ , è stimolo d'interesse dal momento che corrisponde al massimo. La soluzione riguardante i bassi livelli di offerta  $b_s$  in cui la funzione Hamiltoniana risulta convessa, in quanto la  $\frac{\partial^2 H}{\partial b_s^2} \geq 0$ , non è stimolo d'interesse poiché corrisponde al minimo. In entrambe le casistiche la condizione necessaria e sufficiente per un massimo in (5.7) viene verificata eguagliando la  $\frac{\partial H}{\partial b_s}$  a zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial b_s} &= \psi_s(t) \cdot (1 - g_s(t)) \cdot (1 + a_s g_s(t)) \cdot \frac{\partial f(b_s, t)}{\partial b} + \chi(t) = 0 \\ \forall s \in S \text{ e } \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (5.12)$$

unendo il Lemma 1 e le espressioni (5.9) e (5.11) si può concludere che la  $\frac{\partial f(b_s, t)}{\partial b}$  rimane costante nel tempo. Tale costante viene indicata tramite  $\beta_s$ :

$$\frac{\partial f(b_s(t), t)}{\partial b} = \beta_s \quad \forall t \quad (5.13)$$

Tramite il Lemma 1 si semplifica notevolmente la struttura della soluzione ottenuta in (5.13). Questo significa che l'allocazione ottimale del budget, mediante una funzione di efficacia  $f(b_s(t), t)$  in forma stazionaria che dipende esclusivamente dal tempo attraverso lo sforzo pubblicitario  $b_s(t)$ , rimane costante nel tempo. Perciò, il risultato dipende solo dai parametri del problema e agisce secondo la “rule-of-thumb” (“Regola dell’Esperienza”, ovvero un metodo approssimativo incentrato sull’esperienza pratica piuttosto che sulla teoria). L’espressione (5.13) e il vincolo (5.4) definiscono una politica di offerta ottimale dipendente dal tempo. Sostituendo la politica d’offerta ottima  $b_s^*(t)$  nell’equazione (5.5) si ottiene:

$$\frac{d}{dt} g_s(t) = (1 - g_s(t))(1 + a_s g_s(t)) f(b_s^*(t), t) \quad (5.14)$$

### Lemma 2

Sia dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{g}_s(t) = (1 - g_s(t)) \cdot (1 + a_s g_s(t)) \cdot f(b_s^*(t), t) \\ g_s(0) = q_s \end{cases}$$

La sua soluzione è:

$$g_s(t) = 1 - \frac{(a_s + 1) \cdot (1 - q_s)}{(1 + a_s) e^{(1+a_s) \int_0^t f(b_s^*(z), z) dz} + a_s (1 - q_s)} \quad (5.15)$$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned} \dot{g}_s &= (1 - g_s) \cdot (1 + a_s g_s) \cdot f(b_s^*(t), t) \\ \frac{dg_s}{(1 - g_s)(1 + a_s g_s)} &= f(b_s^*(t), t) dt \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\int_0^t \frac{dg_s}{(1 - g_s)(1 + a_s g_s)} = \int_0^t f(b_s^*(z), z) dz$$

per risolvere l'integrale di sinistra si procede nel seguente modo:

$$\frac{1}{(1 - g_s)(1 + a_s g_s)} = \frac{A}{1 - g_s} + \frac{B}{1 + a_s g_s} = \frac{A + A a_s g_s + B + B g_s}{(1 - g_s) \cdot (1 + a_s g_s)}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A a_s - B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = A a_s \\ A + A a_s = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{1 + a_s} \\ B = \frac{a_s}{1 + a_s} \end{cases}$$

dunque si ottiene l'integrale:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 + a_s} \int_0^t \frac{1}{1 - g_s} dg_s + \frac{1}{1 + a_s} \int_0^t \frac{a_s}{1 + a_s g_s} dg_s = \\ &= \frac{1}{1 + a_s} (-\ln(1 - g_s(z)) + \ln(1 + a_s g_s(z))) \Big|_0^t = \\ &= \frac{1}{1 + a_s} \ln \left( \frac{1 + a_s g_s(z)}{1 - g_s(z)} \right) \Big|_0^t = \\ &= \frac{1}{1 + a_s} \ln \left( \frac{1 + a_s g_s(t)}{1 - g_s(t)} \right) - \frac{1}{1 + a_s} \ln \left( \frac{1 + a_s q_s}{1 - q_s} \right) = \\ &= \frac{1}{1 + a_s} \ln \left( \frac{1 + a_s g_s(t)}{1 - g_s(t)} \cdot \frac{1 - q_s}{1 + a_s q_s} \right) \end{aligned}$$

ottenendo così l'uguaglianza:

$$\frac{1}{1 + a_s} \ln \left( \frac{1 + a_s g_s(t)}{1 - g_s(t)} \cdot \frac{1 - q_s}{1 + a_s q_s} \right) = \int_0^t f(b_s^*(z), z) dz$$

si porta  $\frac{1}{1+a_s}$  a destra e si eleva ambo i membri per  $e$  ottenendo così:

$$\frac{1 + a_s g_s(t)}{1 - g_s(t)} \cdot \frac{1 - q_s}{1 + a_s q_s} = e^{(1+a_s) \int_0^t f(b_s^*(z), z) dz}$$

