

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Modellistica e controllo di una stampante ink-jet

Modeling and control of an ink-jet printer

Laureando:
Marco FERRARO

Relatore:
Ch.mo Prof. Maria Elena
VALCHER

Anno accademico 2011/2012

Indice

1	Introduzione	1
2	Realizzazione del modello matematico	3
2.1	Dal modello fisico alle equazioni matematiche	3
2.1.1	Dinamiche traslatorie del sistema	4
2.1.2	Dinamica rotatoria del sistema	4
2.2	Modello di stato	5
2.3	Modello ingresso-uscita	7
3	Definizione del progetto ed analisi del sistema in catena aperta	9
3.1	Introduzione dei parametri	9
3.2	Profilo di stampa	10
3.2.1	Profilo di velocità	10
3.2.2	Profilo di posizione	11
3.2.3	Tolleranza permessa	13
3.3	Analisi del sistema in catena aperta	14
3.3.1	Analisi del modello di stato	14
3.3.2	Analisi del modello ingresso-uscita	14
4	Analisi del sistema in catena chiusa: realizzazione dei compensatori	17
4.1	Caratteristiche del sistema in catena a chiusa	17
4.1.1	Schema a blocchi	17
4.1.2	Risposta a regime	18
4.2	Scelta del compensatore	19
4.2.1	Nessun compensatore	19
4.2.2	Controllore Proporzionale (P)	21
4.2.3	Rete anticipatrice (<i>lead</i>)	22
4.2.4	Rete ritardatrice (<i>lag</i>)	25
4.2.5	Rete a sella	25
4.2.6	Altre reti compensatrici con 2 zeri	26
4.2.7	Rete compensatrice con 3 zeri e 3 poli	27
4.2.8	Rete compensatrice con 3 zeri reali e 3 poli	33
4.3	Effetto delle variazioni parametriche	36
4.3.1	Introduzione	36
4.3.2	Variante del compensatore $C_2(s)$	36
4.3.3	Variante del compensatore $C_4(s)$	37

5	Valutazione degli effetti prodotti da saturazione e disturbi	39
5.1	Saturazione del compensatore	39
5.1.1	Saturazione per sovraccarico del motore	39
5.1.2	Saturazione limite	41
5.2	Disturbo additivo tra compensatore e processo	42
5.3	Effetto combinato di saturazione e rumore	44
6	Conclusioni	47
	Bibliografia	49

Capitolo 1

Introduzione

In questo elaborato vogliamo analizzare il processo di stampa di una comune stampante a getto d'inchiostro (*ink-jet printer*), in particolare cercheremo di controllarne la posizione della testina in modo da poter riprodurre quanto desiderato con un buon livello di precisione.



Figura 1.1: Un esempio di stampante ink-jet

L'avvento delle stampanti risale ai tempi della diffusione dei *personal computer*. I primi modelli che furono prodotti sfruttavano la tecnologia **ad impatto**, derivata dalle macchine da scrivere. Questa però permetteva solamente la stampa di caratteri, senza alcuna personalizzazione grafica.

Nel 1970 venne quindi introdotta da *Centronics* la prima stampante a **matrice di aghi**, che permetteva di eliminare alcune limitazioni presenti nella tecnologia precedente. Tuttavia, avendo solo un numero limitato di aghi, le prime unità permettevano una qualità scadente di stampa. Solamente qualche anno dopo *Epson* riuscì a migliorarne la risoluzione aumentando le dimensioni della matrice, rendendo la qualità paragonabile alla tecnologia ad impatto.

Contrariamente a quanto si possa pensare, le tecnologie successive, con le quali abbiamo a che fare al giorno d'oggi, risalgono allo stesso periodo. Nel 1971, infatti, *Casio*

iniziò a sviluppare la prima stampante **a getto d'inchiostro piezoelettrica**, che però fu resa disponibile nel mercato solo un decennio dopo, grazie al contributo di *HP*. Il 1987 invece è da ricordare come l'anno dell'introduzione della prima stampante ink-jet a colori, sempre ad opera di *HP*.

