

Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

***Relazione per la prova finale  
«Analisi di un oscillatore non lineare  
isteretico sottoposto a forzante  
stocastica»***

Relatore: Prof. Beatrice Pomaro

Correlatore: Prof. Gianluca Mazzucco

Padova, 20/11/2023

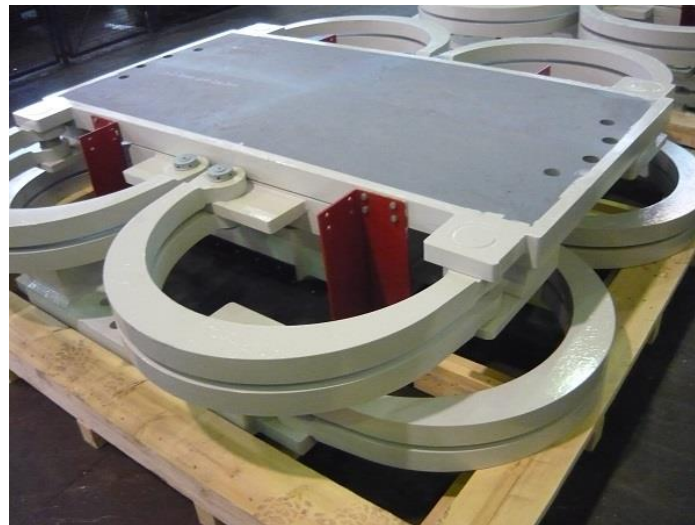
*Laureando: Camilla Antonietti*

*Numero di matricola: 2003157*

Numerosi sistemi meccanici presentano comportamenti di tipo isteretico e sono soggetti a forzanti di natura aleatoria.

Lo studio di questi due fenomeni risulta fondamentale per garantire la sicurezza e l'affidabilità delle strutture.

Si propone dunque come modello di analisi quello di Bouc-Wen, usato frequentemente nella descrizione di fenomeni sismici



Dissipatore isteretico con supporto meccanico

Gli obiettivi principali del lavoro sono i seguenti

- 1) Dimostrare l'efficacia della tecnica di **linearizzazione statistica** operando un confronto con la risoluzione tramite Monte Carlo (**MC**) del sistema di partenza
- 2) Mostrare l'influenza dei **parametri** principali del sistema sulla convergenza della soluzione per una forzante random e sul ciclo di isteresi per una forzante sinusoidale

Sulla base degli obiettivi presentati la presentazione si articola in:

1. Presentazione del modello di Bouc-Wen
2. Introduzione alla tecnica di linearizzazione statistica
3. Risoluzione del codice tramite il software Matlab
4. Presentazione grafici con considerazioni annesse

Le equazioni del moto sono le seguenti [1]:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha kx + (1 - \alpha)kz = W(t)$$

$$\dot{z} = -\gamma|\dot{x}|z - \nu\dot{x}|z| + A\dot{x}$$

Con condizioni iniziali:

$$x(0) = \dot{x}(0) = z(0) = 0$$

- m: massa
- c: coefficiente di smorzamento viscoso
- k: rigidezza elastica
- $\alpha$ : fattore di rigidezza
- $g(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, z) = \alpha kx + (1 - \alpha)kz$  forza di natura isteretica non lineare
- $\gamma, \nu, A$  regolano la forma del ciclo isteretico

[1]: Wei Zhang, Pol D. Spanos, Alberto Di Matteo. Nonstationary stochastic response of hysteretic systems endowed with fractional derivative elements. Journal of Applied Mechanics June 2023, Vol.90

Per arrivare ad un'espressione linearizzata del problema di partenza, si parte dalla seguente equazione [2]:

$$\dot{V} = GV^T + VG^T + D$$

in cui:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xz} & \sigma_{x\dot{x}} \\ \sigma_{zx} & \sigma_z^2 & \sigma_{z\dot{x}} \\ \sigma_{\dot{x}x} & \sigma_{\dot{x}z} & \sigma_{\dot{x}}^2 \end{bmatrix}, \text{ matrice delle varianze e covarianze; } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\pi S_0}{m} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k_{eq} & -c_{eq} \\ -\frac{\alpha k}{m} & -\frac{(1-\alpha)k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix},$$

matrice ricavata dalla seguente espressione  $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{GS} + \mathbf{f}$  con  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} x \\ z \\ \dot{x} \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t)/m \\ 0 \end{bmatrix}$

Risolvendo i prodotti fra le matrici e sfruttando la proprietà di simmetria della matrice V, si ottiene un sistema di sei equazioni differenziali, nel quale compaiono le nostre costanti equivalenti:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{xz} &= \sigma_{z\dot{x}} - k_{eq}\sigma_{\dot{x}z} - c_{eq}\sigma_{x\dot{x}} \\ \dot{\sigma}_{x\dot{x}} &= \sigma_{\dot{x}}^2 - \frac{\alpha k}{m}\sigma_x^2 - (1 - \alpha)\frac{k}{m}\sigma_{xz} - \frac{c}{m}\sigma_{x\dot{x}} \\ \dot{\sigma}_{z\dot{x}} &= -k_{eq}\sigma_{\dot{x}z} - c_{eq}\sigma_{\dot{x}}^2 - \frac{\alpha k}{m}\sigma_{xz} - (1 - \alpha)\frac{k}{m}\sigma_z^2 - \frac{c}{m}\sigma_{z\dot{x}} \\ \dot{\sigma}_x^2 &= 2\sigma_{x\dot{x}} \\ \dot{\sigma}_z^2 &= -2k_{eq}\sigma_z^2 - 2c_{eq}\sigma_{\dot{x}z} \\ \dot{\sigma}_{\dot{x}}^2 &= -2\frac{\alpha k}{m}\sigma_{x\dot{x}} - 2(1 - \alpha)\frac{k}{m}\sigma_{\dot{x}z} - 2\frac{c}{m}\sigma_{\dot{x}}^2 + \frac{2\pi S_0}{m}\end{aligned}$$