$$\frac{1 + a_s g_s(t)}{1 - g_s(t)} = \frac{1 + a_s q_s}{1 - q_s} \cdot e^{(1+a_s) \int_0^t f(b_s^*(z), z) dz}$$

per semplificare i conti si indica con  $\lambda := \frac{1 + a_s q_s}{1 - q_s} \cdot e^{(1+a_s) \int_0^t f(b_s^*(z), z) dz}$ :

$$\frac{1 + a_s g_s(t)}{1 - g_s(t)} = \lambda$$

$$1 + a_s g_s(t) = \lambda - g_s(t) \lambda$$

$$g_s(t) = (\lambda - 1) \cdot \frac{1}{a_s + \lambda}$$

esplicitando  $\lambda$  si ottiene:

$$g_s(t) = \left( \frac{(1 + a_s q_s)}{1 - q_s} e^{(1+a_s) \int_0^t f(b_s^*(z), z) dz} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{a_s + \frac{(1+a_s q_s)}{1-q_s} e^{(1+a_s) \int_0^t f(b_s^*(z), z) dz}} \right)$$

si indica ora con  $\alpha := (1 + a_s) \int_0^t f(b_s^*(z), z) dz$

$$g_s(t) = \left( \frac{(1 + a_s q_s) e^\alpha - (1 - q_s)}{1 - q_s} \right) \cdot \left( \frac{1 - q_s}{a_s(1 - q_s) + (1 + a_s q_s) e^\alpha} \right)$$

$$g_s(t) = \frac{(1 + a_s q_s) e^\alpha - (1 - q_s)}{(1 + a_s q_s) e^\alpha + a_s(1 - q_s)}$$

si aggiunge e si sottrae al numeratore la quantità  $a_s(1 - q_s)$

$$g_s(t) = \frac{(1 + a_s q_s) e^\alpha - (1 - q_s) + a_s(1 - q_s) - a_s(1 - q_s)}{(1 + a_s q_s) e^\alpha + a_s(1 - q_s)}$$

$$g_s(t) = \frac{(1 + a_s q_s) e^\alpha + a_s(1 - q_s) - (1 - q_s)(1 + a_s)}{(1 + a_s q_s) e^\alpha + a_s(1 - q_s)}$$

$$g_s(t) = 1 - \frac{(1 - q_s)(1 + a_s)}{(1 + a_s q_s)e^\alpha + a_s(1 - q_s)}$$

esplicitando  $\alpha$  nell'ultima uguaglianza si ottiene il risultato enunciato in (5.15):

$$g_s(t) = 1 - \frac{(1 - q_s)(1 + a_s)}{(1 + a_s q_s)e^{(1+a_s) \int_0^t f(b_s^*(z), z) dz} + a_s(1 - q_s)}$$

Si ricorda che nel passaggio (5.16) si è andati a dividere per l'espressione  $(1 - g_s(t)) \cdot (1 + a_s g_s(t))$ . Di conseguenza la funzione costante  $g_s(t) = 1$  è soluzione dell'equazione differenziale (5.14) e la si ottiene nel caso in cui

$$\frac{(1 - q_s)(1 + a_s)}{(1 + a_s q_s)e^{(1+a_s) \int_0^t f(b_s^*(z), z) dz} + a_s(1 - q_s)} = 0$$

l'espressione  $1 + a_s g_s(t)$  non crea problemi in quanto è sempre  $> 0$

□

Le costanti  $\beta_s$  si esprimono in funzione del parametro di tempo  $T$  tramite la (5.15) utilizzando le condizioni finali  $g_s(T) = p_s$

### Lemma 3

L'orizzonte di tempo  $T$  si individua tramite  $\dot{z}(t) = \sum_{s \in S} b_s^*(t)$  soggetto ai vincoli  $z(0) = 0$  e  $z(T) = B$ .

$$\int_0^T \sum_{s \in S} b_s^*(t) dt = B \tag{5.17}$$

### Dimostrazione

$$\int_0^T \sum_{s \in S} b_s^*(t) dt = \int_0^T \dot{z}(t) dt = z(T) - z(0) = B$$

□

**Lemma 4**

La condizione (5.10) del Principio del Massimo di Pontryagin viene soddisfatta imponendo  $\psi_0 = 1$  ottenendo così:

$$\chi(T) = \frac{1}{\sum_{s \in S} \left( b_s^*(T) - \frac{f(b_s^*(T), T)}{\beta_s} \right)} \quad (5.18)$$

**Dimostrazione**

$$1 = \sum_{s \in S} \psi_s(T) (1 - g_s(T)) f(b_s^*(T), T) (1 + a_s g_s(T)) + \chi(T) \sum_{s \in S} b_s^*(T) \quad (5.19)$$

dalla espressione (5.12) si ottiene che:

$$\psi_s(T) = - \frac{\chi(T)}{(1 - g_s(T)) \cdot (1 + a_s g_s(T)) \cdot \beta_s} \quad (5.20)$$

sostituendo la (5.20) nella (5.19) e con le dovute semplificazioni si ottiene:

$$1 = \chi(T) \left[ \sum_{s \in S} \left( b_s^*(T) - \frac{f(b_s^*(T), T)}{\beta_s} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi(T) = \frac{1}{\sum_{s \in S} \left( b_s^*(T) - \frac{f(b_s^*(T), T)}{\beta_s} \right)}$$

□

Il prossimo paragrafo presenterà un algoritmo che riassume l'analisi delle condizioni di controllo ottimo e le fasi principali che determinano la politica di offerta ottimale.

