

UNIVERSITÀ DI PADOVA

---

FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
Corso di Laurea in Informazione

**Studio in ambiente Matlab/Simulink  
del sistema di controllo di sospensioni  
attive automobilistiche**

Tesi di Laurea in Automazione

Relatore:  
**ALESSANDRO BEGHI**

Presentata da:  
**LUCA FABIETTI**

Sessione 1  
Anno Accademico 2010/11

# Indice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Elenco delle figure</b>                             | <b>1</b>  |
| <b>1 Introduzione</b>                                  | <b>3</b>  |
| <b>2 Impostazione del Problema</b>                     | <b>4</b>  |
| 2.1 Descrizione del sistema . . . . .                  | 4         |
| 2.2 Specifiche di controllo . . . . .                  | 5         |
| 2.3 Derivazione del modello matematico . . . . .       | 5         |
| 2.3.1 Equazioni del moto . . . . .                     | 5         |
| 2.3.2 Funzioni di trasferimento . . . . .              | 6         |
| <b>3 Risposta in catena aperta ai segnali canonici</b> | <b>7</b>  |
| 3.1 Inizializzazione Matlab . . . . .                  | 7         |
| 3.2 Risposta al gradino . . . . .                      | 8         |
| <b>4 Controllo in catena chiusa</b>                    | <b>12</b> |
| 4.1 Controllore PID . . . . .                          | 12        |
| 4.1.1 Schema generale . . . . .                        | 12        |
| 4.1.2 Implementazione Simulink . . . . .               | 14        |
| 4.2 Luogo della Radici . . . . .                       | 19        |
| 4.3 Reti Correttrici . . . . .                         | 26        |
| 4.3.1 Errore a regime . . . . .                        | 26        |
| 4.3.2 Sovraelongazione . . . . .                       | 27        |
| 4.3.3 Pulsazione di attraversamento . . . . .          | 28        |
| 4.3.4 Determinazione della rete corretrice . . . . .   | 28        |
| <b>5 Conclusione</b>                                   | <b>36</b> |

# Elenco delle figure

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.1  | Modello fisico . . . . .  | 4  |
| 3.1  | Risposta al disturbo in catena aperta . . . . .   | 8  |
| 3.2  | Particolari della risposta al disturbo . . . . .  | 9  |
| 3.3  | Risposta al gradino da ingresso di controllo . . . . .  | 9  |
| 3.4  | Schema del sistema di sospensioni in catena chiusa . . . . .                                  | 10 |
| 3.5  | Schema del sistema di sospensioni in catena chiusa . . . . .                                  | 11 |
| 4.1  | Realizzazione Simulink del sistema di sospensioni automobili-<br>stiche . . . . .             | 14 |
| 4.2  | Schema generale PID . . . . .   | 15 |
| 4.3  | Implementazione Simulink PID controller . . . . .   | 15 |
| 4.4  | Schema in catena chiusa con PID controller . . . . .  | 16 |
| 4.5  | Risposta ad un disturbo $W = 0,1m$ . . . . .  | 17 |
| 4.6  | Risposta ad un disturbo $W = 0,1m$ . . . . .  | 18 |
| 4.7  | Variazione dell'errore rispetto al riferimento $r=0$ . . . . .                                | 18 |
| 4.8  | Forza generata dal controllore PID in risposta al disturbo . .                                | 19 |
| 4.9  | Luogo radici in assenza di controllore . . . . .  | 21 |
| 4.10 | Luogo radici in presenza di controllore . . . . .   | 22 |
| 4.11 | Risposta al disturbo $0.1m$ . . . . .   | 23 |
| 4.12 | Luogo con controllore definitivo . . . . .  | 24 |
| 4.13 | Risposta al disturbo $0.1m$ . . . . .   | 25 |
| 4.14 | Schema a blocchi di un sistema con retroazione negativa . . .                                 | 26 |
| 4.15 | Diagramma di Bode di $G_1(s)$ . . . . .   | 27 |
| 4.16 | Diagramma di Bode e margini di $\hat{W}(s)$ . . . . .   | 29 |
| 4.17 | Diagramma di Bode di $\bar{C}(s)$ . . . . .   | 31 |
| 4.18 | Diagramma di Bode e margini dopo l'aggiunta del controllore                                   | 32 |
| 4.19 | Risposta al disturbo $W=0.1m$ . . . . .   | 32 |
| 4.20 | Diagramma di Bode e margini di $W(s)$ dopo l'aggiunta del<br>controllore definitivo . . . . . | 34 |
| 4.21 | Diagramma di Bode di $\bar{C}(s)$ . . . . .   | 34 |
| 4.22 | Risposta al disturbo in presenza di controllore definitivo . . .                              | 35 |

# Capitolo 1

## Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è quello di usufruire delle conoscenze acquisite nel corso di Controlli Automatici per effettuare lo studio ed il controllo di un sistema fisico semplificato. In prima istanza si procederà con la derivazione analitica delle relazioni che descrivono il sistema dato. Da queste si potrà in seguito ricavare la risposta del sistema in catena aperta ad un ingresso a gradino, sia dal disturbo che dalla forza di controllo. Dopo aver ricavato da questi studi alcune informazioni fondamentali sul sistema da controllare, verranno proposti diversi approcci per soddisfare determinate specifiche progettuali. In particolare le tecniche di controllo utilizzate risultano essere tre : controllore PID, sintesi attraverso il luogo delle radici, sintesi in frequenza. In ciascuno dei tre passi si utilizzeranno diversi tipi di conoscenze e metodi per giungere però allo stesso risultato. Fondamentali nel corso di tutto il lavoro svolto sono stati gli strumenti Matlab e Simulink che hanno reso possibile, attraverso notevoli passi iterativi, il perfezionamento dei risultati ottenuti. Per questo motivo si è ritenuto indispensabile dare largo spazio, nell'elaborato, ai codici Matlab e agli schemi Simulink che hanno permesso di agevolare il processo realizzativo del controllore. Dopo aver verificato per ogni metodo la piena aderenza con le specifiche di progetto, si cercherà di trarre alcune conclusioni riguardanti i risultati ottenuti, le difficoltà incontrate e le conoscenze acquisite.

## Capitolo 2

# Impostazione del Problema

### 2.1 Descrizione del sistema

Il problema consiste nel controllo di un sistema di sospensioni di un autobus. Questo problema, che in generale coinvolgerebbe il sistema nella sua totalità, può essere ridotto allo studio di un'unica sospensione, in modo da renderlo più semplice. D'ora in avanti si considererà quindi una sola delle quattro sospensioni. Da un punto di vista matematico il sistema può essere pensato come composto da due masse, due molle e due smorzatori ideali come appare in Figura(2.1)

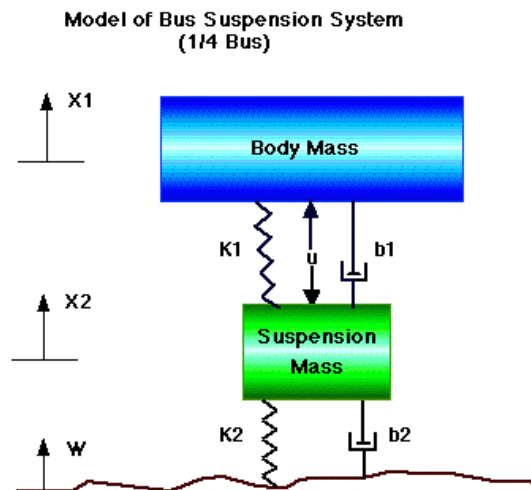


Figura 2.1: Modello fisico

I dati assegnati sono:

- massa principale( $m_1$ ) = 2500 kg
- massa della sospensione( $m_2$ ) = 320 kg
- costante elastica del sistema di sospensione( $k_1$ ) = 80000 N/m
- costante elastica di ruota e pneumatici( $k_2$ ) = 500000 N/m
- costante di smorzamento del sistema di sospensione( $b_1$ ) = 350 Ns/m
- costante di smorzamento di ruota e pneumatico( $b_2$ ) = 15020 Ns/m
- forza di controllo( $u$ ) = generata dal controllore che andremo a definire

## 2.2 Specifiche di controllo

Un buon sistema di sospensioni richiede che, di fronte ad una qualsiasi imperfezione dell'asfalto, il sistema reagisca riducendo al di sotto di una certa soglia le possibili oscillazioni, e che queste vengano dissipate in un tempo breve. Solo così si può assicurare agli utenti a bordo una permanenza confortevole.

Ci si rende conto immediatamente della difficoltà di valutazione della distanza  $\mathbf{X}_1 - \mathbf{W}$ ; per questo, e per il fatto che  $\mathbf{X}_2 - \mathbf{W}$  è trascurabile, si preferisce considerare come uscita del sistema la distanza  $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ . Da un punto di vista numerico le richieste sono quindi che, in presenza di un disturbo della strada che verrà simulato come un segnale a gradino, la distanza  $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$  abbia una sovraelongazione del 5%, e che il tempo di assestamento non superi i 5s.

## 2.3 Derivazione del modello matematico

### 2.3.1 Equazioni del moto

Osservando la Figura 2.1 e considerando la legge di Newton, si ottengono le seguenti due equazioni, che descrivono il sistema:

$$-M_1\ddot{\mathbf{X}}_1 - b_1(\dot{\mathbf{X}}_1 - \dot{\mathbf{X}}_2) - k_1(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) + \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

$$-M_2\ddot{\mathbf{X}}_2 + b_1(\dot{\mathbf{X}}_1 - \dot{\mathbf{X}}_2) + k_1(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) + b_2(\dot{\mathbf{W}} - \dot{\mathbf{X}}_2) + k_2(\mathbf{W} - \mathbf{X}_2) - \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

### 2.3.2 Funzioni di trasferimento

Per i nostri scopi possiamo porre tutte le condizioni iniziali a zero, scelta logica che semplifica la funzione di trasferimento, e che equivale a considerare l'autobus come appena uscito da una buca nel terreno. Grazie a questa considerazione e, applicando la trasformata di Laplace, si ottengono le seguenti:

$$-M_1s^2X_1(s) - b_1s(X_1(s) - X_2(s)) - k_1(X_1(s) - X_2(s)) + U(s) = 0$$

$$-M_2s^2X_2(s) + b_1s(X_1(s) - X_2(s)) + k_1(X_1(s) - X_2(s)) + b_2s(X_1(s) - X_2(s)) + k_2(W(s) - X_2(s)) - U(s) = 0$$

Raccogliendo i termini simili si ottiene poi :

$$(M_1s^2 + b_1s + k_1)X_1(s) - (b_1s + k_1)X_2(s) = U(s)$$

$$-(b_1s + k_1)X_1(s) + (M_2s^2 + (b_1 + b_2)s + (k_1 + k_2))X_2(s) = (b_2s + k_2)W(s) - U(s)$$

$$\begin{bmatrix} M_1s^2 + b_1s + k_1 & -(b_1s + k_1) \\ -(b_1s + k_1) & ((M_2s^2 + (b_1 + b_2)s + (k_1 + k_2))) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(s) \\ (b_2s + k_2)W(s) - U(s) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} M_1s^2 + b_1s + k_1 & -(b_1s + k_1) \\ -(b_1s + k_1) & ((M_2s^2 + (b_1 + b_2)s + (k_1 + k_2))) \end{bmatrix}$$

