UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Tesina di laurea triennale

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI GIOCHI

Relatore: Prof. SANDRO ZAMPIERI
Laureanda: ILARIA PANARDO

Anno accademico 2011/2012

Indice

Introduzione

Obiettivo principale di questa tesi è fornire una panoramica il più possibile intuitiva e coinvolgente della **Teoria dei Giochi**. Darne una visione completa ed esaustiva sarebbe impensabile in così poche pagine, data la vastità e la diversità dei campi di applicazione: possiamo infatti spaziare dal settore politico a quello economico, ovviamente passando per quello matematico e probabilistico.

L'interesse per tale disciplina nacque circa a metà del XX secolo, e più precisamente si può far coincidere con la pubblicazione, nel 1944, del testo principe, *Theory of Games and Economic Behavior* di John von Neumann e Oskar Morgenstern; indicativo il fatto che il primo era un matematico, il secondo un economista, a riprova della vasta applicabilità della Teoria nei campi più disparati.

Le informazioni contenute in questo elaborato sono state tratte dal testo *Introduction to the Theory of Games* di J. McKinsey. La pubblicazione risale a sessant'anni or sono, ma ciò non toglie alcunché all'autorevolezza dei contenuti. A dispetto dell'età, tale testo infatti presenta in modo chiaro e conciso le basi di questo settore di studi, adducendo inoltre esempi pregnanti atti a familiarizzare non solo con i fondamenti teorici, quali teoremi e relative dimostrazioni, ma anche con gli aspetti più pratici ed applicativi, per esempio nei settori militare e socio-economico; non dimentichiamo peraltro che la pubblicazione è avvenuta nel cuore degli anni della Guerra Fredda.

I capitoli che seguono contengono innanzitutto le definizioni fondamentali, ovvero le parole chiave per entrare nel mondo della Teoria dei Giochi; vengono inoltre addotti esempi ed approfondimenti di carattere pratico-applicativo, e la rappresentazione grafica di problemi di massimizzazione e di giochi in forma estesa.

CAPITOLO 1

CASO VS STRATEGIA

1.1 Keywords

Cominciamo ad illustrare la Teoria dei Giochi gettando le fondamenta per la comprensione delle tematiche principali: tali basi sono naturalmente costituite dalle parole chiave che permeano l'intero sviluppo della trattazione.
Si è scelto di indicare sia il vocabolo in lingua inglese che la sua traduzione in italiano, per far apprezzare meglio al lettore le diverse sfumature di significato che le *keywords* possono avere.

GAME AND PLAY

Non potevano che essere le chiavi di volta dell'intera teoria: è necessario dunque spiegare approfonditamente il significato che a tali vocaboli è assegnato.
Con *game* (*gioco*) si intende l'insieme delle convenzioni stabilite per tutti i giocatori al fine di partecipare ad una competizione.
Al contrario, con *play* (che purtroppo ancora si traduce con *gioco*) si indica una particolare realizzazione di regole e mosse: il significato italiano del termine che più si avvicina all'originale è dunque *partita*.

MOVE AND CHOICE

Con *move* (letteralmente *mossa*), si intende il momento della partita in cui il giocatore a cui si fa riferimento ha diverse scelte per proseguire il suo gioco.
Diversamente, si utilizza il vocabolo *choice* per intendere l'alternativa scelta dal giocatore in oggetto.
Poniamo un esempio per chiarire: l'istante **t** di una partita di scacchi in cui il giocatore **A** può scegliere se muovere il pedone o l'alfiere è una *move*, mentre la scelta concreta di muovere l'uno o l'altro è una *choice*.

STRATEGY

Ovviamente questo è il termine più importante per lo sviluppo della Teoria dei Giochi: con *strategy* (*strategia*) si vuol indicare una realizzazione di mosse di due o più avversari, i quali utilizzano a loro vantaggio furbizia ed attenzione per vincere.
Esempi di tali giochi sono il *poker*, il *bridge* e gli *scacchi*, ma ciò non deve esser visto come una limitazione: infatti il termine *strategia* ha carattere di generalità, in quanto applicabile a qualunque situazione in cui vi sia un conflitto di interessi tra due parti contrapposte, e tale scontro possa essere controllato da entrambe.
Per dare quindi una definizione chiara ed immediata, indichiamo con *strategia* un insieme completo di direttive, che suggeriscono esattamente al giocatore come agire in ogni circostanza, ed in base alle informazioni che possiede sulla partita e sull'avversario.

1.2 Ipotesi preliminare

Per definire meglio il campo d'azione in cui ci muoveremo per la nostra analisi, dobbiamo necessariamente porre un'ipotesi fondamentale.
Innanzitutto è saggio differenziare tra *giochi di strategia*, secondo la definizione data in precedenza, e *giochi di pura fortuna*, nei quali non contano esperienza né capacità del giocatore, ma solo la casualità degli eventi. Un esempio calzante ne è la roulette, od il pescare una carta da un mazzo: in tali casi è più appropriata un'analisi probabilistica della situazione e degli ulteriori sviluppi della partita.
Restringeremo quindi la nostra trattazione a giochi nei quali non è lecito considerare come parte attiva la fortuna; la quale non è influenzabile dalle scelte attuate di volta in volta dal giocatore.

1.3 Categorizzazione

Il numero di tipologie di *giochi di strategia* è enorme, ed è quindi conveniente suddividerli in categorie ben distinte, in base alle loro specifiche caratteristiche.

In primo luogo possiamo classificare i giochi in base al *numero di giocatori*: ciò non vuol dire che ogni persona fisicamente presente nella partita corrisponda ad un giocatore; si intende infatti con *player* insiemi esclusivi di uno o più individui, i quali appartengono allo stesso gruppo se condividono i medesimi interessi.