## 5.2 L'Algoritmo

In questo paragrafo si riassumono le fasi principali che determinano la politica d'offerta ottima e come ottenere i risultati raggiunti nel paragrafo precedente tramite le condizioni necessarie del Principio del Massimo di Pontryagin.

- **Step 1:** Si utilizzano i dati delle campagne pubblicitarie per stimare i parametri  $a_s$  e le funzioni di efficacia del budget  $f(b_s, t)$  per ciascun segmento  $s$
- **Step 2:** Si esprimono (analiticamente o numericamente) le funzioni  $b_s^*(t)$  tramite l'equazione  $\frac{\partial f(b_s(t), t)}{\partial b_s} = \beta_s$  utilizzando le costanti  $\beta_s$  come parametri.
- **Step 3:** Si sostituiscono le funzioni  $b_s^*(t)$  ottenute nello step 2 in  $g_s(t) = 1 - \frac{(a_s+1) \cdot (1-q_s)}{(1+a_s)e^{(1+a_s) \int_0^t f(b_s^*(z), z) dz} + a_s(1-q_s)}$ .
- **Step 4:** Si esprimono le costanti  $\beta_s$  tramite le equazioni  $g_s(T) = p_s$  utilizzando il tempo  $T$  come parametro.
- **Step 5:** Si sostituiscono le costanti  $\beta_s$  ottenute mediante lo step 4 nelle funzioni  $b_s^*(t)$  per risolvere l'equazione  $\int_0^T \sum_{s \in S} b_s^*(t) dt = B$  ed ottenendo così il valore del tempo  $T$  in funzione del budget  $B$ .

L'analisi mostra che gli step 2 e 4 dell'algoritmo producono un'unica soluzione. In particolare, l'unicità dello step 2, che segue dall'uguaglianza  $\frac{\partial f(b_s(t), t)}{\partial b} = \beta_s$ , è garantita dalla monotonia di  $b_s(t)$  rispetto alle costanti  $\beta_s$  per ogni  $t$ . L'unicità dello step 4, che segue da (5.5), è assicurata dalla monotonia di  $\dot{g}_s(t)$  rispetto a  $b_s(t)$ . Generalmente l'unicità dello step 5 non può essere garantita poiché la monotonia del tempo  $T$  rispetto al budget  $B$  non è sempre assicurata: qualora nello step 5 si ottenga un'unica soluzione l'algoritmo restituisce la soluzione ottima del problema e le condizioni necessarie fornite dal Principio del Massimo di Pontryagin sono anche sufficienti; nel caso in cui lo step 5 fornisca più di una soluzione si dovrà esaminare tutte le soluzioni ottenute e scegliere quella con il  $T$  minimo, in questo caso le condizioni necessarie del Principio del Massimo di Pontryagin non sono sufficienti; infine nel caso in cui lo step 5 non porti a nessun risultato allora si potrà concludere che

non esiste la soluzione al problema, quest'ultima casistica può verificarsi nel momento in cui il budget totale  $B$  sia insufficiente per raggiungere i livelli minimi di esposizione richiesti  $p_s$ . In un senso più ampio, l'espressione (5.17) ottenuta tramite lo step 5 delinea il Fronte di Pareto del dominio  $(B, T)$  il quale determina il minimo  $T$  dato  $B$  oppure il minimo  $B$  dato  $T$ . Infine, ricordiamo che per un buon utilizzo dell'algoritmo serve essere preparati nei casi speciali e particolari di alcune funzioni e fornire un complemento di analisi per poter classificare le varie istanze.

## 6 Strategie pubblicitarie ottimali per diverse funzioni di efficacia

In questo capitolo si applica l'algoritmo presentato nel paragrafo 5.2 per determinare la politica d'offerta ottima in due casi specifici della funzione di efficacia  $f(b_s, t)$ . Il caso non stazionario della funzione di efficacia non viene affrontato poiché la soluzione dell'equazione (5.13) complica in maniera significativa l'algoritmo. In questo ultimo caso il budget viene allocato in ogni segmento  $s$  solo all'inizio della campagna pubblicitaria dal momento che la soluzione dell'equazione (5.13) dipende esplicitamente dal tempo e il vincolo  $b_s(t) \geq 0$  potrebbe diventare attivo in alcuni segmenti  $s$  (ovvero per certi istanti di tempo potrebbe essere ideale non eseguire offerte pubblicitarie). Dunque è possibile che in alcuni segmenti si possa raggiungere l'esposizione minima richiesta prima del tempo  $T$  per poi mantenersi costanti fino alla fine, mentre i segmenti rimasti raggiungono l'esposizione minima richiesta al tempo  $T$  terminando così contemporaneamente la campagna.

### 6.1 Funzione stazionaria concava

In questo caso la soluzione dell'equazione (5.13) non dipende dal tempo ed è unica per ogni segmento di mercato  $b_s^*(t) = b_s^* > 0 \forall t$ . Dunque, il budget viene allocato in tutti i segmenti lungo l'intera campagna pubblicitaria per raggiungere contemporaneamente i livelli minimi di esposizione richiesti.