Per trovare la soluzione nel dominio di Laplace basta invertire la matrice  $\mathbf{A}$ , il cui determinante risulta :

$$\Delta = (M_1s^2 + b_1s + k_1)(M_2s^2 + (b_1 + b_2)s + (k_1 + k_2)) - (b_1s + k_1)(b_1s + k_1)$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (M_2s^2 + (b_1 + b_2)s + (k_1 + k_2)) & (b_1s + k_1) \\ (b_1s + k_1) & (M_1s^2 + b_1s + k_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ (b_2s + k_2)W(s) - U(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (M_2s^2 + b_2s + k_2) & b_1b_2s^2 + (b_1k_2 + b_2k_1)s + k_1k_2 \\ (-M_1s^2) & (M_1b_2)s^3 + (M_1k_2 + b_1b_2)s^2 + (b_1k_2 + b_2k_1)s + k_1k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ W(s) \end{bmatrix}$$

Da questa rappresentazione si possono infine ricavare le funzioni di trasferimento  $\mathbf{G}_1(s)$  e  $\mathbf{G}_2(s)$  per l'uscita  $X_1(s) - X_2(s)$  relative rispettivamente agli ingressi  $U(s)$  e  $W(s)$ . Sotto la condizione  $W(s) = 0$  si ottiene la funzione di trasferimento dall'ingresso di controllo  $U(s)$ :

$$1) \mathbf{G}_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(M_1 + M_2)s^2 + b_2s + k_2}{\Delta}$$

Ponendo invece  $U(s) = 0$  si ottiene la funzione di trasferimento rispetto all'ingresso di disturbo  $W(s)$ :

$$2) \mathbf{G}_2(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{-M_1b_2s^3 - M_1k_2s^2}{\Delta}$$

## Capitolo 3

# Risposta in catena aperta ai segnali canonici

### 3.1 Inizializzazione Matlab

Per effettuare uno studio della risposta in catena aperta ai segnali canonici, si inizializza una m-file Matlab con le specifiche del sistema da studiare. Prima si definiscono le variabili in gioco con i corrispettivi valori:

```
m1 = 2500;  
m2 = 320;  
k1 = 80000;  
k2 = 500000;  
b1 = 350;  
b2 = 15020;
```

Attraverso il comando *tf(num,den)* si creano le funzioni di trasferimento precedentemente calcolate:

```
num1 = [(m1+m2) b2 k2];  
den1 = [(m1*m2) (m1*(b1+b2)+ b1*m2) (m1*(k1+k2)+b1*b2+m2*k1) (b1*k2+k1*b2)  
k1*k2];  
G1 = tf(num1,den1);  
num2 = [-(m1*b2) -(m1*k2) 0 0];  
den2 = [(m1*m2) (m1*(b1+b2)+ b1*m2) (m1*(k1+k2)+b1*b2+m2*k1) (b1*k2+k1*b2)  
k1*k2];  
G2 = tf(0.1*(num2),den2);
```



## 3.2 Risposta al gradino

Una volta creato il sistema in ambiente Matlab, si può procedere analizzando il comportamento del sistema in reazione ad ingressi a gradino; attraverso il comando `step(0.1*G2)` si ottiene la risposta al disturbo W. In particolare si andrà a simulare un disturbo di 10 cm e, come precedentemente esposto, l'obiettivo sarà quello di ottenere delle oscillazioni che variano in un range di  $\pm 5mm$ , per poi dissiparsi completamente nell'arco di 5 secondi.

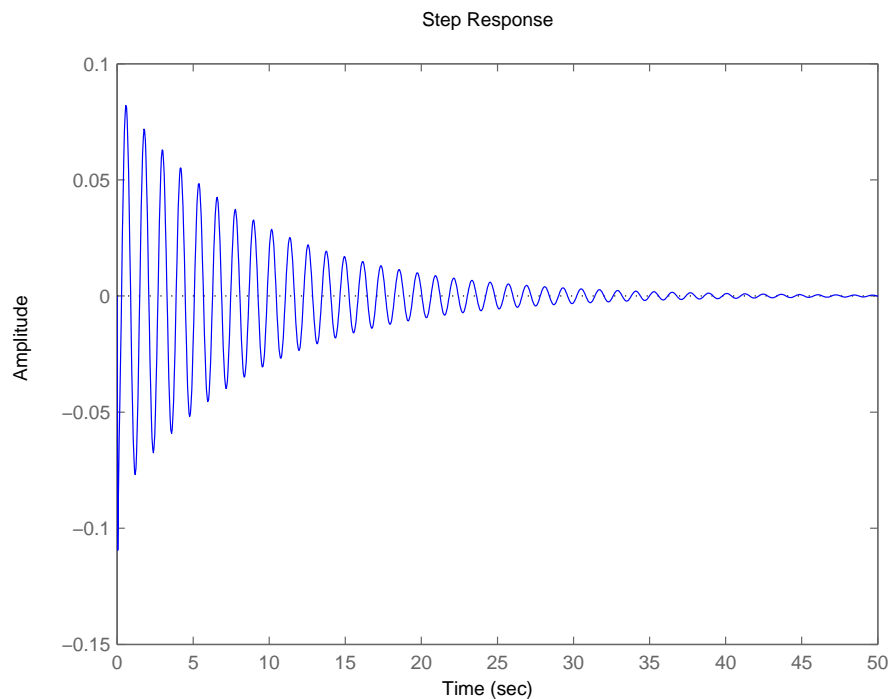


Figura 3.1: Risposta al disturbo in catena aperta

Da questo primo grafico si osserva come le oscillazioni perdurino per un tempo inaccettabile (circa 60 secondi). Per quanto riguarda l'ampiezza conviene riscalarne gli assi attraverso il comando `axis([0 10 -0.1 0.1])` ottenendo :

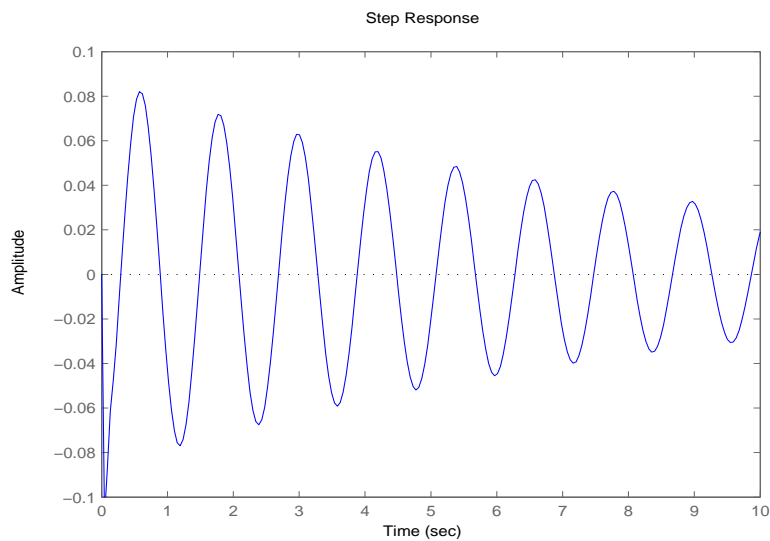


Figura 3.2: Particolari della risposta al disturbo

Analizzando la Figura 3.2 si nota come in seguito ad un disturbo di 0.1m si ottengano delle oscillazioni di ampiezza di circa 0.14m, ben oltre la soglia delle specifiche. Può essere utile anche studiare la reazione del sistema in risposta ad un gradino da ingresso di controllo. A tal proposito, digitando *step(G1)* si ottiene:

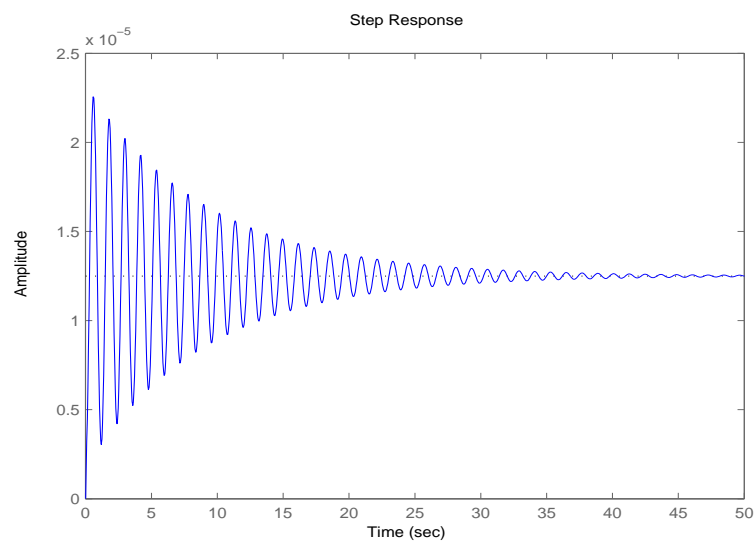


Figura 3.3: Risposta al gradino da ingresso di controllo

Anche in questo caso si osserva come il vincolo sul tempo di assestamento non venga rispettato: le sospensioni continuano ad oscillare per circa 60 sec. Per quanto concerne l'ampiezza delle oscillazioni, invece il vincolo è rispettato.

La soluzione risulta essere quindi l'inserimento di un controllore in retroazione. Lo schema del sistema in catena chiusa è riportato in Figura 3.4.

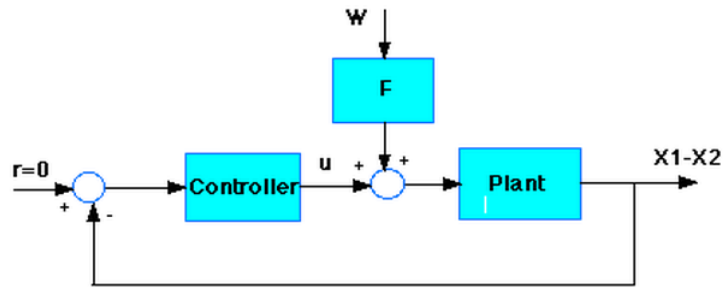


Figura 3.4: Schema del sistema di sospensioni in catena chiusa

Considerando lo schema del sistema è necessario, innanzitutto, associare ad ogni blocchetto la funzione di trasferimento appropriata. Si osserva immediatamente che  $\text{Plant} = G_1(s)$ ; per ricavare il valore di  $F(s)$  si deve imporre che la FdT in catena aperta tra il disturbo e l'uscita nello schema equivalente corrisponda a  $G_2(s)$ . Attraverso semplici passaggi si ricava quindi:

$$F(s) \cdot G_1(s) = G_2(s) \Rightarrow \frac{\text{num}f}{\text{den}f} \cdot \frac{\text{num}1}{\text{den}1} = \frac{\text{num}2}{\text{den}2}$$

Da cui:

$$\frac{\text{num}f}{\text{den}f} = \frac{\text{num}2}{\text{den}2} \cdot \frac{\text{den}1}{\text{num}1}$$

Osservando infine che  $\text{den}1 = \text{den}2$  si ottiene:

$$\frac{\text{num}f}{\text{den}f} = \frac{\text{num}2}{\text{den}2} \cdot \frac{\text{den}1}{\text{num}1} \Rightarrow F(s) = \frac{\text{num}2}{\text{num}1}$$

Lo schema definitivo del sistema sarà quindi quello riportato in Figura 3.4:

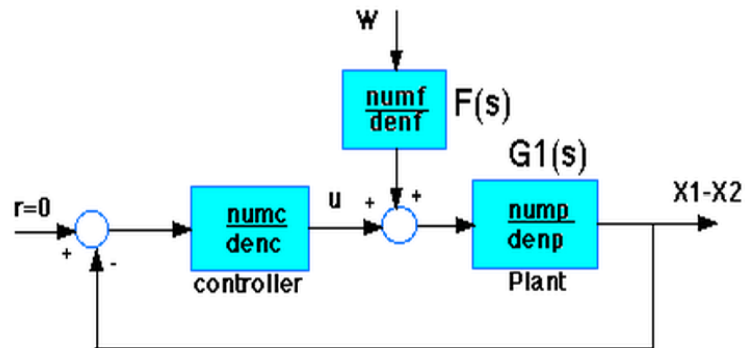


Figura 3.5: Schema del sistema di sospensioni in catena chiusa

Il passo successivo sarà quindi quello di delineare un controllore  $C(s)$  capace di portare il sistema a soddisfare le specifiche di progetto. Per realizzare questo controllore si seguiranno diversi approcci; ognuno di essi porterà a sintetizzare un compensatore con caratteristiche differenti dagli altri, ma in grado di risolvere il problema dato con la stessa efficacia.