In secondo luogo possiamo suddividere i giochi a seconda del *punteggio* assegnato a ciascun giocatore al termine della partita e del profitto, monetario o meno, che esso ne può ricavare.
In alcuni casi, quali il *tic tac toe*, la *dama* e gli *scacchi*, non esiste un calcolo diretto del guadagno, e viene unicamente proclamato il vincitore. Nello specifico, analizziamo i giochi con *pagamenti* in termini monetari fra i vari giocatori (ciò non costituisce una limitazione alla generalità dell'analisi, ma solo una semplificazione: la moneta può essere infatti facilmente sostituita da altri beni di scambio).

In particolare supponiamo di considerare un gioco a **n** giocatori P_1, P_2,....., P_n e sia p_i con i = 1, 2, ..., n il contributo dato al player P_i al termine della partita dagli altri giocatori.

Sia:

$p_i > 0$ se il giocatore i-esimo guadagna una certa somma a scapito del giocatore P_j
$p_i < 0$ se il giocatore i-esimo deve pagare una certa somma al giocatore P_j

Definiamo quindi ***giochi a somma zero*** quelli per cui:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

ovvero giochi durante i quali non vengono né creati né distrutti il possibile guadagno di un giocatore e la posta messa in palio. Tale modello si discosta parzialmente dal settore prettamente economico, nel quale è possibile avere flussi di denaro provenienti dall'esterno.

In terzo luogo è possibile classificare i giochi in base al *numero di mosse* che un giocatore ha a disposizione in una partita.
Tale valore può essere finito (ad esempio il *tic tac toe* ha un numero massimo di mosse pari a nove, 5 relative a colui che comincia la partita e 4 concesse all'avversario), ed in questo caso si parla di *giochi finiti*, oppure il numero di mosse è infinito, da cui deriva ovviamente la definizione di *giochi infiniti* (una partita di scacchi può essere più o meno duratura, a seconda dell'abilità dei giocatori).

Infine, i giochi possono esser suddivisi a seconda della quantità di *informazioni* che un giocatore possiede, sulla base delle scelte precedenti dei partecipanti al gioco: gli scacchi sono anche in questo caso un buon esempio, in quanto è chiaro che ogni giocatore conosce perfettamente le mosse passate dell'avversario, e sviluppo e risultato della partita sarebbero completamente differenti se ciò non accadesse.

1.4 Approfondimento: Robinson Crusoe

La vicenda di Robinson Crusoe è un ottimo esempio per la teoria fin qui esposta: esso rappresenta una sorta di caso-base, poiché altro non è che la narrazione in chiave avventurosa di un problema di *massimizzazione*.
La vicenda ruota attorno alla figura dell'uomo, il quale deve cercare di ottenere il più possibile dall'ambiente che lo circonda, ben ricordando che la Natura non è maligna in stile prettamente leopardiano, ma solo un insieme di condizioni che non mutano consapevolmente a sfavore dell'individuo.
Esiste quindi l'opportunità di generalizzare questa situazione, ma è necessario fare una precisazione: è possibile estendere il caso di due individui partecipanti ad un gioco (che può essere interpretato in senso lato come la vita stessa) ad una partita svolta da **n** giocatori, con **n** numero arbitrario appartenente all'insieme $\mathbb{N}$, ma tale estensione non può essere fatta a partire dal caso di un singolo uomo che si trova ad agire nel contesto naturale (immagine rappresentata dal personaggio di Robinson Crusoe).
Questo accade in quanto vi sono dinamiche differenti che spingono l'individuo ad interagire con altri, quale ad esempio il desiderare il medesimo bene, che portano al conflitto e modificano i comportamenti e le azioni.
In sintesi è profondamente differente il problema di massimizzazione di ciò che si possiede in relazione ad altri individui appartenenti al contesto in cui si opera, ovvero lo scheletro di un gioco di strategia, rispetto ad un problema di massimizzazione vero e proprio, senza ingerenze esterne.
Si noti dunque che, per assurdo, seguendo un approccio strettamente economico, la società composta da un unico individuo contrapposto solamente alla Natura è approssimabile da una società composta da **n** individui solo se **n** è sufficientemente grande, a dispetto di un **n** piccolo maggiore di uno. Ciò accade perché, al crescere di **n**, la probabilità che la massa di individui si comporti razionalmente contro il singolo cala, e diviene quindi più semplice formulare ipotesi sul comportamento futuro dei "giocatori" basandosi sulla media delle azioni passate degli avversari.

CAPITOLO 2

GIOCHI RETTANGOLARI

2.1 Definizioni

Dopo aver dato nel capitolo precedente una panoramica del linguaggio e dei concetti chiave della Teoria dei Giochi, entriamo ora nel dettaglio, al fine di determinare *strategie di gioco* e *soluzioni ottime*.
Sottolineiamo innanzitutto che un gioco con un solo partecipante e non a somma zero altro non è che un problema di massimizzazione del guadagno, di cui non ci occuperemo in questo elaborato, in quanto più strettamente legato al mondo economico.
Focalizziamo quindi la nostra attenzione sui *giochi a somma zero* e con *due giocatori*, nei quali ciascun individuo ha una ed una sola mossa per turno.
Il primo giocatore, che chiameremo P_1, sceglie un numero tra **m** interi positivi; il secondo giocatore, P_2, ignaro della scelta di P_1, sceglie anch'egli un numero tra **n** interi positivi. A questo punto i due numeri selezionati dai giocatori vengono confrontati e, in base alle regole stabilite, vi è un pagamento dall'uno all'altro.
Tale gioco viene definito *rettangolare*; ciò che più interessa, a questo punto, è la definizione delle regole che stabiliscono l'ammontare della vincita.

