UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Aspetti matematici delle teorie estese di gravita’

Relatore

Prof. Antonio Ponno

Laureando

Giacomo Melaragno

Anno Accademico 2023/2024

Indice

Introduzione

Una teoria che tenti di spiegare la Dinamica dei sistemi fisici non può sottrarsi dal caratterizzare cosa sia e da dove origini l'inerzia. Se si assume come definizione di massa la "quantità di materia presente in un corpo", bisogna capire se quella dell'inerzia sia una proprietà assoluta, cioè posseduta dal corpo di per sé, oppure se dipenda da ciò rispetto a cui il corpo si muove: in altre parole, se il moto dei corpi si possa descrivere rispetto allo spazio vuoto, o se è lo spostamento relativo dell'uno rispetto agli altri che debba essere considerato. La questione rientra all'interno della formulazione del principio di Mach. Ne seguirà una esposizione della Teoria di Brans-Dicke, la quale introduce un campo scalare per rendere conto di una supposta variabilità della Costante di Gravitazione Universale G. Questa verrà, poi, riconsiderata nel quadro della Teoria Tenso-Scalare di Horndeski, che fa dipendere la Lagrangiana dalle derivate della metrica e del campo scalare fino al secondo ordine. Verrà introdotto il campo scalare del così detto Galileone, un'estensione della Relatività Generale di cui verrà discussa l'unicità, secondo quanto prescritto dal teorema di Lovelock e secondo i limiti imposti dall'osservazione dell'evento GW170817 (un segnale di onda gravitazionale misurato dai due interferometri LIGO e Virgo il 17 agosto 2017). Il problema della teoria di Brans-Dicke-Horndeski sorge quando si considera la stabilità delle soluzioni che, come vederemo, può venire a mancare nell'ipotesi di non degenerazione dell'Hessiana della Lagrangiana. Sarà questo il contesto in cui verrà introdotta l'instabilità di Ostrogradsky (Ostrogradsky ghost), al fine di discutere la realizzabilità fisica delle dette soluzioni e di chiarire perché si imponga di avere equazioni del moto in cui le variabili compaiano derivate fino al secondo ordine. Sarà, poi, considerata la modellizzazione fenomenologica del fondo statistico di onde gravitazionali (SGWB) che questa teoria permette di costruire. Partendo, infine, dai limiti imposti dal teorema di Weinberg sulla risolvibilità del problema della costante cosmologica, verrà mostrato come la Teoria di Horndeski fornisca una scappatoia a tali limitazioni.

Capitolo 1

Mach, Einstein, Brans e Dicke

Nel 1961, Brans e Dicke proposero, alla luce degli allora più recenti sviluppi della fisica, una teoria della gravità più attinente al principio di Mach, il quale sancisce che "le proprietà geometriche e inerziali dello spazio sono prive di significato per uno spazio vuoto, che le proprietà fisiche dello spazio hanno la loro origine nella materia in esso contenuta e che l'unico moto significativo di una particella è il moto relativo ad altra materia nell'Universo"[1]. Secondo le idee di Mach, le forze inerziali osservate localmente in un laboratorio accelerato possono essere interpretate come effetti gravitazionali che hanno origine nella materia distante, accelerata rispetto al laboratorio. Sebbene il principio di Mach abbia ispirato anche la Relatività di Einstein, essa non può essere considerata una teoria Machiana in senso stretto: nella Relatività Generale, le geometrie spaziali sono influenzate dalla distribuzione di massa, ma la geometria non è da questa univocamente determinata. Brans e Dicke proposero un esperimento mentale per evidenziare come, nell'ambito della Relatività Generale, non venga ricompreso del tutto il principio di Mach. Si consideri il caso di uno spazio vuoto, occupato esclusivamente da uno sperimentatore nel suo laboratorio, dotato di un giroscopio. Utilizzando il sistema di coordinate tradizionale, asintoticamente Minkowskiano, fissato rispetto al laboratorio, e assumendo un laboratorio di massa piccola, il suo effetto sulla metrica è di entità ridotta e può essere considerato nell'approssimazione del campo debole. L'osservatore, secondo il principio di equivalenza, misura il comportamento del suo apparato in conformità con le leggi della fisica. Sempre secondo la Relatività Generale, tuttavia, lo sperimentatore potrebbe far ruotare il suo laboratorio, sporgendosi e sparando un proiettile tangenzialmente ad esso. Il giroscopio nel laboratorio continuerebbe a puntare in una direzione quasi fissa rispetto a quella del moto del proiettile, ruotando, però, rispetto alle pareti della stanza. Quindi, dal punto di vista di Mach, il proiettile, molto distante, sembra essere più importante delle molto più massive pareti del laboratorio nel determinare il sistema di coordinate inerziali e l'orientamento del giroscopio: implicazione, questa, che sembra essere vicina all'idea di uno spazio assoluto. Così, escludendo la possibilità che lo spazio fisico abbia proprietà geometriche e inerziali intrinseche oltre a quelle derivate dalla materia in esso contenuta, le opzioni sono due:

- Il caso preso in esame non è una situazione fisicamente realizzabile, per eventuali condizioni al contorno non considerate;
- la Teoria della Relatività Generale deve essere modificata, per tenere conto di queste obiezioni.

Si potrebbe, in effetti, sostenere che l'esempio del proiettile non sia una soluzione fisica, perché l'Universo piatto non è infinito, ma deve soddisfare alla proprietà di essere parte di una 3-geometria chiusa, e di conseguenza il sistema inerziale locale deve essere determinato dalla distribuzione globale di materia, attraverso la curvatura dello spazio-tempo. La Relatività Generale ammette, però, anche soluzioni non-Machiane, come ad esempio la soluzione di Schwarzschild all'interno di una distribuzione di massa a guscio sferico di raggio R. Per $r < R$, vale infatti

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2. \tag{1.1}$$

La metrica può essere, quindi, espressa in un sistema di coordinate Minkowskiano all'interno del guscio; e poiché, secondo la Relatività Generale, tutti i sistemi di coordinate Minkowskiani sono equivalenti, la massa e il raggio del guscio sferico non hanno effetti discernibili sulle leggi della fisica osservate all'interno. Apparentemente, il guscio sferico non contribuisce in alcun modo osservabile agli effetti inerziali all'interno. Se la reazione inerziale è dovuta all'attrazione gravitazionale di masse lontane, la Teoria di Brans-Dicke si propone, quindi, di selezionare, con delle condizioni al contorno, tutte le distribuzioni di massa che permettono una reazione inerziale coerente con questo assunto. Considerando una particella di massa m in caduta libera verso il sole, in un sistema di coordinate scelto in modo tale che l'oggetto non stia accelerando, l'attrazione gravitazionale del Sole può essere considerata bilanciata da un'altra forza gravitazionale: la reazione inerziale. Si noti che l'equilibrio non verrebbe meno anche dopo un riscalamento di tutte le forze gravitazionali. Così, l'accelerazione è determinata dalla distribuzione di massa nell'universo, ma è indipendente dall'intensità delle interazioni gravitazionali. Indicando la massa del Sole con m_s e la distanza della particella dal suo centro r, l'accelerazione può essere espressa secondo Newton come $a = Gm_s/r^2$ oppure, da argomenti dimensionali, in termini della distribuzione di massa come $a \sim mRc^2/Mr^2$. Combinando le due espressioni si ottiene

$$\frac{GM}{c^2R} \simeq 1. \tag{1.2}$$

Questo portò Brans e Dicke a una relazione empirica tra la costante di Gravitazione Universale e la distribuzione di massa nell'Universo

$$\frac{1}{G} \simeq \sum_i \frac{m_i}{c^2R_i} \tag{1.3}$$

Da qui l'idea di una costante di Gravitazione Universale variabile e di un nuovo campo scalare, diverso dagli scalari ottenibili dal tensore di curvatura e dal tensore metrico, che nella scrittura dell'Azione della nuova teoria ricopra lo stesso ruolo rivestito da G^{-1} nella Relatività Generale.

1.1 L'Azione della Teoria di Brans-Dicke

Sia, quindi, un'Azione della forma

$$S = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\phi R - \frac{\omega}{\phi}\phi^{;\mu}\phi_{;\mu} + \mathcal{L}_m\right), \tag{1.4}$$

dove ϕ compare in modo analogo alla costante G^{-1} e il termine aggiuntivo con la derivata covariante del campo scalare è analogo alla densità Lagrangiana di un campo scalare libero, rinormalizzata attraverso la costante di accoppiamento ω. L'apice e il pedice con indice preceduto dalla virgola $({}^{,\mu}{}_{,\mu})$ simboleggiano la derivata parziale, mentre $({}^{;\mu}{}_{;\mu})$ rappresentano la derivata covariante. Infine, R è lo scalare di Ricci e $\sqrt{-g}$ è l'elemento di volume , mentre $\mathcal{L}_m$ è il contributo della materia. Le equazioni del moto possono essere ricavate variando l'Azione rispetto al campo scalare e rispetto al tensore metrico, considerando la connessione di Levi-Civita. In particolare, per quanto concerne il campo ϕ, si applica l'equazione di Eulero-Lagrange per campi scalari (vd. [2])

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\mathcal{L})}\Big) = 0, \tag{1.5}$$

e si ottiene, scrivendo $\Box$ per il Laplaciano generalizzato,

$$R + \frac{2\omega}{\phi}\Box\phi - \frac{\omega}{\phi^2}\phi^\mu\phi_\mu = 0. \tag{1.6}$$

Per la metrica, si procede, invece, dalla variazione vera e propria della (1.4). Partendo da

$$\delta_{g^{\mu\nu}}\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},$$

la variazione rispetto alla metrica è

$$\delta_{g^{\mu\nu}}S = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\phi\delta(g^{\mu\nu}R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}) + \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} - \frac{\omega}{\phi}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}\delta g^{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}\left(\phi R - \frac{\omega}{\phi}\phi^{,\lambda}\phi_{,\lambda} + \mathcal{L}_m\right)\delta g^{\mu\nu}\right].$$

Dall'identità di Palatini $\delta R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta;\gamma} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma;\delta}$ e definendo $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - 2\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}$,

$$\delta_{g^{\mu\nu}}S = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\phi\left(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R\right) - \frac{1}{2}T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi}\left(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}\phi^{\lambda}\phi_{\lambda}\right)\right]\delta g^{\mu\nu}+$$

$$+\frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\phi g^{\mu\nu}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu;\lambda} - \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda;\nu}\right).$$

Chiamando, poi, il primo integrale I_1, si ricava, attraverso l'integrazione per parti,

$$\delta_{g^{\mu\nu}}S = I_1 + \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\phi_{,\lambda} - g^{\mu\eta}\delta^{\nu}_{\lambda}\phi_{,\eta}\right)\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}.$$

Come mostrato in Appendice $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left[g_{\nu\gamma}\nabla_{\mu}(\delta g^{\lambda\gamma}) + g_{\mu\gamma}\nabla_{\nu}(\delta g^{\lambda\gamma}) - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\nabla^{\lambda}(\delta g^{\sigma\rho})\right]$ e, quindi, integrando di nuovo per parti

$$\delta_{g^{\mu\nu}}S = I_1 - \frac{1}{32\pi}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\Big[g_{\nu\gamma}\left(g^{\mu\nu}\phi_{,\lambda\mu} - \delta^{\nu}_{\lambda}\phi^{;\mu}_{,\mu}\right)\delta g^{\lambda\gamma} + g_{\mu\gamma}\left(g^{\mu\nu}\phi_{,\lambda\nu} - \delta^{\nu}_{\lambda}\phi^{\mu}_{,\nu}\right)\delta g^{\lambda\gamma}+$$

$$-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\left(g^{\mu\nu}\phi^{\lambda}_{,\lambda} - \delta^{\nu}_{\lambda}\phi^{,\mu\lambda}\right)\delta g^{\sigma\rho}\Big] =$$

$$\delta_{g^{\mu\nu}}S = I_1 - \frac{1}{32\pi}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\Big[\left(\delta^{\mu}_{\gamma}\phi_{,\lambda\mu} - g\lambda\gamma\phi^{;\mu}_{,\mu}\right)\delta g^{\lambda\gamma} + \left(\delta^{\nu}_{\gamma}\phi_{,\lambda\nu} - \delta^{\nu}_{\lambda}\phi_{,\nu\gamma}\right)\delta g^{\lambda\gamma}+$$

$$-\left(g_{\rho\sigma}\phi^{\lambda}_{,\lambda} - \phi^{,\sigma\rho}\right)\delta g^{\sigma\rho}\Big] = I_1 - \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\phi_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\phi^{\lambda}_{,\lambda}\right)\delta g^{\mu\nu}.$$