I metodi proposti risultano essere tre:

- Controllore PID
- Sintesi attraverso il Luogo delle radici
- Studio in frequenza e sintesi di Bode

## Capitolo 4

# Controllo in catena chiusa

### 4.1 Controllore PID

#### 4.1.1 Schema generale

In questa sezione si cercherà di delineare la funzione di trasferimento del controllore attraverso un metodo di sintesi euristico e semplice da definire nella pratica. Il risultato sarà un *controllore PID* (*proporzionale, integrativo, derivativo*).

In generale un controllore PID è della forma:

$$\mathbf{K}_P + \mathbf{K}_D s + \frac{\mathbf{K}_I}{s} = \frac{\mathbf{K}_D s^2 + \mathbf{K}_P s + \mathbf{K}_I}{s} \quad (4.1)$$

Dove:

- $K_{Pe}$  è il parametro proporzionale all'errore,
- $K_{De}$  è il parametro proporzionale alla derivata dell'errore,
- $K_{Ie}$  è il parametro proporzionale all'integrale dell'errore.

I tre parametri sopra definiti realizzano diverse azioni, il cui risultato complessivo è quello di portare il sistema a soddisfare le specifiche progettuali.

L'azione proporzionale realizza la funzione più semplice ed immediata, ovvero tende a correggere l'uscita non appena l'errore, rispetto al riferimento, diventa diverso da zero. Il suo contributo risulta essere quindi:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{K}_P * \mathbf{e} \quad (4.2)$$

L'azione integrativa invece va ad incidere sul comportamento a regime del sistema. Grazie ad essa il controllore ha memoria dei valori passati del segnale d'errore. Questa proprietà dà al controllore PID la capacità di portare il processo ad inseguire perfettamente il riferimento richiesto.

$$\mathbf{u}_I = \frac{\mathbf{K}_I}{s} \quad (4.3)$$

L'azione derivativa, infine, aumenta le prestazioni del controllore. Il suo scopo è quindi quello di migliorare il comportamento del sistema retroazionato durante il transitorio. Questo contributo diventa preponderante, infatti, nel momento in cui l'errore inizia ad aumentare. Attraverso l'azione derivativa viene generato un contributo della forma:

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{K}_D \frac{d\mathbf{e}}{dt} \quad (4.4)$$

Spesso si tende a tralasciare l'azione derivativa ponendo  $\mathbf{K}_D = \mathbf{0}$ . Dei tre contributi essa rappresenta quello che più di tutti può destabilizzare il sistema. In presenza, ad esempio, di un rapido mutamento del riferimento, a causa dell'azione derivativa si potrebbe generare un termine correttivo troppo elevato indesiderato. Per quanto riguarda il problema specifico delle sospensioni, questo inconveniente non si presenta, poichè è ragionevole pensare che il riferimento si mantenga costante a zero.

Grazie alle seguenti considerazioni, nel seguito si procederà con l'implementazione Simulink del nostro processo. Essendo un metodo di sintesi euristica, questo tipo di approccio permetterà di agire comodamente sui i tre parametri a disposizione per delineare infine la FdT voluta.

### 4.1.2 Implementazione Simulink

Per prima cosa si riportano di seguito le equazioni che descrivono il sistema:

$$-M_1\ddot{X}_1 - b_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - k_1(X_1 - X_2) + U = 0 \quad (4.5)$$

$$-M_2\ddot{X}_2 + b_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) + k_1(X_1 - X_2) + b_2(\dot{W} - \dot{X}_2) + k_2(W - X_2) - U = 0 \quad (4.6)$$

L'implementazione relativa in ambiente Simulink è riportata in figura (4.1)

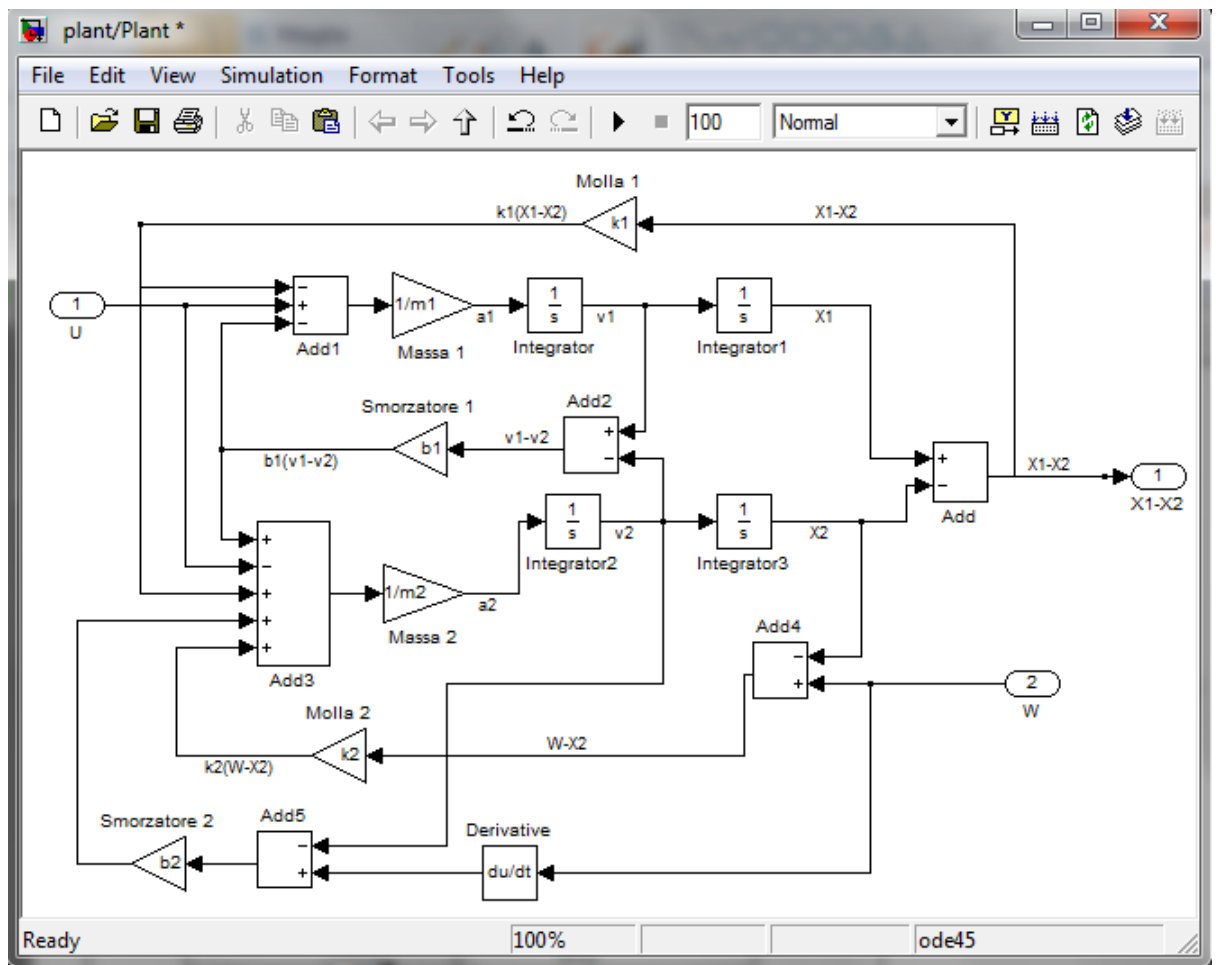


Figura 4.1: Realizzazione Simulink del sistema di sospensioni automobilistiche

Una volta definito il processo, il passo successivo è rappresentato dalla creazione del controllore PID. Lo schema generale di questo tipo di controllore è riportato in figura (4.2)

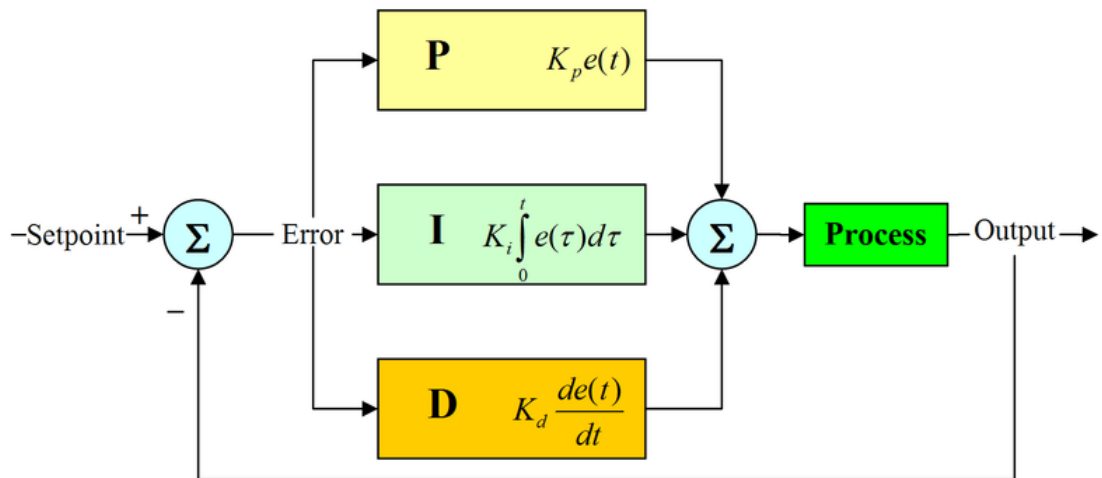


Figura 4.2: Schema generale PID

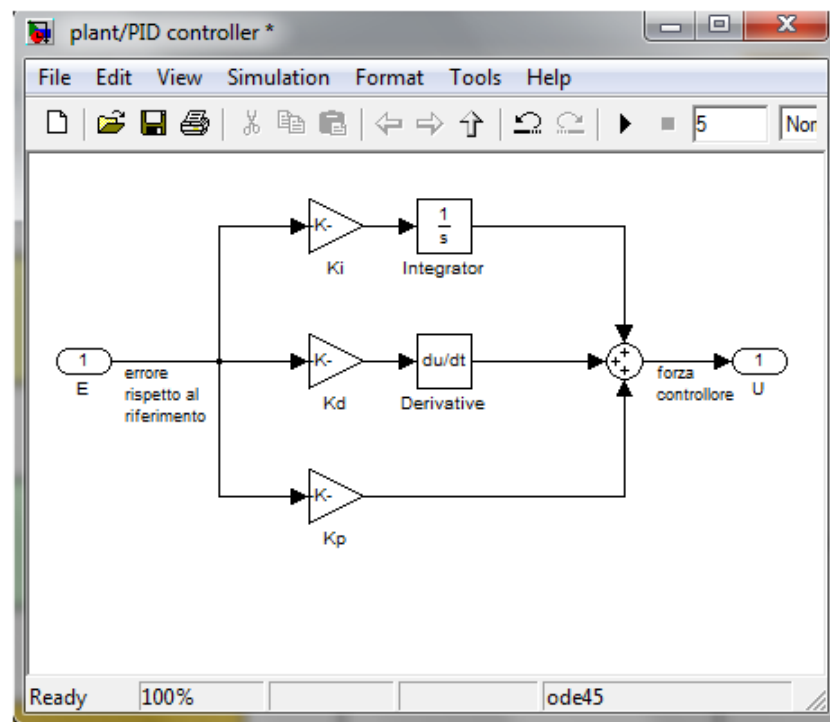


Figura 4.3: Implementazione Simulink PID controller



Dopo aver creato in Simulink uno schema equivalente, si può infine realizzare la messa a punto del sistema in catena chiusa. Si osservi l'utilità della funzione *create subsystem* attraverso cui si è potuto semplificare visivamente il sistema. Figura(4.4).