2.2 Payoff matrix

L'elemento caratterizzante di un gioco rettangolare è chiamato *payoff matrix* (letteralmente *matrice del saldo o pagamento*): essa contiene tutte le informazioni necessarie per determinare il guadagno del vincitore che, senza perdita di generalità, supponiamo essere il giocatore P_1.
Tale matrice viene rappresentata nel modo seguente:

1		2				n
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	.	.	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	.	.	.	.
3	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	
m	a_{m1}	a_{m2}	.	.	.	a_{mn}

possibili azioni per P_2

ammontare del pagamento di P_2 a P_1

possibili azioni per P_1

Aggiungiamo inoltre che:

se $a_{ij} > 0$ allora P_2 paga a P_1 una somma pari ad a_{ij}
se $a_{ij} < 0$ allora P_1 paga a P_2 una somma pari ad a_{ij}

2.3 Saddle point

Definita la *payoff matrix* di un gioco rettangolare, si tratta ora di stabilire quale sia la *strategia di gioco* migliore per i due partecipanti.
Data la matrice **A**, di dimensioni **m** x **n** (corrispondenti alle dimensioni degli insiemi di scelta), relativa ad un gioco rettangolare, sappiamo che P_1,scelto un certo $i \in [1 \ldots m]$, dovrà ricevere almeno una cifra pari al minimo degli elementi della riga i-esima, ovvero:

$$\min_j (a_{ij})$$

E' chiaro che, per avere il massimo guadagno, P_1 dovrà scegliere a_{ij}, elemento della matrice **A**, in modo che sia il più grande possibile.
Perciò $\exists$ una scelta per P_1 $|$ assicuri che il suddetto giocatore riceva almeno

$$\max_i \min_j (a_{ij})$$

In modo analogo, ricordando che i pagamenti a P_1 sono rappresentati da numeri minori di zero su **A**, sappiamo che $\exists$ una scelta per P_2 $|$ assicuri che riceva almeno

$$\max_j \min_i (-a_{ij})$$

Sapendo che:

$$\max_j \min_i (-a_{ij}) = -\min_j \max_i (a_{ij})$$

si ha che P_2 può dare:

$$\min_j \max_i (a_{ij})$$

Nel momento in cui:

$$\max_i \min_j (a_{ij}) = -\min_j \max_i (a_{ij}) = v$$

P_1 e P_2 giocheranno per ottenere tale valore v, detto appunto *valore di gioco*, che rappresenta la strategia migliore per entrambi i partecipanti.

Diamo allora la seguente definizione:

Data una funzione f a valori reali, tale che f (x,y) è definita se i appartiene ad A = [1.... n] e j appartiene a B = [1.....m];
il punto $\| \; i_0 \quad j_0 \; \|$ *è chiamato saddle point di f se soddisfa:*

$$f\,(i_0\,,\; j_0\,) \le f\,(i_0\,,\; j\,) \qquad \forall\; i \in A$$

$$f\,(i_0\,,\; j_0\,) \le f\,(i_0\,,\; j\,) \qquad \forall\; j \in B$$

Se $\| \; i_0 \quad j_0 \; \|$ *è un saddle point di f, allora:*

$$f\,(i_0\,,\, j_0\,) = \max_{i \in A} \; \min_{j \in B} \; f\,(i,\, j) = \min_{j \in B} \; \max_{i \in A} \; f\,(i,\, j)$$

In breve a_{ij}, ovvero l'elemento corrispondente sulla matrice **H**, è al tempo stesso il minimo elemento della sua riga ed il massimo della sua colonna.
Chiamiamo perciò i_0 e j_0 *scelte ottime* per P_1 e P_2, e a_{i0j0} il *valor*e del gioco per P_1.

Adduciamo ora alcuni esempi per fissare i concetti fin qui esposti.

Es.

payoff matrix:
$$\left\| \begin{matrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{matrix} \right\|$$

saddle point: $\| \; 2 \qquad 3 \; \|$

valore di gioco: 4

Ciò significa che:

- *la strategia 2 è scelta ottima per P_1;*
- *la strategia 3 è scelta ottima per P_2;*
- *P_1 è sicuro di ricevere almeno 4;*
- *P_2 è sicuro di non dare più di 4 a P_1.*

Es.

payoff matrix:
$$\left\| \begin{matrix} 21 & 11 & 31 \\ 32 & 0 & 4 \end{matrix} \right\|$$

saddle point: $\| \; 1 \qquad 2 \; \|$

valore di gioco: 11

Es.

payoff matrix: $\begin{Vmatrix} 12 & 13 & 12 \\ 10 & 31 & 9 \end{Vmatrix}$

saddle points: $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \end{Vmatrix}$ $\begin{Vmatrix} 1 & 3 \end{Vmatrix}$

valore di gioco: 12

Si noti che i saddle points possono essere più d'uno, ed ognuno di essi rappresenta una strategia ottima per il giocatore P_i.

