UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Configurazioni topologiche dell'equazione di Gross-Pitaevskii

Relatore

Prof./Dr. Luca Salasnich

Laureando

Luca Mazzocchetti

Anno Accademico 2020/2021

Indice

0.1 Introduzione

Nel 1927 il fisico tedesco Erwin Madelung pubblicò un lavoro[3] in cui metteva in evidenza come dall'equazione di Schroëdinger fosse possibile ottenere equazioni analoghe a quelle della fluidodinamica. Nel 1937 Kapizka introdusse il concetto di superfluidità in relazione a studi sul comportamento dell'elio 4 a temperature prossime allo zero assoluto. Il legame tra fluidodinamica e meccanica quantistica si fece ancor più profondo quando Fritz London propose una interpretazione della superfluidità sulla base della condensazione di Bose-Einstein e dell'idea di funzione d'onda macroscopica per un sistema di bosoni. Nel 1961 Eugene Gross e Lev Pitaevskii pubblicarono indipendentemente un lavoro [2] [4] in cui, usando l'approssimazione di Hartree-Fock, introducevano un'equazione che descrivesse un gas di bosoni interagenti a basse temperature e ne deducevano una serie di configurazioni dette solitoni, il cui rappresentante forse più significativo è il vortice quantizzato. Tali configurazioni topologiche del fluido di bosoni hanno riacquisito interesse nei più recenti anni '80 e '90, poiché lo sviluppo tecnologico (confinamento degli atomi tramite trappole magnetiche e raffreddamento tramite laser) ha permesso di temperature dell'ordine del nK e densità dell'ordine di 10^{-13}-10^{-15} cm^{-3} e la conseguente osservazione sperimentale delle configurazioni previste da Gross e Pitaevskii.

Ci proponiamo dunque, visto il rinato interesse nel campo dei superfluidi quantistici, di riassumere le tappe dello studio teorico di tali argomenti, seguendo il criterio della chiarezza e della sintesi mettendo in evidenza i solo aspetti essenziali. Dapprima verrà ricavata la nota equazione di Gross-Pitaevskii per un sistema di bosoni debolmente interagenti, quindi se ne dedurrano due possibili configurazioni di tipo solitonico, proprie di bosoni soggetti a mutua repulsione. Si mostrerà poi come una di esse sia di fatto coincidente con l'esistenza di un vortice quantizzato nel fluido bosonico, evidenziando l'affinità delle equazioni quantistiche con quelle di Eulero per i superfluidi. Infine accenneremo alle piccole eccitazioni propagantisi in tale sistema bosonico, deducendo il cosiddetto spettro di Bogoliubov.

0.2 Equazione di Gross-Pitaevskii

Si consideri un insieme di N bosoni identici interagenti privi di spin, descritto dall'hamiltoniana:

$$\hat{H}(\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_N) = \sum_{i=1}^{N} \hat{h}(\boldsymbol{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} V(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j) \tag{1}$$

con $\hat{h}(\boldsymbol{r}_i)$ l'hamiltoniana di singola particella e $V(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j)$ il potenziale di interazione tra la particella i-esima e j-esima. Per trattare il problema di trovare autofunzioni $\Psi(\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_N)$ del sistema, si può usare il metodo variazionale applicato al funzionale:

$$E[\Psi] = \langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle = \int d^3r_1\cdots d^3r_N \Psi^*(\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_N)\hat{H}(\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_N)\Psi(\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_N) \tag{2}$$

che descrive l'energia media del sistema. Facendo l'ipotesi che tutti i bosoni siano nello stesso stato ϕ di singola particella (condensato di Bose-Einstein), normalizzato ($\int d^3r|\phi(\boldsymbol{r})|^2 = 1$), la $\Psi(\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_N)$ si riduce alla forma:

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_N) = \phi(\boldsymbol{r}_1)\cdots\phi(\boldsymbol{r}_N) \tag{3}$$

detta approssimazione di Hartree per i bosoni. Il funzionale si riduce ad un funzionale della $\phi(\boldsymbol{r})$:

$$\begin{aligned}
E_N[\phi] = &\sum_{i=1}^{N}\int d^3r_1\cdots \widehat{d^3r_i}\cdots d^3r_N|\phi(\boldsymbol{r}_1)|^2\cdots\left|\phi(\hat{\boldsymbol{r}_i})\right|^2\cdots|\phi(\boldsymbol{r}_N)|^2\int d^3r_i\phi^*(\boldsymbol{r}_i)\hat{h}(\boldsymbol{r}_i)\phi(\boldsymbol{r}_i)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\int d^3r_1\cdots\widehat{d^3r_i}\cdots\widehat{d^3r_j}\cdots d^3r_N|\phi(\boldsymbol{r}_1)|^2\cdots\left|\phi(\hat{\boldsymbol{r}_i})\right|^2\cdots\left|\phi(\hat{\boldsymbol{r}_j})\right|^2\cdots|\phi(\boldsymbol{r}_N)|^2\cdot\\
&\cdot\int d^3r_i\,d^3r_j|\phi(\boldsymbol{r}_i)|^2|\phi(\boldsymbol{r}_j)|^2V(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j)\\
&= N\int d^3r\phi^*(\boldsymbol{r})\hat{h}(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}N(N-1)\int d^3r\,d^3r'|\phi(\boldsymbol{r})|^2|\phi(\boldsymbol{r}')|^2V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')
\end{aligned} \tag{4}$$

Data la presenza del vincolo di normalizzazione, è necessario applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ovvero si cerca $\phi(\boldsymbol{r})$ tale che, sotto la variazione $\phi\to\phi+\delta\phi$, resti stazionario il funzionale:

$$S[\phi] = N\int d^3r\phi^*(\boldsymbol{r})\hat{h}(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}N(N-1)\int d^3r\,d^3r'|\phi(\boldsymbol{r})|^2|\phi(\boldsymbol{r}')|^2V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \lambda\int d^3r|\phi(\boldsymbol{r})|^2 \tag{5}$$