Dal problema non lineare di partenza, si arriva dunque ad ottenere un'espressione equivalente e linearizzata del tipo [3]:

$$\dot{z} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq}z = 0$$

con le costanti:

$$c_{eq} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \gamma \frac{\sigma_{\dot{x}z}}{\sigma_{\dot{x}}^2} + \nu \sigma_z^2 \right) - A$$

$$k_{eq} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \gamma \sigma_{\dot{x}}^2 + \nu \frac{\sigma_{\dot{x}z}}{\sigma_z^2} \right)$$

Si può dimostrare che le costanti sono una funzione della forzante  $g$  tramite la seguente espressione:

$$c_{eq}(\sigma_x^2, \sigma_{\dot{x}}^2) = \left\langle \frac{\partial g(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right\rangle; \quad k_{eq}(\sigma_x^2, \sigma_{\dot{x}}^2) = \left\langle \frac{\partial g(x, \dot{x})}{\partial x} \right\rangle.$$

[3]: Y. K. Wen. Equivalent Linearization for hysteretic systems under random excitation. Journal of Applied Mechanics. March 1980, Vol.47

Si mostra in seguito come si è risolto in termini pratici il problema di partenza:

```
clear all
close all

S0=0.3; % livello del rumore bianco w(t)
% parametri relativi alla frequenza e al tempo
sz=500;
wc=50; % cut-off frequency
dw=wc/sz;
tfin=2*pi*sz/wc; %tempo di fine analisi
dt=0.02; % passo temporale
dtold=pi/wc; % passo temporale del rumore w(t). Non modificabile
t=0:dt:tfin; %vettore tempo
told=0:dtold:tfin; % vettore tempo del rumore w(t)
opts = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);
```

Si inizia definendo i parametri del tempo di analisi dell'oscillatore e del rumore bianco



Il **rumore bianco** ha una propria scala temporale con passo maggiore rispetto a quella con cui risolvo l'oscillatore, al fine di integrare in tempo un' espressione non lineare quale quella del nostro oscillatore

Esso è costituito di elemento casuali che si dispongono come dei vettori di lunghezza '*told*' in numero pari ad  $nn$  con

- Varianza=  $\sqrt{S_0}$
- Media nulla

Sottopongo il mio oscillatore ad  $nn$  oscillazioni diverse che soddisfano però ad una stessa densità spettrale, nonostante la forzante sia diversa ad ogni realizzazione.

```
% WHITE NOISE|
nn=1000; %1000;2000; %realizzazioni cui assoggetto il mio oscillatore per verificarne il valor medio
mu=0; %media
sigma=(S0)^0.5; % varianza=S0, rumore bianco (assegnata a inizio codice)
L1=length(told); %lunghezza serie di dati
L2=length(t);
noise=(sigma*randn(L1,nn)+ mu); % RANDN: crea livello di rumore-->matrice
% Tali valori verranno tutti ciclati per confrontare soluzione con MC
%Serve solo per file oscill
noiset=noise*(2*pi/dtold)^0.5; % rumore vero e proprio.
filename='500wc50_100_0-3.txt';
noise=interp1(told,noiset,ttt);
```

1) Definisco un vettore  $y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \end{bmatrix}$  associando dunque a ciascuna variabile il suo corrispondente valore

$$x = y(1), \dot{x} = y(2), z = y(3),$$

1) Definisco un vettore  $\dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$ , le cui componenti vengono esplicitate in funzione del vettore  $y$

Utilizzo successivamente il comando ode45 oppure ode23 per la risoluzione del mio sistema

```
function dydt = oscill_boucwen(t,y,tt,m,c,k,g,gamma,vi,A,alpha)

% vettore Y [x, x_dot, z]
% vettore dydt [x_dot, x_dot_dot, z_dot]
intg = interp1(tt,g,t); %forzante
dydt = [y(2); -c/m*y(2)-alpha*k/m*y(1)-(1-alpha)*k/m*y(3)+intg/m;
-gamma*abs(y(2))*y(3)-vi*y(2)*abs(y(3))+A*y(2)]; %derivata vettore y
end

% m= massa
% c= costante di smorzamento
% k= rigidezza
```