#### Esempio 1:

Si suppone che l'inserzionista gestisca una campagna in svariati segmenti di mercato. Il gestore effettua una stima dell'efficacia del budget impegnato nel segmento  $s$  ottenendo così la forma seguente:  $f(b_s) = m_s \sqrt{b_s}$ . Inoltre, non viene rilevata alcuna interazione significativa tra gli utenti esposti e quelli non esposti, ovvero,  $a_s = 0 \forall s$ .

Step 2 e Step 3:

$$\frac{\partial}{\partial b_s^*} f(b_s^*) = \frac{m_s}{2\sqrt{b_s^*}} = \beta_s$$

$$b_s^* = \left(\frac{m_s}{2\beta_s}\right)^2, \quad f(b_s^*) = \frac{m_s^2}{2\beta_s}, \quad g_s(t) = 1 - e\left(-\int_0^t \frac{m_s^2}{2\beta_s} dz\right) = 1 - e\left(-\frac{m_s^2}{2\beta_s} t\right)$$



Step 4:

$$g_s(T) = 1 - e\left(-\frac{m_s^2}{2\beta_s}T\right) = p_s \Rightarrow e\left(-\frac{m_s^2}{2\beta_s}T\right) = 1 - p_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{m_s^2}{2\beta_s}T = \ln(1 - p_s) \Rightarrow \beta_s = -\frac{m_s^2 T}{2 \ln(1 - p_s)}$$

Step 5:

$$b_s^* = \left(-\frac{2m_s \ln(1 - p_s)}{2m_s^2 T}\right)^2 \Rightarrow b_s^* = \frac{(\ln(1 - p_s))^2}{m_s^2 T^2}$$

$$B = \int_0^T \sum_{s \in S} b_s^* dt = \sum_{s \in S} \frac{(\ln(1 - p_s))^2}{m_s^2 T^2} T \Rightarrow T = \frac{1}{B} \sum_{s \in S} \frac{(\ln(1 - p_s))^2}{m_s^2} \quad (6.1)$$

L'espressione (6.1) mostra che la durata della campagna è inversamente proporzionale al budget. Supponendo che ci siano tre segmenti, il gestore imposta la stessa frazione di esposizione "target"  $p$  su tutti i segmenti di mercato stimando i parametri  $m_s = 0.1, 0.2, 0.3$ . La Figura 1 utilizza l'espressione (6.1) ed illustra la durata ottimale della campagna pubblicitaria in funzione del budget.

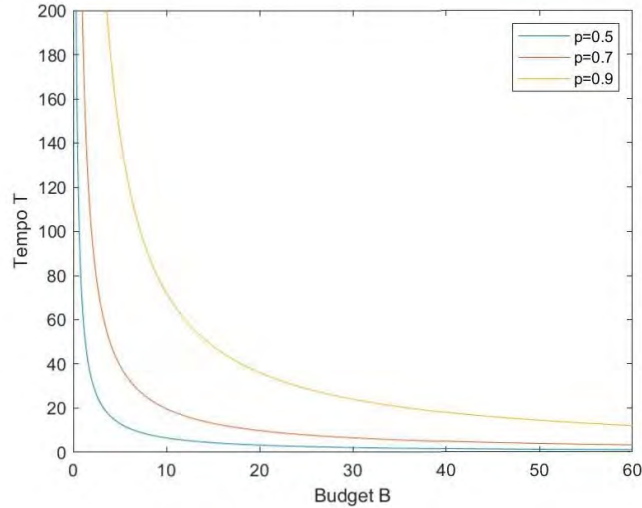


Figura 1: Fronte di Pareto  $(B, T)$

**Esempio 2:**

In questo caso assumiamo il coefficiente  $a_s > 0$  e la funzione di efficacia nella seguente forma esponenziale  $f(b_s) = m_s(1 - e^{-\mu_s b_s})$  con  $m_s > 0$  e  $\mu_s > 0 \forall s$ .

Step 2 e Step 3:

$$\frac{\partial}{\partial b_s^*} f(b_s^*) = m_s \mu_s e^{-\mu_s b_s^*} = \beta_s \Rightarrow b_s^* = \frac{1}{\mu_s} \ln \left( \frac{m_s \mu_s}{\beta_s} \right)$$

$$f(b_s^*) = \frac{1}{\mu_s} (m_s \mu_s - \beta_s)$$

$$g_s(t) = 1 - \frac{a_s + 1}{e^{(1+a_s)(m_s \mu_s - \beta_s) \frac{t}{\mu_s}} + a_s}$$