Ricapitolando, l'equazione relativa alla metrica è

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2\phi}T_{\mu\nu} + \frac{1}{\phi}\Big(\phi_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box\phi\Big) - \frac{\omega}{\phi^2}\Big(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}\phi^{,\lambda}\phi_{,\lambda}\Big), \tag{1.7}$$

contraendola e cambiandola con la (1.6), si ottiene, poi,

$$\Box\phi = \frac{8\pi}{(3+2\omega)c^4}T \tag{1.8}$$

1.2 Guscio sferico statico

La soluzione dell'equazione (1.7) per l'interno di un guscio sferico statico è

$$ds^2 = -e^{2\alpha}\,dt^2 + e^{2\beta}\left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right)\right], \tag{1.9}$$

dove si riconoscono

$$\begin{aligned} e^{2\alpha} &= e^{2\alpha_0}\left[(B/r-1)/(B/r+1)\right]^{2/\lambda}, \\ e^{2\beta} &= e^{2\beta_0}\left[(1+B/r)^4\left((B/r-1)/(B/r+1)\right)^{2(\lambda-C-1)/\lambda}\right], \\ \phi &= \phi_0\left[(B/r-1)/(B/r+1)\right]^{C/\lambda}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Con $\lambda = \left[(C+1)^2 - C\left(1 - \frac{1}{2}\omega C\right)\right]^{\frac{1}{2}}$, per opportune costanti $C, \alpha_0, \beta_0, \phi_0$, e verifica la condizione $\frac{\lambda-C-1}{\lambda} > 0$. Si introduce, poi, l'equazione di Green

$$\Box\eta = \sqrt{-g}\delta^{(4)}(x - x_0) \tag{1.11}$$

e si assume che η sia una soluzione di "onda ritardata". La condizione su λ implica un tempo di volo finito affinché la luce si propaghi dal raggio B a R, il raggio del guscio, quindi a qualsiasi punto interno x_0. Combinando la (1.11) e la (1.8), vale

$$\left[(-g)^{\frac{1}{2}}g^{\mu\nu}(\eta\phi_{,\mu}-\phi\eta_{,\nu})\right]_{,\nu}=(-g)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{8\pi}{(3+2\omega)c^4}\right]T\eta-\phi\eta\delta^4(x-x_0). \tag{1.12}$$

Si integra questa equazione all'interno dello spazio chiuso ($r<B$) tra l'istante $t_2>t_0$ e l'ipersuperficie di tipo spazio S_1, scelta in modo che l'onda η parta da $r=B$ in un istante appartenente a questa ipersuperficie e che la normale alla superficie in $r=B$ non abbia componente nella direzione r. L'integrale del membro sinistro della (1.12), dopo il passaggio a un integrale di superficie attraverso il teorema di Gauss, svanisce, poiché sia η che $\eta(x_0)$ svaniscono entrambi su t_2, e sia ϕ che $\phi_{,i}$ si annullano su S_1 a $r=B$, con $i\neq 1$, quindi

$$\phi(x_0)=\left[\frac{8\pi}{(3+2\omega)c^4}\right]\int\eta T(-g)^{\frac{1}{2}}\,d^4x\simeq\frac{M}{Rc^2}. \tag{1.13}$$

Capitolo 2

Teoria di Horndeski

Come detto, la Teoria di Horndeski considera un'azione che dipende non solo dal tensore metrico e dalle sue derivate prime, ma anche dalle sue derivate seconde e da un campo scalare, con le sue derivate prime e seconde. L'espressione più generale dell'Azione è la seguente

$$S[g_{\mu\nu},\phi] = \int d^4x\,\sqrt{-g}\left[\sum_{i=2}^{5}\frac{1}{8\pi G}\mathcal{L}_i[g_{\mu\nu},\phi] + \mathcal{L}_m[g_{\mu\nu},\psi_M]\right]. \tag{2.1}$$

Si riconoscono i seguenti termini

$$\mathcal{L}_2 = G_2(\phi,X), \tag{2.2}$$

$$\mathcal{L}_3 = G_3(\phi,X)\Box\phi, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi,X)R + G_{4,X}(\phi,X)\left[(\Box\phi)^2 - \phi_{;\mu\nu}\phi^{;\mu\nu}\right], \tag{2.4}$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\phi,X)G_{\mu\nu}\phi^{;\mu\nu} - \frac{G_{5X}}{6}\left[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi\phi^{;\mu\nu}\phi_{;\mu\nu} + 2\phi_{;\mu\nu}\phi^{;\nu\lambda}\phi^{;\mu}_{;\lambda}\right]. \tag{2.5}$$

Dove G è la costante di Gravitazione Universale, $X \equiv -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{;\mu}\phi_{;\nu}$ e le varie G_i sono funzioni generiche di ϕ e X. I pedici $_\phi$ e $_X$ indicano la derivazione parziale rispetto a queste variabili. Questa risulta essere la più generale Teoria Tenso-Scalare in quattro dimensioni che mostri avere un'equazione di campo del secondo ordine.

2.1 Teorema di Lovelock

Definizione 2.1.1. *Sia (M,π,N) un fibrato e sia $p \in N$, con N varietà liscia n-dimensionale. Le sezioni locali $\phi,\psi \in \Gamma_p(\pi)$ si dicono 2-equivalenti in p, cioè appartenenti allo spazio delle sezioni lisce, se $\phi(p) = \psi(p)$ e se, in un qualche sistema di coordinate adattato (x^i,u^α) intorno a $(p,\phi(p))$,*

$$\left.\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x^i}\right|_p$$

e

$$\left.\frac{\partial^2\phi^\alpha}{\partial x^i\partial x^j}\right|_p = \left.\frac{\partial^2\psi^\alpha}{\partial x^i\partial x^j}\right|_p$$

per $1 \le i,j \le m$ e $1 \le \alpha \le n$. La classe di equivalenza contenente ϕ è chiamata il 2-jet di ϕ in p ed è denotata con $j^2_p\phi$. Il fibrato 2-jet *J^2M è un fibrato su N in cui ciascuna fibra in $x \in N$, indicata con $J^2_x(M)$, consiste di classi di equivalenza delle sezioni $j^2_x\phi$.*

Definizione 2.1.2. *Sia X una varietà liscia di dimensione n. Un tensore naturale del secondo ordine di tipo (p,q) su X è un morfismo di fibrati naturali*

$$A : J^2M \to T^q_p$$

che commuta con l'azione dei diffeomorfismi locali. Tale tensore naturale A assegna a ogni metrica pseudo-riemanniana g su un insieme aperto $U \subset X$ un tensore $A(g)$ di rango (p,q) su U che soddisfa le seguenti condizioni:

1. ***Località**: Se $V \subset U$ è un insieme aperto, allora*

$$A(g)|_V = A(g|_V).$$

2. ***Naturalità**: Per ogni diffeomorfismo $\tau : U \to V$ tra insiemi aperti di X, si ha*

$$A(\tau^* g) = \tau^*(A(g)).$$

3. ***Secondo ordine**: In ogni punto $x \in X$, il valore del tensore $A(g)$ dipende solo dalla metrica g e dalle sue derivate prime e seconde in x.*

In coordinate locali $x^1, \ldots, x^n$, esistono funzioni lisce universali $A^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p}$ tali che:

$$A(g) = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_q,\beta_1,\ldots,\beta_p} A^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_p}(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\lambda}, g_{\mu\nu,\rho\sigma})\, \partial_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\alpha_q} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_p},$$

dove $g_{\mu\nu,\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}$ e $g_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}$. Se $x \in X$ è un punto, esistono diffeomorfismi locali che mappano x in qualsiasi altro punto di X. Quindi, dalla condizione di naturalità, ne segue che un tensore naturale è determinato dal suo valore sulle espansioni di Taylor delle metriche in x. In coordinate normali, l'espansione di Taylor del secondo ordine di una metrica g in x è $\eta_{ab} + g_{ab,cd}$, dove η è il tensore di Minkowski. Queste osservazioni dicono che definire un tensore naturale è equivalente a fornire la seguente collezione di funzioni lisce:

$$f^{\alpha_1 \ldots \alpha_q}_{\beta_1 \ldots \beta_p}(g_{\mu\nu,\rho\sigma}) := A^{\alpha_1 \ldots \alpha_q}_{\beta_1 \ldots \beta_p}(\eta_{\mu\nu}, 0, g_{\mu\nu,\rho\sigma}). \tag{2.6}$$

Le coordinate normali sono ben definite a meno di una trasformazione del gruppo ortogonale O di η. Pertanto, si può vedere che queste funzioni $f^{\alpha_1 \ldots \alpha_q}_{\beta_1 \ldots \beta_p}$ soddisfano ancora una condizione equivariante. A tal fine, si introducono i tensori normali in x:

Definizione 2.1.3. *Lo spazio dei tensori normali in un punto $x \in X$ è il sottospazio vettoriale $N \subset \otimes^4 T^*_x X$ che consiste di elementi $T_{\mu\nu\rho\sigma}$ con le seguenti simmetrie:*

1. *Simmetria nei primi due e negli ultimi due indici:*

$$T_{\mu\nu\rho\sigma} = T_{\nu\mu\rho\sigma}, \quad T_{\mu\nu\rho\sigma} = T_{\mu\nu\sigma\rho}.$$

2. *La somma ciclica sugli ultimi tre indici è nulla:*

$$T_{\mu\nu\rho\sigma} + T_{\mu\sigma\nu\rho} + T_{\mu\rho\sigma\nu} = 0.$$

Teorema 2.1.1. *La mappa $A \mapsto f$ stabilisce un isomorfismo di spazi vettoriali $\mathbb{R}$:*

$$\{\textit{Tensori naturali } (p,q)\} \cong \{\textit{Mappe lisce } O\textit{-equivarianti } f : N \to T^q_p, x\}$$

dove T^q_p, x è lo spazio vettoriale dei tensori (p,q) in un punto $x \in X$ e O è il gruppo ortogonale per la metrica diagonale η in x.

Dimostrazione. Data una metrica g in un intorno W di un punto $x \in X$ e U, l'immagine della carta locale nell'intorno del punto, un tensore normale in x può essere definito usando coordinate normali $\tilde{x}^0, \ldots, \tilde{x}^{n-1}$ per g in x come:

$$g_{\mu\nu,\rho\sigma}(x)\, d\tilde{x}^\mu \otimes d\tilde{x}^\nu \otimes d\tilde{x}^\rho \otimes d\tilde{x}^\sigma$$

Infatti, in coordinate normali, vale che

$$g_{00} = -1 - R_{0i0j}X^iX^j + \mathcal{O}(|X|^3), \tag{2.7}$$

$$g_{0i} = -\frac{2}{3}R_{0jik}X^jX^k + \mathcal{O}(|X|^3), \tag{2.8}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ikjl}X^kX^l + \mathcal{O}(|X|^3). \tag{2.9}$$

La normalità del tensore segue dall'identità di Bianchi. Sia $t \in T^q_{p,x}$. Si definisca la mappa liscia O-equivalente f_t con regola $W \mapsto t(U(W), g(W))(x)$, identificando la fibra di $EU(W) \otimes F^*U(W)$ in x con $T^q_{p,x}$ tramite la base canonica determinata dalle coordinate ortogonali. Ora sia $a \in O(n)$. Allora l'espansione di $g_{ij}(aW)$ in x nella carta di coordinate normali determinata da a è la stessa di quella di $g_{ij}(W)$ rispetto alla carta di inclusione che definisce tali coordinate. Poiché i coefficienti di t sono dati da polinomi della metrica e delle sue derivate, i coefficienti di $t(U(aW), g(aW))(x)$ rispetto alla base di $T^q_{p,x}$, ottenuti applicando a alla base standard sono gli stessi di quelli di $t(U(W), g(W))(x)$ rispetto alla base standard. Pertanto, f_t è una mappa polinomiale O-equivalente che si annulla tranne che per un numero finito di addendi. Per l'implicazione inversa si veda [3]. □

Si consideri, ora, il campo tensoriale $T^2_{0,x}$. Dato il tensore naturale A, si definisce il differenziale

$$df : N \to T^2_{0,x} \otimes N^*.$$

Come dimostrato in [4], si ottiene il seguente risultato:

Teorema 2.1.2. *La mappa $A \mapsto d^kf$ stabilisce un isomorfismo di spazi vettoriali $\mathbb{R}$:*

$$T^2_{0,x} \cong (T^2_{0,x} \otimes N^*)^O,$$

dove $(T^2_{0,x} \otimes N^*)^O$ è il sottospazio di vettori invarianti sotto l'Azione del gruppo ortogonale O.

In particolare il differenziale di A è un tensore di rango (0,6) che eredita le simmetrie dei tensori normali stabilite nella definizione (2.1.3). A questo punto si può dimostrare il seguente

Teorema 2.1.3. ***(di Lovelock)*** *Tutti i tensori naturali di rango (2,0) $A^{\alpha\beta}(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\lambda}, g_{\mu\nu,rho\sigma})$, concomitanti della metrica e delle sue derivate prime e seconde, a divergenza nulla, si possono esprimere nella forma*

$$A^{\alpha\beta} = ag^{\alpha\beta} + bG^{\alpha\beta},$$

essendo $G^{\alpha\beta}$ il tensore di Einstein.