Risolvero con lo stesso comando ode45 l'equazione di Lyapunov dopo averne definito le condizioni iniziali:

```

%% RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE (sistema) DI LYAPUNOV PER L'OSCILLATORE ELASTOPLASTICO
%V(1)=sigma_xz
%V(2)=sigma_xxdot
%V(3)=sigma_zxdot
%V(4)=sigma_x^2
%V(5)=sigma_z^2
%V(6)=sigma_xdot^2
ode_func = @(T2,V) [ -(((2/pi)^0.5*(gamma*V(6)+vi*V(3)/V(5))))*V(1)-(((2/pi)^0.5*...
    (gamma*V(3)/V(6)+vi*V(5)))-A)*V(2)+V(3);...           %V(1)=sigma_xz
    -alpha*k/m*V(4)-(1-alpha)*k/m*V(1)-c/m*V(2)+V(6);...           %V(2)=sigma_xxdot
    -(((2/pi)^0.5*(gamma*V(6)+vi*V(3)/V(5))))*V(3)-(((2/pi)^0.5*(gamma*V(3)/V(6)+vi*V(5)))-A)...
    *V(6)-alpha*k/m*V(1)-(1-alpha)*k/m*V(5)-c/m*V(3); ... %V(3)=sigma_zxdot
    2*V(2); ... %V(4)=sigma_x^2
    -2*(((2/pi)^0.5*(gamma*V(6)+vi*V(3)/V(5))))*V(5)-2*(((2/pi)^0.5*....
    (gamma*V(3)/V(6)+vi*V(5)))-A)*V(3);...           %V(5)=sigma_z^2
    -2*alpha*k/m*V(2)-2*(1-alpha)*k/m*V(3)-2*c/m*V(6)+2*pi*S0];           %V(6)=sigma_xdot^2
%ceq=(((2/pi)^0.5*(gamma*(3)/V(6)+vi*V(5)))-A);
%keq=(((2/pi)^0.5*(gamma*V(6)+vi*V(3)/V(5))));
tspan=0:dt1:tfin; % vettore con estremi intervallo
[T2,YNLSL] = ode45(ode_func,tspan,[0.00000001 0.000001 0.00000001 0.00000001 0.0000001 0.0000001]);
CEQ_staz= (((2/pi)^0.5*(gamma*(YNLSL(end,3)/YNLSL(end,6))+vi*YNLSL(end,5)))-A);
KEQ_staz= sqrt(2/pi)*(gamma*YNLSL(end,6)+vi*(YNLSL(end,3)/YNLSL(end,5)));

```

Confronto i risultati ottenuti, con la definizione teorica della varianza dello spostamento:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{nn} x_i^2}{nn}$$

ottenuta risolvendo nn volte l'equazione non lineare dell'oscillatore e sommando i quadrati degli spostamenti ottenuti per le nn realizzazioni di white noise (rumore bianco) w(t), forza dinamica random a cui è sottoposto il sistema.

Si ottiene il seguente risultato:

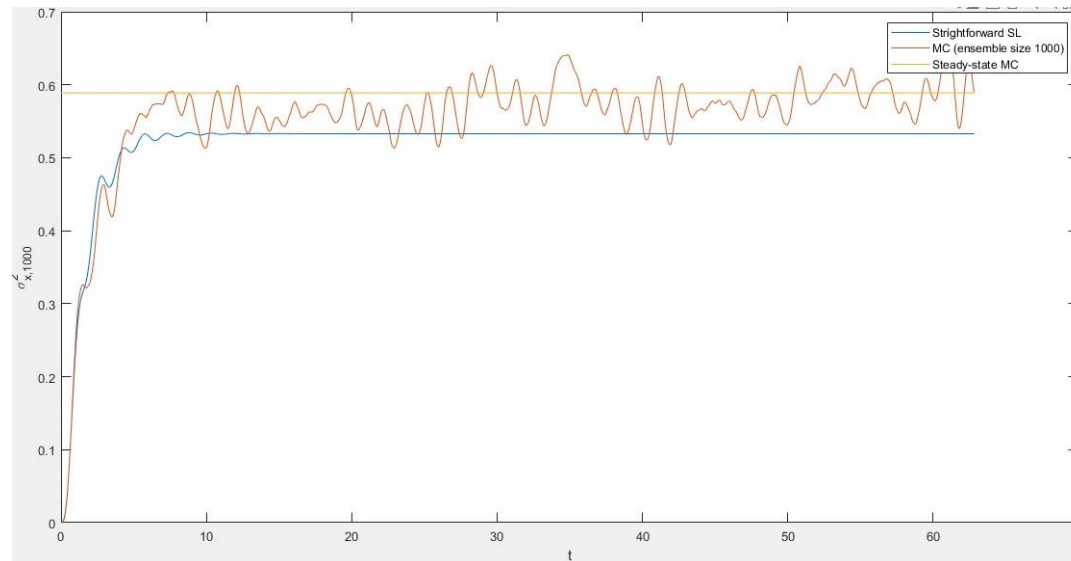


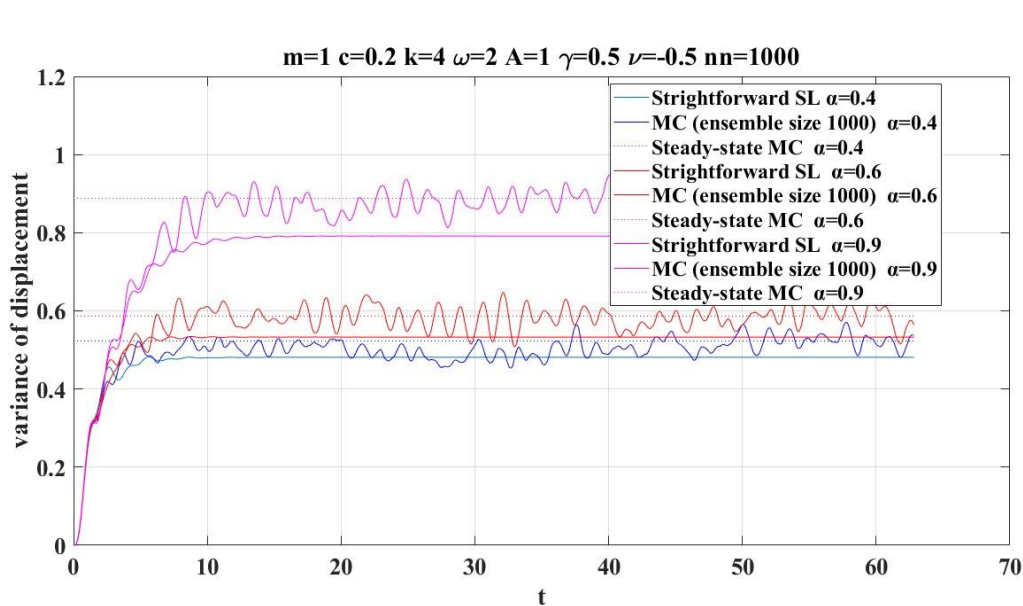
Grafico (1)

Dal grafico (2) si evince che, a parità di tutti gli altri parametri del sistema, all'aumentare del valore di  $\alpha$ ,

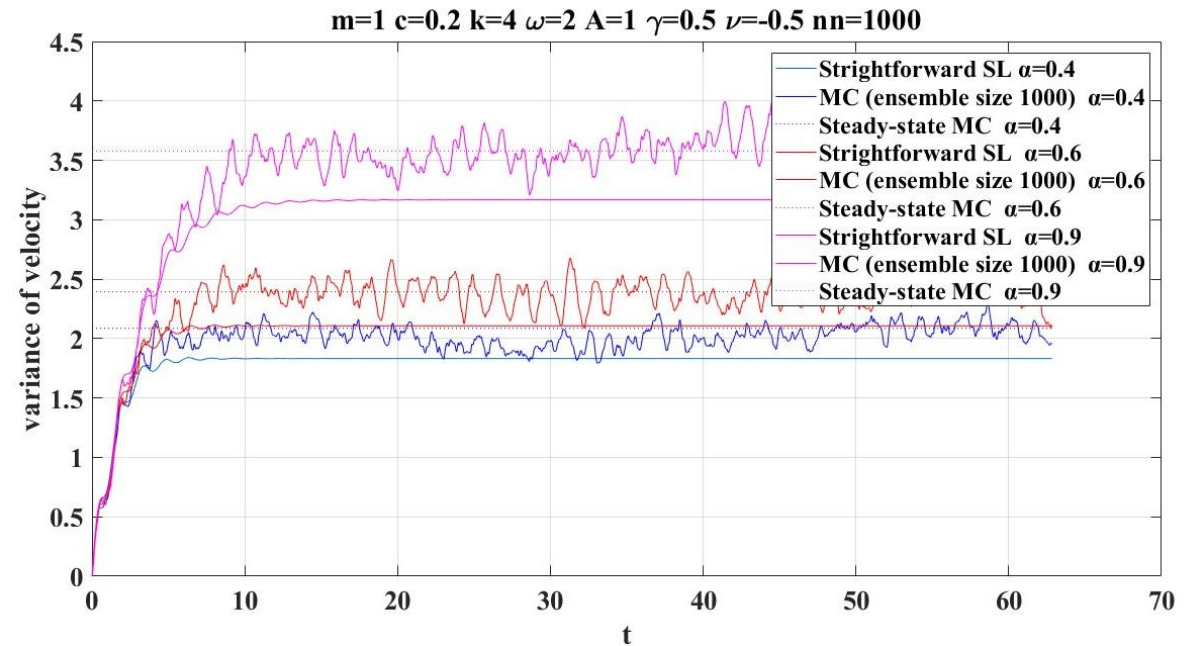
- aumenta anche la varianza dello spostamento
- aumenta la differenza fra le soluzioni stazionarie trovate con Monte Carlo e con Lyapunov.

Per gli altri valori si vede un avvicinarsi dei corrispettivi parametri di dispersione.

Gli stessi ragionamenti fatti sulla varianza dello spostamento possono essere fatti anche per la varianza della velocità, nel grafico (3).



Grafico(2)



Grafico(3)