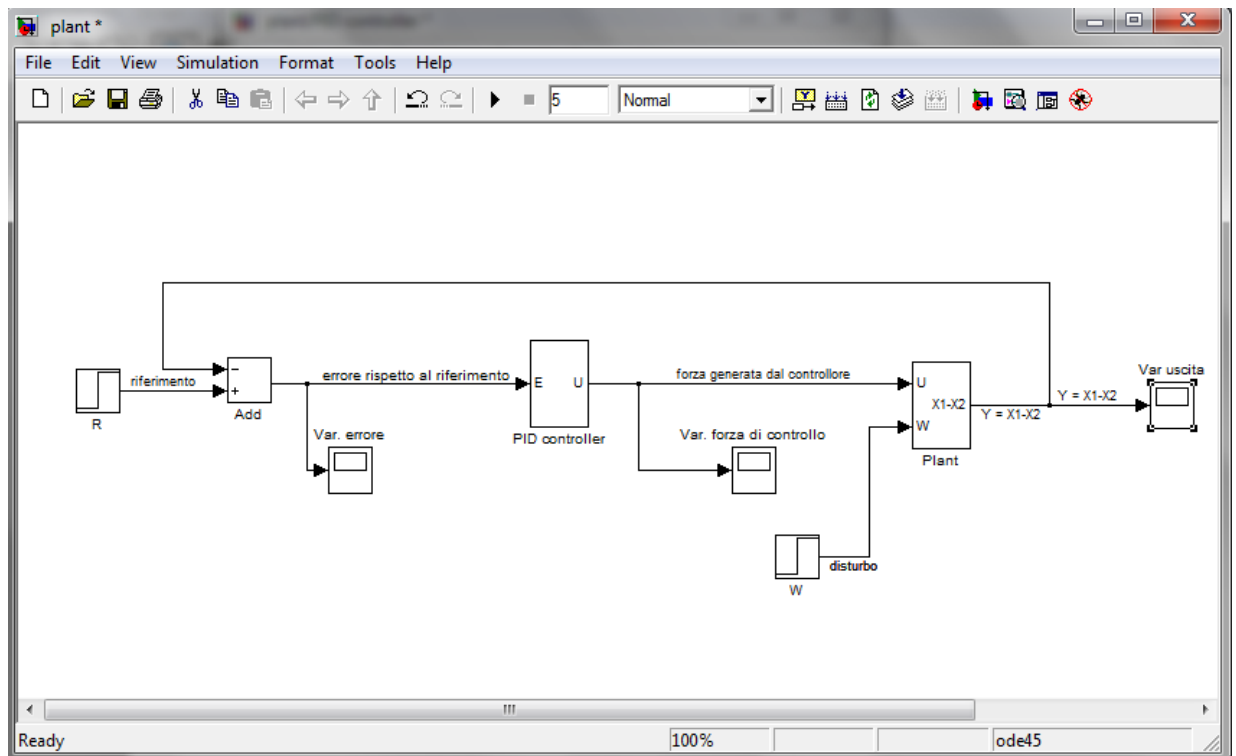


Figura 4.4: Schema in catena chiusa con PID controller

Andando ad effettuare diverse simulazioni, ed osservando la risposta del sistema in catena chiusa, si possono modificare ed ottimizzare i tre parametri del controllore PID. In prima approssimazione si nota che per i valori:  $K_P = 650000$ ,  $K_I = 400000$ ,  $K_D = 170000$  il sistema reagisce ad un disturbo a gradino  $W = 0,1m$ , smorzando le oscillazioni entro 5s (Figura 4.5); la specifica riguardante il tempo di assestamento è quindi soddisfatta anche se l'ampiezza delle oscillazioni rimane troppo elevata (circa 18mm). Per ovviare a questo problema bisogna quindi migliorare il controllo nel transitorio aumentando  $K_D$ .

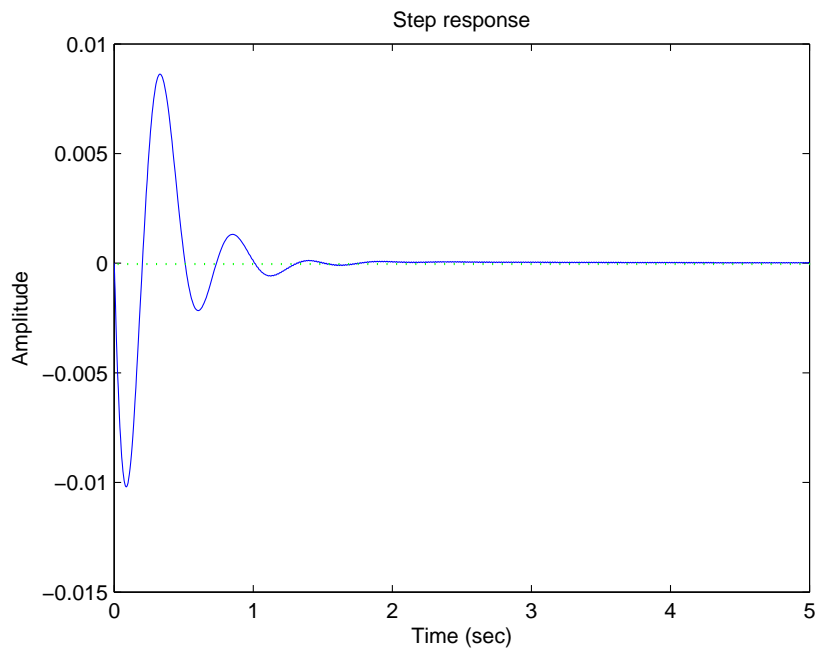
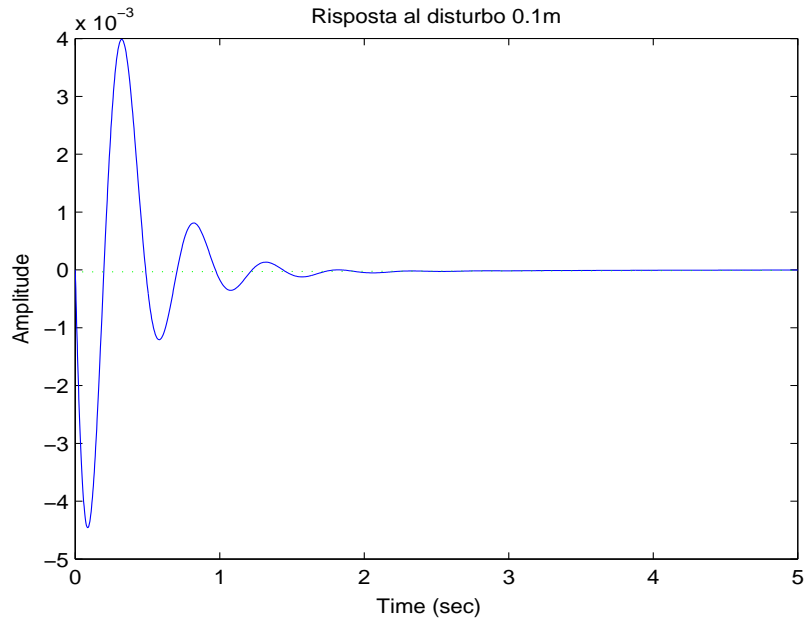
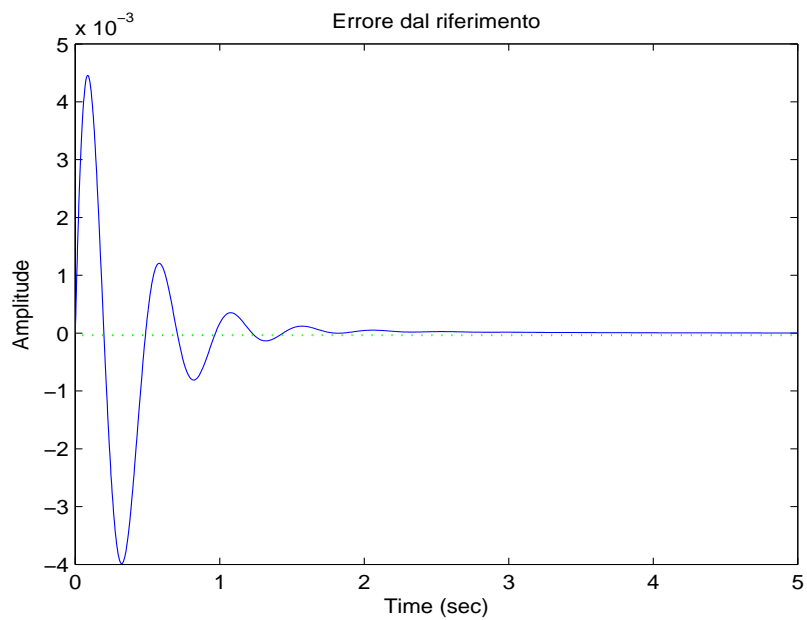


Figura 4.5: Risposta ad un disturbo  $W = 0,1m$

Sempre attraverso continui passi iterativi si giunge infine a delineare i tre parametri che assicurano una soddisfacente risposta del sistema al disturbo  $W$ . Impostando  $K_P = 1120000$ ,  $K_I = 900000$ ,  $K_D = 440000$ , tutte le specifiche progettuali vengono rispettate. Si riportano di seguito i grafici della risposta del sistema al disturbo  $W$  (Figura 4.6), della variazione dell'errore rispetto al riferimento (Figura 4.7) e della forza generata dal controllore (Figura 4.8).

Figura 4.6: Risposta ad un disturbo  $W = 0,1m$ Figura 4.7: Variazione dell'errore rispetto al riferimento  $r=0$

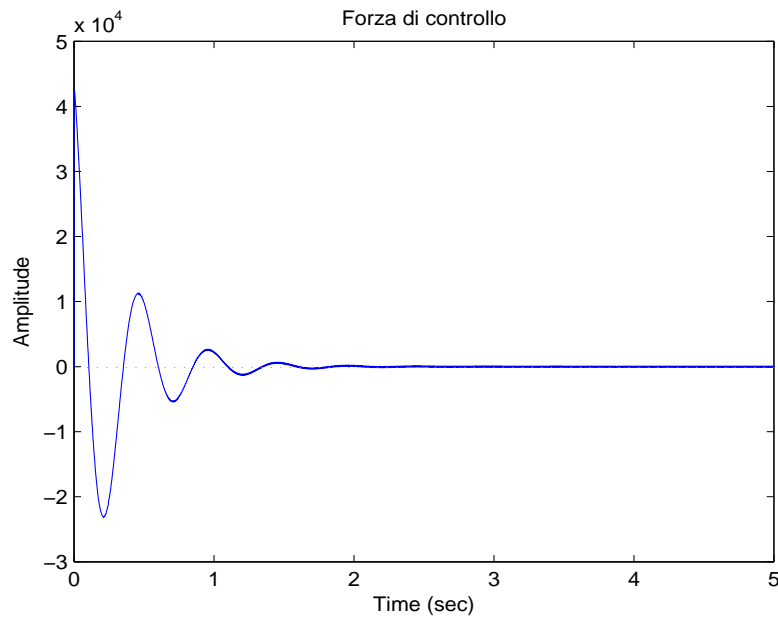


Figura 4.8: Forza generata dal controllore PID in risposta al disturbo

## 4.2 Luogo della Radici

Un altro possibile approccio è dato dal metodo del luogo delle radici. Attraverso questo metodo grafico si può studiare il comportamento di un sistema in catena chiusa al variare di un parametro reale  $K$ . Sebbene la sintesi attraverso il luogo delle radici sia studiata per sistemi del primo e del secondo ordine, questa può essere applicata anche a sistemi di ordine superiore grazie all'approssimazione dei poli dominanti.