Es. Morra a due dita (*Two-finger Morra*)

Si dice sia un gioco conosciuto in Italia sin dall'antichità; vi sono due giocatori, ognuno dei quali mostra una o due dita, e contemporaneamente cerca di indovinare il numero di dita che il suo avversario mostrerà. Se solo un giocatore indovina la scelta dell'altro, vince una somma pari alla somma delle dita mostrate da entrambi; in caso contrario, si ha un pareggio.

payoff matrix:

	1 1	1 2	2 1	2 2
1 1	0	2	-3	0
1 2	-2	0	0	3
2 1	3	0	0	-4
2 2	0	-3	4	0

CAPITOLO 3

SCELTA OTTIMA

3.1 Definizione del problema

Risulta chiaro dalla trattazione fin qui esposta che l'obiettivo principale che si pongono i due giocatori P_1 e P_2 è la determinazione della *scelta ottima*, rappresentata dal *saddle point* della *payoff matrix* di un gioco rettangolare: il problema sorge nel momento in cui la matrice in questione non possiede un *saddle point*.
Appare perciò necessario dare una breve panoramica matematica di queste situazioni, al fine di dare una risposta precisa riguardo la strategia migliore per il giocatore P_i, sia esso P_1 o P_2.
Iniziamo da una *payoff matrix* di dimensioni **2** x **2** (per estendere successivamente i risultati ottenuti ad una matrice generica **m** x **n**).
Supponiamo che P_1 possa scegliere tra le alternative 1 e 2, e decida per la strategia 1 con probabilità **x** e 2 con probabilità **1–x** ; allo stesso modo P_2, scegliendo ancora tra le strategie 1 e 2, propende per 1 con probabilità **y** e per 2 con probabilità **1–y**.
Rappresentando la situazione con una *payoff matrix*, che rende più immediata la comprensione:

$$\begin{array}{c} \\ x \\ 1-x \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & 1-y \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right\| \end{array}$$

Ne consegue che:

$$E(x,y) = a_{11}xy + a_{12}x(1-y) + a_{21}y(1-x) + a_{22}(1-x)(1-y)$$

Diamo quindi un preciso significato matematico alla nozione di *scelta ottima*: per far questo determiniamo massimo e minimo della funzione E(x,y).

Sapendo che x* è *frequenza ottima* per P_1 (ossia la probabilità che massimizza il suo guadagno) e y* è *frequenza ottima* per P_2 (ossia la probabilità che minimizza la sua perdita) allora:

$$\forall\ x,y \in [0,1] \qquad E(x,y^*) \le E(x^*,y^*) \le E(x^*,y)$$

Tale concetto si può estendere a qualunque matrice **m** x **n**, precisando alcune nuove caratteristiche della *strategia ottima*.

Definiamo con *mixed strategy* per P_1 una **m**-upla ordinata **X** = $|x_1 \; . \; . \; . \; x_m|$ non negativa tale che:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

(gli x_i corrispondono alla frequenza con cui P_1 sceglie la strategia i-esima)
Solitamente si nominano i numeri da 1 a **m** *strategie pure*.

Sappiamo dunque che:

$$E(X,Y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j$$
$$E(X,Y^*) \leq E(X^*,Y^*) \leq E(X^*,Y)$$

E(X*,Y*) è chiamato *valore di gioco* e |X* Y*| *soluzione di gioco* o *saddle point strategico*.

<u>Es.</u>

payoff matrix: $\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix}$

non è possibile individuare per ispezione il saddle point;

$$E(x,y) = 1xy + 3x(1-y) + 4y(1-x) + 2(1-x)(1-y) = -4(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{4}) + \frac{5}{2}$$

se P_1 segue la strategia 1 con probabilità 1/2, E(x,y) varrà almeno 5/2;
allo stesso modo se P_2 segue la strategia 1 con probabilità 1/4, E(x,y) vale ancora 5/2; ne consegue che:

$$E(x,\frac{1}{4}) \leq E(\frac{1}{2},\frac{1}{4}) \leq E(\frac{1}{2},y)$$

il saddle point della funzione E risulta: $\begin{Vmatrix} 1/2 & 1/4 \end{Vmatrix}$

ed il valore di gioco è: 5/2

3.2 Teorema fondamentale

Diamo ora l'enunciato del teorema fondamentale (chiamato anche *Min max theorem*) per la determinazione del valore di un gioco rettangolare.

Per ogni gioco rettangolare, le quantità

$$\max_{x=1\ldots m} \min_{y=1\ldots n} E(X,Y)$$
$$\min_{y=1..n} \max_{x=1..m} E(X,Y)$$

esistono e sono uguali.

Ciò implica che ogni gioco rettangolare ha un *valore* e ogni giocatore di un gioco rettangolare può trovare sempre una *strategia ottima*.

Il precedente teorema e la relativa deduzione permettono di calcolare sempre il *valore* di un gioco rettangolare, ma tale procedimento è lungo e laborioso, se non vengono fornite ulteriori ipotesi.

Adduciamo qui un esempio di tale procedura:

Es. *Data la payoff matrix, ricavare il valore di gioco e le strategie ottime per i due giocatori.*

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$$

Le condizioni sono:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$
$$0 \le x_i, y_i \le 1$$

$$+1x_1 - 1x_2 - 1x_3 \ge v$$
$$-1x_1 - 1x_2 + 2x_3 \ge v$$
$$-1x_1 + 3x_2 - 1x_3 \ge v$$
$$+1y_1 - 1y_2 - 1y_3 \le v$$
$$-1y_1 - 1y_2 + 3y_3 \le v$$
$$-1y_1 + 2y_2 - 1y_3 \le v$$

Risolvendo le disequazioni si ottiene:

$$x_1 = \frac{6}{13} \qquad x_2 = \frac{3}{13} \qquad x_3 = \frac{4}{13}$$

$$y_1 = \frac{6}{13} \qquad y_2 = \frac{4}{13} \qquad y_3 = \frac{3}{13}$$

$$v = -\frac{1}{13}$$

3.3 Relazioni di dominanza

E' doveroso, a questo punto della trattazione, dare alcune definizioni matematiche, per una migliore comprensione degli argomenti successivi.