Dimostrazione. Definendo

$$A^{\alpha\beta:\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu,\rho\sigma}},$$

per quanto esplicitato attraverso il teorema (2.1.1), segue che

$$A^{\alpha\beta:\mu\nu,\rho\sigma} = A^{\alpha\beta:\nu\mu,\rho\sigma} = A^{\alpha\beta:\mu\nu,\sigma\rho}, \tag{2.10}$$

$$A^{\alpha\beta:\mu\nu,\rho\sigma} + A^{\alpha\beta:\mu\rho,\nu\sigma} + A^{\alpha\beta:\mu\sigma,\nu\rho} = 0, \tag{2.11}$$

$$A^{\alpha\beta:\mu\nu,\rho\sigma} = -A^{\alpha\beta:\mu\rho,\nu\sigma} - A^{\alpha\beta:\mu\sigma,\nu\rho} = -A^{\alpha\beta:\rho\mu,\nu\sigma} - A^{\alpha\beta:\mu\sigma,\nu\rho} = A^{\alpha\beta:\rho\nu,\mu\sigma} + A^{\alpha\beta:\rho\sigma,\mu\nu} - A^{\alpha\beta:\mu\sigma,\nu\rho} = A^{\alpha\beta:\rho\sigma,\mu\nu}.$$

Quindi,

$$A^{\alpha\beta:\mu\nu,\rho\sigma} = A^{\alpha\beta:\rho\sigma,\mu\nu}. \tag{2.12}$$

Dal fatto che la divergenza è nulla si ricava che

$$A^{\alpha\beta}_{;\alpha} = A^{\alpha\beta:\mu\nu,\rho\sigma}g_{\mu\nu,\rho\sigma\alpha} + A^{\alpha\beta:\mu\nu,\rho}g_{\mu\nu,\rho\alpha} + A^{\alpha\beta:\mu\nu}g_{\mu\nu,\alpha} + \Gamma^r_{\alpha\beta}A^{\alpha r}, \tag{2.13}$$

da cui risulta

$$\frac{\partial (A^{ij}{}_{;j})}{\partial g_{ab,rst}} = \frac{1}{3}\left(A^{it;ab,rs} + A^{is;ab,tr} + A^{ir;ab,st}\right) = 0. \tag{2.14}$$

Sia poi

$$A^{\alpha\beta:\mu\nu,\rho\sigma:\gamma\delta,\epsilon\zeta} = A^{\alpha\beta:\gamma\delta,\epsilon\zeta:\mu\nu,\rho\sigma}, \tag{2.15}$$

ma essendo n=4, come mostrato esplicitamente da Lovelock in [5], queste derivate devono annullarsi. Integrando e considerando la scrittura della metrica e delle sue derivate in coordinate normali, si ottiene

$$A^{\alpha\beta:\mu\nu,\rho\sigma} = \alpha^{\alpha\beta:\mu\nu,\rho\sigma} g_{\mu\nu,\rho\sigma} + bg^{\alpha\beta}, \tag{2.16}$$

essendo il secondo addendo dovuto alla costante di integrazione, in cui sono escluse le derivate prime, per la scrittura delle coordinate normali; mentre la proporzionalità con il tensore metrico è dimostrata in Appendice. Poiché nelle dette coordinate $R_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(g_{\nu\sigma,\mu\rho} + g_{\rho\mu,\sigma\nu} - g_{\nu\rho,\mu\sigma} - g_{\sigma\mu,\rho\nu}\right)$,

$$A^{\alpha\beta:\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{2}{3}\alpha^{\alpha\beta:\mu\nu,\rho\sigma} R_{\mu\nu,\rho\sigma} + bg^{\alpha\beta}. \tag{2.17}$$

Riferendosi nuovamente all'articolo [5], si ottiene che, ponendo $\sqrt{g} = \sqrt{|det(g_{\mu\nu})|}$,

$$\alpha^{\alpha\beta:\mu\nu,\rho\sigma} = \sum_n \frac{a_n}{4} g^{h\pi_n}[g^{rs}g^{tu}] + \sum_n \frac{b_n}{48\sqrt{g}} {}^{\pi_n}[\varepsilon^{\mu\nu,\rho\sigma} g^{\mu\nu}], \tag{2.18}$$

e $a_1 = -4\alpha$, come per tutte le permutazioni ottenute da π_1 per scambio dei due tensori o per simmetria dei loro rispettivi indici, invece, $a_n = \alpha$, se la permutazione è pari o $a_n = -2\alpha$, se la permutazione è dispari. Poiché per le simmetrie del tensore di curvatura $b^{\mu\nu,\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ e ricordando l'espressione del tensore di Einstein, si ottiene

$$A^{\alpha\beta} = -8\alpha G^{\alpha\beta} + bg^{\alpha\beta}. \tag{2.19}$$

$\square$

Si può, quindi, concludere che, nelle ipotesi del teorema detto, vige l'unicità delle soluzioni delle equazioni di Einstein. Di rimando all'approccio di Missner, Thorne e Wheeler [6], la formulazione delle equazioni di Einstein deriva dal porre l'uguaglianza tra il tensore energia-impulso e un tensore di rango 2, simmetrico e a divergenza nulla. Se questo tensore è il Tensore di Einstein, ciò equivale a richiedere l'annullarsi del Momento di Rotazione, la cui espressione sottostà proprio all'Identità di Bianchi contratta, cosa che, in ultima analisi, può essere ricondotta alla nozione topologica che l'operatore di bordo (n+1)-esimo ha immagine contenuta nel nucleo dell'n-esimo. La conclusione che si inferisce da questo teorema è che, posta la dipendenza del tensore soltanto dalla metrica e dalle sue derivate prime e seconde e posto che sia a divergenza nulla, si giunge a determinare un numero di simmetrie, attraverso l'isomorfismo del teorema 2.1.2, tale per cui, in $n = 4$ dimensioni, l'unico tensore che le soddisfa tutte non è altro che una combinazione lineare del Tensore di Einstein stesso con la metrica; ma questo richiedendo, in ogni caso, la Local Lorentz Invariance, attraverso l'espansione della metrica al secondo ordine, mediante le coordinate normali. Si può anche dimostrare, sempre da [5], che la Lagrangiana più generale

$$L = L(g_{ij}; g_{ij,k}; g_{ij,kh}),$$

che ammette $\sqrt{-g}A^{ij}$ come tensore di Eulero-Lagrange è

$$g^{\frac{1}{2}}\left(\alpha + \beta\delta^{ij}_{ab}R^{ab}_{ij} + \gamma\delta^{ijkl}_{abcd}R^{ab}_{ij}R^{cd}_{kl} + \mu R_{ijkl}\tilde{R}^{ijkl}\right),$$

dove α, β, γ e μ sono costanti e $\tilde{R}^{ijkl}$ è il duale di R_{ijkl}.

2.2 Instabilità di Ostrogradsky

La necessità di trattare teorie che si risolvono in una scrittura dell'Azione che prevede l'uso di derivate fino al secondo ordine comporta un'attenta discussione di eventuali gradi di libertà ghost. Anche in meccanica classica è noto che ogni Lagrangiana non degenere che contiene derivate temporali delle coordinate generalizzate successive a quelle del primo ordine è affetta dall'instabilità di Ostrogradsky, cioè l'Hamiltoniana non è limitata dal basso. Si può dimostrare che, in caso si abbiano equazioni del moto (EoMs) con derivate fino al terzo ordine, se la Lagrangiana è non degenere, l'instabilità di Ostrogradsky si presenta allo stesso modo; la Teoria di Horndeski è, infatti, costruita proprio a partire dalla richiesta di avere al più derivate seconde della metrica e del campo scalare. Con derivate del secondo ordine, le equazioni di Eulero-Lagrange (E-L) per un sistema a N coordinate generalizzate sono

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \tag{2.20}$$

con x che rappresenta un elemento generico del set di N coordinate. Per questa Lagrangiana, la derivata di ordine più alto nelle equazioni E-L è $x^{(4)}$, che compare solo in un termine dell'espressione esplicita di (2.20), quindi per non avere termini di ordine $x^{(4)}$, si richiede

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{x}_i \partial \ddot{x}_j} = 0, \tag{2.21}$$

per ogni $i, j = 1, \ldots, N$. Integrando, la Lagrangiana è

$$L = \sum_{j=1}^{N} \ddot{x}_j f_j(x, \dot{x}) + g(x, \dot{x}), \tag{2.22}$$

per funzioni arbitrarie f_j e g. la (2.20) è, allora,

$$\sum_{j=1}^{N} x_j^{(3)} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i} \right) + (\text{derivate di ordine inferiore}) = 0. \tag{2.23}$$

Al fine di ottenere un'equazione del terzo ordine si impone che il coefficiente per $x_j^{(3)}$ si annulli:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i}. \tag{2.24}$$

Dal teorema di Green segue che, per una generica F,

$$f_i = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} F(x, \dot{x}) \tag{2.25}$$

e la Lagrangiana e le equazioni del moto si scrivono

$$L = \sum_{j=1}^{N} \ddot{x}_j f_j(x, \dot{x}) + g(x, \dot{x}) \qquad \sum_{j=1}^{N} M_{ij}^{(x)} \dddot{x}_j + (\text{ordini inferiori}) = 0, \tag{2.26}$$

in cui si definisce

$$M_{ij}^{(x)} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}. \tag{2.27}$$

In realtà si può sempre considerare un N pari perché $M^{(x)}$ è una matrice antisimmetrica $N \times N$ e si può diagonalizzare a blocchi, con blocchi 2×2, aventi elementi m_a sull'antidiagonale e termini nulli sulla diagonale; ma se $N = 2I - 1$ è dispari, dal teorema di Jacobi segue che $\det \Lambda = 0$ ed esiste un J tale che $2(J-1)$ righe e colonne di M sono occupate da zeri. Non tutte le variabili obbediscono a EoMs del terzo ordine indipendenti e quindi non contribuiscono alla presenza dell'instabilità di Ostrogradsky. Per N pari, se $M^{(x)}$ ha m_a che si annullano, si può ridurre il numero di variabili indipendenti, che comunque rimane pari e $\det M^{(x)} \neq 0$. Si può, allora, sostituire $N \to 2N$. Usando i moltiplicatori di Lagrange λ_i

$$L = \sum_{j=1}^{2N} [\dot{y}_j f_j(x, y) + \lambda_j(\dot{x}_j - y_j)] + g(x, y). \tag{2.28}$$

La variazione rispetto a λ_i comporta $\dot{x}_i = y_i$, cioè la Lagrangiana di partenza. Dalla (2.28), che è del primo ordine in x_i, y_i e λ_i, si ottiene che le equazioni del moto sono del secondo ordine e, quindi, servono $12N$ condizioni iniziali. I momenti canonici per x_i, y_i, λ_i sono

$$p_{x_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \lambda_i, \qquad p_{y_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = f_j(x,y), \qquad p_{\lambda_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_i} = 0. \tag{2.29}$$

Poiché tutti i momenti non dipendono da $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{\lambda}_i$, i secondi non si possono esprimere in funzione dei primi: ne conseguono $6N$ vincoli primari

$$\phi_{x_i} \equiv p_{x_i} - \lambda_i = 0, \qquad \phi_{y_i} \equiv p_{y_i} - f_i(x,y) = 0, \qquad \phi_{\lambda_i} \equiv p_{\lambda_i} = 0. \tag{2.30}$$

Essi vengono incorporati nella Lagrangiana di partenza, attraverso i relativi moltiplicatori di Lagrange μ_{q_i}, e l'Azione diventa

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{j=1}^{2N} \left(p_{q_j} \dot{q}_j - \mu_q \phi_q \right) - H \right], \tag{2.31}$$

dove l'Hamiltoniana H è data dalla trasformata di Legendre della Lagrangiana

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_{q_i}} + \sum_{j=1}^{2N} \sum_{q=x,y,\lambda} \mu_q \frac{\partial \phi_q}{\partial p_{q_i}}, \qquad \dot{p}_{q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{2N} \sum_{q=x,y,\lambda} \mu_q \frac{\partial \phi_q}{\partial q_i}, \tag{2.32}$$

per $q_i = x_i$, y_i o λ_i e l'evoluzione di ogni funzione $\xi(p,q)$ è governata da

$$\frac{d\xi}{dt} = \sum_{j=1}^{2N} \sum_{q=x,y,\lambda} \left(\frac{\partial \xi}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \xi}{\partial p_{q_j}} \dot{p}_{q_j} \right) = \{\xi, H\} + \sum_{j=1}^{2N} \sum_{q=x,y,\lambda} \mu_q \{\xi, \phi_q\}. \tag{2.33}$$

L'Hamiltoniana totale è

$$H_T = H + \sum_{j=1}^{2N} \sum_{q=x,y,\lambda} \mu_q \phi_q, \tag{2.34}$$

in cui il simbolo $\approx$ esprime un'uguaglianza valida dopo aver commutato con H_T attraverso le parentesi di Poisson e avere imposto che tutti i vincoli si annullino. Si impone la seguente equazione per far sì che i vincoli siano rispettati durante l'evoluzione temporale. Applicando la (2.33) ai vincoli x, y, λ,

$$\frac{d\phi_{y_i}}{dt} = -\lambda_i - \sum_{j=1}^{2N} (\mu_{x_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} + \mu_y M_{ij}^{(y)}) - \frac{\partial g}{\partial y_i} \qquad \frac{d\phi_{\lambda_i}}{dt} = -y_i + \mu_i. \tag{2.35}$$

Poiché $\det M^{(y)} \neq 0$, queste relazioni possono essere invertite e si possono determinare tutti i moltiplicatori di Lagrange.

$$\mu_{x_i} = y_i, \quad \mu_{y_i} = -(M^{(y)})^{-1} \left(\vec{\lambda} + \nabla_y g + J_f \vec{y} \right), \qquad \mu_{\lambda_i} = (M^{(y)})^{-1} \left(\vec{\lambda}_k + \nabla_x g + J_f^T (J_f^T \vec{y}) \right) + \nabla_y g, \tag{2.36}$$

dove J_f è lo Jacobiano di f. Il che significa che non ci sono vincoli secondari, perché tutti i possibili sono soddisfatti da queste relazioni. Poiché tutti i moltiplicatori di Lagrange sono determinati, la (2.36) deve essere invertibile e, in effetti,

$$\{\phi_{y_i}, \phi_{y_j}\} = M_{ij}^{(y)} \qquad \{\phi_{x_i}, \phi_{y_j}\} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \qquad \{\phi_{\lambda_i}, \phi_{\phi_j}\} = \delta_{ij}, \tag{2.37}$$

mentre tutte le altre combinazioni sono nulle. Quindi, chiamata Δ la matrice antisimmetrica associata alle parentesi di Poisson dei vincoli, $\det \Delta = \det M^{(y)} \neq 0$. Pertanto, tutti i $6N$ vincoli sono di seconda classe, cioè per ognuno di essi ne esiste almeno un altro con cui non commutano rispetto alle parentesi di Poisson. Conseguentemente, rimangono $12N - 6N = 6N$ condizioni iniziali. Con questi moltiplicatori di Lagrange si ottiene la corretta espressione per H_T nella (2.34) e tutti i vincoli sono sempre soddisfatti, se lo sono inizialmente. Poi, sulla ipersuperficie dello spazio delle fasi in cui i vincoli sono soddisfatti vale $H_T \approx H$ e quindi l'Hamiltoniniana H è lineare in p_{x_i}, che non è soggetto a vincoli, dalla (2.30), quindi l'Hamiltoniano non è limitato dal basso.