Step 4:

$$g_s(T) = p_s = 1 - \frac{a_s + 1}{e^{(1+a_s)(m_s \mu_s - \beta_s) \frac{T}{\mu_s}} + a_s}$$

$$e^{(1+a_s)(m_s \mu_s - \beta_s) \frac{T}{\mu_s}} + a_s = \frac{1 + a_s}{1 - p_s}$$

$$e^{(1+a_s)(m_s \mu_s - \beta_s) \frac{T}{\mu_s}} = \frac{1 + a_s p_s}{1 - p_s}$$

$$(1 + a_s)(m_s \mu_s - \beta_s) \frac{T}{\mu_s} = \ln \left( \frac{1 + a_s p_s}{1 - p_s} \right)$$

$$m_s \mu_s - \beta_s = \frac{\mu_s}{T} \ln \left( \frac{1 + a_s p_s}{1 - p_s} \right)$$

$$\beta_s = \mu_s \left( m_s - \frac{1}{T(1 + a_s)} \ln \left( \frac{1 + a_s p_s}{1 - p_s} \right) \right)$$

$$\beta_s = m_s \mu_s \left( 1 - \frac{T_{min,s}}{T} \right)$$

dove  $T_{min,s} = \frac{1}{m_s(1+a_s)} \ln \left( \frac{1+a_s p_s}{1-p_s} \right)$  rappresenta il tempo minimo richiesto nel segmento  $s$  affinché possa raggiungere l'esposizione target in una campagna pubblicitaria provvista di budget illimitato.

Step 5:

$$B = \int_0^T \sum_{s \in S} \frac{1}{\mu_s} \ln \left( \frac{m_s \mu_s}{\beta_s} \right) = \sum_{s \in S} \frac{T}{\mu_s} \ln \left( \frac{m_s \mu_s}{\beta_s} \right)$$

$$B = \sum_{s \in S} \frac{T}{\mu_s} \left( \ln(1) - \ln \left( 1 - \frac{T_{min,s}}{T} \right) \right) = \sum_{s \in S} -\frac{T}{\mu_s} \ln \left( 1 - \frac{T_{min,s}}{T} \right)$$

Affinché ogni segmento  $s$  possa raggiungere l'esposizione richiesta è ragionevole prendere la durata minima della campagna pubblicitaria nel seguente modo:

$$T_{min} = \max_{s \in S} T_{min,s}$$

Inoltre il budget minimo si ottiene facendo il  $\lim_{T \rightarrow +\infty} B$  ed utilizzando il limite notevole  $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$ :

$$B_{min} = \sum_{s \in S} \frac{T_{min,s}}{\mu_s}$$

Dunque il Fronte di Pareto è delimitato dalla durata minima della campagna  $T_{min}$  che equivale ad un budget illimitato e dal budget minimo  $B_{min}$  che equivale ad una durata infinita della campagna. Dunque il Fronte di Pareto  $(B, T)$  dipenderà dal numero di segmenti  $s$  e dai valori delle costanti  $a_s, p_s, m_s$  e  $\mu_s$ . Non viene riportato nessun grafico poiché i tre autori in [2] non specificano il numero dei segmenti  $s$  e i valori delle costanti, nonostante ciò ci aspettiamo un andamento simile alla Figura 1.

## 6.2 Funzione stazionaria a forma di S

L'efficacia della funzione a forma ad S è assicurata quando, nello Step 1 dell'algoritmo esibito nel paragrafo 5.2, la funzione si adatta o ad una funzione convessa per bassi livelli di offerta o ad una funzione concava per alti livelli di offerta. Diversamente dal caso esclusivamente concavo proposto nel paragrafo 6.1, l'equazione (5.13) presenta due soluzioni rispetto alle due modalità, convessa e concava, della funzione di efficacia. Si è interessati alla soluzione relativa agli alti livelli di offerta poiché fornisce il massimo dell'Hamiltoniana; mentre la soluzione riguardante i bassi livelli di offerta non è stimolo d'interesse siccome corrisponde al minimo locale. Le offerte, come nel caso precedente, sono costanti nel tempo  $b_s^*(t) = b_s^* > 0 \forall t, s$ , e il budget viene allocato in tutti i segmenti di mercato durante l'intera campagna pubblicitaria.

**Esempio 3:** Riportiamo l'esempio proposto da Feinberg (2001) [19] dove assume che la funzione di efficacia abbia la seguente forma:

$$f(b) = \frac{80b^3}{1 + 10b^3}$$

inoltre, l'autore assume che vi sia la presenza di un unico pubblico aggregato, ottimizzando così l'indice  $s$ , e  $a = 1$ .

Step 2 e Step 3:

$$\frac{\partial}{\partial b^*} f(b^*) = \frac{240b^{*2}(1 + 10b^{*3}) - 80b^{*3}30b^{*2}}{(1 + 10b^{*3})^2}$$

Dato  $\beta > 0$ ,  $b^*$  è la radice maggiore dell'equazione:

$$\frac{240b^2}{(1 + 10b^3)^2} = \beta$$

Step 4 e step 5:

$$g(t) = 1 - \frac{2}{1 + e^{2f(b^*)t}}$$

$$g(T) = 1 - \frac{2}{1 + e^{2f(b^*)T}} = p \Rightarrow \frac{2}{1 + e^{2f(b^*)T}} = 1 - p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2f(b^*)T} = \frac{2}{1-p} - 1 \Rightarrow e^{2f(b^*)T} = \frac{1+p}{1-p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(b^*)T = \ln\left(\frac{1+p}{1-p}\right) \Rightarrow f(b^*) = \frac{1}{2T} \ln\left(\frac{1+p}{1-p}\right)$$

e la Frontiera di Pareto  $T(B)$  si ottiene calcolando numericamente  $T = \frac{B}{b^*}$ .