Se $\boldsymbol{a} = |a_1 \ldots a_n|$ *e* $\boldsymbol{b} = |b_1 \ldots b_n|$ *sono vettori (o, senza perdita di generalità, righe o colonne di una matrice) e* $a_i \geq b_i \;\; \forall\, i=1 \ldots \boldsymbol{n}$ *, diciamo che* ***a*** *domina* ***b****.*

Tale relazione è transitiva (ovvero se **a** domina **b** e **b** domina **c**, allora **a** domina **c**) e riflessiva (**a** domina se stesso).

Introduciamo inoltre il concetto di *estensione di posto i-esimo* per una *mixed strategy:*

Se $\boldsymbol{x} = |x_1 \ldots x_n| \in \boldsymbol{S}_n$ *e* $1 \leq i \leq \boldsymbol{n}+1$*, allora come i-place extension di* **x** *intendiamo il vettore* $| x_1 \ldots x_{i-1}\; 0\; x_i \ldots x_n|$.

Date le premesse, è possibile ora enunciare i seguenti teoremi:

Sia Γ gioco rettangolare la cui payoff matrix è A; supponiamo che, per alcuni i, la i-esima riga di A sia dominata da alcune combinazioni lineari delle altre righe; sia A' la matrice ottenuta da A omettendo la i-esima riga, e sia Γ' il gioco rettangolare corrispondente. Allora il valore di gioco di Γ' è lo stesso di Γ.

Sia Γ gioco rettangolare la cui payoff matrix è A; supponiamo che, per alcune j, la j-esima colonna di A domini alcune combinazioni lineari delle altre colonne; sia A' la matrice ottenuta da A omettendo la j-esima colonna, e sia Γ' il gioco rettangolare corrispondente. Allora il valore di gioco di Γ' è lo stesso di Γ.

Dai precedenti teoremi si noti che se viene eliminata dalla matrice una riga che è strettamente dominata da un'altra (od una colonna che ne domina strettamente una diversa), otteniamo una matrice che conduce allo stesso insieme di *soluzioni* di gioco.
Ciò non vale se la relazione non è di dominanza stretta, poiché vi è una perdita di soluzioni.

In sintesi:

- *è possibile ridurre la matrice A ispezionandola ed eliminando righe e colonne che di sicuro non appartengono alle strategie ottime per P_1 e P_2 (ossia righe strettamente dominate da un'altra riga o colonne che dominano strettamente un'altra colonna);*
- *è possibile ridurre la matrice A ispezionandola ed eliminando righe (e colonne) che sono dominate strettamente (o dominano strettamente) combinazioni lineari delle altre righe (o colonne).*

Es.

payoff matrix:
$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{Vmatrix}$$

Notiamo che la prima riga è dominata dalla terza; eliminandola:

$$\begin{Vmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{Vmatrix}$$

Osserviamo ora che la prima colonna domina la terza; eliminando la prima:

$$\begin{Vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{Vmatrix}$$

Nella nuova matrice, nessuna riga è dominata da un'altra, e nessuna colonna ne domina un'altra; notiamo però che esiste una combinazione lineare per cui la prima colonna domina la seconda e la terza:

$$4 \geq \frac{1}{2} * 2 + \frac{1}{2} * 4$$

$$2 \geq \frac{1}{2} * 4 + \frac{1}{2} * 0$$

$$4 \geq \frac{1}{2} * 0 + \frac{1}{2} * 8$$

Perciò possiamo omettere la prima colonna, ottenendo:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{Vmatrix}$$

Osserviamo ora che la prima riga è dominata da una combinazione lineare delle altre due righe:

$$2 = \frac{1}{2} * 4 + \frac{1}{2} * 0$$
$$4 = \frac{1}{2} * 0 + \frac{1}{2} * 8$$

Perciò la nostra matrice si riduce a:

$$\left\Vert \begin{matrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{matrix} \right\Vert$$

valore di gioco: 8/3

strategia ottima per P_1 e P_2: $\Vert \; 0 \quad 0 \quad 2/3 \quad 1/3 \; \Vert$

3.4 Metodo grafico (cenni)

Per determinare il *valore* di un gioco, non sempre è necessario ricorrere alla determinazione del *saddle point* per ispezione, oppure ridurre la matrice tramite relazioni di stretta dominanza per ricavare la *scelta ottima* di strategia relativa al giocatore P_i.
Esiste infatti un metodo grafico per tale scopo, che però è parzialmente limitato, in quanto facilmente applicabile solo per *payoff matrix* di dimensioni 2 x n o m x 2.

Per illustrarlo adduciamo un breve esempio:

<u>Es.</u>

Payoff matrix del gioco

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \left\Vert \begin{matrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{matrix} \right\Vert \end{array}$$