Per prima cosa si deve ricavare la posizione dei poli del sistema non compensato. A tal proposito si utilizza il comando `roots(C)` con cui si ottengono le radici del polinomio i cui coefficienti sono elementi del vettore  $C$ . La risposta di Matlab all'istruzione `R= roots(den1)` risulta essere :

R =

```
-23.9758 +35.1869i
-23.9758 -35.1869i
-0.1098 + 5.2504i
-0.1098 - 5.2504i
```

Si vede subito che i poli dominanti sono le radici **-0.1098+5.2504i** e **-0.1098-5.2504i**, che sono radici complesse coniugate.

Si consideri quindi un modello di secondo grado della forma:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \quad (4.7)$$

Assumendo che i poli complessi coniugati ad esso associati siano:

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega \quad \sigma, \omega \geq 0$$

Rielaborando l'equazioni date si possono ottenere le seguenti relazioni:

$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2 \quad \xi\omega_n = \sigma$$

La costante  $\omega_n$  è detta **pulsazione naturale** mentre  $\xi$  è detto **coefficiente di smorzamento**.

Il legame tra sovraelongazione e parametri del modello (4.7) risulta essere:

$$S = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\tan\theta}}$$

Mentre per quanto riguarda il tempo di assestamento il vincolo è dato da:

$$T_a = \frac{3}{\xi\omega_n}$$

Questi due vincoli possono essere quindi tradotti nel posizionamento dei poli in catena chiusa, in opportune zone del piano complesso. Per prima cosa si deve procedere studiando il luogo dei poli del sistema da controllare, in assenza di controllore:

```
rlocus (G1)
z = - log (0,05) / sqrt (pi ^ 2 + (log (0,05) ^ 2))
sgrid (z, 0)
```

Il comando **rlocus(SYS)** fornisce e traccia il luogo delle radici di SYS al variare del parametro K reale tra 0 e inf. Per quanto riguarda il comando **sgrid(Z,Wn)** esso forma nel piano complesso una regione che dipende dai suoi due parametri. In particolare il primo rappresenta il legame con la sovraelongazione, mentre il secondo con la pulsazione naturale del sistema. Grazie a questa funzione Matlab, si potrà scegliere il guadagno del controllore, in modo da soddisfare entrambe le specifiche. In figura è riportato il risultato dei comandi sopra indicati:

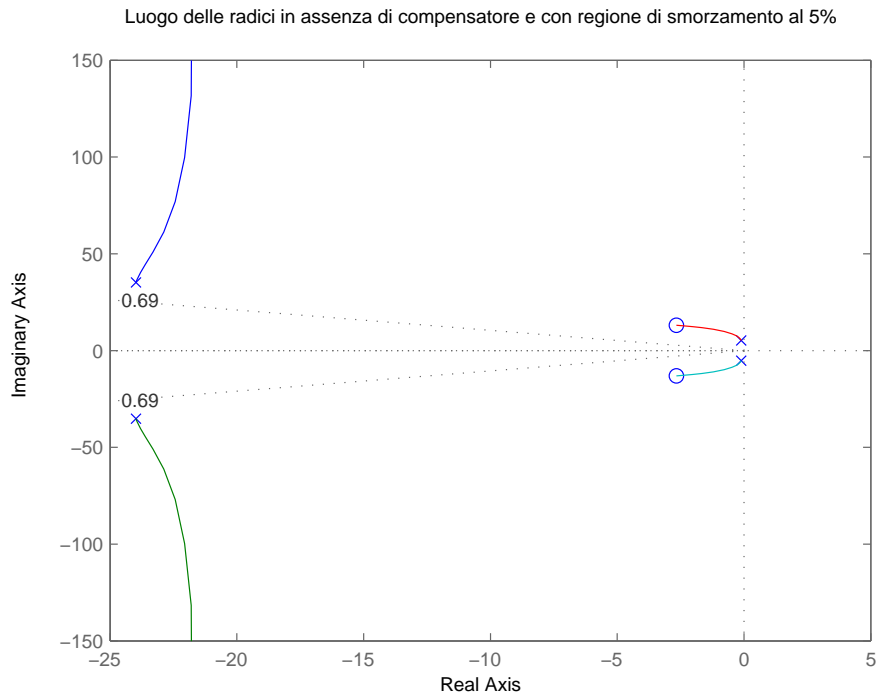


Figura 4.9: Luogo radici in assenza di controllore

Da questo grafico si capisce immediatamente che, comunque scelto, non esiste valore del parametro  $K$  che porti il sistema a soddisfare le specifiche; è quindi necessario aggiungere un filtro che modifichi il luogo delle radici, spostandolo nella regione delimitata dal cono di piano che individua la posizione richiesta per i poli. Per raggiungere questo obiettivo si deve cercare di attrarre il luogo verso il piano complesso stabile, ed in particolare, all'interno della regione d'interesse. Per farlo ci si può servire di un paio di zeri molto vicini all'asse immaginario, che andranno a bilanciare i poli dominanti in assenza di compensatore. D'altro canto, per avere un controllore realizzabile, si devono aggiungere un paio di poli, che verranno scelti sufficientemente lontani dall'asse immaginario, al fine di rendere più pronto il sistema. In seguito a queste considerazioni si propone il controllore:

$$C(s) = \frac{s^2 + 4s + 4.25}{s^2 + 90s + 1800} \quad (4.8)$$

Questo può essere ottenuto attraverso i seguenti comandi:

```
z1=2+0.5i;
z2=2-0.5i;
```

```

p1=30;
p2=60;
numc=conv([1 z1],[1 z2]);
denc=conv([1 p1],[1 p2]);
contr=tf(numc,denc);

```

Decisa la posizione di poli e zeri, si è sfruttato il comando `conv(A, B)` che fornisce, nel caso in cui A e B siano coefficienti polinomiali, la loro moltiplicazione. Una volta definito il controllore, si verifica come è stato modificato il luogo delle radici:

```

rlocus(G1*contr)
axis([-30 10 -30 30])
z=-log(0.05)/sqrt(pi^2+(log(0.05)^2));
sgrid(z,0)

```

Il cui risultato è:

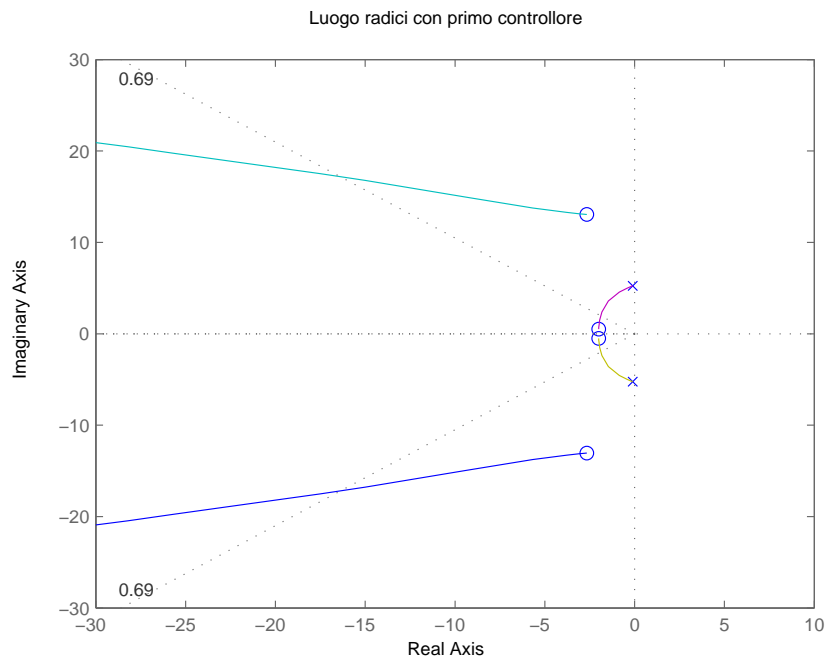


Figura 4.10: Luogo radici in presenza di controllore

Attraverso l'aggiunta del filtro si è spostato il luogo delle radici nella regione voluta; ora, digitando il comando `[k,poles]= rlocfind(G1*contr)`, apparirà, direttamente nella grafica, un cursore attraverso cui scegliere il

guadagno  $K$  del controllore. Matlab fornirà dunque il valore del guadagno scelto e la posizione dei poli del sistema:

```
Selected point = -1.8009+1.9565i
```

```
k = 3.6523e+007
```

```
poles = 1.0e+002*
```

```
-0.6381+3.6207i
```

```
-0.0339-0.1320i
```

```
-0.0339-0.1320i
```

```
-0.0189+0.0197i
```

```
-0.0189-0.0197i
```

Infine, si definisce la FdT dal disturbo all'uscita e se ne studia la risposta ad un gradino 0.1m:

```
sys=F*feedback(G1,k*contr);
```

```
t=0:0.01:5;
```

```
step(sys,t)
```

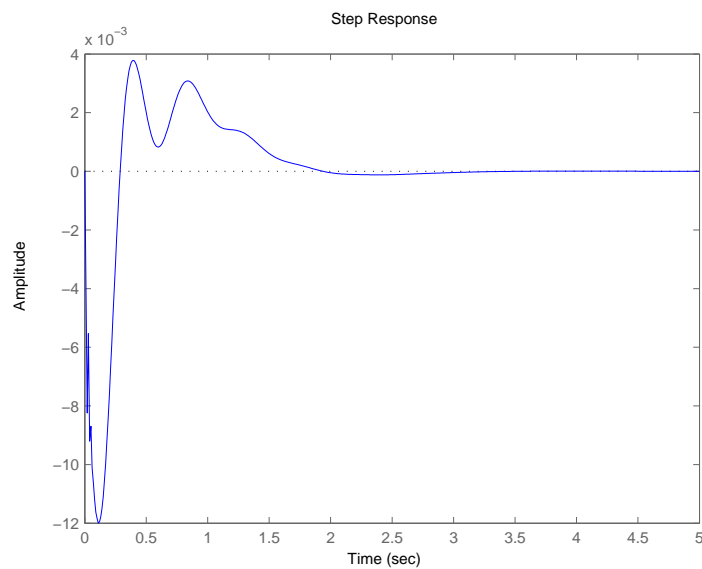


Figura 4.11: Risposta al disturbo 0.1m



Il tempo di assestamento è rispettato, le oscillazioni terminano entro 5s; per quanto riguarda invece la sovraelongazione, la risposta al disturbo non può essere soddisfacente. Si introduce allora un filtro con FdT:

$$C(s) = \frac{s^2 + 8s + 25}{s^2 + 75s + 1250} \quad (4.9)$$

Ovvero gli zeri e i poli sono rispettivamente:

$$z1=4+3i;$$

$$z2=4-3i;$$

$$p1=25;$$

$$p2=50;$$

Procedendo come prima si ricavano il luogo delle radici, il guadagno, e infine la risposta al disturbo.