Il Fronte di Pareto viene delimitato da:

$$T_{min} = \frac{1}{16} \ln\left(\frac{1+p}{1-p}\right), \quad T_{max} = \frac{3}{2}T_{min} = \frac{3}{32} \ln\left(\frac{1+p}{1-p}\right),$$

$$B_{min} \approx 0.055 \ln\left(\frac{1+p}{1-p}\right)$$

Come mostrato in Figura 2 per  $p = 0.9$

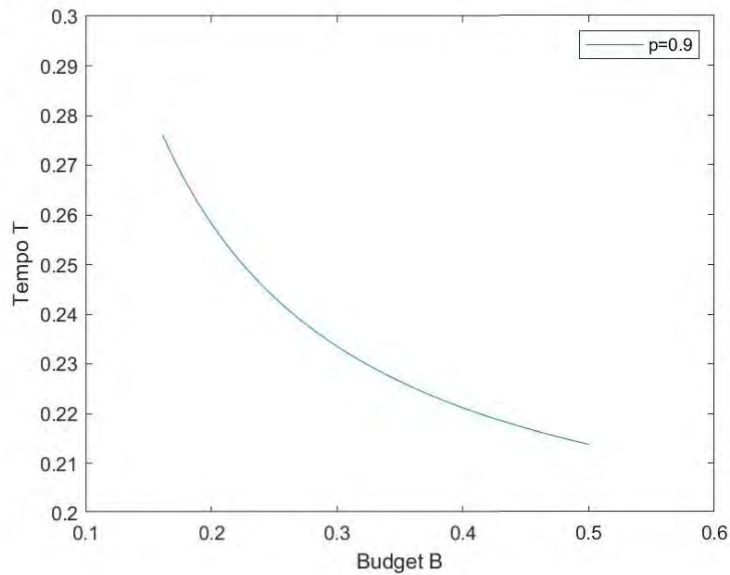


Figura 2: Fronte di Pareto  $(B, T)$

## 7 Modelli di Diffusione

In un problema pubblicitario del mondo reale, la domanda di un prodotto persistente nel tempo dipende dalle sue vendite complessive mediante un processo di influenza sociale (diffusione). All'interno del mercato la maggior parte delle persone non vengono a conoscenza della pubblicità istantaneamente, ma ne vengono a conoscenza tramite i media e il passaparola. Bass (1969) [6] ha pubblicato un modello di diffusione riguardante il problema dell'introduzione di un nuovo prodotto piuttosto che per un problema pubblicitario. Anche se il modello non è collegato alla pubblicità, si darà comunque una rassegna dei modelli di diffusione discutendo brevemente il modello di Bass, dal momento che le pubblicazioni più rilevanti legate alla pubblicità si sono manifestate come sue estensioni. Bass (1969) [6] presuppone che la probabilità che un cliente adotti un nuovo prodotto od una nuova tecnologia al tempo  $t$  dipenda linearmente da due fattori: il primo fattore, indicato con  $\alpha_1 > 0$ , rappresenta il coefficiente di innovazione ed è indipendente dal numero dei precedenti acquirenti; il secondo fattore, indicato con  $\alpha_2$ , indica il coefficiente d'imitazione che dipende dal numero di acquirenti precedenti. Bass assume che  $f(t)$  indichi la probabilità di acquisto al tempo  $t$  e  $F(t) = \int_0^t f(x)dx$  sia la frazione complessiva di acquisto del prodotto all'istante  $t$ . Pertanto il modello di diffusione di Bass si enuncia nel modo seguente:

$$\frac{f(t)}{1 - F(t)} = \alpha_1 + \alpha_2 F(t) \quad (7.1)$$

Da quando il modello di Bass è apparso nel 1969, un gran numero di ricercatori hanno sviluppato e applicato i diversi modelli di diffusione per analizzare i problemi legati alla pubblicità. Tra i vari studiosi spiccano in modo significativo Erickson (1995) [17], Feichtinger et al. (1994) [15], e Sethi (1977) [7], i quali hanno fornito le loro cospicue recensioni sui modelli di diffusione pubblicitaria (ad esempio, per la crescita di mercato)

### 7.1 Estensione dei modelli di Bass

Come appena dichiarato, un gran numero di ricercatori hanno applicato il modello di diffusione di Bass (1969) [6] e le sue estensioni con il fine di analizzare i problemi incentrati sulla pubblicità. Si approfondiscono le estensioni più tipiche del modello di Bass che sono state pubblicate dopo il 1995:

- Krishnan e Jain (2006) [1] hanno analizzato una politica pubblicitaria dinamica ottima per i nuovi prodotti utilizzando la seguente equazione:

$$\dot{S}(t) = u(t)[\alpha_1 + \alpha_2 S(t)/M][M - S(t)] \quad (7.2)$$

dove  $S(t)$  rappresenta le vendite complessive fino all'istante  $t$  e  $\dot{S}(t)$  sono le vendite all'istante  $t$ ,  $u(t)$  denota il costo pubblicitario al momento  $t$ ,  $M$  equivale al potenziale di mercato, ed infine i coefficienti  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  sono definiti in modo analogo come in Bass (1968) [6].