Nel 1971 *Xerox* cominciò a realizzare la tecnologia **a laser**, che però, per motivi economici, di ingombro e di complessità, prese piede a livello commerciale soltanto nel 1982. Attualmente esistono anche altri tipi di stampanti, come ad esempio quelle **a LED**, il cui funzionamento è molto simile alla tecnologia al Laser, e quelle **ad inchiostro solido**, evoluzione di quelle a getto d'inchiostro.

Le stampanti ink-jet hanno avuto successo grazie ai loro bassi costi di produzione e alla buona qualità di stampa, oltre alla loro silenziosità. Una loro rappresentazione schematica si può vedere in Figura 1.2

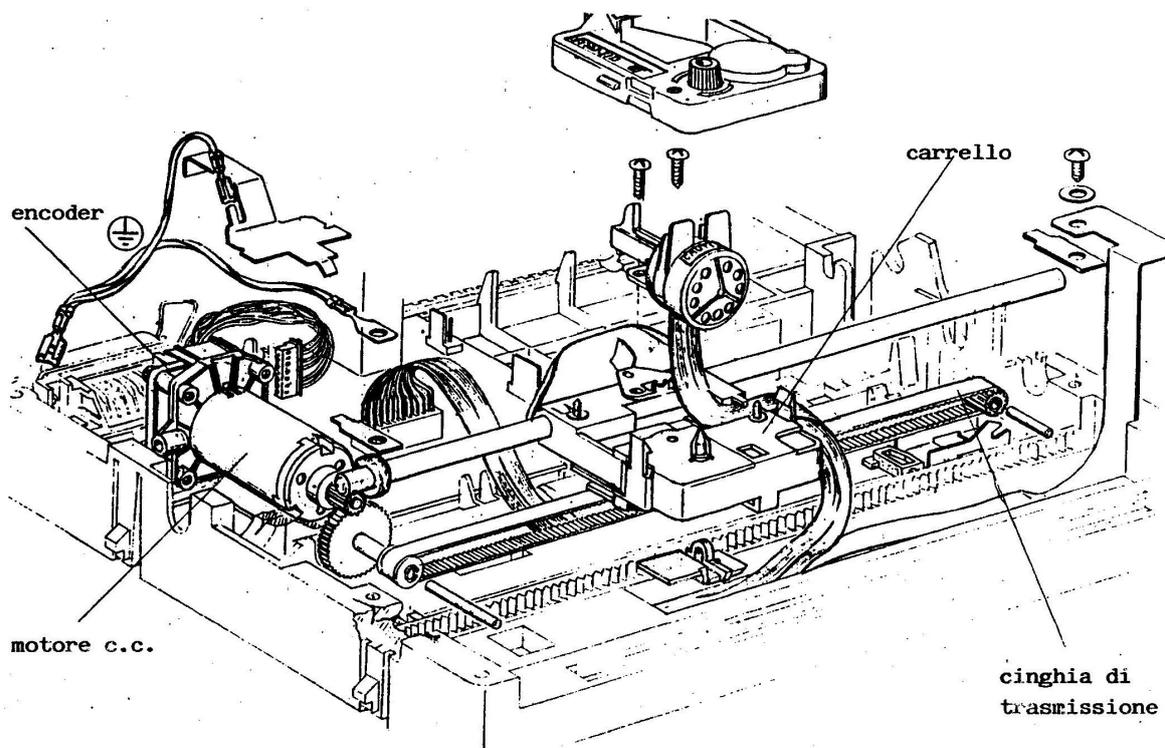


Figura 1.2: Modello in sezione di una stampante ad inchiostro

Il principio di funzionamento si basa su centinaia di microscopici ugelli che spruzzano minuscole gocce di inchiostro a base di acqua sulla carta durante lo spostamento del carrello. In questa maniera si compone una riga di stampa, al termine della quale un rullo provvede a spostare trasversalmente il foglio della quantità necessaria per poter comporre la linea successiva, questa volta però nella direzione opposta. Il movimento della testina di stampa è possibile grazie a una cinghia di trasmissione azionata da un motore elettrico a magneti permanenti, che pertanto trasforma un moto rotatorio in uno traslatorio. Nel nostro studio ci occuperemo solamente del moto del carrello, trascurando l'azione del rullo.