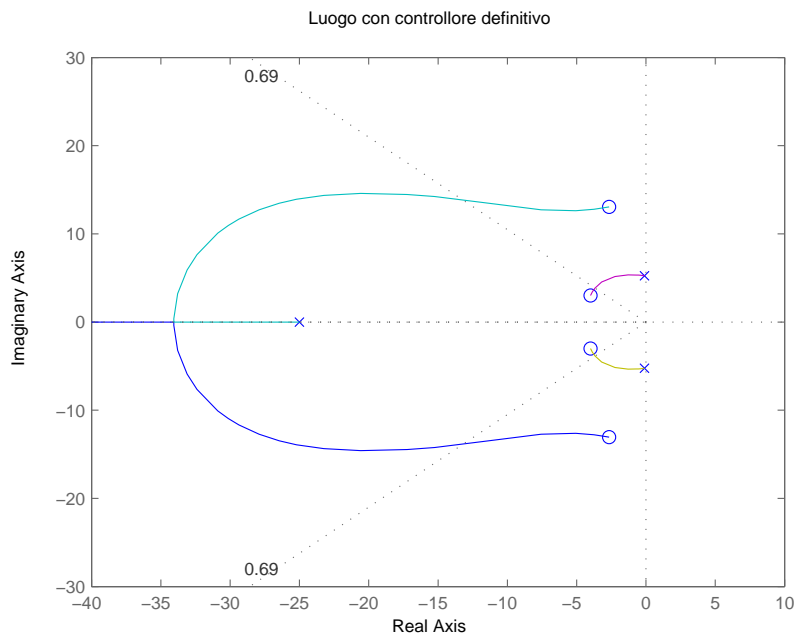


Figura 4.12: Luogo con controllore definitivo

Il guadagno selezionato risulta essere  $\mathbf{K} = \mathbf{6.6593e+007}$ . Grazie a questa scelta i poli dominanti del sistema sono compresi nella regione a 5% di smorzamento. Ricordando infine le specifiche progettuali ovvero: tempo di assestamento minore di 5s e ampiezza delle oscillazioni compresa tra +5mm

e -5mm, si osserva che le scelte effettuate soddisfano entrambe le specifiche. Il grafico è riportato in Figura 4.13:

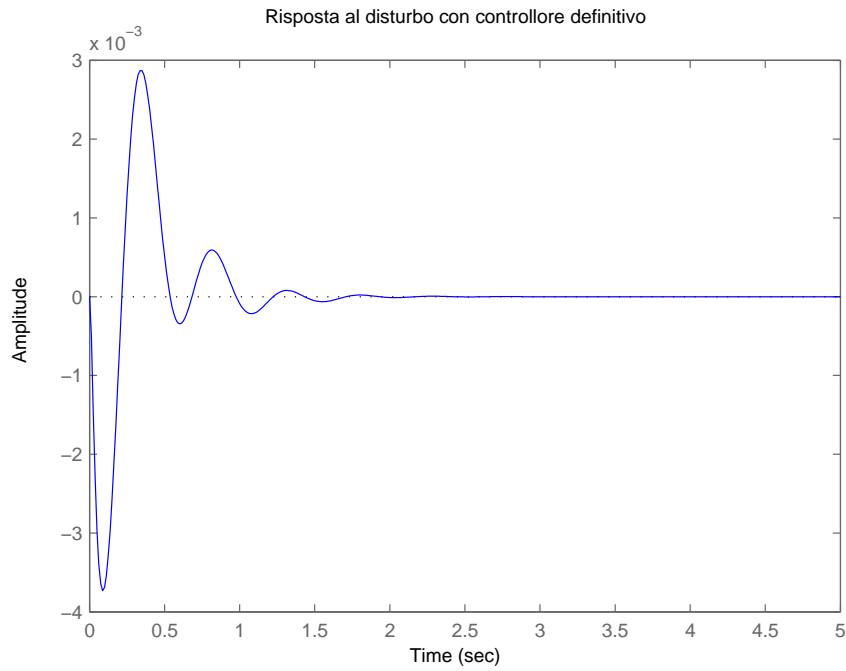


Figura 4.13: Risposta al disturbo 0.1m

### 4.3 Reti Correttrici

L'ultimo metodo di sintesi proposto sfrutta l'analisi in frequenza del sistema. La strategia su cui si basa questo metodo è quella di tradurre le specifiche progettuali assegnate in vincoli in frequenza, che il sistema in catena aperta, avente funzione di trasferimento  $W(s) = C(s)G_1(s)$ , deve soddisfare, e infine, ottenere  $C(s)$  in modo che tali vincoli siano rispettati. Per prima cosa si riportano le specifiche di partenza:

- tempo di assestamento  $T_a = 5sec.$ ,
- sovralongazione massima  $S = 5\%$  ( $S=0.05$ ),
- errore a regime  $1\%$  ( $\epsilon = 0.01$ ).

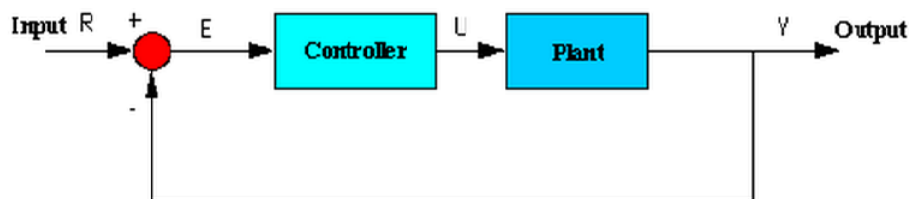


Figura 4.14: Schema a blocchi di un sistema con retroazione negativa

#### 4.3.1 Errore a regime

Per quanto riguarda l'errore a regime sappiamo che esso è legato al guadagno statico di  $W(s)$  e al tipo del sistema. Nel caso in esame attraverso la specifica sull'errore si trova che  $W(s)$  dovrà essere di tipo 0, ovvero  $\mathbf{h}_W = \mathbf{0}$ , e che  $\mathbf{K}_W = \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{0.01} = \mathbf{100}$ . Dalla relazione  $W(s) = C(s)G_1(s)$  e scrivendo tutte le funzioni di trasferimento in forma di Bode, si può passare a vincoli sul controllore  $C(s)$ :

$$W(S) = \frac{K_W}{s^{h_W}} \bar{W}(s), \quad \bar{W}(0) = 1$$

$$C(S) = \frac{K_C}{s^{h_C}} \bar{C}(s), \quad \bar{C}(0) = 1$$

$$G_1(S) = \frac{K_{G_1}}{s^{h_{G_1}}} \overline{G_1}(s), \quad \overline{G_1}(0) = 1$$

Da queste relazioni si vede facilmente che:

$$K_W = K_C \cdot K_{G_1}, \quad h_W = h_C + h_G$$

Avendo già ricavato vincoli su  $K_W$  e  $h_W$ , basterà studiare il diagramma di Bode di  $G_1(s)$  per ricavare  $h_{G_1}$  e  $K_{G_1}$ .

Attraverso il comando **margin(G1)** si ottiene la rappresentazione di Bode del sistema (Fig. 4.15):

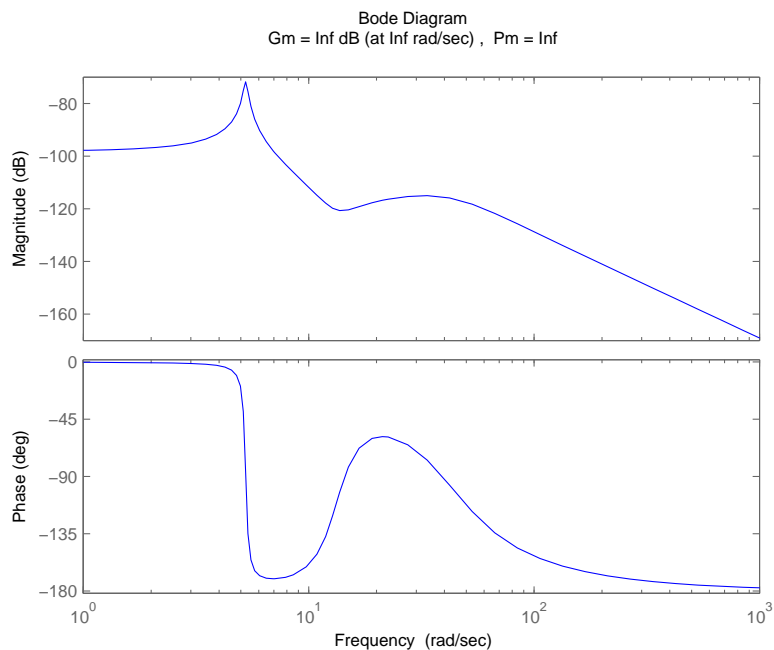


Figura 4.15: Diagramma di Bode di  $G_1(s)$

Da questo grafico si ricava immediatamente il valore del guadagno statico di  $G_1(s)$  espresso in decibel,  $(K_{G_1})_{dB} = -97.78dB \Rightarrow K_{G_1} = 1.29 \cdot 10^{-5}$ , da cui:

$$K_C = \frac{K_W}{K_{G_1}} = 7744618, \quad h_C = h_W - h_{G_1} = 0$$

### 4.3.2 Sovraelongazione

Dal vincolo sulla sovraelongazione si può ricavare il margine di fase di  $W(s)$ . E' infatti abbastanza intuitivo che un sistema con sovraelongazione molto grande sia vicino all'instabilità e quindi ad un margine di fase piccolo. Da

queste considerazioni si può ricavare una stima grossolana tra margine di fase e sovraelongazione, ovvero:

$$S \text{ decresce} \Leftrightarrow m_\phi \text{ cresce} \quad m_\phi = 1 - 0.8S$$

Da questa relazione si ricava  $m_\phi \approx 0.96rad(55^\circ)$

### 4.3.3 Pulsazione di attraversamento

In generale, per sistemi abbastanza regolari, si sa che aumentando la banda passante del sistema si ha un guadagno in termini di prontezza del sistema. Quindi, aumentando la banda, il tempo di salita  $T_s$  diminuirà in modo pressoché proporzionale. Ma poichè vale la relazione approssimata  $w_A \approx 5B$ , si nota che aumentando la banda del sistema anche la pulsazione di attraversamento, cioè la pulsazione per cui vale  $|W(jw_A)| = 1$ , aumenterà.

E' possibile ricavare anche in questo caso una stima della relazione che intercorre tra pulsazione  $w_A$  e tempo di salita  $T_s$ :

$$w_A \approx \frac{2}{T_s}$$

Nel caso in esame non è presente un valore preciso per il tempo salita; per determinarne uno di riferimento è conveniente andare a studiare i risultati forniti dagli altri metodi di sintesi. Un buon riferimento può essere scelto come  $T_s = 0.35sec$ . da cui si ricava  $w_A = 5.66rad/s$ .

### 4.3.4 Determinazione della rete correttrice

Da quanto studiato in precedenza, a partire dalle specifiche progettuali, si è giunti alle seguenti relazioni:

- margine di fase  $m_\phi = 0.96rad$ .
- guadagno statico e tipo del controllore  $K_C = 7744618$  e  $h_C = 0$ ,
- pulsazione di attraversamento  $w_A = 5.66rad/sec$

Tutti questi vincoli si riferiscono alla FdT  $W(s)$ ; l'obiettivo sarà ora quello di determinare la FdT del compensatore in modo che il sistema soddisfi tutte queste richieste.