2.3 Il Galileone e la Teoria di Horndeski

Data l'unicità delle equazioni di Einstein, sancita nella sezione precedente, una delle opzioni che si hanno per ottenere teorie di Gravità estesa è di ipotizzare che l'Azione dipenda anche da un campo scalare e dalle sue derivate prime e seconde e che però sia tale per cui le EoMs siano al più del secondo ordine: è questa l'idea a cui si ispira la Teoria di Horndeski.

2.3.1 Il Galileone

Occorre, a questo punto, indugiare su una Teoria intimamente legata a quella di Horndeski: il Galileone, cioè un campo scalare ϕ, che gode della simmetria

$$\phi \to \phi + b^{\mu} x_{mu} + c. \tag{2.38}$$

Prima di tutto, si determina la Teoria più generale del campo scalare su un background di Minkowski fissato, che produce un'equazione di campo del secondo ordine, assumendo che la Lagrangiana contenga al massimo derivate seconde di ϕ e sia polinomiale in $\partial_\mu \partial_\nu \phi$. Successivamente, la Teoria viene promossa a una forma covariante, aggiungendo i termini di compensazione appropriati (unici) affinché le equazioni del campo siano del secondo ordine sia per ϕ che per la metrica. In questo modo, si può ottenere il Galileone covariante. Si prenda in considerazione, per prima cosa, il caso di spazio piatto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Gal}} = c_1 \phi - \frac{c_2}{2}\, \partial^\mu \phi\, \partial_\mu \phi - \frac{c_3}{2}\, \Box\phi\, \partial^\mu \phi\, \partial_\mu \phi - \frac{c_4}{4}\Big[(\Box\phi)^2\, \partial_\mu\phi\, \partial^\mu\phi - 2\,\Box\phi\, \partial^\mu \partial^\nu \phi\, \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi +\\
- \partial^\mu\partial^\nu\phi \partial_\mu\partial_\nu\phi\, \partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi + 2\, \partial^\mu\partial^\alpha\phi\, \partial_\alpha\partial_\nu\phi\, \partial_\mu\phi\partial^\nu\phi\Big] - \frac{c_5}{5}\Big[(\Box\phi)^3\, \partial^\mu\phi\, \partial_\mu\phi - 3(\Box\phi)^2\, \partial_\mu\phi\, \partial^\mu\partial^\nu\phi\, \partial_\nu\phi +\\
+ 2\, \partial_\mu\partial_\nu\phi\, \partial^\nu\partial^\lambda\phi\, \partial_\lambda\partial^\mu\phi\, \partial_\alpha\partial^\alpha\phi + 3\, \partial_\mu\partial_\nu\phi\, \partial^\mu\partial^\nu\phi\, \partial_\alpha\phi\, \partial^\alpha\partial^\beta\phi\, \partial_\beta\phi\, - 6\, \partial_\mu\phi\, \partial^\mu\partial^\nu\phi\, \partial_\nu\partial_\alpha\phi\, \partial^\alpha\partial^\beta\phi\, \partial_\beta\phi\\
- 3\,\Box\phi\, \partial_\mu\partial_\nu\phi\, \partial^\mu\partial^\nu\phi\, \partial_\alpha\partial^\alpha\phi + 6\,\Box\phi\, \partial_\mu\phi\, \partial^\mu\partial^\alpha\phi\, \partial_\alpha\partial_\beta\phi\, \partial^\beta\phi\Big].
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Questa è la Lagrangiana più generale che soddisfa alle proprietà dette in quattro dimensioni [7], in quanto ogni altra permutazione delle derivate parziali o l'aggiunta di un'altra derivata parziale realizzerebbe una derivata totale. Sia, infatti, Π l'Hessiana del campo ϕ e $[\Pi^n]$ una contrazione ciclica, allora ogni termine della Lagrangiana n-esima dovrà essere proporzionale alle seguenti scritture

$$[\Pi]^{n-k}\partial\phi\Pi^k\partial\phi, \quad [\Pi]^{n-k}[\Pi]^k\partial\phi\partial\phi. \tag{2.40}$$

Si può ridurre il numero di termini con integrazioni per parti, ma bisogna farlo cautamente, in quanto, durante la covariantizzazione, lo scambio di derivate implica la comparsa di tensori di Ricci. Ad esempio,

$$c_4 X^\mu \left[\nabla_\mu \nabla_\nu \nabla^\nu \phi - \nabla_\nu \nabla_\mu \nabla^\nu \phi\right] = -c_4 X^\mu \nabla_\mu (R_\nu{}^\nu \nabla^\nu \phi), \tag{2.41}$$

e la Teoria del Galileone generalizzato, equivalente a quella di Horndeski, può essere ottenuta introducendo le funzioni generiche $G_i(\phi, X)$ al posto di quelle costanti della (2.39), perdendo, però, la simmetria galileiana.

2.3.2 Teoria di Horndeski

Per quanto ottenuto nella sottosezione precedente, si scrive l'Azione della Teoria di Horndeski

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \delta^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\sigma}\left[\kappa_1 \phi^\mu_\alpha R^{\nu\sigma}_{\beta\gamma} + \frac{2}{3}\kappa_1 X \phi^\mu_\alpha \phi^\nu_\beta \phi^\sigma_\gamma + \kappa_3 \phi_\alpha \phi^\mu R^{\nu\sigma}_{\beta\gamma} + 2\kappa_3 X \phi_\alpha \phi^\mu \phi^\nu_\beta \phi^\sigma_\gamma\right]\\
+ \delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\left[(F + 2W) R^{\mu\nu}_{\alpha\beta} + 2F_X \phi^\mu_\alpha \phi^\nu_\beta + 2\kappa_8 \phi_\alpha \phi^\mu \phi^\nu_\beta\right]\\
- 6(F_\phi + 2W_\phi - X\kappa_8)\Box\phi + \kappa_9,
\end{aligned} \tag{2.42}$$

in cui la funzione F soddisfa alla condizione

$$F_{,X} = 2(k_3 + 2Xk_{3X} - k_{1\phi}). \tag{2.43}$$

Le due Lagrangiane (2.1) e (2.42) possono essere mappate l'una nell'altra attraverso le relazioni

$$\begin{aligned} G_2 &= \kappa_9 + 4X \int^X dX' \, (\kappa_{8\phi} - 2\kappa_{3\phi\phi}), \\ G_3 &= 6F_\phi - 2X\kappa_8 - 8X\kappa_{3\phi} + 2\int^X dX' \, (\kappa_8 - 2\kappa_{3\phi}), \\ G_4 &= 2F - 4X\kappa_3, \\ G_5 &= -4k_1. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Ad ogni modo, le equazioni del moto del settore scalare ($\mathcal{E}_\phi$) e del settore tensoriale ($\mathcal{E}_{\mu\nu}$) non sono indipendenti, ma, al contrario, vale [8]

$$\frac{1}{X}\nabla^\mu \mathcal{E}_\phi \nabla^\nu \mathcal{E}_{\mu\nu} = 0. \tag{2.45}$$

2.4 Analisi Hamiltoniana

Si può scrivere l'intervallo nella forma data dalla decomposizione (1+3) di Arnowitt, Deser e Misner (ADM), prendendo come famiglia di ipersuperfici, in cui decomporre lo spazio-tempo, l'insieme di quelle caratterizzate da $\phi(t)$ costante [9].

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt), \tag{2.46}$$

essendo h_{ij} la metrica della 3-geometria della ipersuperficie. Il vettore ortogonale alle ipersuperfici è

$$n^\mu \equiv -\frac{\nabla^\mu \phi}{\sqrt{-X}}. \tag{2.47}$$

Attraverso le equazioni di Gauss-Codazzi, le proprietà geometriche dello spazio possono essere definite in funzione della geometria estrinseca delle ipersuperfici tridimensionali embedded nello spazio quadridimensionale

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R_{ij} &= {}^{(3)}R_{ij} + KK_{ij} - K_{ik}K^k_j + n^\mu \nabla_\mu K_{ij}, \\ {}^{(4)}R &= {}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} - 2\nabla_\mu(n^\nu \nabla_\nu n^\mu - n^\mu \nabla_\nu n^\nu), \\ G_{ij} &= {}^{(3)}R_{ij} + KK_{ij} - 2K_{ik}K^k_j - h_{ij}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Dove $K^{ij} = \nabla^i n^j$ e $K = h_{ij}K^{ij}$. A partire da questo, si ottiene che la doppia derivata covariante del campo ϕ è

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \phi = -h^{-1}(K_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu - n_\nu n_\mu) + \frac{h^2}{2}\nabla^\lambda \phi X_\lambda n_\mu n_\nu. \tag{2.49}$$

Inserendo queste espressioni nella (2.1) si ottiene l'Azione in forma ADM:

$$\begin{aligned} S = \int dt\, d^3x \sqrt{\gamma}\sqrt{N}\Big[& A_2(t,N) + A_3(t,N)K + B_4(t,N){}^{(3)}R - (B_4 + NB_{4N})\left(K^2 - K_{ij}K^{ij}\right) + \\ & + B_5(t,N)G^{(3)}_{ij}K^{ij} + \frac{NB_{5N}}{6}\left(K^3 - 3KK_{ij}K^{ij} + 2K_{ij}K^{jk}K^i_k\right)\Big], \end{aligned} \tag{2.50}$$

tale che

$$\begin{aligned} A_2 = G_2 + \sqrt{X}\int^X \frac{G_{3\phi}}{\sqrt{X'}}\,dX', \quad A_3 = \int^X G_{3X'}\sqrt{2X'}\,dX' - 2\sqrt{2X}G_{4\phi}, \\ B_4 = G_4 - \frac{\sqrt{X}}{2}\int^X \frac{G_{5\phi}}{\sqrt{X'}}\,dX', \quad B_5 = -\int^X G_{5X'}\sqrt{2X'}\,dX'. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Capitolo 3

Stochastic Gravitational Wave Background nella Teoria di Horndeski

Recentemente, è stato proposto un modello fenomenologico da indagare, per testare una discrepanza tra le previsioni della Teoria di Horndeski e della Relatività Generale [10]. Sarà, quindi, oggetto della presente indagine il fondo stocastico di onde gravitazionali (SGWB), nell'ipotesi che questo sia uniforme. Si consideri una metrica di background della forma Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker piatta:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2); \tag{3.1}$$

si prenda, poi, una metrica perturbata della forma

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.2}$$

tale che $g_{00} = -(1+\alpha)^2$ $g_{0i} = \partial_i\beta$, $g_{ij} = (1+2\zeta)\delta_{ij} + h_{ij}$ e h_{ij}. Questo è un tipo di perturbazione relativa al solo campo tensoriale. Ponendosi, infatti, in gauge unitaria è sempre possibile disaccoppiare perturbazioni scalari e tensoriali. Sotto trasformazione di coordinate $t \to t+T(\vec{x},t)$, si ha $\delta\phi \to \delta\phi+\dot{\phi}T$; e per un'opportuna scelta di T, si pone la variazione del campo scalare a 0. In primis, si scrive lo sviluppo del tensore di Ricci al primo e secondo ordine

$$\begin{aligned}
R^{(1)}_{\mu\nu}(h) &\equiv \frac{1}{2}\left(-h^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - h^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} + h^{\alpha}_{\alpha\mu,\nu} + h^{\alpha}_{\alpha\nu,\mu}\right), \\
R^{(2)}_{\mu\nu}(h) &\equiv \frac{1}{2}\Bigg[\frac{1}{2}h_{\alpha\beta,\mu}h^{\alpha\beta}_{,\nu} + h^{\alpha\beta}\left(h_{\alpha\beta,\mu\nu} + h_{\mu\nu,\alpha\beta} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\alpha\nu,\beta\mu}\right) \\
&\qquad + h^{\alpha\beta}_{\nu}\left(h_{\alpha\mu,\beta} - h_{\beta\mu,\alpha}\right) - \left(h^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - \frac{1}{2}h^{\alpha}{}_{,\beta}\right)\left(h_{\alpha\mu,\nu} + h_{\alpha\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\alpha}\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Da queste relazioni si possono inferire anche gli sviluppi dello scalare di curvatura e del tensore di Einstein (usando la metrica di background). Espandendo l'Azione (2.1) al secondo ordine si può, quindi, distinguere parte tensoriale e parte scalare

$$S^{(2)} = S^{(2)}_T + S^{(2)}_S. \tag{3.3}$$

Se poi si pone h_{ij} nella forma *transverse-traceless* - come si vedrà, questa gauge è valida almeno in approssimazione iconale, anche se non può essere una scelta valida globalmente -, focalizzandosi, per brevità, sulla componente tensoriale si ottiene, partendo dalle seguenti relazioni, valide a meno di derivate totali

$${}^{(3)}R = -\frac{1}{4a^2}(\partial_i h_{kj})^2, \quad K = 3H, \quad \delta K^2_{ij} = -\frac{1}{4}\dot{h}^2_{ij}, \quad K_{ij}K^{ij} - K^2 = -6H^2 + \frac{1}{4}\dot{h}^2_{ij}, \tag{3.4}$$

e inserendole nella (2.50), insieme al fatto che $\sqrt{\gamma} \simeq a^3 + \mathcal{O}(h_{ij}^2)$,

$$S_{\mathrm{T}}^{(2)} = \frac{1}{8}\int dt d^3x a^3 \left[G_T \dot{h}_{ij}^2 - \frac{\mathcal{F}_T}{a^2}(\partial_k h_{ij})^2 \right]. \tag{3.5}$$