Se P_1 usa la mixed strategy

$$\Vert \; 1 \quad x \quad - x \; \Vert$$

e se P_2 usa la pure strategy 1, il guadagno di P_1 atteso sarà:

$$2x + 7 (1 - x) = 7 - 5x$$

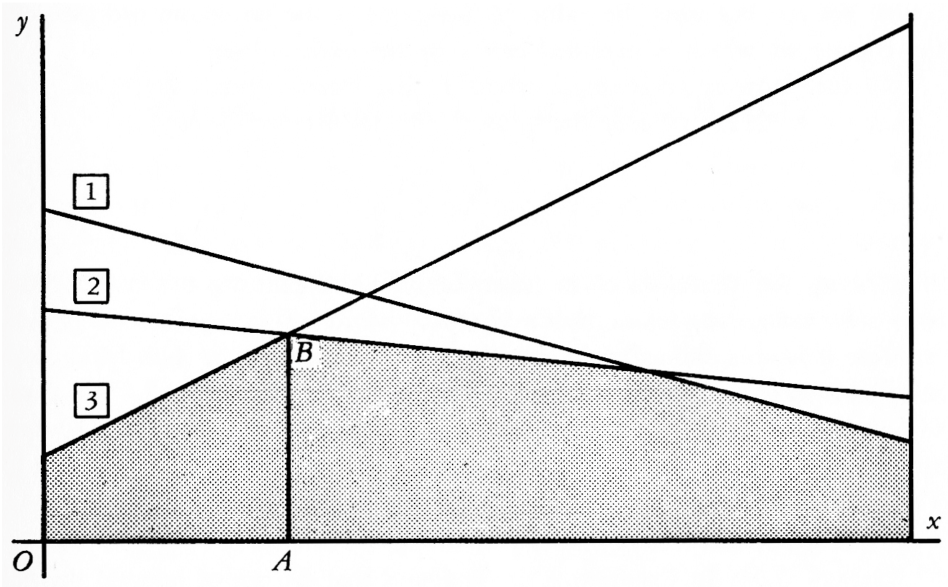
Se P_2 usa la strategia 2, otteniamo:

$$3x + 5 (1 - x) = 5 - 2x$$

Infine, se P_2 usa la terza strategia:

$$11x + 2 (1 - x) = 2 + 9x$$

Plottando le tre rette ottenute, si ha:



Perciò per P_1 scegliere la strategia migliore significa scegliere **x** *in modo da massimizzare sulle ordinate il minimo valore d'ascissa ottenuto intersecando le tre rette.*
Nel nostro caso, la **x** *ottima sarà il segmento OA ed il valore di gioco il segmento AB.*

3.5 Metodo di approssimazione del valore di gioco (cenni)

Esiste infine, oltre ai metodi analitici, matematici e grafici fin qui esposti, un metodo di approssimazione per la risoluzione di un gioco rettangolare: esso ci permette di trovarne il *valore* con ogni grado di accuratezza, ed approssimare le *strategie ottime*.
Supponiamo a tal fine che due individui giochino una lunga sequenza di partite di un determinato gioco, e nessuno ne conosca una *strategia ottima*: stabiliamo di conseguenza che ognuno di loro decida di agire come se fosse contrapposto ad una Natura non razionale, ovvero le azioni siano da ricondurre unicamente ad un problema di massimizzazione.
Ad ogni punto della sequenza di partite è quindi possibile calcolare un limite superiore ed inferiore al *valore di gioco*, come approssimazione di *strategia ottima* per ogni player, che verrà aggiornata dopo ogni mossa.
Lo sviluppo della sequenza di mosse si basa dunque sulla conoscenza storica di tutte le azioni passate dell'avversario.

CAPITOLO 4

GIOCHI IN FORMA ESTENSIVA

4.1 Il punto della situazione

Ricapitoliamo brevemente i concetti esposti nei capitoli precedenti, per riordinare le informazioni raccolte e le strategie illustrate. Dato un *gioco rettangolare* a 2 *players*, rappresentabile da una *payoff matrix*, per determinare le strategie ottime per P_1 e P_2 si possono seguire diverse strade:

- ♠ individuare per ispezione sulla matrice il *saddle point*, che rappresenta il *valore di gioco*;

- ♠ se non fosse immediato individuare sulla *payoff matrix* il *saddle point*, è comunque possibile ricavarlo utilizzando la funzione **E(x,y)** e sfruttando il *MinMax Theorem*;

- ♠ per ridurre la matrice e semplificare la ricerca della *strategia ottima* e del *valore di gioco*, si possono sfruttare le relazioni di *dominanza* tra righe e colonne;

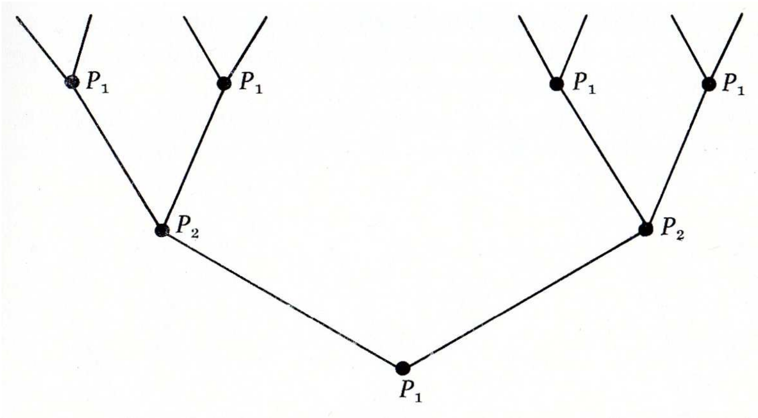
- ♠ per matrici di dimensioni **m** x 2 o 2 x **n** si utilizza in alternativa un metodo grafico, che si avvale della rappresentazione sul piano cartesiano delle rette di probabilità;

- ♠ infine, è possibile utilizzare anche un metodo di approssimazione, che sfrutta le leggi della probabilità e si basa sulle azioni passate di entrambi gli avversari.

E se tutto ciò non fosse sufficiente?