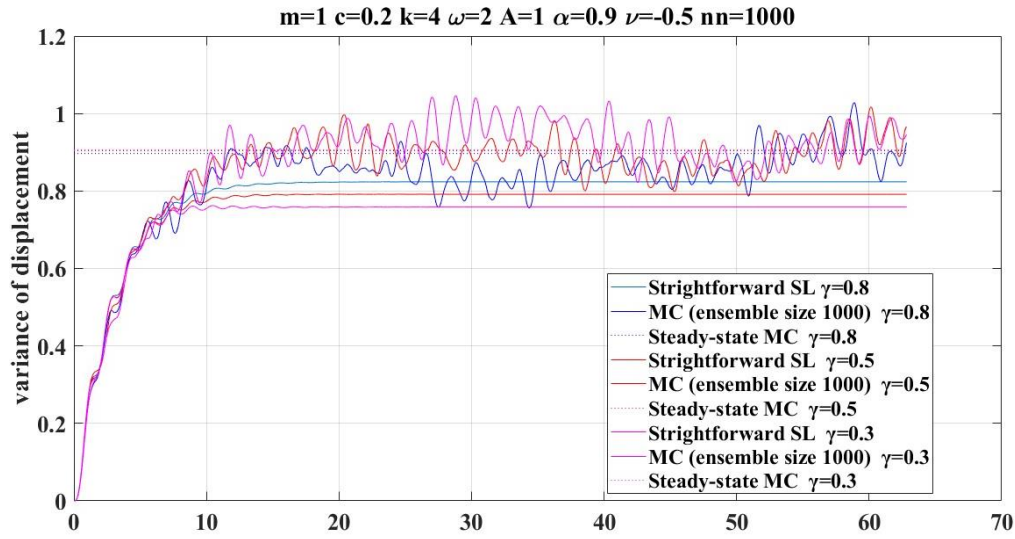


Grafico (4)

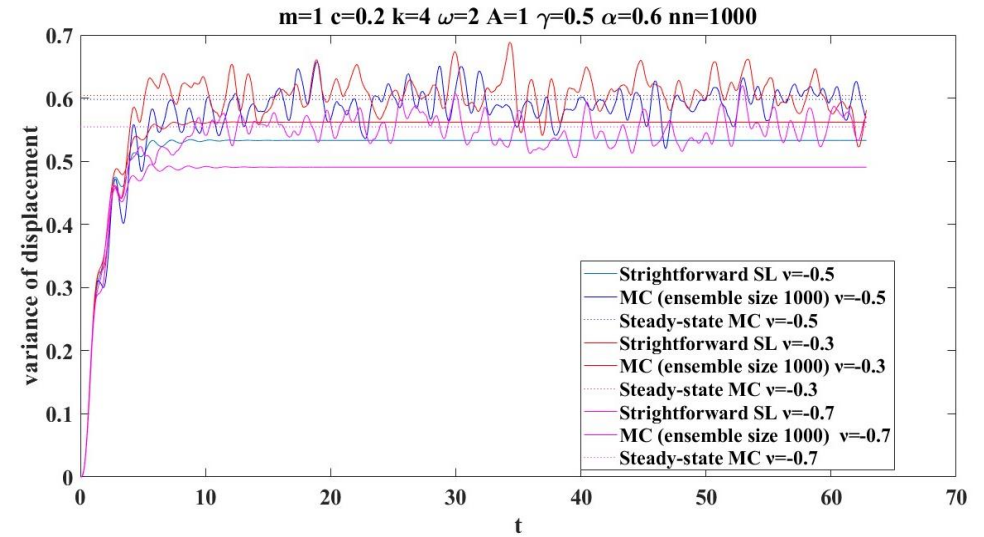


Grafico (6)

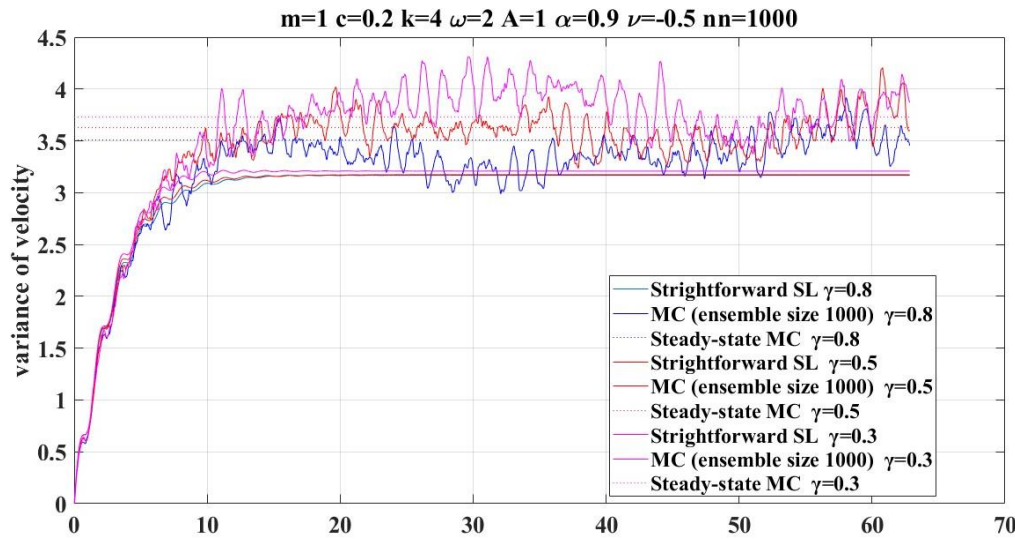


Grafico (5)