Si vede subito che:

$$\begin{aligned}
S[\phi+\delta\phi] = &N\int d^3r(\phi^*(\boldsymbol{r})\hat{h}(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r}) + \delta\phi^*(\boldsymbol{r})\hat{h}(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r}) + \phi^*(\boldsymbol{r})\hat{h}(\boldsymbol{r})\delta\phi(\boldsymbol{r}))\\
&+\frac{1}{2}N(N-1)\int d^3r\,d^3r'(|\phi(\boldsymbol{r})|^2|\phi(\boldsymbol{r}')|^2 + \phi^2(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r}')\delta\phi^*(\boldsymbol{r}') + \phi^2(\boldsymbol{r}')\phi(\boldsymbol{r})\delta\phi^*(\boldsymbol{r})\\
&+\phi^2(\boldsymbol{r})\phi^*(\boldsymbol{r}')\delta\phi(\boldsymbol{r}') + \phi^2(\boldsymbol{r}')\phi^*(\boldsymbol{r})\delta\phi(\boldsymbol{r}))V(\boldsymbol{r},r')\\
&-\lambda\int d^3r(|\phi(\boldsymbol{r})|^2 + \phi(\boldsymbol{r})\delta\phi^*(\boldsymbol{r}) + \delta\phi(\boldsymbol{r})\phi^*(\boldsymbol{r})) + O(\delta\phi^2)\\
&= F[\phi] + N\Big(\int d^3r\delta\phi^*(\boldsymbol{r})(\hat{h}(\boldsymbol{r}) + (N-1)\int d^3r'|\phi(\boldsymbol{r}')|^2V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \frac{\lambda}{N}\Big)\phi(\boldsymbol{r}) + (\phi\leftrightarrow\phi^*) + O(\delta\phi^2)
\end{aligned} \tag{6}$$

Ne segue l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\left[\hat{h}(\boldsymbol{r}) + (N-1)\int d^3r'|\phi(\boldsymbol{r}')|^2 V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \mu\right]\phi(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{7}$$

detta equazione di Hartree per i bosoni, dove si è posto $\frac{\lambda}{N} = \mu$. μ ha il significato fisico di potenziale chimico del sistema. Per vederlo, moltiplichiamo la (7) per $\phi^*(\boldsymbol{r})$ e integriamo. Allora:

$$\int d^3r\phi^*(\boldsymbol{r})\hat{h}(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r}) + (N-1)\int d^3r\, d^3r'|\phi(\boldsymbol{r})|^2|\phi(\boldsymbol{r}')|^2 V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \mu = 0 \tag{8}$$

D'altronde dalla forma del funzionale (4) (descrivente l'energia media del sistema) è chiaro che, per un sistema con $N-1$ particelle si avrebbe:

$$E_{N-1}[\phi] = (N-1)\int d^3r\phi^*(\boldsymbol{r})\hat{h}(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}(N-1)(N-2)\int d^3r\, d^3r'|\phi(\boldsymbol{r})|^2|\phi(\boldsymbol{r}')|^2 V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{9}$$

e dunque l'energia media necessaria ad aggiungere un bosone al sistema (potenziale chimico) è pari a:

$$E_N[\phi] - E_{N-1}[\phi] = \int d^3r\phi^*(\boldsymbol{r})\hat{h}(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r}) + (N-1)\int d^3r\, d^3r'|\phi(\boldsymbol{r})|^2|\phi(\boldsymbol{r}')|^2 V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{10}$$

che per la (8) uguaglia μ. Nell'ipotesi $N \gg 1$ e potenziale di interazione dipendente solo dalla posizione relativa l'equazione (7) diviene:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\boldsymbol{r}) + N\int d^3r'|\phi(\boldsymbol{r}')|^2 V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right]\phi(\boldsymbol{r}) = \mu\phi(\boldsymbol{r}) \tag{11}$$

Essa ha la forma di una equazione agli autovalori con un'hamiltoniana avente un termine cinetico, un potenziale esterno ($U(\boldsymbol{r})$) e un potenziale di campo medio dovuto agli altri bosoni (si noti che $N|\phi(\boldsymbol{r})|^2 = \rho(\boldsymbol{r})$ è la densità numerica del condensato). Per ottenere l'equazione di evoluzione temporale si esegue un analogo calcolo usando però l'operatore:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N}\hat{h}(\boldsymbol{r}_i) - \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} V(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j) \tag{12}$$

per costruire il funzionale:

$$\begin{aligned} S[\psi] = i\hbar N\int dt\, d^3r\psi^*(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) - N\int dt\, d^3r\psi^*(\boldsymbol{r},t)\hat{h}(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r},t) \\ -\frac{1}{2}N(N-1)\int dt\, d^3r\, d^3r'|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2|\psi(\boldsymbol{r}',t)|^2 V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \lambda\int dt\, d^3r|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2 \end{aligned} \tag{13}$$

dove λ è il solito moltiplicatore di Lagrange dovuto al vincolo di normalizzazione. L'equazione cui si giunge per la funzione $\psi(\boldsymbol{r},t)$ di particella singola è data ovviamente da:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\boldsymbol{r}) + (N-1)\int d^3r'|\psi(\boldsymbol{r}',t)|^2 V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - \mu\right]\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{14}$$

con, come prima, $\mu = \frac{\lambda}{N}$. Come caso specifico, ipotizziamo per il potenziale di interazione tra bosoni la forma:

$$V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = g\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{15}$$

con:

$$g = \int d^3 r V(\boldsymbol{r}) \tag{16}$$

ovvero trattiamo le particelle come sfere rigide puntiformi, in grado di esercitare solo interazioni a contatto. È chiaro che l'approssimazione è migliore ad alte temperature e basse densità (particelle molto distanti ad elevata energia cinetica). L'equazione di Hartree di evoluzione temporale diviene allora l'equazione di Gross-Pitaevskii:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\boldsymbol{r}) + (N-1)g|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2 - \mu\right]\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{17}$$

Dalla teoria dello scattering a due corpi, la sezione d'urto differenziale è il modulo quadro di una funzione dell'angolo solido, dipendente dal momento delle particelle incidenti, proporzionale alla trasformata di Fourier del potenziale di interazione. Nell'approssimazione fatta, tale trasformata si riduce quindi alla costante g e cioè la funzione citata è essa stessa una costante, la lunghezza di scattering in onda s, a_s:

$$a_s = \frac{m}{4\pi\hbar^2}g \tag{18}$$

Riscriviamo dunque la (17) come:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\boldsymbol{r}) + (N-1)\frac{4\pi\hbar^2}{m}a_s|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2 - \mu\right]\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{19}$$

0.3 GPE 1-dimensionale

Per cominciare studiamo le soluzioni dell'equazione di Gross-Pitaevskii (GPE) in coordinate cartesiane, riducendoci al caso unidimensionale. Supponiamo che nel piano xy il fluido sia confinato da un potenziale armonico di frequenza $\omega_\perp$:

$$U(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega_\perp^2(x^2+y^2) + \mathcal{U}(z) \tag{20}$$

È allora ragionevole assumere per $\psi(x,y,z,t)$ la forma separabile:

$$\psi(x,y,z,t) = f(z,t)\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_\perp}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_\perp^2}} \tag{21}$$

con $\sigma_\perp = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_\perp}}$ (la gaussiana normalizzata è come noto lo stato fondamentale di un confinamento armonico). Il funzionale d'azione che genera la (19) (ottenuta dal funzionale (13)) è dato da:

$$S[\psi] = \int dt\, d^3r \psi^*(\boldsymbol{r},t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - U(\boldsymbol{r}) - (N-1)\frac{4\pi\hbar^2}{m}a_s|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2 + \mu\right)\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{22}$$