Qui si riconoscono

$$G_T := 2\left[G_4 - 2XG_{4X} - X\left(H\dot{\phi}G_{5X} - G_{5\phi} \right) \right] \tag{3.6}$$

$$\mathcal{F}_T := 2\left[G_4 - X\left(\ddot{\phi}G_{5X} + G_{5\phi} \right) \right], \tag{3.7}$$

e la velocità di propagazione della perturbazione è data da

$$c_{\mathrm{GW}}^2 = \frac{\mathcal{F}_T}{\mathcal{G}_T} = \frac{G_4 - X\left(\ddot{\phi}G_{5X} + G_{5\phi} \right)}{G_4 - 2XG_{4X} - X\left(H\dot{\phi}G_{5X} - G_{5\phi} \right)}. \tag{3.8}$$

Ad ogni modo, la quasi simultanea rivelazione delle onde gravitazionali GW170817 e del γ-ray burst GRB 170817 ha fortemente limitato l'arbitrarietà di G_4 e G_5, per cui si può scegliere $G_{4X} = G_5 = 0$. In tal caso $c_{GW} = 1$. L'altra assunzione è quella di lavorare in regime iconale [11], cioè tale per cui, dato l'ansatz

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}e^{i\frac{\psi}{\epsilon}} + c.c., \tag{3.9}$$

con ϵ un parametro piccolo, definito da $\epsilon = \frac{\lambda}{L_B}$, cioè pari al rapporto della lunghezza d'onda della perturbazione e della lunghezza caratteristica di variazione del background. La fase ψ varia più velocemente dell'ampiezza della perturbazione ($H\mu\nu$), del campo scalare e della geometria di background, cioè

$$\frac{1}{\lambda} \sim \partial_\sigma\psi \gg \frac{\partial_\sigma H_{\mu\nu}}{H_{\mu\nu}} \quad e \quad \frac{\partial_\sigma\phi}{\phi}. \tag{3.10}$$

Infine, un'altra condizione che si può porre, è quella della gauge armonica, per la quale, presa la trasformazione infinitesimale di coordinate $x^\mu \to x^\mu - \xi^\mu$, che comporta $h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + 2\xi_{(\mu;\nu)}$, per il tensore a traccia inversa vale $\bar{h}_{\mu\nu}^{;\nu} \to \bar{h}_{\mu\nu}^{;\nu} + \Box\xi_\mu - \xi_{\alpha\ ;\mu}^{;\alpha} + \xi_{\nu;\mu}^{\ \ ;\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}^{;\nu} + \Box\xi_\mu + R_\mu^\alpha\xi_\alpha$ (Dove R_μ^α è il tensore di Ricci). Si può allora porre

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{;\nu} = 0 \tag{3.11}$$

o, usando l'ansatz (3.9),

$$H_{\mu\nu}k^\nu = \frac{1}{2}Hk_\nu, \tag{3.12}$$

dove $k_\nu = \partial_\nu\psi$. Se, poi, come verrà fatto, si lavorerà in regime di onde corte, per cui, presi Λ, la lunghezza d'onda associata alla perturbazione, e $\mathcal{R}$, il tipico raggio di curvatura del background, si verifica che $\mathcal{O}\Big(\frac{1}{\mathcal{R}}\Big) < \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\Lambda}\Big)$

$$\mathcal{O}\Big(\frac{h_{\alpha\beta,\nu}}{h_{\alpha\beta}}\Big) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\Lambda}\Big). \tag{3.13}$$

Poiché gli unici simboli di Christoffel non nulli sono $\bar{\Gamma}_{0j}^i = H\delta_j^i$, $\bar{\Gamma}_{ij}^0 = 2a\dot{a}\delta_{ij} \sim \mathcal{O}(H)$

$$h_{\alpha\beta;\nu} = h_{\alpha\beta,\nu} - \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\beta h_{\beta\nu} - \bar{\Gamma}_{\alpha\nu}^\beta h_{\mu\beta} \simeq h_{\alpha\beta,\nu}, \tag{3.14}$$

inoltre, nella Teoria ridotta, in cui si suppone un background ϕ rispetto al quale $G_{4X} = 0$, si ha

$$\mathcal{O}\Big(\frac{G_4'}{G_4}\Big) < \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\mathcal{R}}\Big). \tag{3.15}$$

3.1 Tensore energia-impulso

Le equazioni del campo tensoriale, sviluppate al primo ordine, sfruttando l'espressione del tensore di Ricci, si leggono

$$E_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(G_{2,X}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + G_2 g_{\mu\nu}\right) - G_{3,\phi}\left(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + X g_{\mu\nu}\right) - G_{3,X}\Big[\phi_{,(\mu}X_{,\nu)} + \frac{1}{2}\Box\phi\,\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \\ + \frac{1}{2}\phi^{\rho}X_{,\rho}g_{\mu\nu}\Big] + G_4 G_{\mu\nu} - G_{4;\mu\nu} + \Box G_4 g_{\mu\nu}.$$

Se, sfruttando l'approssimazione iconale, si trascurano tutti i termini che vanno come ϵ^0 e ϵ^{-1}, si ottiene la più semplice identità

$$E_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}G_{2,X}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - G_{3,\phi}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - G_{3,X}\phi_{,(\mu}X_{,\nu)} + G_4 G_{\mu\nu} - G_{4;\mu\nu}. \tag{3.16}$$

La differenza con la Relatività Generale risiede nel fatto che non può essere imposta globalmente la *transverse traceless gauge*. Si definisca la tetrade $[k_\mu, n_\mu, m_\mu, m^*_\mu]$, dove, presa la quadrivelocità di un generico osservatore u_μ e definito un vettore nullo ausiliario d_μ, tale che $k^\mu = \frac{(u_\mu + d_\mu)}{\omega}$ e $\omega = -k_\mu u^\mu$. Sia allora $n_\mu = \frac{k_\mu - d_\mu}{\omega}$ e siano ulteriori due vettori ausiliari ortonormali s_1 e s_2, con $\bar{g}_{\mu\nu}u^\mu s^\nu_A = \bar{g}_{\mu\nu}d^\mu s^\nu_A = 0$. Si definiscono gli altri due vettori della tetrade $m = \frac{s_1 + is_2}{2}$ e $m^* = \frac{s_1 - is_2}{2}$. Gli unici pseudoscalari non nulli sono $k_\nu n^\nu = m_\nu (m^*)^\nu = 1$. Si introducono, poi, i due modi circolari

$$\begin{aligned} h_{\circlearrowleft} &= \frac{h_\parallel + ih_\perp}{2}, \\ h_{\circlearrowright} &= \frac{h_\parallel - ih_\perp}{2}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

D'altra parte, $H_{\mu\nu}$ eredita questa scomposizione da $h_{\mu\nu}$ e si ha $H_{\mu\nu} = H^{\parallel}_{\mu\nu} + H^{\perp}_{\mu\nu}$, con $H^{\parallel}_{\mu\nu} = 2H\,k_{(\mu}k_{\nu)}$, e $H^{\perp}_{\mu\nu} = H_{\circlearrowleft}m_\mu m_\nu + H^*_{\circlearrowleft}m^*_\mu m^*_\nu$. Il modo $H^{\parallel}$, in approssimazione iconale, non ha significato fisico, in quanto non trasporta energia, né induce variazioni nella curvatura nell'ordine $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$. Vale, infatti, che considerando solo i termini al *leading order*

$$\begin{aligned} \delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2}\Big(h_{\alpha\delta;\beta\gamma} - h_{\alpha\gamma;\beta\delta} - h_{\beta\delta;\alpha\gamma} + h_{\beta\gamma;\alpha\delta}\Big) = \frac{1}{\epsilon^2}k_{[\beta}H_{\alpha][\gamma}k_{\delta]}e^{iw} + c.c. = \\ &= \Big(\cancel{k_{[\nu}n_{\mu]}k_{[\rho}k_{\sigma]}} + \cancel{k_{[\nu}n_{\rho]}k_{[\mu}k_{\sigma]}} + H_{\circlearrowleft}m_{[\mu}k_{\nu]}m_{[\rho}k_{\sigma]} + H_{\circlearrowright}m^*_{[\mu}k_{\nu]}m^*_{[\rho}k_{\sigma]}\Big)\frac{e^{i\frac{\psi}{\epsilon}}}{\epsilon^2} = \frac{1}{2}R^{\perp}_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{e^{i\frac{\psi}{\epsilon}}}{\epsilon^2}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Si ha, quindi, che $T^{(GW)}_{\mu\nu} = -G_4\langle G^{(2)}_{\mu\nu}\rangle$, dove le parentesi angolari $\langle \dots \rangle$ denotano una media calcolata su una regione le cui dimensioni sono piccole rispetto alla scala dimensionale a cui varia il background, ma grandi rispetto alla lunghezza d'onda della perturbazione. Pertanto,

$$T^{(GW)}_{\mu\nu} = -\frac{G_4^2}{4}\Big\langle h_{\rho\sigma,\mu}h^{\rho\sigma}{}_{,\nu} - h_{,\mu}h_{,\nu}\Big\rangle, \tag{3.19}$$

e l'annullamento dei prodotti scalari della tetrade $[k^\mu, n^\mu, m^\mu, m^{*\mu}]$ fa sì che la parte che effettivamente contribuisce al tensore (3.19) è quella della polarizzazione $\perp$. Si ricava

$$T^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu} = \frac{1}{8}M^2_{\mathrm{Pl}}G_4(|H_{\circlearrowleft}|^2 + |H_{\circlearrowright}|^2)k_\mu k_\nu = \frac{1}{8}M^2_{\mathrm{Pl}}G_4(|H_\perp|^2)k_\mu k_\nu. \tag{3.20}$$

La polarizzazione $\parallel$ non è fisica in approssimazione iconale - condizione che è stato necessario imporre, per stabilire la proporzionalità tra $T^{(GW)}_{\mu\nu}$ e il tensore di Einstein -. In generale, tuttavia, non si può fissare globalmente, come in Relatività Generale, la gauge TT: scegliere dei vettori $\xi^\mu = -iC^\mu e^{iq_\alpha x^\alpha}$, non consente di compiere una trasformazione globale, una volta imposta la gauge armonica, perché C^μ e Hn^μ non evolvono allo stesso modo nel tempo [12]. La densità di energia è

$$\rho_{\mathrm{GW}} = G_4\frac{M^2_{\mathrm{Pl}}}{4}\left\langle \dot{h}_{ij}\dot{h}^{ij}\right\rangle, \tag{3.21}$$

compiendo la variazione dell'Azione rispetto ad h_{ij}, le equazioni di campo, al primo ordine, implicano l'equazione di propagazione delle onde

$$\tilde{h}''_{ij} + 2\left(\mathcal{H} + \frac{G'_4}{2G_4}\right)\tilde{h}'_{ij} + k^2\tilde{h}_{ij} = 0. \tag{3.22}$$