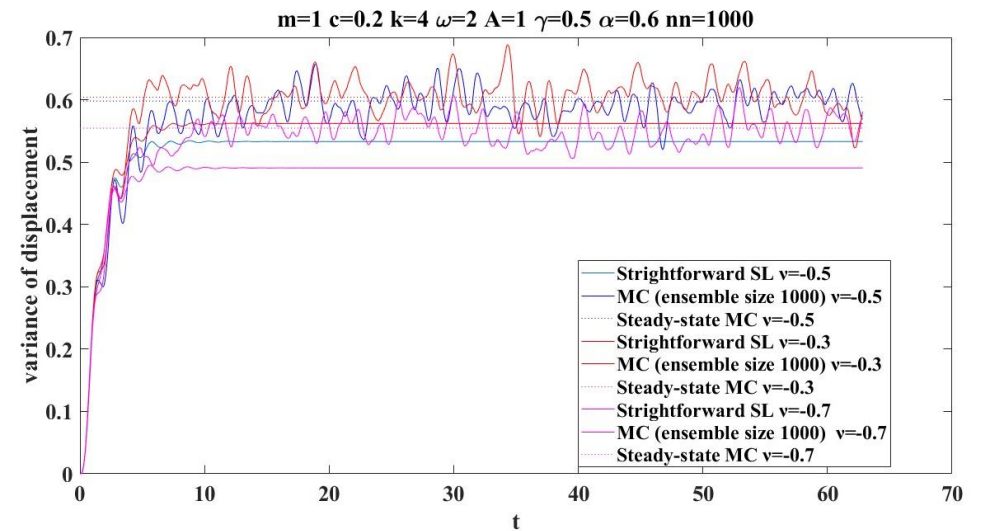


Grafico (7)

Entrambi i parametri non influenzano in modo sostanziale i risultati ottenuti dal metodo MC e da quello di linearizzazione statistica.

Si tenga presente che entrambi i parametri non hanno un significato fisico, ma devono essere determinati a partire da prove sperimentali.

La loro influenza appare evidente invece nel ciclo di isteresi, a parità di tutti gli altri parametri del sistema

**m=1 c=0.2 k=4  $\omega=2$  A=1  $\alpha=0.9$   $\nu=-0.5$  nn=1000**

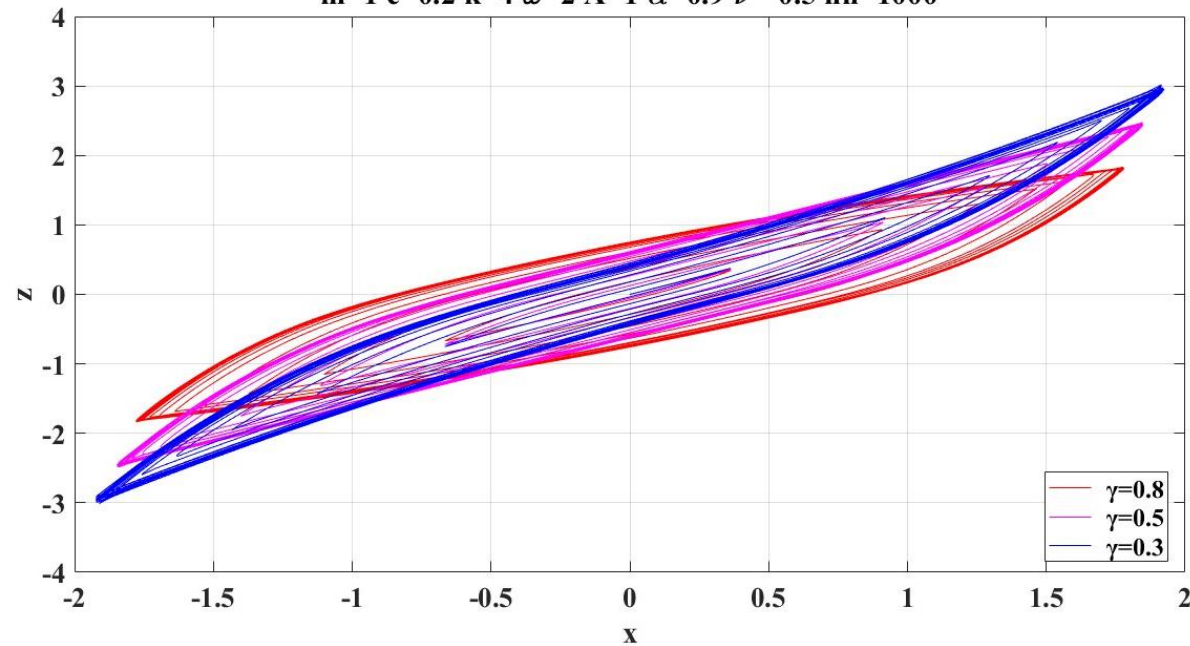


Grafico (8)