Dalla decomposizione:

$$W(s) = C(s)G(s) = \frac{K_C}{s^{h_C}} \bar{C}(s)G_1(s)$$

Definendo:

$$\hat{W}(s) = \frac{K_C}{s^{h_C}} G_1(s)$$

si osserva che questa funzione di trasferimento risulta fissata univocamente, è quindi possibile tracciarne il diagramma di Bode e definire alcuni parametri fondamentali:

- $w_A^o$  = pulsazione di attraversamento prima dell'aggiunta del controllore  
cioè tale che  $|\hat{W}(jw_A^o)| = 1$ ,
- $w_A$  = pulsazione di attraversamento richiesta,
- $m_\varphi$  = margine di fase richiesto,
- $m_\varphi^o = \pi + \angle \hat{W}(jw_A)$  ovvero il margine di fase presente, prima dell'aggiunta del controllore, nella pulsazione di attraversamento richiesta  $w_A$ .

Sempre attraverso il comando **margin(K\*G1)** (K=7744618) si ottiene il diagramma di Bode voluto con i margini di fase e d'ampiezza già calcolati (Fig. 4.16):

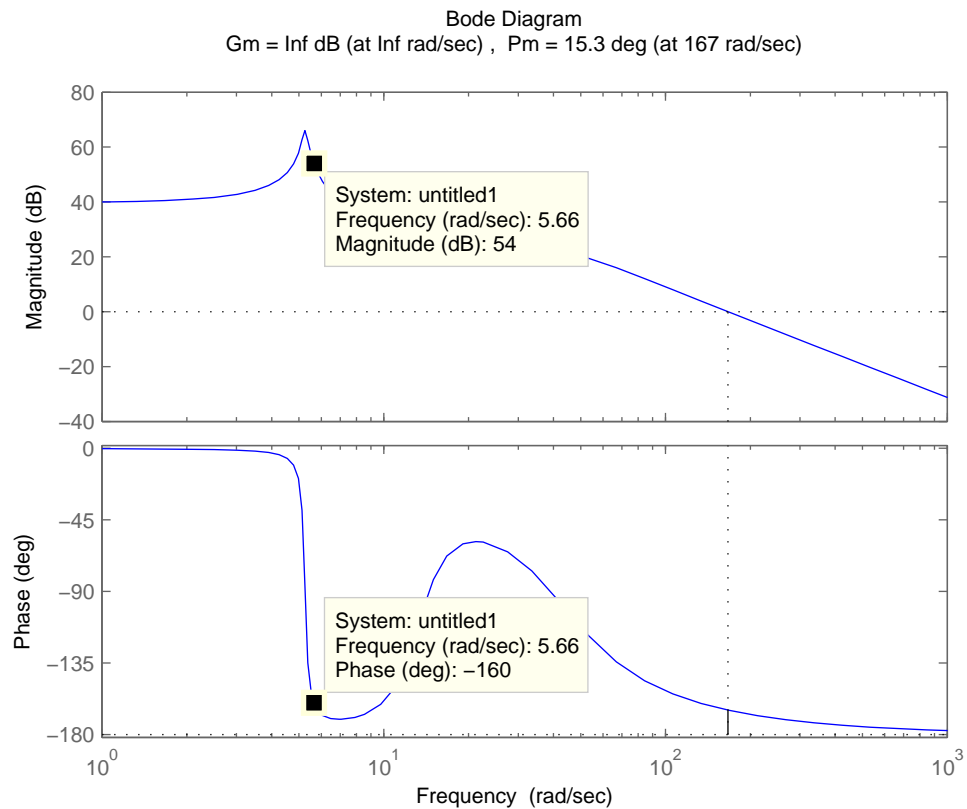


Figura 4.16: Diagramma di Bode e margini di  $\hat{W}(s)$

Ottenendo:

- $w_A^o = 167$  rad/sec,
- $w_A = 5.66$  rad/sec,

- $m_\varphi = 0.96$  rad,
- $m_\varphi^o = 60^\circ$ .

Quello che si nota immediatamente, è che la pulsazione di attraversamento richiesta è inferiore a quella presente, mentre il margine di fase è insufficiente. Valgono cioè le relazioni :

$$w_A^o > w_A, \quad \Delta\varphi = 40^\circ > 0$$

La rete corretrice da utilizzare in questo caso sarà quindi una **rete a sella** detta anche rete anticipatrice e ritardatrice. Si tratta di un sistema con FdT con tre gradi di libertà:

$$\bar{C}(s) = \frac{1 + sT_a}{1 + saT_a} \cdot \frac{1 + sT_r}{1 + srT_r}$$

A questa si impone  $r=1/a$ ,  $T_a > 0$ ,  $0 < a < 1$ ,  $T_r > 0$ ,  $r > 1$  e inoltre  $T_a \ll T_r$ . Per determinare i parametri di questa rete si sfrutteranno alcune relazioni note di cui non verrà fornita la dimostrazione formale. E' importante notare che  $\Delta\varphi = \phi_r + \phi_a$ .

Si utilizzerà il grado di libertà per fissare  $\phi_r$  che di solito è scelto piccolo in un range di  $-6^\circ < \phi_r < -3^\circ$ . Imponendo quindi  $\phi_r = -5^\circ$  anche  $\phi_a$  risulterà fissata.

Definendo:

$$q = \tan(\Delta\varphi - \phi_r) = 1, \quad C = \frac{1}{|W(jw_A)|}$$

si può procedere con la soluzione della seguente eq. di secondo grado in a:

$$(q^2 - C^2 + 1)a^2 + 2C^2q^2a + C^2(q^2C^2 + C^2 - 1) = 0$$

Da cui si ricava:

$$\mathbf{a} = \mathbf{0.0014}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{1/a} = \mathbf{708.1096}$$

Per determinare  $T_a$  si utilizzerà la seguente:

$$T_a^2 = \frac{1}{w_A^2} \frac{C^2 - a^2}{a^2(1 - C^2)}$$

Dovendo essere  $T_a > 0$  si trova  $\mathbf{T_a} = \mathbf{0.1772}$ . Infine per  $T_r$  vale:

$$(rw_A^2 \tan\phi_r)T_r^2 - w_a(1 - r) + \tan\phi_r = 0$$

Il cui risultato è  $\mathbf{T_r} = \mathbf{2.0163}$ .

La rete complessiva può essere riscritta come :

$$\bar{C}(s) = \frac{1 + s(0.1772)}{1 + s(0.00025)} \cdot \frac{1 + s(2.0163)}{1 + s(1428.97)}$$

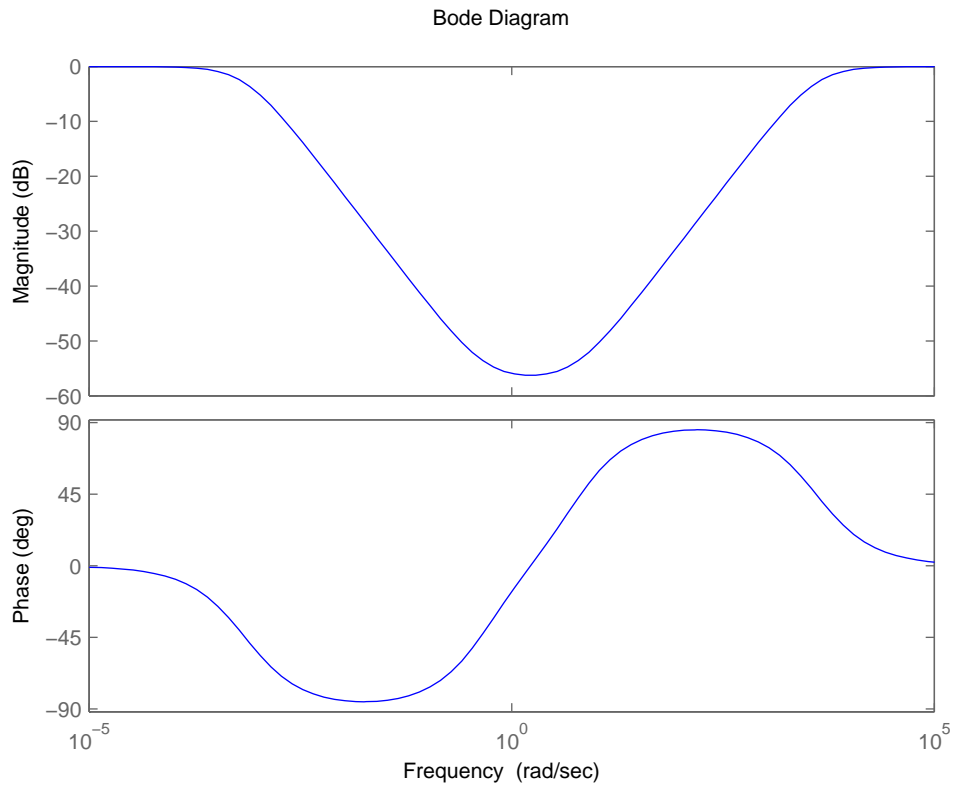


Figura 4.17: Diagramma di Bode di  $\bar{C}(s)$

Si fornisce in Figura 4.17 il diagramma di Bode di  $\bar{C}(s)$  da cui si nota che grazie al vincolo  $r=1/a$  si ha  $\bar{C}(\infty) = 1$ .

Digitando il seguente codice sul prompt dei comando Matlab si ottiene la risposta al disturbo  $W=0.1m$  Fig.(4.18):

```
numc=conv([Ta 1],[Tr 1]);
denc=conv([a*Ta 1],[r*Tr 1]);
contr=tf(numc,denc);
margin(k*G1*contr)
sys=F*feedback(G1,k*contr);
step(0.1*sys)
```



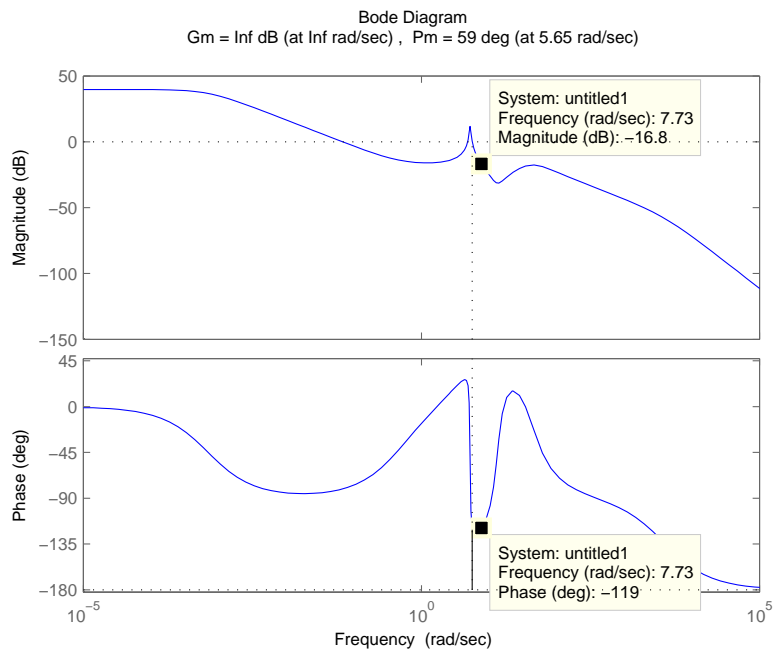
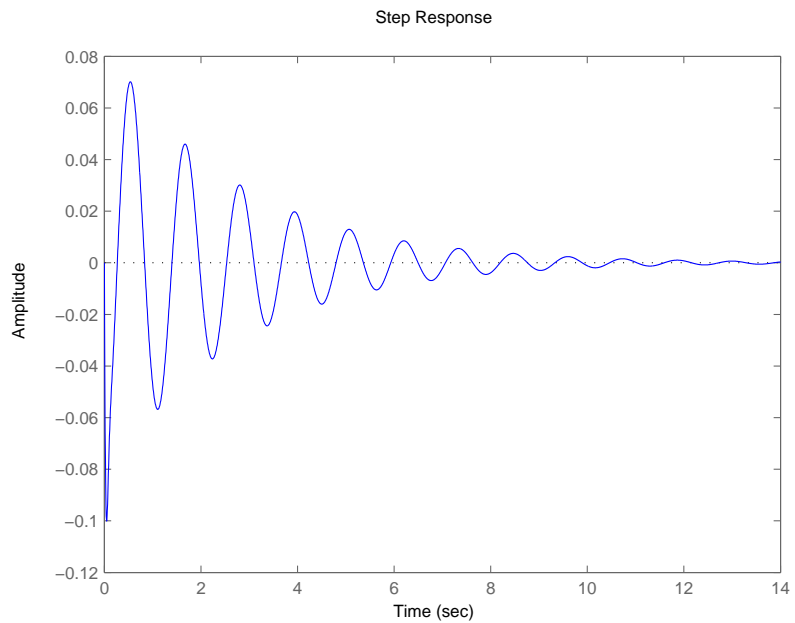