Inserendovi la (21) otteniamo:

$$\begin{aligned}
F(f) = &\int dx\, dy \frac{1}{\pi\sigma_\perp^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma_\perp^2}} \int dt\, dz f^*(z,t) i\hbar\frac{\partial}{\partial t}f(z,t)\\
&+ \int dx\, dy \frac{1}{\pi\sigma_\perp^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_\perp^2}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}m\omega_\perp^2(x^2+y^2)\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_\perp^2}} \int dt\, dz f^*(z,t)f(z,t)\\
&+ \int dx\, dy \frac{1}{\pi\sigma_\perp^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma_\perp^2}} \int dt\, dz f^*(z,t)\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mathcal{U}(z)\right)f(z,t)\\
&- (N-1)\frac{4\pi\hbar^2}{m}a_s \int dx\, dy \frac{1}{\pi^2\sigma_\perp^4}e^{-\frac{2(x^2+y^2)}{\sigma_\perp^2}} \int dt\, dz f^*(z,t)|f(z,t)|^2|f(z,t)\\
&+ \mu \int dx\, dy \frac{1}{\pi\sigma_\perp^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma_\perp^2}} \int dt\, dz f^*(z,t)f(z,t)\\
= &\int dt\, dz f^*(z,t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar\omega_\perp}{2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mathcal{U}(z) - (N-1)\frac{4\pi\hbar^2}{m}a_s\cdot\frac{1}{2\pi\sigma_\perp^2}|f(z,t)|^2 + \mu\right)f(z,t)
\end{aligned} \tag{23}$$

Posto $\gamma = (N-1)\frac{2\hbar^2}{m\sigma_\perp^2}a_s = 2(N-1)\hbar\omega_\perp a_s$ e trascurando il termine con $\frac{\hbar\omega_\perp}{2}$ (assimilabile entro la costante μ), tale funzionale produce per $f(z,t)$ l'equazione:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}f(z,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mathcal{U}(z) + \gamma|f(z,t)|^2 - \mu\right]f(z,t) \tag{24}$$

0.4 Soluzione black soliton

Nell'ipotesi $\mathcal{U}(z) = 0$, V. Zakharov e A. Shabat hanno dimostrato che la generica soluzione di (24) ha la forma:

$$f(z,t) = \xi(z - vt)e^{-\frac{i}{\hbar}\theta(z,t)} \tag{25}$$

con $\xi(z - vt)$ e $\theta(z,t)$ funzioni reali. Inserendo infatti tale espressione nell'equazione (24) e usando la variabile $\zeta = z - vt$, notando che $\frac{\partial}{\partial t} = -v\frac{\partial}{\partial \zeta}$ e $\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$, si ha:

$$\begin{aligned}
-i\hbar v e^{-\frac{i}{\hbar}\theta(z,t)}\frac{\partial}{\partial \zeta}\xi(\zeta) + e^{-\frac{i}{\hbar}\theta(z,t)}\xi(\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\theta(z,t) &= e^{-\frac{i}{\hbar}\theta(z,t)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \gamma|\xi(\zeta)|^2\right]\xi(\zeta) \\
&+ \frac{1}{2m}e^{-\frac{i}{\hbar}\theta(z,t)}\xi(\zeta)\Big(\frac{\partial}{\partial z}\theta(z,t)\Big)^2 \\
&+ i\frac{\hbar}{2m}e^{-\frac{i}{\hbar}\theta(z,t)}\xi(\zeta)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\theta(z,t) \\
&+ i\frac{\hbar}{m}e^{-\frac{i}{\hbar}\theta(z,t)}\Big(\frac{\partial}{\partial \zeta}\xi(\zeta)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial z}\theta(z,t)\Big) \\
&- \mu e^{-\frac{i}{\hbar}\theta(z,t)}\xi(\zeta)
\end{aligned} \tag{26}$$

Semplificando l'esponenziale ed uguagliando parte reale e immaginaria dei due membri, si ottiene il sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} \xi\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\xi'' + \gamma\xi^3 + \frac{1}{2m}\xi\Big(\frac{\partial\theta}{\partial z}\Big)^2 - \mu\xi \\ -v\xi' = \frac{1}{2m}\xi\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{m}\xi'\frac{\partial\theta}{\partial z} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione del sistema è chiaro che, poiché ξ dipende da ζ e non da z e t separatamente, anche $\frac{\partial\theta}{\partial z}$ dipende solo da ζ. Ne segue che:

$$\theta(z,t) = \alpha(z - vt) + \beta(t) \tag{27}$$

che inserita nel sistema produce:

$$\begin{cases} -v\xi\alpha' + \xi\beta' = -\frac{\hbar^2}{2m}\xi'' + \gamma\xi^3 + \frac{1}{2m}\xi\alpha'^2 - \mu\xi \\ -v\xi' = \frac{1}{2m}\xi\alpha'' + \frac{1}{m}\xi'\alpha' \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda equazione per ξ notiamo che essa può riscriversi come:

$$-\frac{1}{2}v\frac{\partial(\xi^2)}{\partial\zeta} = \frac{1}{2m}\frac{\partial(\xi^2\alpha')}{\partial\zeta} \tag{28}$$

da cui si ha subito integrando:

$$\xi^2\alpha' = -mv\xi^2 + c \tag{29}$$

con c una costante di integrazione. La costante è determinata imponendo condizioni al contorno. Tratteremo il caso in cui all'infinito la densità tende ad un valore costante $\bar{\xi}$, assumendo anche che $\alpha' \to 0$ per $\zeta \to \pm\infty$.[1] Se ne ricava che:

$$c = mv\bar{\xi}^2 \tag{30}$$

[1] Si ricordi che si è nell'ipotesi di fluido a bassa densità (particelle molto distanti rispetto al range della mutua interazione) ed è dunque ragionevole pensare che nelle regioni estremali (o per tempi lunghi), la densità sia uniforme.

e dunque la relazione, se $\xi(\zeta) \neq 0$:

$$\alpha' = mv\left(\frac{\bar{\xi}^2}{\xi^2} - 1\right) \tag{31}$$

Inseriamo tale espressione nella prima equazione del sistema, ottenendo:

$$-mv^2\frac{\bar{\xi}^2}{\xi} + mv^2\xi + \xi\beta' = -\frac{\hbar^2}{2m}\xi'' + \gamma\xi^3 + \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{\bar{\xi}^4}{\xi^3} - 2\frac{\bar{\xi}^2}{\xi} + \xi\right) - \mu\xi \tag{32}$$

Non avendo condizioni su β, si può scegliere $\beta(t) = -\frac{1}{2}mv^2t$, che produce una soluzione particolarmente semplice. La (32) diventa così:

$$\xi'' = \frac{2m\gamma}{\hbar^2}\xi^3 + \left(\frac{mv}{\hbar}\right)^2\frac{\bar{\xi}^4}{\xi^3} - \frac{2m\mu}{\hbar^2}\xi \tag{33}$$