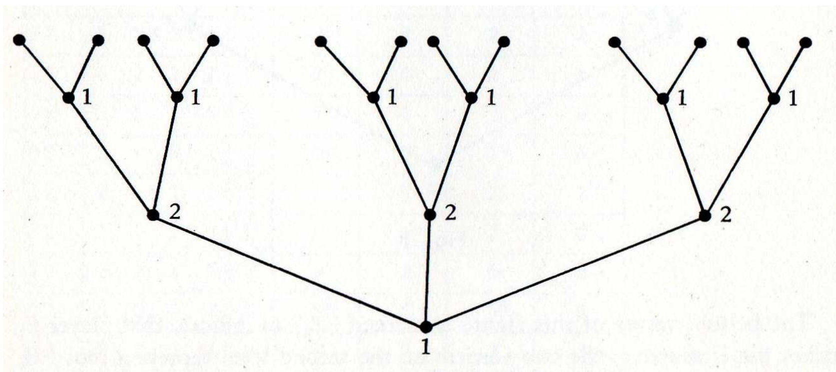
Non sempre, infatti, si ha a disposizione la *payoff matrix* di un *gioco rettangolare*: è necessario dunque partire da un gioco arbitrario (caratterizzato da più di due giocatori e da più di una mossa consentita per turno), per arrivare ad un classico gioco rettangolare, di cui conosciamo meccanismi e strategie ottime. Questo procedimento è chiamato *normalizzazione*.
La rappresentazione grafica di un gioco in forma normale è chiamato *albero*. Esso è un insieme di un numero finito di segmenti, detti *archi*, in cui ogni vertice è collegato ad uno ed un solo vertice di livello inferiore. Dal momento che i vertici rappresentano le varie mosse, indichiamo accanto a ciascuno di essi il giocatore corrispondente.
Una partita completa è quindi rappresentabile da un *path* (*cammino*) che parte dalla *root* (*radice*), ovvero la prima mossa, ed arriva ad una ed una sola *leaf* (*foglia*), che indica l'ultima *choice*.

Es.



8 possibili realizzazioni di gioco (partite)

Es.



12 possibili realizzazioni di gioco (partite)
i giocatori P_i sono indicati solamente dal numero i

4.2 Information set

Supponiamo ora di considerare un gioco in cui non si ha *perfetta informazione*, ossia i giocatori P_1 e P_2 non conoscono le mosse passate dell'avversario e "dimenticano" le proprie (è possibile realizzare nella pratica una situazione di questo tipo immaginando che P_i sia una squadra composta da due giocatori che non si vedono e non comunicano).
Per rappresentare un gioco che si sviluppa in questo modo, si utilizza un grafo ad *albero*, nel quale vengono raggruppate le mosse che il giocatore P_i non sa distinguere. In altre parole, il giocatore non conosce la posizione esatta sull'albero in cui si trova, ma solo il livello a cui è giunto.
Così facendo si partiziona l'intero insieme di vertici, escluse le foglie (ove non è più possibile effettuare delle scelte), in insiemi disgiunti che rappresentano le possibili posizioni del giocatore P_i al tempo **t** di una partita. Tali insiemi si definiscono *information sets* (insiemi di informazione).

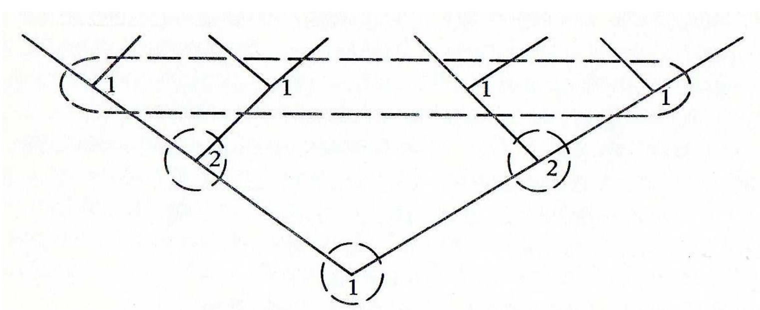
Le condizioni basilari per cui esista un *information set* sono tre:

- ♠ i vertici in esso contenuti indicano le mosse di uno stesso giocatore;
- ♠ ogni vertice possiede lo stesso numero di alternative (archi uscenti);
- ♠ non esiste una *partita* (ovvero una linea spezzata dalla radice ad una foglia) che intersechi lo *stesso information* set più di una volta.

Le strategie utilizzate da ciascun giocatore si indicano con **n**-uple ordinate di numeri
| m_1 m_2 ..... m_n | in cui m_1 indica la prima mossa di P_i, m_2 la seconda e così via.

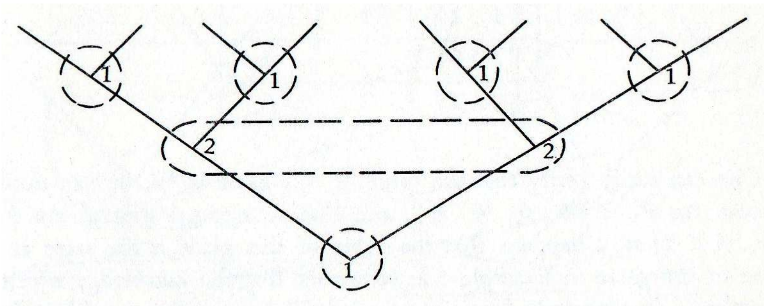
Si noti che il diminuire delle informazioni disponibili al giocatore P_i rende le strategie possibili meno numerose, e di conseguenza cala la dimensione della matrice che rappresenta il gioco. Questo non necessariamente indica un parallelo incremento della difficoltà di gioco.

Es.