- Jorgensen et al. (2006) [27] hanno esteso il modello di Bass per studiare un problema di marketing, tenendo in considerazione l'effetto del "passaparola", con il fine di ridurre al minimo i costi pubblicitari sostenuti dalle vendite dei posti di un evento particolare. Il modello di controllo ottimo descrive l'evoluzione della quota di mercato nel seguente modo:

$$\dot{x}(t) = \beta u(t)[1 - x(t)] + \gamma x(t)[1 - x(t)] \quad (7.3)$$

Con  $x(0) = 0$

dove  $x(t)$  rappresenta la frazione dei potenziali partecipanti che hanno acquistato il biglietto al tempo  $t$ ,  $\beta > 0$  denota l'efficienza pubblicitaria e  $\gamma > 0$  indica l'efficienza del passaparola. Indichiamo con  $k$  la frazione dei potenziali partecipanti che hanno i posti a sedere. Dal momento che  $x(t) \leq k < 1$ , per  $t \in [0, T]$ , Jorgensen et al. hanno esaminato i fattori che influiscono sulle decisioni pubblicitarie dell'organizzatore e hanno formulato la funzione di costo totale che deve sostenere quest'ultimo:  $C + k - x(t)$ , dove  $C = \int_0^T (\nu u(t) + \zeta[u(t)]^2/2) dt$  è il costo pubblicitario, e  $k - x(t)$  è il numero di posti rimanenti.

## 8 Studi empirici per problemi pubblicitari dinamici

All'interno di questo capitolo si affronteranno gli studi empirici dei seguenti modelli:

1. I modelli di Nerlove & Arrow
2. I modelli di Vidale & Wolfe

### 8.1 Studi empirici tramite i modelli Nerlove & Arrow

Rao (1986) [11] ha sviluppato un modello dinamico riguardante l'ambito della vendita pubblicitaria nella forma standard di N-A per studiare la stima delle conseguenze dell'accumulo temporale realizzando uno studio empirico volto ad esaminare i risultati analitici. Dal momento che l'efficacia della pubblicità può variare nel tempo, Naik et al. (1998) [18] hanno introdotto nel modello standard di N-A un termine di qualità pubblicitaria in (4.1). Inoltre, hanno utilizzato i dati pubblicitari di un brand di cereali per stimare i parametri del modello che sono stati confrontati con quelli degli altri modelli dinamici pubblicitari. In un articolo recente riguardante la pubblicità di ricerca a pagamento su internet, Rutz e Bucklin (2011) [36] hanno esteso il modello di N-A in (4.1) per illustrare il potenziale dello "spillover" (ripercussione) a partire dalla ricerca di parole chiave generiche fino ad arrivare alla ricerca di un brand a pagamento. Gli autori hanno utilizzato le statistiche descrittive di un set di dati, provenienti dalla campagna di ricerca a pagamento eseguita tra Google e Yahoo, per esaminare l'impatto positivo della attività di ricerca generica sulla futura attività di ricerca del brand.

### 8.2 Studi empirici tramite i modelli Vidale & Wolfe

Erickson (1995) [16] ha utilizzato il modello discreto di V-W sviluppato da Deal (1979) [9] con il fine di andare ad analizzare in modo empirico le decisioni pubblicitarie di un singolo periodo all'interno di un mercato caratterizzato da tre grandi produttori di cereali (competizione pubblicitaria oligopolistica in cui vi è una perfetta concorrenza tra i compratori). Mesak ed Ellis (2009) [32] hanno esteso il modello pubblicitario standard di V-W in (4.6) per esaminare la superiorità della politica pubblicitaria ad intermittenza piuttosto che una



politica uniforme. Gli autori hanno utilizzato un set di dati relativo alle vendite pubblicitarie per dimostrare i loro risultati analitici. Per ottenere le strategie pubblicitarie di bilanciamento di Nash per concorrenti oligopolistici, Erickson (2009) [30] ha proposto un'estensione del modello di V-W includendo più di un brand per ciascun concorrente. Infine, l'autore ha stimato i parametri del modello servendosi dei dati empirici derivanti dal mercato delle bevande gassate coinvolgendo tre concorrenti principali e cinque brand fondamentali. Erickson (2009) [31] ha sviluppato un modello di oligopolio che permette di determinare le strategie pubblicitarie di equilibrio feedback di Nash ed ha empiricamente applicato tale modello ad una competizione che coinvolge tre aziende produttrici di birra.