Si ha allora che, definita:

$$W(\xi) = -\frac{m\gamma}{2\hbar^2}\xi^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{mv}{\hbar}\right)^2\frac{\bar{\xi}^4}{\xi^2} + \frac{m\mu}{\hbar^2}\xi^2 \tag{34}$$

la (33) si può scrivere come:

$$\xi'' = -\frac{\partial W(\xi)}{\partial \xi} \tag{35}$$

ovvero come l'equazione di Newton di un moto unidimensionale di coordinata $\xi(\zeta)$ parametrizzata da ζ. L'"energia" conservata di tale moto fittizio è:

$$K = \frac{1}{2}\xi'(\zeta) + W(\xi(\zeta)) \tag{36}$$

da cui si ottiene l'equazione differenziale del primo ordine:

$$\frac{d\xi(\zeta)}{d\zeta} = \sqrt{2(K - W(\xi(\zeta))} \tag{37}$$

Ricordando che $\xi(\zeta) \to \bar{\xi}$ per $\zeta \to \infty$ e quindi $\xi'(\zeta), \xi''(\zeta) \to 0$ per $\zeta \to \infty$ si ha:

$$0 = \frac{\partial W(\bar{\xi})}{\partial \xi} = -\frac{2m\gamma}{\hbar^2}\bar{\xi}^3 - \left(\frac{mv}{\hbar}\right)^2\bar{\xi} + \frac{2m\mu}{\hbar^2}\bar{\xi} \tag{38}$$

$$\bar{\xi}\left(\frac{2m\mu}{\hbar^2} - \frac{m^2v^2}{\hbar^2} - \frac{2m\gamma}{\hbar^2}\bar{\xi}^2\right) = 0 \tag{39}$$

$$\mu = \gamma\bar{\xi}^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{40}$$

e dunque:

$$K = W(\bar{\xi}) = -\frac{m\gamma}{2\hbar^2}\bar{\xi}^4 + \frac{m^2v^2}{2\hbar^2}\bar{\xi}^2 + \frac{m\gamma}{\hbar^2}\bar{\xi}^4 + \frac{m^2v^2}{2\hbar^2}\bar{\xi}^2 = \frac{m\gamma}{2\hbar^2}\bar{\xi}^4 + \frac{m^2v^2}{\hbar^2}\bar{\xi}^2 \tag{41}$$

e:

$$W(\xi) = \frac{m\gamma}{2\hbar^2}(-\xi^4 + 2\bar{\xi}^2\xi^2) + \frac{m^2v^2}{2\hbar^2}\left(\frac{\bar{\xi}^4}{\xi^2} + \xi^2\right) \tag{42}$$

Dalla (37) si ha allora:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi(\zeta)}{d\zeta} &= \sqrt{\frac{m\gamma}{\hbar^2}(\bar{\xi}^4+\xi^4-2\bar{\xi}^2\xi^2)+\frac{m^2v^2}{\hbar^2}\left(2\bar{\xi}^2-\frac{\bar{\xi}^4}{\xi^2}-\xi^2\right)} \\ &= \sqrt{\frac{m\gamma}{\hbar^2}(\xi^2-\bar{\xi}^2)^2+\frac{m^2v^2}{\hbar^2\xi^2}(2\bar{\xi}^2\xi^2-\bar{\xi}^4-\xi^4)} \\ &= \sqrt{\frac{m\gamma}{\hbar^2}(\bar{\xi}^2-\xi^2)^2-\frac{m^2v^2}{\hbar^2\xi^2}(\bar{\xi}^2-\xi^2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{m\gamma}}{\hbar}\sqrt{1-\frac{mv^2}{\gamma\xi^2}}(\bar{\xi}^2-\xi^2)\end{aligned} \tag{43}$$

Siamo interessati a una soluzione di tale equazione detta "black soliton", che descrive un fluido bosonico a densità costante a grandi distanze e nulla in un punto. Si noti che il membro destro dell'equazione diverge per $\xi = 0$ a meno che non sia $v = 0$. In tal caso si ha integrando:

$$\frac{\hbar}{\sqrt{m\gamma}}\int\frac{d\xi}{\bar{\xi}^2-\xi^2} = \int d\zeta + c \tag{44}$$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{m\gamma}}\frac{1}{\bar{\xi}}arc\tanh\left(\frac{\xi}{\bar{\xi}}\right) = \zeta + c \tag{45}$$

con c una costante di integrazione. Si ha infine:

$$\xi(\zeta) = \bar{\xi}\tanh\left(\sqrt{\frac{m\gamma}{\hbar^2}}\bar{\xi}(\zeta+c)\right) \tag{46}$$

La costante di integrazione c determina il punto in cui all'istante zero (e a ogni istante valendo $v = 0$) è trovato il solitone. A meno di traslazione prendiamo quindi $c = 0$. In definitiva la densità del fluido, è:

$$\rho(x,y,z,t) = N|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2 = N\bar{\xi}^2\tanh^2\left(\sqrt{\frac{m\gamma}{\hbar^2}}\bar{\xi}z\right)\frac{1}{\pi\sigma_\perp^2}e^{-\frac{(x^2+y^2)^2}{\sigma_\perp^2}} \tag{47}$$

La densità del fluido lungo z scende da un valore circa costante rapidamente a zero nel punto $z = 0$, per poi risalire rapidamente al valore iniziale. Si noti come la funzione d'onda non è in tal caso quadrato sommabile. Ovviamente ciò si deve all'assenza di un confinamento lungo z che sarebbe presente in una situazione fisica reale e che a grandi distanze farebbe andare a zero la densità.