Nella mossa I, il giocatore P_1 sceglie un numero ***x*** *nell'insieme [1,2]; alla mossa II P_2, essendo stato informato della scelta di P_1 al turno precedente, a sua volta sceglie un numero* ***y*** *$\in$ [1,2]; alla mossa III P_1, non conoscendo* ***y*** *ed avendo dimenticato il valore di* ***x*** *scelto alla prima mossa, sceglie un numero* ***z*** *nell'insieme [1,2]. Dopo esser stati scelti i numeri* ***x, y*** *e* ***z*** *, P_2 paga a P_1 una somma* ***M (x,y,z)*** *definita sulle foglie dell'albero.*

Es.



*Nella mossa I, il giocatore P_1 sceglie un numero **x** nell'insieme [1,2]; alla mossa II P_2, senza esser stato informato della scelta di P_1 al turno precedente, a sua volta sceglie un numero **y** $\in$ [1,2]; alla mossa III P_1, conoscendo sia **y** sia **x**, sceglie un numero **z** nell'insieme [1,2]. Dopo esser stati scelti i numeri **x, y** e **z** , P_2 paga a P_1 una somma **M (x,y,z)** definita sulle foglie dell'albero.*

4.3 Definizioni formali

Nonostante la rappresentazione di un gioco tramite grafo sia indubbiamente immediata ed utile, è necessario fornire anche la definizione formale di gioco in forma estensiva.

Un gioco a n players è rappresentabile tramite un sistema caratterizzato da:

- ♠ *Un albero **T**;*
- ♠ ***n** funzioni a valori reali F_1, F_2, ..., F_n che sono definite ad ogni foglia dell'albero **T**: cioè, se **t** è una di queste leaves, allora $F_i(t)$ è l'ammontare della somma che deve ricevere il giocatore P_i se il gioco termina esattamente a **t**;*
- ♠ *Un numero appartenente a [0....**n**] assegnato a ciascun arco, che indica la strategia scelta dal giocatore P_i; se compare il valore **0**, ciò significa che la scelta è casuale;*
- ♠ *una partizione dell'insieme dei nodi interni in insiemi disgiunti chiamati Information Sets (insiemi di informazione), che soddisfano le seguenti assunzioni:*
    - ♣ *tutti i vertici associati da un information set sono possibili mosse di uno stesso giocatore;*
    - ♣ *tutti i vertici interni appartenenti ad un dato information set hanno lo stesso numero di alternative, solitamente numerate da destra a sinistra;*
    - ♣ *Se **S** è una possibile realizzazione del gioco (ovvero una partita), rappresentabile da una linea spezzata che parte dalla radice ed arriva ad una foglia, ed **A** è un insieme di informazione, allora esiste al massimo un vertice interno che appartiene contemporaneamente a **S** e **A**.*

Da qui si può dunque dare una nuova e più completa definizione di *strategia*:

> *Con strategia per il giocatore P_i, per $i \in [1....\mathbf{n}]$, intendiamo una funzione che è definita per ogni insieme di informazione corrispondente a P_i ed il cui valore per ogni information set è una delle alternative concesse a P_i: perciò una strategia indica al giocatore cosa fare in ogni istante e per ogni possibile stato della sua conoscenza del gioco.*

Aggiungiamo inoltre un nuovo tassello al nostro mosaico di keywords:

> *Si definisce gioco con perfetta informazione un gioco tale per cui ogni giocatore è sempre informato riguardo l'intera storia delle partite precedenti; inoltre si dimostra che ogni gioco con perfetta informazione possiede sempre un saddle point.*

Conclusioni

Precisiamo infine la differenza storica tra giochi cooperativi e non, data da due grandi matematici del secolo scorso, che ha poi influenzato lo sviluppo degli studi successivo: secondo la definizione di *von Neumann*, un gioco si dice *cooperativo* se c'è la possibilità per i giocatori di sottoscrivere accordi vincolanti, che possono essere di vantaggio ai singoli giocatori. Al contrario, *John Forbes Nash Jr*. definì un gioco *non cooperativo* se il meccanismo delle decisioni riguarda i singoli giocatori sulla base di ragionamenti individuali.
Nella nostra trattazione riguardo la *Teoria dei Giochi*, e più precisamente dei giochi non cooperativi, per darne una visione d'insieme, si è cercato di:

- ♠ elencare le caratteristiche di un gioco rettangolare, contrapposte a quelle di un gioco in forma estesa;
- ♠ dare le rappresentazioni grafiche per l'una e l'altra tipologia;
- ♠ indicare diverse strade al fine di individuare le strategie ottime per ogni giocatore;
- ♠ suggerire metodi di soluzione alternativi alla semplice individuazione del *saddle point*.

In sintesi, sono state gettate a grandi linee le fondamenta matematiche che permettono la comprensione della teoria. Tutto ciò però sarebbe fine a se stesso, se non legato ad applicazioni pratiche, attuali o meno: dall'entrata di nuove imprese nel mercato in relazione alle imprese già operanti nel settore, alla ormai superata corsa alle armi nucleari tra Usa ed Urss, dalla propaganda pubblicitaria alle indagini di mercato. Gli esempi sono innumerevoli, e ciò denota l'estrema importanza ed il continuo sviluppo della *Teoria dei Giochi*.

Bibliografia e sitografia

[1] Introduction to the theory of games, J.McKinsey (1952);

[2] La teoria dei giochi, articolo di Fioravante Patrone, http://matematica.uni-bocconi.it;

[3] Introduzione alla teoria dei giochi, dispensa di A. Agnetis, Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Siena;

[4] Teoria dei Giochi, lezione di M.S. Bernabei, Università di Camerino (MC);

[5] Introduction to Probability, Dimitri P. Bertsekas, John N. Tsitsiklis (2008);