$\tilde{h}_{ij}$ è la trasformata di Fourier della perturbazione e, risolvendo l'equazione differenziale, si trova

$$h_{ij} = \frac{1}{a_{\text{eff}}(\eta)} \int A_{ij}(k_i) e^{2\pi i f(\eta + \hat{\Omega}_i x^i)}\, d^3k, \tag{3.23}$$

dove $A_{ij}(k_i)$ è l'ampiezza della perturbazione nello spazio delle frequenze, mentre $\frac{a'_{\text{eff}}}{a_{\text{eff}}} := \left(\mathcal{H} + \frac{G'_4}{2G_4}\right)$. Applicando la derivata e considerando la sua azione nello spazio delle frequenze,

$$h_{ij,\nu} + \delta^0_\nu \frac{a'_{\text{eff}}}{a_{\text{eff}}} h_{ij} = \frac{i}{a_{\text{eff}}} \int A_{ij} k_\nu e^{2\pi i f(\eta + \hat{\Omega}_i x^i)}\, d^3k \simeq h_{ij,\nu}, \tag{3.24}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la (3.15) insieme al fatto che $A_{ij}(k_i) = A_P(k_i) e^P_{ij}(\hat{\Omega})$, per $P \in \{+, \times\}$. Sfruttando il fatto che il segnale è uniforme

$$\frac{\partial}{\partial x^m} \langle h_{ij}(x^\alpha) [h_{lk}(x^\alpha)]^* \rangle = 0 \Rightarrow (k_m - \tilde{k}_m) \langle A_{ij}(k^h) A^*_{lk}(k^h) \rangle = 0 \tag{3.25}$$

e, usando le proprietà delle distribuzioni,

$$\left\langle A_P(k_i) \left[A_{\tilde{P}}(\tilde{k}_i)\right]^* \right\rangle = \varepsilon_{P\tilde{P}}(k_i) \delta^{(3)}(k_i - \tilde{k}_i) = \varepsilon(f, \hat{\Omega}) \delta^{(3)}(k_i - \tilde{k}_i) \delta_{P\tilde{P}}, \tag{3.26}$$

assumendo un fondo non polarizzato, ma non necessariamente isotropo, e dove $\varepsilon(f, \hat{\Omega})$ è una funzione pari in f. Inserendo la (3.26) nella (3.21) e ricordando che $\delta_{P,\tilde{P}} e_{ij,P} e^{ij,\tilde{P}} = 4$, si arriva a

$$\rho_{\text{GW}} = G_4(t_i) \left[\frac{a(t_i)}{a_{\text{eff}}(t_i)}\right]^2 \frac{4M^2_{\text{Pl}}\pi^2}{a^4} \int \varepsilon(k_i) f^2\, d^3k = G_4(t_i) \left[\frac{a(t_i)}{a_{\text{eff}}(t_i)}\right]^2 \frac{8M^2_{\text{Pl}}\pi^2}{a^4} \int_{S^2} \int_0^\infty \varepsilon(f, \hat{\Omega}) f^4\, df\, d^2\Omega. \tag{3.27}$$

D'altra parte, introducendo la densità di energia spettrale, si ottiene un'espressione per $\varepsilon(f, \hat{\Omega})$:

$$\rho_{\text{GW}} := \int_{S^2} \int_0^\infty \frac{d^3\rho_{\text{GW}}}{df\, d^2\Omega_0}\, df\, d^2\Omega_0 \Rightarrow \varepsilon(f, \hat{\Omega}) = \frac{a^2(t_i) a^2_{\text{eff}}(t_i)}{8G_4(t_i) M^2_{\text{Pl}} \pi^2 f^4} \frac{d^3\rho_{\text{GW}}}{df\, d^2\Omega_0}. \tag{3.28}$$

Seguendo [13], si possono definire due quantità: la *luminosity distance* e la *angular diameter distance.* In particolare, data una sorgente di onde gravitazionali che si trova in una galassia G (le cui proprietà sono incorporate nella variabile generica θ_G), posizionata in un punto dell'Universo con parametro affine λ_s e che emette un flusso di energia Φ, ricevuto in direzione e_O da un osservatore O, posizionato in $\lambda = 0$, se la sorgente ha un diametro D e sottende un angolo δ, le dette grandezze sono definite come

$$d_L = \sqrt{\frac{L_G(\theta_G)}{4\pi\Phi(\theta_G, e_O)}} \qquad d_A = \frac{D_s}{\delta}. \tag{3.29}$$

Se il segnale fosse costituito da onde elettromagnetiche, sarebbe valida la classica relazione di reciprocità di Etherington, in realtà, in [14], tale relazione è stata dimostrata valida anche per le onde gravitazionali in teorie di gravità estesa. La densità spettrale di energia può essere espressa come un integrale

$$\frac{d^3\rho_{\text{GW}}}{df\, d^2\Omega_0}(f, e_o) = \int d\lambda \int d\theta_G\, \Phi\left[x^\mu(\lambda), f, \theta_G\right] \frac{d^3\mathcal{N}_G}{d\lambda\, d^2\Omega_o} \left[x^\mu(\lambda), \theta_G\right]. \tag{3.30}$$

$\Phi\left[x^\mu(\lambda), f, \theta_G\right] = \frac{(1+z_G)}{4\pi D^2_L(z_G, e_o)} \mathcal{L}_G(f^*, \theta_G)$ è il flusso di energia per unità di frequenza misurata f, che è legata a quella effettiva f^* da $f = (1 + z_G) f^*$, con z_G pari al redshift. $d^3\mathcal{N}_G\left[x^\mu(\lambda), \theta_G\right]$ è, invece, il numero di sorgenti con parametro θ_G, contenute nel volume fisico d^3V visto dall'osservatore. Se poi si introduce $n_G[x^\mu(\lambda), \theta_G]$, la densità spaziale di sorgenti con parametro θ_G, si scrive $d^3\mathcal{N}_G = n_G d^3V = n_G D_A^2(\lambda)\sqrt{p_\mu(\lambda)p^\mu(\lambda)}\, d^2\Omega_o d\lambda$, con le quantità $\sqrt{p_\mu(\lambda)p^\mu(\lambda)}d\lambda$ e d_A^2 che indicano, rispettivamente, la profondità e la sezione trasversale di d^3V.

$$\frac{d^3\rho_{\rm GW}}{df\, d^2\Omega_o}(f, e_o) = \frac{1}{4\pi}\int d\lambda \int d\theta_G\, \frac{\sqrt{p_\mu(\lambda)p^\mu(\lambda)}}{[1+z_G(\lambda)]^3} n_G\left[x^\mu(\lambda), \theta_G\right]\mathcal{L}_G(\nu_G, \theta_G). \tag{3.31}$$

L'elemento $\mathcal{L}_G(\nu_G, \theta_G)$ è lo spettro effettivo in frequenza della sorgente.

3.2 Segnale osservato

Interessa ora capire il segnale osservato da una coppia di rivelatori con opportune proprietà geometriche. Sia definito il tensore che caratterizza la configurazione geometrica

$$D_l^{ij} = \frac{X_l^i Y_l^j - X_l^j Y_l^i}{2}, \tag{3.32}$$

in cui $l \in \{1, 2\}$ e X e Y indicano le possibili direzioni dei bracci. Il segnale rivelato avrà una componente dovuta al rumore. Ovvero,

$$s_l = h_l + n_l, \tag{3.33}$$

dove $s_l = h_{ij}D_l^{ij}$, e i rumori dei due rivelatori vengono supposti scorrelati $\langle n_1 n_2\rangle = 0$ - assunzione valida per apparati sperimentali sufficientemente distanti -; ed anche indipendenti rispetto al segnale fisico ($\langle h_1 n_2\rangle = \langle h_2 n_1\rangle = 0$), imputabile alla perturbazione effettiva. Un'altra quantità di rilevanza fisica è

$$\gamma(f) := \frac{5}{8\pi}\sum_{A=1}^{4}\int_{S^2} d\hat{\Omega}\, e^{i2\pi f\frac{\hat{\Omega}\cdot\Delta\vec{x}}{c}} F_1^A(\hat{\Omega})F_2^A(\hat{\Omega}), \tag{3.34}$$

che misura la separazione dovuta al ritardo temporale tra i due rivelatori e la deviazione dalla condizione di parallelismo dei loro bracci.

$$\begin{aligned}\langle S\rangle &:= \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \langle s_1(\eta(t), x_1^i)Q(t-t^{'})s_2(\eta(t^{'}), x_2^i)\rangle\, dtdt^{'} = \\ &= \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \langle h_1(\eta(t), x_1^i)Q(t-t^{'})h_2(\eta(t^{'}), x_2^i)\rangle\, dtdt^{'}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Si può dimostrare che la funzione di filtro ottimale, cioè quella che massimizza il *signal-to-noise-ratio* (SNR), ha componente nello spettro in frequenza

$$\tilde{Q}(f) \propto \frac{\gamma(f)\Omega_{GW}(f)}{f^3 P_1(f)P_2(f)}, \tag{3.36}$$

dove $\Omega_{GW}(f)$ è lo spettro in frequenza del background, mentre i $P_i(f)$ sono gli spettri in potenza del rumore associati ai due rivelatori e T è il tempo di osservazione. Come dimostrato in [15], per tempi lunghi (per LIGO $T \sim 10y$) e per $\Omega_{GW}(f)$ costante, la funzione di filtro tende a una delta di Dirac $Q(t-t') \propto \delta(t-t')$. Inserendo la (3.28) nella (3.35) e scrivendo $F_l^P = D_l^{ij}e_{ij}^P$,

$$\begin{aligned}\langle S\rangle &= \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2}\frac{1}{a_{\rm eff}^2}\int_{S^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(f, \hat{\Omega})F_1^P(\hat{\Omega})F_2^P(\hat{\Omega})e^{2\pi i f\hat{\Omega}_i(x_1^i - x_2^i)}f^2\, df\, d^2\Omega\, dt = \\ &= \frac{G_N}{\pi}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2}\frac{a^2}{G_4}\int_{S^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\rho_{\rm GW}}{df\, d^2\Omega}F_1^P(\hat{\Omega})F_2^P(\hat{\Omega})e^{2\pi i f\hat{\Omega}_i(x_1^i - x_2^i)}f^{-2}\, df\, d^2\Omega\, dt \simeq \\ &\simeq \frac{GT}{\pi}\frac{1}{G_4(\varphi(t_0))}\int_{S^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\rho_{\rm GW}}{df\, d^2\Omega}F_1^P(\hat{\Omega})F_2^P(\hat{\Omega})e^{2\pi i f\hat{\Omega}_i(x_1^i - x_2^i)}f^{-2}\, df\, d^2\Omega,\end{aligned} \tag{3.37}$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttata la proprietà che, nel tempo di osservazione, data l'equazione (3.15), G_4 può essere considerata costante.

Capitolo 4

Effetti sulla costante cosmologica

Come visto nella sezione (2.1), sotto alcune ipotesi, gli unici tensori che soddisfano alle equazioni di Einstein sono una combinazione lineare del tensore di Einstein e della metrica. Da un punto di vista storico, Einstein prima propose e poi rigettò l'idea di aggiungere al suo tensore omonimo una componente proporzionale alla metrica, secondo una costante di proporzionalità chiamata costante cosmologica

$$G_{\mu\nu} + \Lambda_B g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{4.1}$$

in cui il pedice B sta per *bare* e serve per distinguere la (4.1) dal caso in cui si includa il contributo dell'energia del vuoto che, da argomenti di Teoria Quantistica dei Campi (vd. [16]), può essere stimato pari a $\langle T_{\mu\nu}\rangle = \langle\rho\rangle g_{\mu\nu}$. Sommando questo termine alla (4.1), si ottiene

$$G_{\mu\nu} + \Lambda_B g_{\mu\nu} = 8\pi G T^{\text{matter}}_{\mu\nu} + 8\pi G\langle T_{\mu\nu}\rangle \Rightarrow G_{\mu\nu} + \Lambda_{\text{eff}} g_{\mu\nu} = 8\pi G T^{\text{matter}}_{\mu\nu}, \tag{4.2}$$

dove si è usata la sostituzione $\Lambda_{eff} = \Lambda_B + 8\pi\rho$. Invertendo questa relazione, si definisce

$$\rho_v = \langle\rho\rangle + \frac{\Lambda_B}{8\pi G} = \frac{\Lambda_{\text{eff}}}{8\pi G}. \tag{4.3}$$

Si vede che $\langle\rho\rangle = 2.71 \cdot 10^{71}\ GeV^4$, mentre, da stime sulla costante di Hubble, $\rho_V = 2.71 \cdot 10^{-47}\ GeV^4$. Questo corrisponde al fine-tuning, cioè la costante cosmologica efficace deve assumere un valore preciso e molto piccolo rispetto a quello *bare*. Si vorrebbe, pertanto, trovare una Teoria con dei gradi di libertà tali da consentire il self-tuning: un auto-aggiustamento della costante al valore sperimentale.

4.1 Il teorema di impossibilità di Weinberg

Il teorema di Weinberg [17] afferma che, poste alcune assunzioni generali, il self-tuning implica il fine-tuning. Si consideri la Lagrangiana $\mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \phi_i)$, dipendente dal tensore metrico e da un insieme di campi scalari ϕ_i, che rispettino le seguenti condizioni:

(i) Il campo scalare è costante nel vuoto e, quindi, invariante sotto traslazioni $\phi_{\text{vac}})_i =$ costante;

(ii) La geometria del vuoto è costante $(g_{\text{vac}})_{\mu\nu} =$ costante.