Figura 4.18: Diagramma di Bode e margini dopo l'aggiunta del controllore

Figura 4.19: Risposta al disturbo  $W=0.1m$

Nonostante le prestazioni del sistema siano migliorate, si osserva che è necessaria un'ulteriore iterazione nella sintesi. Per rendere il sistema più robusto, e quindi immune al disturbo, può essere utile aumentare il margine di fase a bassa frequenza, lasciando pressochè immutata la pulsazione di attraversamento  $w_A = 7.66 \text{ rad/sec}$ . In questo caso la soluzione migliore è aggiungere una rete anticipatrice della forma :

$$A(s) = \frac{1 + sT}{1 + saT}$$

Come fatto in precedenza, anche qui si sfrutteranno alcune relazioni approssimate che permetteranno di modificare il comportamento del sistema. Per prima cosa si definiscono:

$$\Delta\varphi = 81^\circ, \quad C = \frac{1}{|\hat{W}(j(7.66))|} = 1.5, \quad q = \tan(81^\circ)$$

Dalle relazioni:

$$C^2(C^2q^2 + C^2 - 1)a^2 + 2C^2q^2 + (q^2 - C^2 + 1) = 0$$

$$T^2 = \frac{1}{w_A^2} \frac{C^2 - 1}{1 - a^2C^2}$$

si ricavano i valori dei due parametri che sostituiti nell'equazione generale forniscono:

$$A(s) = \frac{1 + s(0.9254)}{1 + s(0.00166527)}$$

La funzione di trasferimento complessiva del controllore sarà quindi data da:

$$C(s) = K_C \bar{C}(s) A(s) = 7744618 \cdot \frac{1 + s(0.9254)}{1 + s(0.00166527)} \cdot \frac{1 + s(0.1772)}{1 + s(0.00025)} \cdot \frac{1 + s(2.0163)}{1 + s(1428.97)}$$

Si riportano di seguito i diagramma di Bode in catena aperta di  $W(s)$  (Fig 4.20) e quello di  $\bar{C}(s)$  (Fig.4.21):

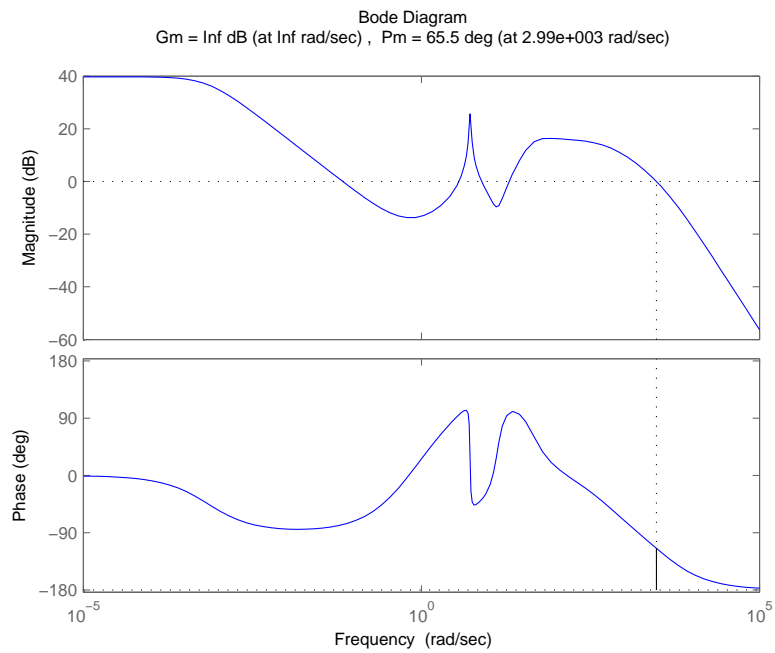


Figura 4.20: Diagramma di Bode e margini di  $W(s)$  dopo l'aggiunta del controllore definitivo

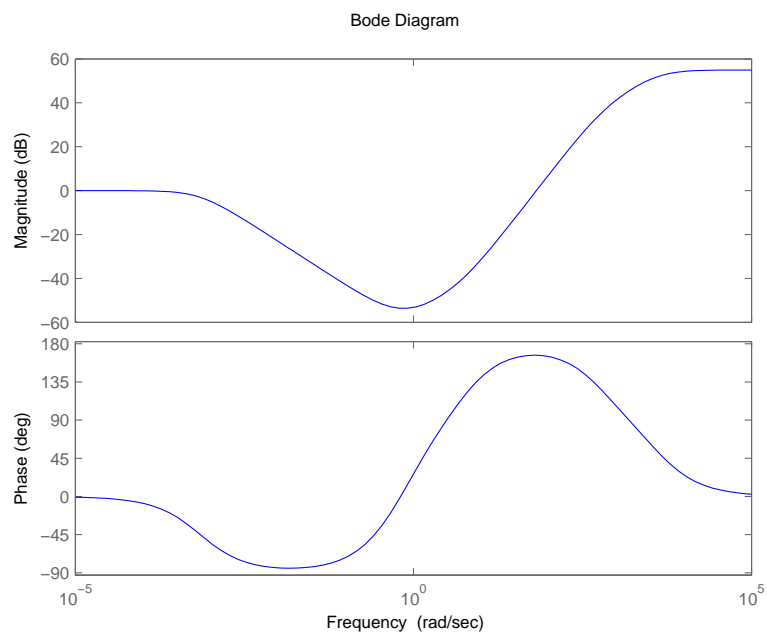


Figura 4.21: Diagramma di Bode di  $\bar{C}(s)$

Dalla Figura 4.20 si può notare come in realtà vi siano molteplici pulsazioni di attraversamento ma, essendo interessati allo studio in bassa frequenza, questo non influisce sul comportamento del sistema. Dalla Figura 4.21, invece, si vede come il controllore definitivo porti un grande guadagno nella fase a basse frequenze e, allo stesso tempo, si nota che, rispetto al sistema originale, la pulsazione di attraversamento sia stata sensibilmente ridotta.

La risposta definitiva al disturbo  $W=0.1m$  è riportata in Figura 4.22:

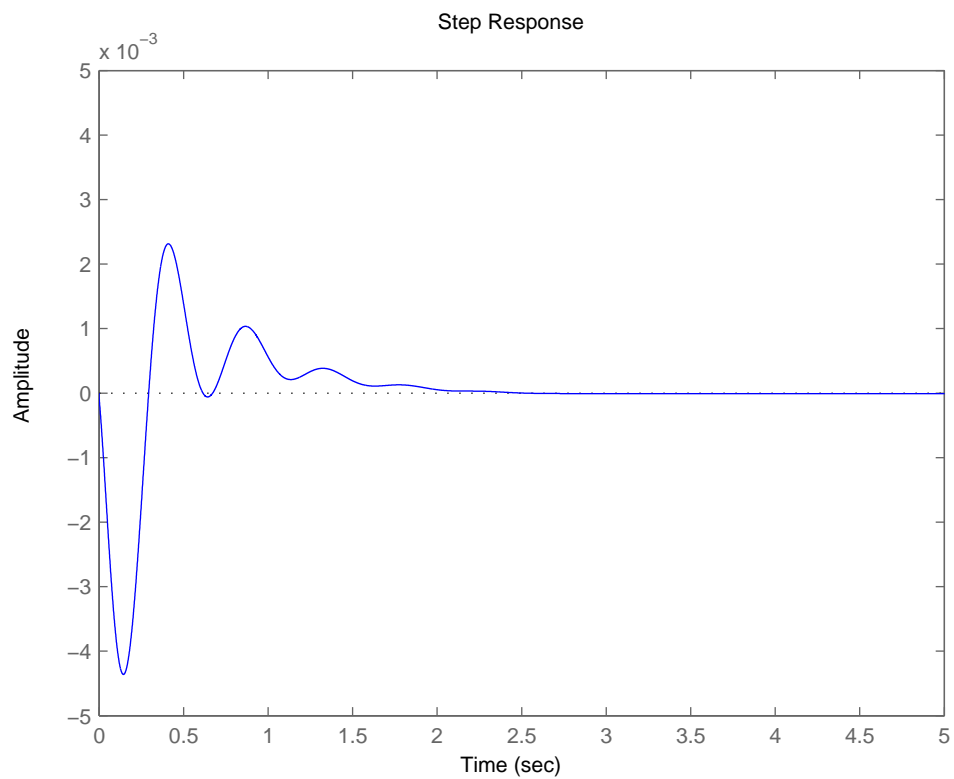


Figura 4.22: Risposta al disturbo in presenza di controllore definitivo

Tutte le specifiche sono ora rispettate e non vi è la necessità di ulteriori iterazioni nel processo di sintesi.

## Capitolo 5

# Conclusione

Quest'ultimo capitolo è dedicato ad una breve conclusione riguardo il lavoro svolto nella stesura di questa tesi. Come ampiamente discusso nei capitoli precedenti lo scopo dell'elaborato è stato quello di prendere in esame un problema reale, semplificarlo, tradurlo in termini matematici ed elaborare diverse strategie per risolverlo. Le difficoltà incontrate sono state innumerevoli: cercare di capire come impostare il problema avendo specifiche calibrate sul disturbo anzichè, come di norma nel corso di studi effettuato, sul riferimento; riuscire ad individuare per ogni strategia di sintesi la soluzione più appropriata, sia in termini di prestazioni che di costi del controllore; cercare di sfruttare al massimo le potenzialità degli strumenti a disposizione, prima nella gestione pratica del problema, (Matlab/Simulink) poi nella stesura della tesi stessa (L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X); infine rapportarsi con il sito di riferimento e le soluzioni da questo proposte, che molte volte si discostavano dalla procedura didattica standard fornita dal corso di Controlli Automatici. Nell'affrontare le problematiche emerse nel corso del lavoro ho avuto modo di mettere in pratica le conoscenze acquisite durante il mio percorso universitario e, allo stesso tempo, di approfondirle ed ampliarle.

# Bibliografia

- [1] S.Zampieri ,Dispensa di controlli Automatici, Edizioni Libreria Progetto Padova, 2011;
- [2] R.C. Dorf, R.H.Bishop, Controlli Automatici, Pearson, 2010;
- [3] <http://www.engin.umich.edu/class/ctms/>, Control Tutorials for Matlab and Simulink.