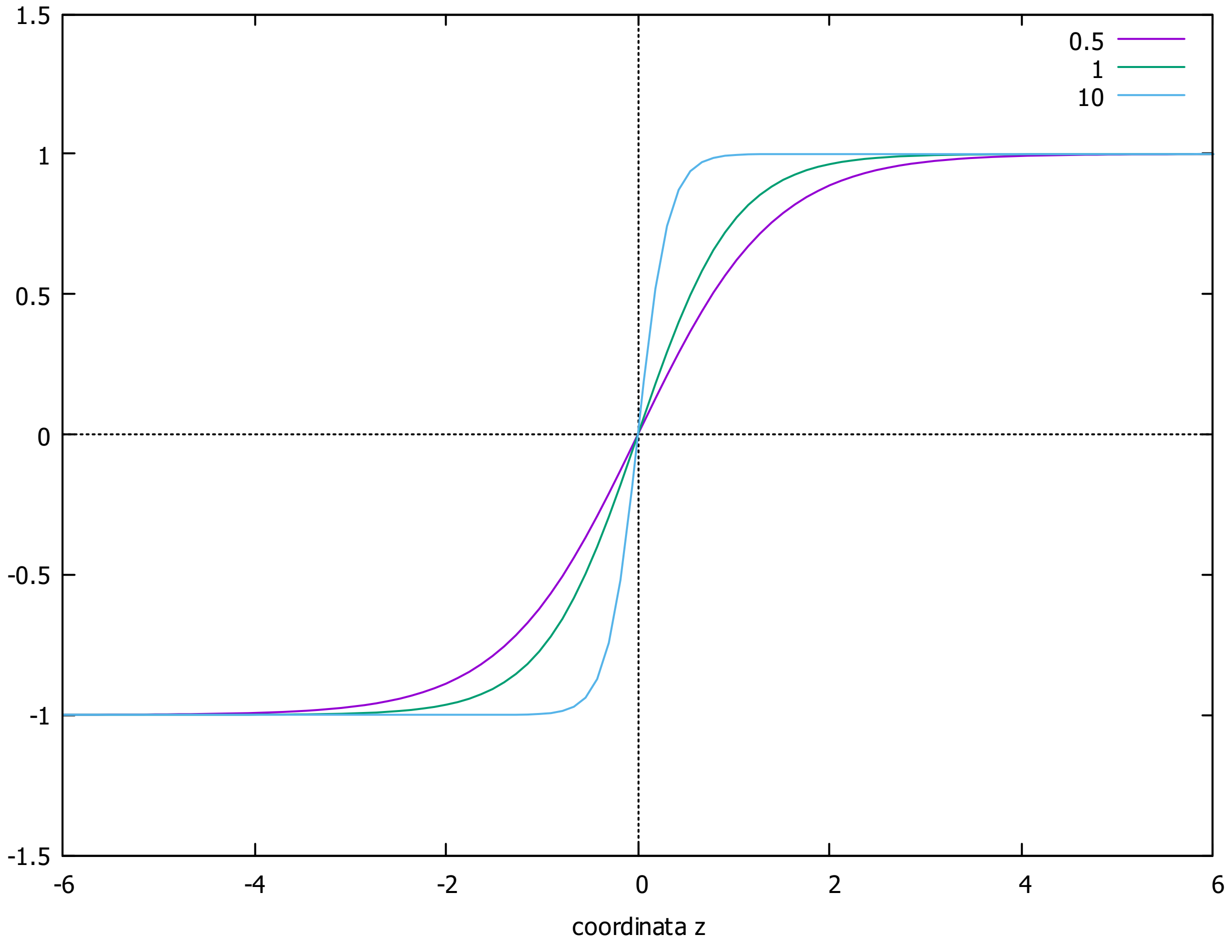

Figura 1: $\xi(z)$ per $m = \hbar = \bar{\xi} = 1$ e valori $\gamma = 0.5, 1, 10$

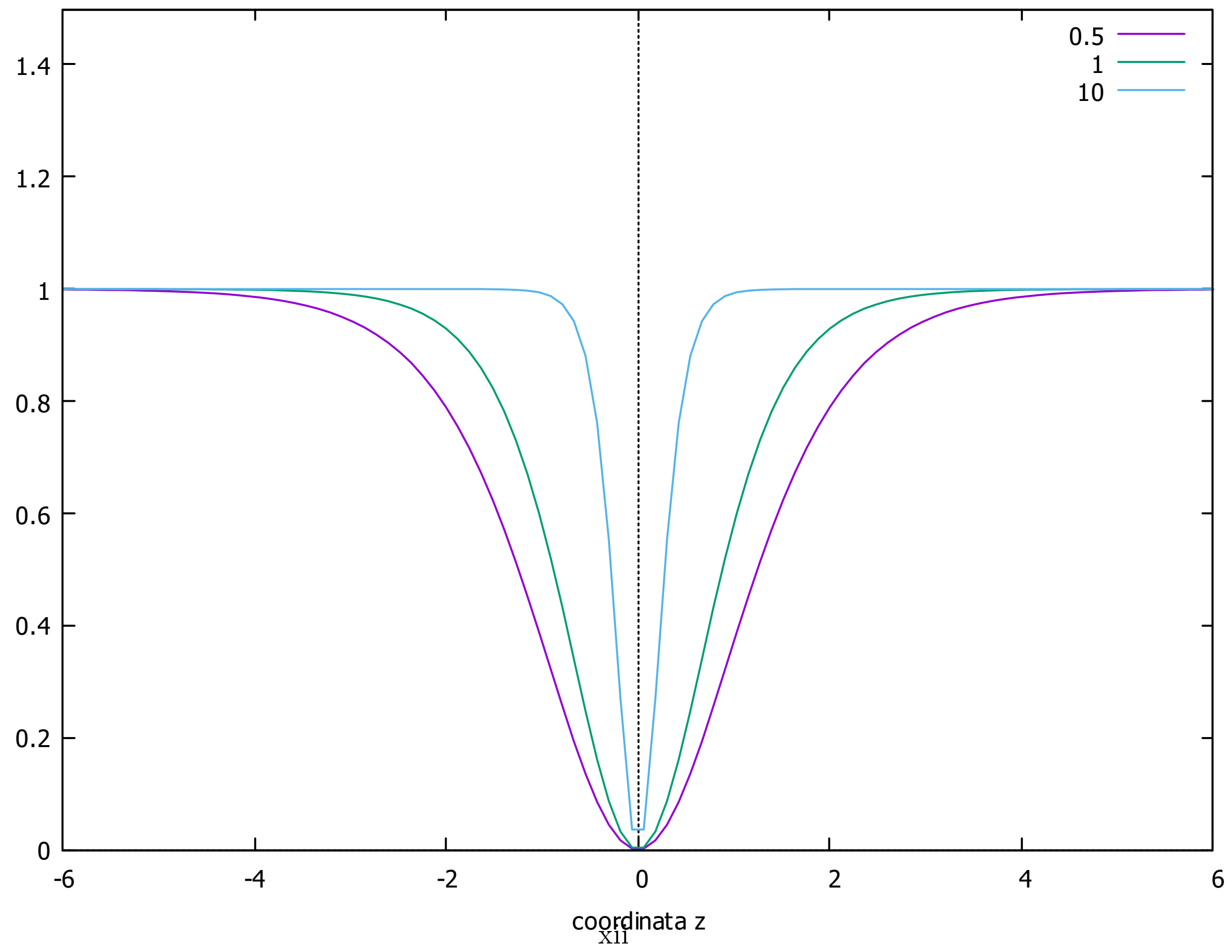

Figura 2: $|\xi(z)|^2$ per $m = \hbar = \bar{\xi} = 1$ e valori $\gamma = 0.5, 1, 10$