**m=1 c=0.2 k=4  $\omega=2$  A=1  $\gamma=0.5$   $\alpha=0.6$  nn=1000**

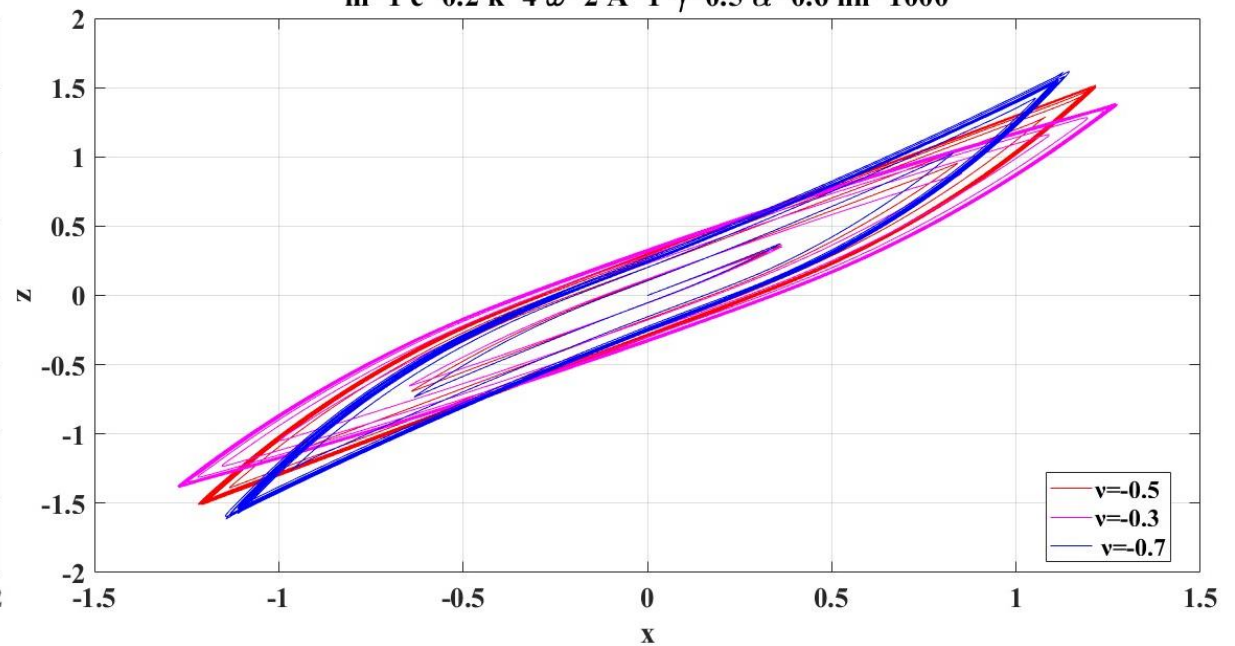
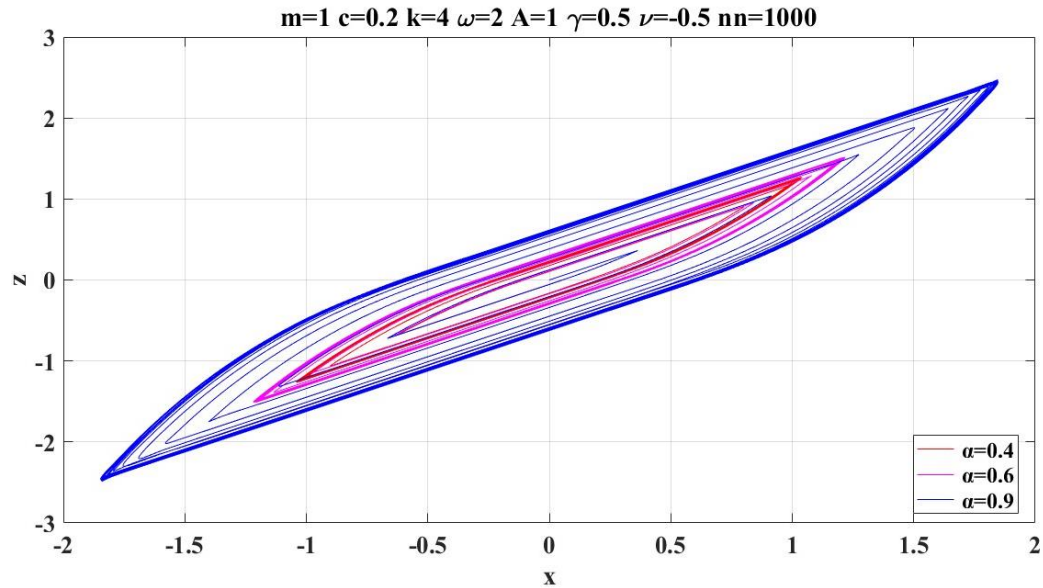
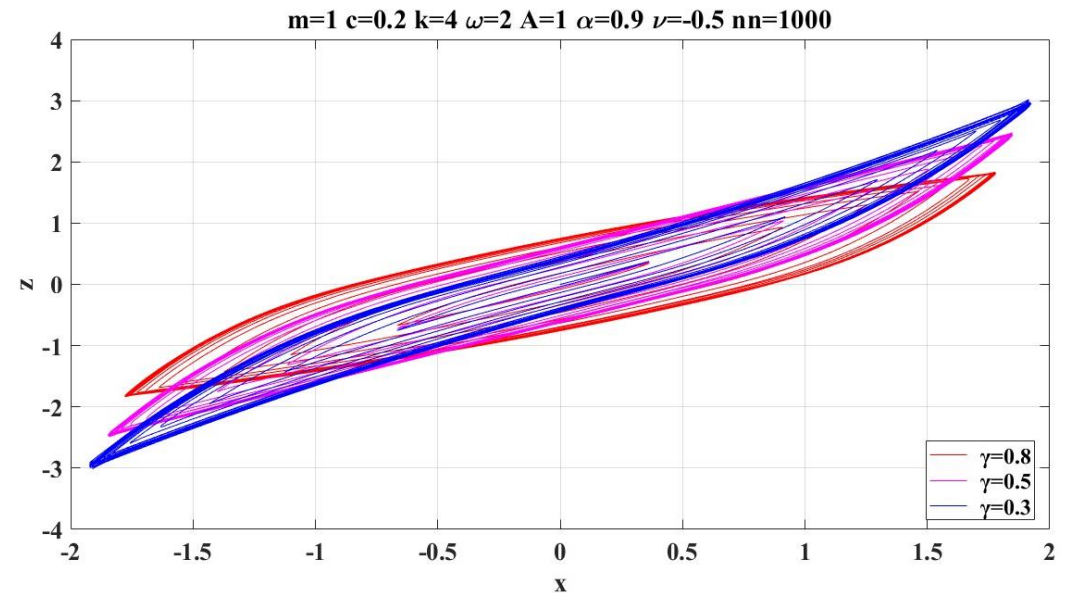
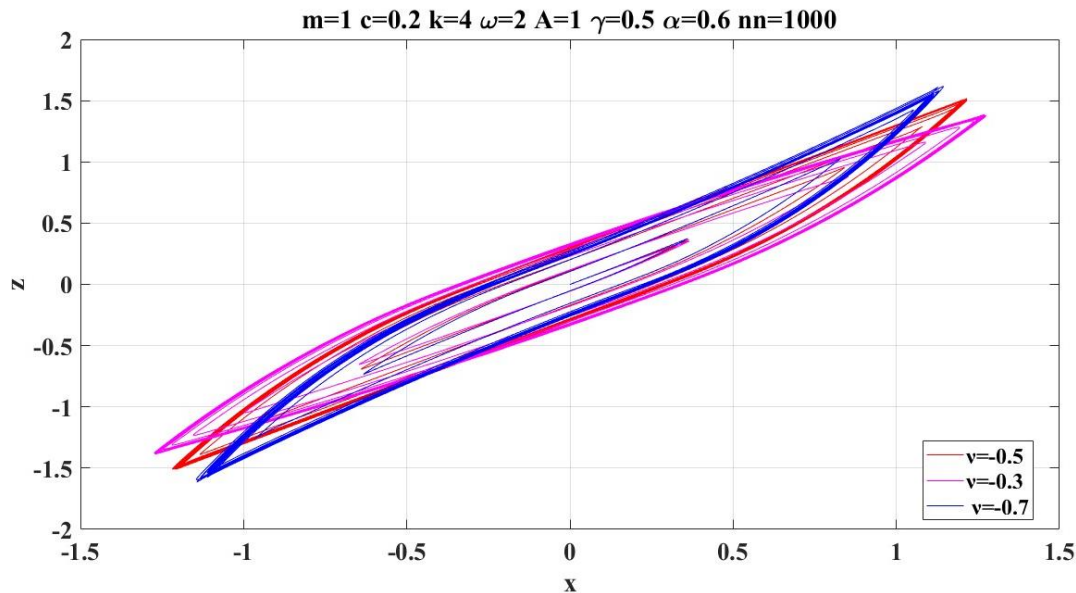