Queste invarianze sotto trasformazioni di coordinate implicano una simmetria residua di tipo GL(4), associata alle trasformazioni $x^\mu \to (M^{-1})^\mu_\nu x^\nu$, tali che M^μ_ν è una matrice costante 4×4, il che, a sua volta, comporta che valgano le relazioni

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} = 0, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = 0. \tag{4.4}$$

Per le trasformazioni sopra definite, poi, si realizzano le identità

$$\delta_M g_{\mu\nu} = \delta M_{\mu\nu} + \delta M_{\nu\mu}, \quad \delta_M\mathcal{L} = \text{Tr}(\delta M\mathcal{L}). \tag{4.5}$$

Sia che le condizioni siano indipendenti, sia che siano dipendenti l'una dall'altra, cioè che valga

$$2g_{\mu\nu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = \sum_i f_i(\phi)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}, \tag{4.6}$$

in cui le f_i sono funzioni generali che dipendono dai campi di self-tuning ϕ_i, si giunge all'identità

$$\mathcal{L}_{vac} = \sqrt{-g_{vac}}\rho_{\rm vac}((\phi_{\rm vac})_i, \dots). \tag{4.7}$$

Nell'eventualità che i due annullamenti siano indipendenti, allora vale che, applicando la prima della (4.4) alle (4.3),

$$\sqrt{-g_{vac}}\rho_{\rm vac}((\phi_{\rm vac})_i, \dots) = 0,$$

che, per $\rho_{\rm vac}((\phi_{\rm vac})_i, \dots) = 0$ è il fine-tuning; nel caso di indipendenza degli annullamenti della (4.4), sfruttando la (4.6) e sfruttando una ridefinizione dei campi $\phi_i \to \tilde{\phi}_i$, tale che valga $\delta_\epsilon g_{\mu\nu} = 2\epsilon g_{\mu\nu}, \delta_\epsilon\tilde{\phi}_0 = -\epsilon, \delta_\epsilon\tilde{\phi}_{i\neq 0} = 0$, cioè una simmetria di scala, si ricava una relazione simile

$$e^{\tilde{\phi}_0}V(\phi_{i\neq 0}) = 0. \tag{4.8}$$

Si dimostra, pertanto, che il self-tuning implica il fine tuning.

4.2 Loophole di Horndeski

Weinberg non assume solo l'invarianza di Poincaré a livello della curvatura dello spazio-tempo, ma anche a livello dei campi $(\phi_{vac})_i$, nel vuoto. Si può, allora, pensare di rompere l'invarianza di Poincaré su questi campi, mantenendo comunque una geometria dello spaziotempo (localmente) piatta. Un'evasione dalle assunzioni da cui consegue il teorema di Weinberg può essere ottenuta nella Teoria di Horndeski, presupponendo l'esistenza di un campo $\phi(t)$, con una dipendenza non banale dalla variabile temporale. Quello che si vuole ottenere è un self-tuning che rispetti i seguenti filtri [18]:

- La Teoria ammetta un ricoprimento locale Minkowakiano nel vuoto, per ogni valore della costante cosmologica effettiva;
- questo rimanga vero anche nei casi di transizione di fase, dove la costante cosmologica varia di una quantità finita;
- la Teoria ammetta una cosmologia non banale, cioè soluzioni diverse da quella di Minkowski.

Si consideri, inoltre, una metrica del tipo FLRW

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2 d\Omega_{(2)}\right]. \tag{4.9}$$

La parte dell'Azione relativa alla materia fornisce un'energia del vuoto costante, che viene identificata con la costante cosmologica $(\rho_m)_{vac} = \Lambda_B$. In conseguenza del primo filtro, l'energia del vuoto non deve avere un impatto sulla curvatura, cioè $R_{\mu\nu} = 0$; e poiché, in metrica FLRW, $R_{\mu\nu} = diag(3\frac{\ddot{a}}{a}, \frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + 2\frac{k}{a^2}, \frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + 2\frac{k}{a^2}, \frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + 2\frac{k}{a^2})$, ciò comporta una condizione on-shell

$$H^2 = -\frac{k}{a^2}, \tag{4.10}$$

in cui $H = \frac{\dot{a}}{a}$ è il parametro di Hubble, il che implica, dovendo essere $k \leq 0$, che $a_k(t) = a_0 + \sqrt{-k}t$. Ma, dato il secondo filtro, questo deve rimanere vero anche quando il settore della materia è soggetto a una transizione di fase. In altre parole, si richiede che la transizione improvvisa venga riassorbita dalla parte dell'Azione relativa alla metrica. Si può ricorrere all'approssimazione del *minisuperspace*, cioè considerando come gradi di libertà dinamica $a(t)$, ϕ e $g_{00} = N(t)$ - non posto identicamente uguale a 1 -, rispetto ai quali si esegue la variazione su una Lagrangiana della forma (2.1). D'altra parte, la coordinata temporale, in virtù dell'invarianza sotto diffeomorfismi può essere sempre ridefinita come

$Ndt \to dt$, infatti N non è un vero grado di libertà, essendo il momento coniugato $\pi_N = 0$, e si può quindi assumere $N \equiv 1$. Tenendo, per ora, un N generico e integrando su una 3-ipersuperficie, si ottiene

$$\mathcal{L}_H^{\text{eff}}(a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi}, N, \dot{N}) = \frac{\int d^3x\sqrt{-g}\mathcal{L}_H}{\int d^3x\sqrt{\gamma}} = a^3 \sum_{i=0..3} Z_i(NH)^i, \tag{4.11}$$

a meno di derivate totali, ed essendo

$$Z_i = X_i - \frac{k}{a^2}Y_i \tag{4.12}$$

e tutti i termini non nulli dell'espansione per $N \equiv 1$ sono:

$$\begin{aligned} X_0 &= -\tilde{Q}_{7,\phi}\dot{\phi} + \kappa_9, \\ X_1 &= 3(2\kappa_8\dot{\phi}^3 - 4F_{,\phi}\dot{\phi} + \tilde{Q}_{7,\phi}\dot{\phi} - \tilde{Q}_7), \\ X_2 &= -6(2F + F_{,X}\dot{\phi}^2), \quad X_3 = 4\kappa_{1,X}\dot{\phi}^3, \\ Y_0 &= \tilde{Q}_{1,\phi}\dot{\phi} + 12\kappa_3\dot{\phi}^2 - 12F, \\ Y_1 &= \tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_{1,\phi}\dot{\phi}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Applicando anche il terzo filtro, si ottengono delle relazioni tra le quantità appena individuate [18]:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0..3} Z_i(a_k, \phi, \dot{\phi}) \left(\frac{\sqrt{-k}}{a_k}\right)^i = c(a_k) + \frac{1}{a_k^3}\frac{d\zeta}{dt}, \quad \text{per una certa} \quad \zeta = \zeta(\phi, a_k), \\ &\sum_{i=1..3} iZ_{i,\phi}(a_k, \phi, \dot{\phi}) \left(\frac{\sqrt{-k}}{a_k}\right)^i \neq 0, \\ &\textit{Non può valere} \quad Z_{i,\phi}(a, \phi, \dot{\phi}) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Si possono ottenere 4 equazioni del moto, non tutte indipendenti, come da (2.45). Riprendendo una *lapse-function* generica e ricordando che nel formalismo ADM si ottiene una scrittura dell'Azione del tipo

$$S = \int dt\Big(\pi_a\dot{a} + \pi_\phi\dot{\phi} - N\mathcal{H}\Big) + S_m, \tag{4.15}$$

essendo π^a, π_ϕ e $\mathcal{H}$ i momenti generalizzati relativi alle variabili dinamiche e l'Hamiltoniana relativa alla Lagrangiana efficace, si esegue la variazione rispetto ad N e si ricava una forma del tipo $\mathcal{H}\delta N = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\delta S_m}{\delta N}\delta N \propto -T_{00}\delta N = -\rho_m\delta N$. D'altra parte, anche la traccia tridimensionale del tensore energia-impulso può essere ottenuta in maniera simile, infatti vale che

$$-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\delta S_m}{\delta a} = a^2\,{}^{(3)}T_i^i = -3a^2p. \tag{4.16}$$

Mettendo questo risultato assieme alle equazioni di Eulero-Lagrange della Lagrangiana (4.11) rispetto ad a, ϕ, si arriva, ponendo $N \equiv 1$, a

$$\mathcal{H} = -\rho_m \tag{4.17}$$

$$\mathcal{E}_\phi = -\frac{d}{dt}\left[a^3 \sum_{i=0..3} Z_{i,\phi}H^i\right] + a^3 \sum_{i=0..3} Z_{i,\phi}H^i = 0 \tag{4.18}$$

$$\mathcal{E}_a + 3a^2p = -\frac{d}{dt}\left[a^3 \sum_{i=1..3} iZ_i a^{-1}H^{i-1}\right] + \sum_{i=0..3}\left[a^{3-i}Z_i\right]_{,a} a^iH^i = \ddot{\phi}f(\phi, \dot{\phi}, a, \dot{a}) + g(\phi, \dot{\phi}, a, \dot{a}). \tag{4.19}$$

A queste va aggiunta l'equazione di continuità, che, unita alla (4.18), implica la (4.19):

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p) = 0. \tag{4.20}$$

Se in tutte le funzioni in cui compare la dipendenza da a e $\dot{a}$ si sostituisce la soluzione dell'equazione (4.10), si ottengono delle funzioni *on-shell*, indicizzate col pedice k. Ad esempio, $\mathcal{H}_k \equiv \mathcal{H}(\phi, \dot{\phi}, a_k) = -\rho_k$. Se all'istante t_* avviene una transizione di fase

$$\sqrt{-k}\frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial a_k} + \dot{\phi}\frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \phi} + \ddot{\phi}\frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \dot{\phi}} \propto \delta(t - t_*). \tag{4.21}$$

Da ciò si arriva a dimostrare [18] che la Lagrangiana $\mathcal{L}_k$ dipende soltanto da a_k. Si definisce la Lagrangiana ausiliaria

$$\tilde{\mathcal{L}} = a^3 \left\{ c(a) + \sum_{i=1..3} \tilde{Z}_i(a, \phi, \dot{\phi}) \left[H^i - \left(\frac{\sqrt{-k}}{a} \right)^i \right] \right\}. \tag{4.22}$$

Si deve dimostrare che tale Lagrangiana differisce dalla (4.11) per una derivata temporale di una funzione $\mu(a, \phi)$. Si definiscano, allora, le quantità $\Delta Z_i = \tilde{Z}_i - Z_i$ $\Delta\mathcal{H} = \Delta\mathcal{H}(a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi})$, come segue,

$$\mathcal{H} + \rho_m = \tilde{\mathcal{H}} + \rho_m + \Delta\mathcal{H}. \tag{4.23}$$

Dal fatto che $\mathcal{H}$ e $\tilde{\mathcal{H}}$ debbano verificare le stesse equazioni del moto, si richiede che $\Delta\mathcal{H}$ si annulli ogni volta che, in condizione on-shell, $\dot{\tilde{\mathcal{H}}} = -\rho_m$ e $\dot{E}_\phi = 0$. A ogni modo, giacché $\Delta\mathcal{H}$ è indipendente da ρ_m, esso non può annullarsi in conseguenza di $\dot{\tilde{\mathcal{H}}} = -\rho_m$. Similmente, poiché ΔE_ϕ non dipende da ρ_m, esso non può diventare nullo a seguito di $\dot{E}_\phi = 0$. Si deve, allora, concludere che le due variazioni siano identicamente nulle. In altre parole,

$$\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}. \tag{4.24}$$

Dato che $\Delta Z_i = Z_i - \tilde{Z}_i$, si vede come

$$\Delta\mathcal{H} = \sum_{i=0,\ldots,3} \left((i-1)\Delta Z_i + \Delta Z_{i,\dot{\phi}}\dot{\phi} \right) H^i = 0. \tag{4.25}$$

Raggruppare addendi con medesime potenze di H porge

$$(i-1)\Delta Z_i + \Delta Z_{i,\dot{\phi}}\dot{\phi} = 0 \quad \text{per} \quad i = 0..3. \tag{4.26}$$

Integrando, si ottiene

$$\Delta Z_i = \sigma_i(a, \phi)\dot{\phi}^{1-i}. \tag{4.27}$$

Per l'equazione scalare vale che le due relazioni, relative alle due Lagrangiane (quella di partenza e quella ausiliaria), differiscono per un ΔE_ϕ. Come sopra, poiché ΔE_ϕ non dipende da ρ_m, non può annullarsi in conseguenza dell'equazione (4.16), ma può annullarsi in conseguenza di $\tilde{E}_\phi = 0$. Dalla (4.17), si nota, inoltre, che l'equazione del moto può scriversi

$$E_\phi = \ddot{a}\alpha + \dot{\phi}\beta + \gamma, \tag{4.28}$$

in cui

$$\begin{gathered} \alpha(a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi}) = -a^2 \sum_{i=0..3} Z_{i,\phi} H^{i-1}, \qquad \beta(a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi}) = -a^3 \sum_{i=0..3} Z^H_{i,\phi} i, \\ \gamma(a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi}) = -a^3 \sum_{i=0..3} \left[((i+3)Z_{i,\phi} + aZ_{i,\phi a})H + \dot{\phi}Z_{i,\phi\phi} \right] H + \dot{\phi}Z_{i,\phi}H^i. \end{gathered} \tag{4.29}$$