0.5 GPE 2-dimensionale

Tratteremo ora la riduzione dell'equazione di Gross-Pitaevskii a due dimensioni, limitandoci al caso stazionario. Analogamente a ciò che è stato fatto in precedenza, supponiamo che vi sia un confinamento armonico lungo l'asse z dovuto al potenziale:

$$U(x,y,z) = \mathcal{V}(x,y) + \frac{1}{2}m\omega_z z^2 \tag{48}$$

e che la funzione d'onda stazionaria abbia la forma separabile:

$$\phi(x,y,z) = g(x,y)\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_z}e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} \tag{49}$$

con $\sigma_z = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}$. Inserendola nel funzionale d'azione stazionario:

$$S[\phi] = \int d^3r\phi^*(\boldsymbol{r})\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\boldsymbol{r}) + (N-1)\frac{4\pi\hbar^2}{m}a_s|\phi(\boldsymbol{r})|^2 - \mu\Big)\phi(\boldsymbol{r}) \tag{50}$$

otteniamo il funzionale:

$$\begin{aligned}
F(g) = &\int dz\frac{1}{\pi\sigma_z^2}e^{-\frac{z^2}{\sigma_z^2}}\int dxdyg^*(x,y)\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mathcal{V}(x,y)\Big)g(x,y)\\
&+\int dz\frac{1}{\pi\sigma_z^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2\Big)e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}\int dxdyg^*(x,y)g(x,y)\\
&+(N-1)\frac{4\pi\hbar^2}{m}a_s\int dz\frac{1}{\pi^2\sigma_z^4}e^{-\frac{2z^2}{\sigma_z^2}}\int dxdyg^*(x,y)|g(x,y)|^2g(x,y)\\
&-\mu\int dz\frac{1}{\pi\sigma_z^2}e^{-\frac{z^2}{\sigma_z^2}}\int dxdyg^*(x,y)g(x,y)\\
&=\int dxdyg^*(x,y)\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mathcal{V}(x,y) + \frac{\hbar\omega_z}{2} + (N-1)\frac{4\pi\hbar^2}{m}a_s\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z^2}|g(x,y)|^2 - \mu\Big)g(x,y)
\end{aligned} \tag{51}$$

Posto $\beta = (N-1)\frac{2\sqrt{2}\hbar^2}{m\sigma_z^2}a_s = 2\sqrt{2}(N-1)\hbar\omega_z$ e trascurando il termine con $\frac{\hbar\omega_z}{2}$ (assimilabile entro la costante μ), tale funzionale produce per $g(x,y)$ l'equazione:

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_\perp^2 + \mathcal{V}(x,y) + \beta|g(x,y)|^2\Big)g(x,y) = \mu g(x,y) \tag{52}$$

La studiamo nel caso $\mathcal{V}(x,y)=0$, usando coordinate polari (r,φ) del piano data la simmetria cilindrica del potenziale esterno. La (69) si scrive allora:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial g(r,\varphi)}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g(r,\varphi)}{\partial\varphi^2} - \frac{2m\beta}{\hbar^2}|g(r,\varphi)|^2 g(r,\varphi) + \frac{2m\mu}{\hbar^2}g(r,\varphi) = 0 \tag{53}$$

Cerchiamo una soluzione nella forma separabile:

$$g(r,\varphi) = R(r)e^{in\varphi} \tag{54}$$

con $R(r)$ funzione reale della distanza dall'asse z. Si ottiene per essa l'equazione differenziale:

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{n^2}{r^2}R(r) - \frac{2m\beta}{\hbar^2}R^3(r) + \frac{2m\mu}{\hbar^2}R(r) = 0 \tag{55}$$

Non è possibile dare soluzione analtica a tale equazione. Ne indichiamo però gli andamenti. Data l'assenza di confinamento nel piano (x, y), assumiamo che $R(r) \to \bar{R}$ (costante non nulla) e $R'(r), R''(r) \to 0$, per $r \to \infty$. All'infinito l'equazione assume la forma asintotica:

$$R''(r) - \frac{2m\beta}{\hbar^2}R^3(r) + \frac{2m\mu}{\hbar^2}R(r) = 0 \tag{56}$$

$$R'' = -\frac{\partial W(R)}{\partial R} \tag{57}$$

con:

$$W(R) = \frac{m\beta}{2\hbar^2}R^4 - \frac{m\mu}{\hbar^2}R^2 \tag{58}$$

Dall'annullarsi della derivata seconda all'infinito otteniamo:

$$0 = \frac{\partial W(\bar{R})}{\partial R} = \frac{2m\beta}{\hbar^2}\bar{R}^3 - \frac{2m\mu}{\hbar^2}\bar{R} \tag{59}$$

$$\mu = \beta\bar{R}^2 \tag{60}$$

Procedendo in analogia al caso della precedente sezione, definiamo l'"energia" fittizia conservata:

$$K = \frac{1}{2}R'^2(r) + W(R(r)) \tag{61}$$

Valutandola all'infinito, per l'annullarsi della derivata prima:

$$K = W(\bar{R}) = \frac{m\beta}{2\hbar^2}\bar{R}^4 - \frac{m\mu}{\hbar^2}\bar{R}^2 = -\frac{m\beta}{2\hbar^2}\bar{R}^4 \tag{62}$$

Dunque:

$$\frac{dR(r)}{dr} = \sqrt{2(K - W(R(r))} = \sqrt{\frac{m\beta}{\hbar^2}(-\bar{R}^4 - R^4 + 2\bar{R}^2R^2)} = \frac{\sqrt{-m\beta}}{\hbar}(\bar{R}^2 - R^2) \tag{63}$$

che richiede $\beta < 0$ per avere soluzione. In particolare l'interazione tra le particelle deve essere attrattiva per il caso in esame. Si noti che allora riotteniamo all'infinito lo stesso andamento del caso unidimensionale:

$$R(r) \sim_{r\to\infty} \bar{R}\tanh\left(\sqrt{\frac{-m\beta}{\hbar^2}}\bar{R}r\right) \tag{64}$$

Per studiare il comportamento per $r \to 0$, supponiamo che $R(r)$ sia analitica e non divergente e dunque valga $R(r) \sim_{r\to 0} cr^l$ con c costante. L'equazione per $r \ll 1$ assume allora la forma:

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{n^2}{r^2}R(r) = 0 \tag{65}$$

da cui otteniamo:

$$l(l-1)cr^{l-2} + lcr^{l-2} - n^2cr^{l-2} = 0 \tag{66}$$

ovvero i valori:

$$l = \pm n \tag{67}$$

di cui accettabile solo il positivo. Abbiamo quindi una soluzione tale che:

$$R(r) \sim_{r\to 0} cr^{|n|} \tag{68}$$

Per $n \neq 0$ tali soluzioni si annullano in zero, come nel caso unidimensionale, creando un "black soliton" a due dimensioni. Come vedremo nella prossima sezione, tali soluzioni sono assimilabili a vortici in un fluido.