## Bibliografia

- [1] T.V. Krishnan, & D.C. Jain (2006). Optimal dynamic advertising policy for new products. *Management Science*, 52(12): 1957–1969.
- [2] Yossi Luzon, Rotem Pinchover, and Eugene Khmelnitsky. Dynamic budget allocation for social media advertising campaigns: optimization and learning. *European Journal of Operational Research*, 299(1):223–234, 2022.
- [3] H. Hotelling (1929). Stability in competition. *Economic Journal*, 39:41–57.
- [4] M.L. Vidale, & H.B. Wolfe (1957). An operations-research study of sales response to advertising. *Operations research*, 5(3): 370–381.
- [5] M. Nerlove, & K.J. Arrow (1962). Optimal advertising policy under dynamic conditions. *Economica*, 29: 129–142.
- [6] F.M. Bass (1969). A new product growth for model consumer durables. *Management science*, 15(5): 215–227.
- [7] S.P. Sethi (1977). Dynamic optimal control models in advertising: a survey. *SIAM review*, 19(4): 685–725.
- [8] D. Pekelman, & S.P. Sethi (1978). Advertising budgeting, wearout and copy replacement. *Journal of the Operational Research Society*, 29(7): 651–659.
- [9] K.R. Deal (1979). Optimizing advertising expenditures in a dynamic duopoly. *Operations Research*, 27(4): 682–692.
- [10] S.P. Sethi (1983). Deterministic and stochastic optimization of a dynamic advertising model. *Optimal Control Applications and Methods*, 4(2): 179–184.
- [11] R.C. Rao (1986). Estimating continuous time advertising-sales models. *Marketing Science*, 5(2):125–142.
- [12] V. Muhajan, & E. Muller (1986). Advertising pulsing policies for generating awareness for new products. *Marketing Science*, 5(2): 89–106.

- [13] H.I. Mesak (1992). An aggregate advertising pulsing model with wearout effects. *Marketing Science*, 11(3): 310–326.
- [14] A. Buratto, & B. Viscolani (1994). An optimal control student problem and a marketing counterpart. *Mathematical and Computer Modelling*, 20(6): 19–33.
- [15] G. Feichtinger, R.F. Hartl, & S.P. Sethi (1994). Dynamic optimal control models in advertising: recent developments. *Management Science*, 40(2): 195–226.
- [16] G.M. Erickson (1995). Advertising strategies in a dynamic oligopoly. *Journal of Marketing Research*, 32(2): 233–237.
- [17] G.M. Erickson (1995). Differential game models of advertising competition. *European Journal of Operational Research*, 83(3): 431–438.
- [18] P.A. Naik, M.K. Mantrala & A.G. Sawyer (1998). Planning media schedules in the presence of dynamic advertising quality. *Marketing science*, 17(3): 214–235.
- [19] F.M. Feinberg (2001). On continuous-time optimal advertising under s-shaped response. *Management Science*, 47(11): 1476–1487.
- [20] A. Buratto, & B. Viscolani (2002). New product introduction: goodwill, time and advertising cost. *Mathematical Methods of Operations Research*, 55(1): 55–68.
- [21] H.I. Mesak (2002). On the impact of initial performance on the effectiveness of advertising pulsation policies. *Journal of the Operational Research Society*, 53(11): 1247–1255.
- [22] R. Cellini, & L. Lambertini (2003). Advertising in a differential oligopoly game. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 116(1): 61–81.
- [23] A. Prasad, & S.P. Sethi (2004). Competitive advertising under uncertainty: A stochastic differential game approach. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 123(1): 163–185.
- [24] S. Mosca, & B. Viscolani (2004). Optimal goodwill path to introduce a new product. *Journal of optimization theory and applications*, 123(1): 149–162.

- [25] A. Buratto, L.Grosset, & B. Viscolani (2006). Advertising a new product in a segmented market. *European Journal of Operational Research*, 175(2): 1262–1267.
- [26] A. Buratto, L.Grosset, & B. Viscolani (2006). Advertising channel selection in a segmented market. *Automatica*, 42(8): 1343–1347.
- [27] S. Jørgensen, P.M. Kort, & G. Zaccour (2006). Advertising an event. *Automatica*, 42(8): 1349–1355.
- [28] B.J. Jansen, & T. Mullen (2008). Sponsored search: an overview of the concept, history, and technology. *International Journal of Electronic Business*, 6(2): 114–131.
- [29] S.P. Sethi, A. Prasad, & X. He (2008). Optimal advertising and pricing in a new-product adoption model. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 139(2): 351–360.
- [30] G.M. Erickson (2009). Advertising competition in a dynamic oligopoly with multiple brands. *Operations research*, 57(5): 1106–1113.
- [31] G.M. Erickson (2009). An oligopoly model of dynamic advertising competition. *European Journal of Operational Research*, 197(1): 374–388.
- [32] H.I. Mesak, & T.S. Ellis (2009). On the superiority of pulsing under a concave advertising market potential function. *European Journal of Operational Research*, 194(2): 608–627.
- [33] G. Bertuzzi, & L. Lambertini (2010). Existence of equilibrium in a differential game of spatial competition with advertising. *Regional Science and Urban Economics*, 40(2-3): 155–160.
- [34] G.M. Erickson (2011). A differential game model of the marketing-operations interface. *European Journal of Operational Research*, 211(2): 394–402.
- [35] J. Golbeck, C. Robles, & K. Turner (2011). Predicting personality with social media. pages 253–262.
- [36] O.J. Rutz, & R.E. Bucklin (2011). From generic to branded: A model of spillover in paid search advertising. *Journal of Marketing Research*, 48(1): 87–102.

- [37] B. DasGupta, & S. Muthukrishnan (2013). Stochastic budget optimization in internet advertising. *Algorithmica*, 65(3): 634–661.
- [38] Y. Yang, J. Zhang, R. Qin, J. Li, B. Liu, & Z. Liu (2013). Budget strategy in uncertain environments of search auctions: A preliminary investigation. *IEEE Transactions on Services Computing*, 6: 168–176.
- [39] R. Gil (2017). The evolution of social media advertising. *IAS insider*.