Grafico (9)



Al variare di  $\alpha$ , il ciclo di isteresi espande isotropicamente (quindi in modo concentrico). Questo parametro influisce sull'ampiezza del ciclo di isteresi.

Le variazioni di  $\nu$  e  $\gamma$  sono compatibili con una rotazione nel piano  $x,z$  del ciclo





Nonostante il modello di Bouc-Wen sia un utile strumento per simulare il comportamento non lineare di sistemi strutturali, presenta alcune criticità e limitazioni che è importante considerare:

- **Parametri da calibrare:** Il modello di Bouc-Wen richiede la determinazione di diversi parametri per caratterizzare il comportamento del materiale e della struttura. La calibrazione di questi parametri può essere complessa e richiedere dati sperimentali accurati, il che può essere difficile da ottenere in alcuni casi.
- **Sensibilità ai parametri:** Il modello può essere sensibile ai valori specifici dei parametri utilizzati, e piccole variazioni possono influenzare significativamente i risultati delle simulazioni. La scelta dei parametri appropriati è cruciale per ottenere risultati accurati e significativi.
- **Limitazioni nella rappresentazione di alcuni comportamenti:** Nonostante la sua accuratezza in molte situazioni, il modello di Bouc-Wen potrebbe non essere in grado di catturare completamente alcuni comportamenti strutturali complessi, come quelli legati a materiali particolari o a condizioni di carico estreme.
- **Interpretazione fisica dei parametri:** Alcuni dei parametri del modello di Bouc-Wen potrebbero non avere una diretta interpretazione fisica, rendendo difficile attribuire significato fisico preciso a ciascun parametro.

La tecnica di linearizzazione statistica risulta molto competitiva, ma tende a sottostimare la soluzione trovata con il metodo di Monte Carlo. Questo fattore deve essere tenuto in considerazione.

- Wei Zhang, Pol D. Spanos, Alberto Di Matteo. Nonstationary stochastic response of hysteretic systems endowed with fractional derivative elements. *Journal of Applied Mechanics*. June 2023, Vol.90
- Y. K. Wen. Equivalent Linearization for hysteretic systems under random excitation. *Journal of Applied Mechanics*. March 1980, Vol.47
- "Fondamenti di dinamica e di ingegneria sismica, Carmelo Majorana, Claudio Modena, Paolo Franchetti, Manuel Grendene, Stefano Secchi", McGraw-Hill
- "Dispensa di Meccanica delle vibrazioni, Aldo Sestieri, Università di Roma La Sapienza, 2012"