0.6 Analogia tra le equazioni di Eulero e di Gross-Pitaevskii

Le equazioni di Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \\ m\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}\big(\frac{1}{2}mv^2 + U + Q\big) = \eta\nabla^2\mathbf{v} + m\mathbf{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}) \end{cases}$$

descrivono l'evoluzione della densità $\rho(\boldsymbol{r},t)$ e del campo di velocità $\mathbf{v}(\boldsymbol{r},t)$ di un fluido di viscosità η soggetto al potenziale esterno $U(\boldsymbol{r})$. $Q = Q(\rho, \nabla\rho, \nabla^2\rho, \dots)$ è una funzione dello stato termodinamico del fluido. Se il fluido è un superfluido, cioè ha viscosità nulla, e se il campo di velocità è irrotazionale ($\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v} = 0$), le due equazioni assumono la forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \\ m\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}\big(\frac{1}{2}mv^2 + U + Q\big) = 0 \end{cases}$$

dette equazioni di Eulero. Per il teorema di Poincaré, essendo $\mathbf{v}$ irrotazionale, è definita una funzione polidroma scalare $\theta(\boldsymbol{r},t)$ tale che:

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\hbar}{m}\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{r},t) \tag{69}$$

e dunque, per un qualunque cammino chiuso $\mathcal{C}$, vale:

$$\oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m}\oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta = \frac{\hbar}{m}2\pi n \tag{70}$$

per qualche n intero. Mostriamo ora che l'equazione di Gross-Pitaevskii è analoga alle equazioni di Eulero, seguendo l'approccio di Madelung (1927). Inseriamo nell'equazione (17) la funzione $\psi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\rho(\boldsymbol{r},t)}e^{i\theta(\boldsymbol{r},t)}$ (forma polare di una funzione complessa, con $\rho(\boldsymbol{r},t)$ e $\theta(\boldsymbol{r},t)$ funzioni reali). Valendo:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) = i\hbar\frac{1}{2\sqrt{N}}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial t}e^{i\theta} - \hbar\frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial t}e^{i\theta} \tag{71}$$

e:

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\sqrt{N}}(\nabla^2(\sqrt{\rho}) + i\sqrt{\rho}\nabla^2\theta - \sqrt{\rho}(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2 + 2i\boldsymbol{\nabla}(\sqrt{\rho})\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta)e^{i\theta} \tag{72}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{1}{2\sqrt{N}}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial t}e^{i\theta} - \hbar\frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial t}e^{i\theta} = {} & -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{N}}(\nabla^2(\sqrt{\rho}) + i\sqrt{\rho}\nabla^2\theta - \sqrt{\rho}(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2 + 2i\boldsymbol{\nabla}(\sqrt{\rho})\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta)e^{i\theta} \\ & + U\frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\rho}e^{i\theta} + (N-1)g\frac{1}{N\sqrt{N}}\rho^{\frac{3}{2}}e^{i\theta} - \mu\frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\rho}e^{i\theta} \end{aligned} \tag{73}$$

Eliminando i fattori comuni e uguagliando parte immaginaria e reale otteniamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}(\boldsymbol{\nabla}(\sqrt{\rho})\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta + \sqrt{\rho}\nabla^2\theta) \\ -\hbar\sqrt{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla^2(\sqrt{\rho}) - \sqrt{\rho}(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2) + U\sqrt{\rho} + \frac{N-1}{N}g\rho\sqrt{\rho} - \mu\sqrt{\rho} \end{cases}$$

che riscriviamo:

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\hbar}{m}(\boldsymbol{\nabla}\rho\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta + \rho\nabla^2\theta) \\ \hbar\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla^2(\sqrt{\rho}) - (\boldsymbol{\nabla}\theta)^2\Big) - U - \frac{N-1}{N}g\rho + \mu \end{cases}$$

Posto $Q(\rho, \nabla\rho, \nabla^2\rho, \dots) = \frac{N-1}{N} g\rho - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho}}$, prendendo il gradiente della seconda equazione, si ottiene il sistema equivalente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar}{m}(\boldsymbol{\nabla}\rho \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta + \rho\nabla^2\theta) \\ \hbar\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\theta = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2 - \boldsymbol{\nabla}(Q+U) \end{cases}$$

Se si definisce la funzione $\mathbf{v}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\hbar}{m}\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{r}, t)$, tale sistema si riscrive:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \\ m\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} = -m\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} - \boldsymbol{\nabla}(Q+U) \end{cases}$$

ottenendo le equazioni di Eulero dei superfluidi. È interessante notare come la funzione $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ sia uguale a $N|\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2$ e descriva dunque effettivamente la densotà del fluido bosonico. Un sistema diluito di bosoni nello stato fondamentale si comporta quindi come un superfluido. Come visto nella sezione precedente, esistono configurazioni stabili in cui si formano vortici nel sistema e, come emerge dalla relazione (69), essi sono quantizzati. Il valore n è detto carica topologica del vortice e, più in generale, per un sistema in cui si formino più vortici di carica topologica n_j vale che:

$$\oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \frac{\hbar}{m}\oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nabla}\theta = \frac{\hbar}{m}2\pi\sum_j n_j \tag{74}$$