Espressioni simili valgono per $\tilde{E}_\phi$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, e $\tilde{\gamma}$, e, quindi, per ΔE_ϕ, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ e $\Delta\gamma$. Ora, giacché invertendo la (4.27) per le quantità associate a $\mathcal{L}$

$$\ddot{a} = \frac{1}{\tilde{\alpha}} \left(E_\phi - \tilde{\beta}\dot{\phi} - \tilde{\gamma} \right), \tag{4.30}$$

si può scrivere

$$\Delta E_\phi = \frac{\Delta\alpha}{\tilde{\alpha}} \tilde{E}_\phi + \frac{\tilde{\alpha}\Delta\beta - \tilde{\beta}\Delta\alpha}{\tilde{\alpha}}\dot{\phi} + \frac{\tilde{\alpha}\Delta\gamma - \tilde{\gamma}\Delta\alpha}{\tilde{\alpha}}, \tag{4.31}$$

dove, ad esempio, $\Delta\beta = \tilde{\beta} - \beta$ e, a causa della condizione (4.14) deve valere, $\tilde{\alpha} \neq 0$. Dato che, inoltre, ΔE_ϕ deve essere valida per l'equazione del campo $E_\phi = 0$, ne segue che

$$\Delta E_\phi = \frac{\Delta\alpha}{\alpha}\tilde{E}_\phi. \tag{4.32}$$

A ogni modo, dalla (4.25) deriva

$$\begin{gathered}\Delta\alpha = -a^2 \sum_{i=0..3} i(i-1)\sigma_i \dot{\phi}^{i-1}, \qquad \Delta\beta = -a^3 \sum_{i=0..3} i(i-1)\sigma_i H^i \dot{\phi}^{i-1}, \\ \Delta\gamma = -a^3 \sum_{i=0..3} \left[((i+3)\sigma_i + a\sigma_{i,a})H(1+i) - i\sigma_{i,\phi}\dot{\phi}\right] H^i/\dot{\phi}.\end{gathered} \tag{4.33}$$

La condizione $\tilde{\alpha}\Delta\beta = \tilde{\beta}\Delta\alpha$ implica che o ΔE_ϕ si annulla identicamente o si ha

$$aH\alpha = -\dot{\phi}\tilde{\beta} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=0..3} iZ_{i,\phi}H^i = -\sum_{i=0..3} Z^H_{i,\phi} i\dot{\phi}H^i \qquad \Rightarrow \qquad iZ_{i,\phi} = -Z_{i,\phi}\dot{\phi} + v_i(a,\phi). \tag{4.34}$$

A questo punto, si ricavano i potenziali opportuni per la Teoria di Horndeski. A tal fine, bisogna calcolare le espressioni opportune delle X_i e delle Y_i, ricordando la relazione tra le due Lagrangiane:

$$L = \tilde{L} + \dot{\mu}(a,\phi) = a^3 c(a) + \tilde{Z}_0 + Z_1,$$

dove $\tilde{L}$ è data da (4.22). Raggruppando membro a membro i coefficienti delle potenze H^i, si trova

$$c(a) = -\sum_{i=1..3} Z_i \left(\sqrt{-\frac{k}{a}}\right)^i + a^{-3}\dot{\phi}\mu_{,\phi} = X_0(\phi,\dot{\phi}) - \frac{k}{a^2}Y_0(\phi,\dot{\phi}), \tag{4.35}$$

$$\tilde{Z}_1 + a^{-2}\mu_{,a} = X_1(\phi,\dot{\phi}) - \frac{k}{a^2}Y_1(\phi,\dot{\phi}), \tag{4.36}$$

$$\tilde{Z}_i = X_i(\phi,\dot{\phi}), \quad i = 2,3. \tag{4.37}$$

Sostituendo le (4.37) e la (4.36) nella (4.35)

$$c(a) - \sqrt{-\frac{k}{a}}\left(X_1 - \frac{k}{a^2}Y_1 - a^{-2}\mu_{,a}\right) - \sum_{i=2,3} X_i \left(\sqrt{-\frac{k}{a}}\right)^i + a^{-3}\mu_{,\phi}\dot{\phi} = X_0(\phi,\dot{\phi}) - \frac{k}{a^2}Y_0(\phi,\dot{\phi}). \tag{4.38}$$

Per $k \neq 0$, si sviluppano c and μ in serie di potenze di $\sqrt{-k/a}$

$$c(a) = \sum_{i=-\infty,\cdots,0} c_i \left(\sqrt{-\frac{k}{a}}\right)^i, \quad a^{-3}\mu = \sum_{i=-\infty,\cdots,0} h_i(\phi)\left(\sqrt{-\frac{k}{a}}\right)^i. \tag{4.39}$$

Inserendo nella (4.35), dall'annullamento per ogni potenza i-esima si ricava

$$X_0 = c_0 + h_0 + 4h_{-1}, \tag{4.40}$$

$$X_1 = c_1 + h_1 + 3h_0, \tag{4.41}$$

$$X_2 + Y_0 = c_2 + h_2 + 2h_1, \tag{4.42}$$

$$X_3 + Y_1 = c_3 + h_3 + h_2, \tag{4.43}$$

insieme all'identità

$$c_i + \dot{h}_i + (4-i)h_{i-1} = 0, \quad i \leq -1 \quad \text{o} \quad i \geq 4. \tag{4.44}$$

Si definisce, poi, la successione

$$V_i = h_i + \frac{c_{i+1}}{3-i}, \quad i \neq 3, \quad V_3 = h_3, \tag{4.45}$$

che porge la relazione ricorsiva

$$V_{i,\phi}(\phi)\dot{\phi} + (4-i)V_i = 0, \quad i \leq -1 \quad \text{o} \quad i \geq 4, \tag{4.46}$$

in cui si è usato che $\dot{h}_i = \dot{V}_i = \dot{\phi}V_{i,\phi}$. Poiché V_i non dipende da ϕ, segue che $V_{-1} = \text{const}, \quad V_{-2} = V_{-3} = \cdots = 0, \quad V_4 = V_5 = V_6 = \cdots = 0$. Reinserendo tutto nelle (4.40)-(4.43)

$$X_0 = V_0\dot{\phi} + 4V_{-1} = 4 \cdot \text{const.} + V_0'\dot{\phi}, \tag{4.47}$$

$$X_1 = V_1\dot{\phi} + 3V_0, \tag{4.48}$$

$$X_2 + Y_0 = V_2'\dot{\phi} + 2V_1, \tag{4.49}$$

$$X_3 + Y_1 = V_3'\dot{\phi} + V_2. \tag{4.50}$$

E si identifica const. $= -\frac{1}{6\pi G}\Lambda_{B,k}$. Per calcolare l'espressione specifica dei potenziali di Horndeski

$$X_1 = \tilde{\Omega}_1\dot{\phi} - 3\Omega_1 = \phi^4(\tilde{\Omega}_1/\phi^3)_{,\dot{\phi}}. \tag{4.51}$$

E integrando,

$$\tilde{\Omega}_1 = -V_0 - \frac{1}{2}V_1\dot{\phi} + \lambda(\phi)\dot{\phi}^3, \tag{4.52}$$

dove $\lambda(\phi)$ è una funzione arbitraria. Dato che, in gauge unitaria, $X = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$. Ripetendo, infine, il calcolo per tutte le costanti di (2.42)

$$\kappa_1 = 2V_{II}'(\phi)\left[1 + \frac{1}{2}\ln(2|X|)\right] - \frac{3}{4}V_{III}(\phi)X, \tag{4.53}$$

$$\kappa_3 = V_{II}''(\phi)\ln(2|X|) - \frac{1}{4}V_{III}'(\phi)X - \frac{1}{4}V_I(\phi)[1 - \ln(2|X|)], \tag{4.54}$$

$$\kappa_8 = \frac{1}{2}V_I'(\phi)\ln(2|X|),, \tag{4.55}$$

$$\kappa_9 = -\rho_\Lambda^{\text{bare}} - 6V_{IV}''(\phi)X, \tag{4.56}$$

$$F + 2W = \frac{1}{2}V_{IV}(\phi) - \frac{1}{2}V_I(\phi)X\ln(2|X|), \tag{4.57}$$

Per opportuni potenziali arbitrari, indicizzati col numero latino. Questo è il cosiddetto modello dei *Fab Four*.

$$S_{\text{FabFour}}[g_{\mu\nu}, \phi; \Psi_n] = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G}\Bigg[V_{\text{I}}(\phi)G^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + V_{\text{III}}(\phi)\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\lambda\rho\gamma\delta}R^{\lambda\rho\gamma\delta}\nabla_\mu\phi\nabla_\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\beta\phi + \\ + V_{\text{IV}}(\phi)R + V_{\text{II}}(\phi)\Big(R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta} - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^2\Big) - \Lambda_{B,k}\Bigg] + S_m[g_{\mu\nu}; \Psi_n]. \tag{4.58}$$

Appendice

Dimostrazione formula $\delta\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}$:

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad \delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\mu\nu}, \tag{A1}$$

$$\begin{aligned} \delta T^{\sigma}_{\beta\alpha} &= \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} \left[\nabla_{\beta}(-g_{\alpha\mu} g_{\gamma\nu} \delta g^{\mu\nu}) + \nabla_{\alpha}(-g_{\beta\mu} g_{\gamma\nu} \delta g^{\mu\nu}) - \nabla_{\gamma}(-g_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} \delta g^{\mu\nu}) \right] \\ &= \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} \left[g_{\alpha\mu} g_{\gamma\nu} \nabla_{\beta}(\delta g^{\mu\nu}) + g_{\beta\mu} g_{\gamma\nu} \nabla_{\alpha}(\delta g^{\mu\nu}) - g_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} \nabla_{\gamma}(\delta g^{\mu\nu}) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\delta^{\sigma}_{\nu} \nabla_{\beta}(\delta g^{\mu\nu}) + \delta^{\sigma}_{\mu} \nabla_{\alpha}(\delta g^{\mu\nu}) - g_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} g^{\sigma\gamma} \nabla_{\gamma}(\delta g^{\mu\nu}) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[g_{\alpha\nu} \nabla_{\beta}(\delta g^{\sigma\nu}) + g_{\beta\nu} \nabla_{\alpha}(\delta g^{\sigma\nu}) - g_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} \nabla^{\sigma}(\delta g^{\mu\nu}) \right]. \end{aligned} \tag{A2}$$

Dimostrazione formula (2.16): Poiché ϕ_{ij} è un tensore, segue che

$$\phi_{rs}(B^t_k B^u_h g_{ut}) = B^h_s B^k_r \phi_{kh}(g_{ij}), \tag{A3}$$

da cui si può dimostrare che

$$2 \frac{\partial \phi_{rs}}{\partial g_{hk}} = \delta^h_r g^{tk} \phi_{ts} + \delta^h_s g^{tk} \phi_{rt}. \tag{A4}$$

Il lato sinistro di (A3) è simmetrico in (hk), quindi si ha

$$\delta^h_r g^{tk} \phi_{ts} + \delta^h_s g^{tk} \phi_{rt} = \delta^k_r g^{th} \phi_{ts} + \delta^k_s g^{th} \phi_{rt}.$$

Da ciò, ponendo $h = r$, si trova

$$g^{tk} \phi_{ts} + g^{tk} \phi_{rs} = g^{tr} \phi_{ts} + g^{tr} \phi_{rt}.$$

Poiché $\delta^r_r = 4$, questa espressione può essere riscritta come

$$3\phi_{ts} + \phi_{st} = \lambda g_{st}, \tag{A5}$$

dove $\lambda = g^{st} \phi_{st}$.

$$\phi_{st} = \frac{1}{4} \lambda g_{st}.$$

Poiché da (A3) segue che $\frac{\partial \lambda}{\partial g_{hk}} = 0$ la tesi è dimostrata.

Bibliografia

[1] C. Brans and R. H. Dicke. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935, Nov 1961.

[2] Robert M. Wald. *General Relativity.* Chicago Univ. Pr, 1984.

[3] P. Stredder. Natural differential operators on riemannian manifolds and representations of the orthogonal and special orthogonal groups. *J. DIFFERENTIAL GEOMETRY*, 10(4):647–660.

[4] Alberto Navarro and José Navarro. Lovelock's theorem revisited. *Journal of Geometry and Physics*, 61(10):1950–1956, October 2011.

[5] D. Lovelock. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *J. Math. Phys.*, 13(6):874–876, 1972.

[6] Charles W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation.* W. H. Freeman, 1973.

[7] Cédric Deffayet and Danièle A Steer. A formal introduction to horndeski and galileon theories and their generalizations. *Classical and Quantum Gravity*, 30(21):214006, October 2013.

[8] Gregory Walter Horndeski. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, 10:363–384, 1974.

[9] Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 40(9):1997–2027, August 2008.

[10] João C. Lobato, Isabela S. Matos, Maurício O. Calvão, and Ioav Waga. Gravitational wave stochastic background in reduced horndeski theories. *Phys. Rev. D*, 106:104048, Nov 2022.

[11] M. Maggiore. *Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments.* Oxford Univ. Pr., 2007.

[12] G. Cusin, C. Pitrou, and J. P. Uzan. Anisotropy of the astrophysical gravitational wave background: Analytic expression of the angular power spectrum and correlation with cosmological observations. *Phys. Rev. D*, 96:103019, Nov 2017.

[13] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* John Wiley and Sons, New York, 1972.

[14] G. Tasinato, Alice G., Daniele B., and S. Matarrese. Gravitational-wave cosmological distances in scalar-tensor theories of gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021(06):050.

[15] Bruce Allen and Joseph D. Romano. Detecting a stochastic background of gravitational radiation: Signal processing strategies and sensitivities. *Phys. Rev. D*, 59:102001, Mar 1999.

[16] Robert M. Wald. Quantum field theory in curved spacetime, 1995.

[17] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23, Jan 1989.

[18] Christos Charmousis, Edmund J. Copeland, Antonio Padilla, and Paul M. Saffin. Self-tuning and the derivation of a class of scalar-tensor theories. *Phys. Rev. D*, 85:104040, May 2012.