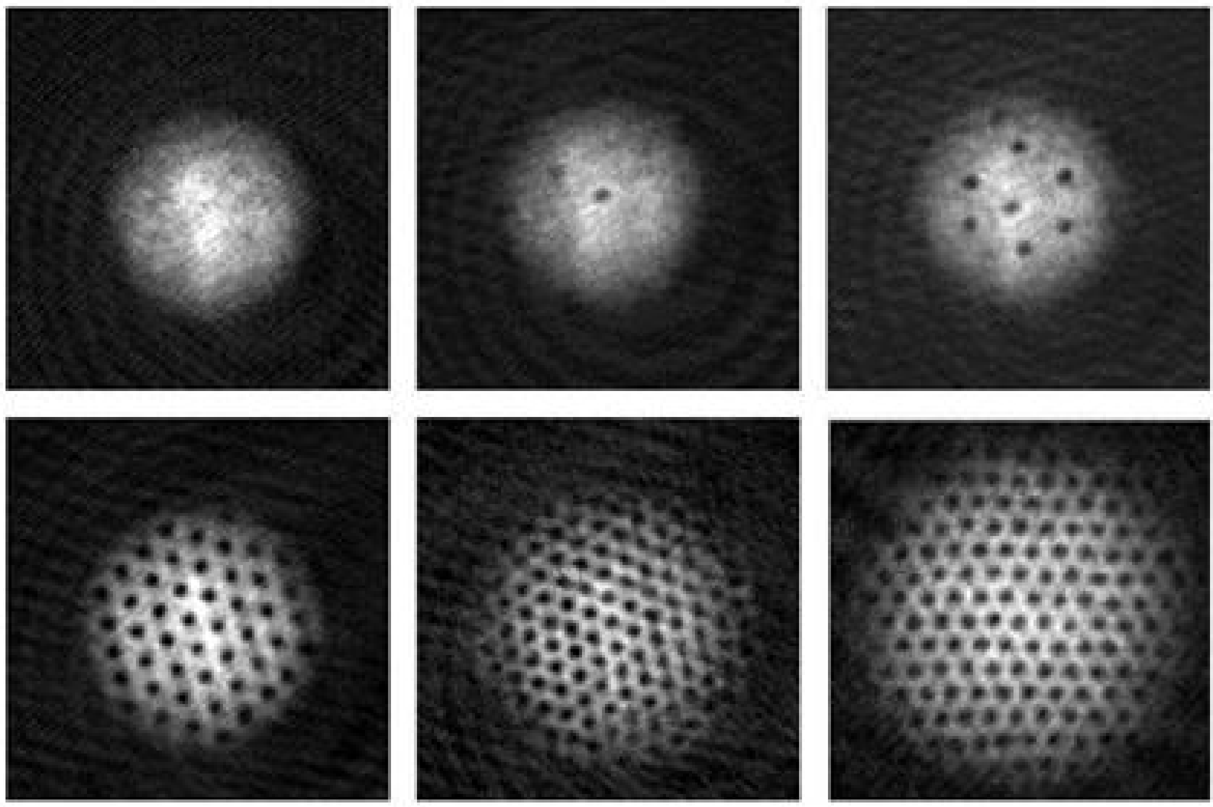

Figura 3: Esempi di configurazioni vorticose

0.7 Spettro di Bogoliubov

Analizziamo infine le piccole eccitazioni che possono propagarsi nel fluido bosonico, in assenza di potenziale esterno ($U(\boldsymbol{r}) = 0$). Assumiamo che valgano relazioni:

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \rho_{eq} + \delta\rho(\boldsymbol{r}, t) \tag{75}$$

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{r}, t) = \mathbf{0} + \delta\mathbf{v}(\boldsymbol{r}, t) \tag{76}$$

con $\delta\rho(\boldsymbol{r}, t)$ e $\delta\mathbf{v}(\boldsymbol{r}, t)$ piccole variazioni rispetto alla configurazione uniforme e stazionaria di densità ρ_{eq}. Inserendo tali espressioni nelle equazioni di Eulero e, mantenendo solo i termini al primo ordine nelle variazioni $\left(Q(\rho, \dots) \sim \frac{N-1}{N} g(\rho_{eq} + \delta\rho) - \frac{\hbar^2}{2m\rho_{eq}} \frac{\nabla^2\delta\rho}{2}\right)$, si ottengono le equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + \rho_{eq}\boldsymbol{\nabla} \cdot \delta\mathbf{v} = 0 \\ m\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{v} + \frac{N-1}{N} g\boldsymbol{\nabla}\delta\rho - \frac{\hbar^2}{4m\rho_{eq}}\boldsymbol{\nabla}(\nabla^2\delta\rho) = 0 \end{cases}$$

Derivando la prima rispetto al tempo e inserendovi la seconda si ottiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\rho + \frac{\hbar^2}{4m^2}\nabla^2(\nabla^2\delta\rho) - \frac{N-1}{N}\frac{\rho_{eq} g}{m}\nabla^2\delta\rho = 0 \tag{77}$$

che riscriviamo:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2\nabla^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2}\nabla^2\nabla^2\right]\delta\rho = 0 \tag{78}$$

dove $c_s = \sqrt{\frac{N-1}{N}\frac{\rho_{eq} g}{m}}$ è la velocità del suono nel fluido bosonico.Passando in trasformata, si vede dunque che le piccole variazioni di densità possono propagarsi come onde monocromatiche soggette alla relazione di dispersione di Bogoliubov [1]:

$$\omega(\boldsymbol{k}) = \hbar\sqrt{\frac{k^2}{2m}\left(\frac{k^2}{2m} + \frac{2mc_s^2}{\hbar^2}\right)} \tag{79}$$

Si noti che tale relazione, per $k \ll \frac{2mc_s}{\hbar}$, si riduce allo spettro dei fononi ($\omega \sim c_s k$). Per il criterio di Landau (vedi appendice), trattando il sistema bosonico per le piccole oscillazioni come un insieme di quasi-particelle definite dalla relazione di dispersione (79), si ha che una particella che attraversi il fluido bosonico è in grado di eccitare modi di vibrazione solo se la sua velocità è almeno pari a:

$$v_c = \min_p\left(\frac{E(\boldsymbol{p})}{p}\right) = \min_p\left(\sqrt{\frac{1}{2m}\left(\frac{p^2}{2m} + 2mc_s^2\right)}\right) = c_s \tag{80}$$

Il fatto che tale velocità critica non sia nulla è come si vede legato alla presenza del termine di interazione tra le particelle.

.1 Criterio di Landau

Si consideri l'urto elastico tra una particella non relativistica di massa M e velocità $\mathbf{v}_0$ e una particella a riposo di massa m. Per conservazione dell'energia vale che:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + E(\boldsymbol{p}) \tag{81}$$

dove $E(\boldsymbol{p})$ è l'energia dopo l'urto della particella colpita, legata al suo momento $\mathbf{p}$. Per conservazione del momento vale:

$$M\mathbf{v}_0 = M\mathbf{v} + \mathbf{p} \tag{82}$$

Combinando tali relazioni si trova immediatamente:

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{p} = \frac{p^2}{2M} + E(\boldsymbol{p}) \tag{83}$$

Se $M \gg 1$, si ha:

$$v_0 \cos\theta \sim \frac{E(\boldsymbol{p})}{p} \tag{84}$$

e, poiché $\cos\theta$ vale al più uno, tale relazione è ben definita solo se $v_0 \geq \frac{E(\boldsymbol{p})}{p}$. Ne segue che, definita la velocità critica:

$$v_c = \min_p \left(\frac{E(\boldsymbol{p})}{p} \right) \tag{85}$$

la particella incidente può efficacemente urtare la particella a riposo solo se $v_0 \geq v_c$.

Bibliografia

[1] N Bogoliubov. “On the theory of superfluidity”. In: *J. Phys* 11.1 (1947), p. 23.
[2] Eugene P Gross. “Structure of a quantized vortex in boson systems”. In: *Il Nuovo Cimento (1955-1965)* 20.3 (1961), pp. 454–477.
[3] Erwin Madelung. “Quantentheorie in hydrodynamischer Form”. In: *Zeitschrift für Physik* 40.3 (1927), pp. 322–326.
[4] Lev P Pitaevskii. “Vortex lines in an imperfect Bose gas”. In: *Sov. Phys. JETP* 13.2 (1961), pp. 451–454.