Capitolo 2

Realizzazione del modello matematico

2.1 Dal modello fisico alle equazioni matematiche

Esaminiamo ora un modello fisico semplificato della stampante a cinghia, a partire dal quale andremo a derivare le equazioni che regolano la dinamica del sistema complessivo.

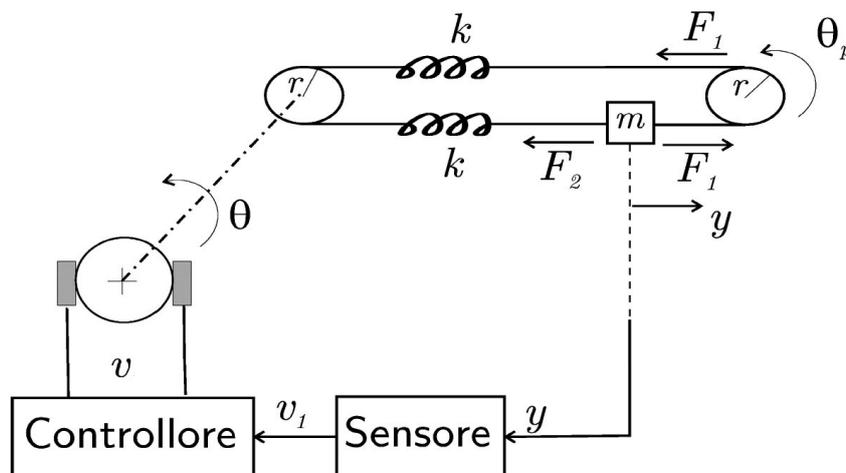


Figura 2.1: Modello semplificato della stampante a cinghia

In Figura 2.1 appaiono alcuni dei parametri che verranno usati nel modello di stato (alcuni sono stati introdotti per chiarezza). Per semplicità si è supposto che i raggi delle pulegge siano gli stessi. In dettaglio, r è il raggio di ciascuna puleggia, k rappresenta la costante elastica della cinghia¹, mentre m è la massa del carrello di stampa, contenente la testina.

Altre variabili ausiliarie utilizzate sono F_1 e F_2 , le forze esercitate sul carrello di stampa, rispettivamente (con riferimento alla Figura 2.1) verso destra e verso sinistra;

¹In realtà dovremmo considerare separatamente 2 costanti elastiche diverse ma, poiché assumiamo per la cinghia un modello a parametri concentrati, utilizziamo per semplicità un unico valore identificato con k valido per entrambi i tratti.

θ invece rappresenta la posizione angolare del motore (e pertanto anche della puleggia, in quanto adiacente al motore), mentre θ_p è la posizione angolare della puleggia di destra. Infine in Figura 2.1 vengono riportati anche quelli che saranno l'ingresso e l'uscita del modello, ovvero v , la tensione applicata al motore, e y , la posizione del carrello di stampa rispetto a una posizione di riferimento². Tutte queste ultime grandezze sono funzioni del tempo, mentre i parametri citati in precedenza sono assunti costanti, questo perché il modello che si vuole realizzare è **lineare e tempo-invariante** (*LTI*). In seguito, per una migliore leggibilità, molto spesso verrà omessa la dipendenza esplicita delle funzioni dal tempo.

2.1.1 Dinamiche traslatorie del sistema

Esaminiamo ora le prime due equazioni che regolamentano le dinamiche traslatorie del sistema. Per convenzione fissiamo come asse positivo quello che in Figura 2.1 è orientato verso destra. Dalla definizione di forza elastica e di angolo in radianti si ottiene

$$F_1 = kr\theta - kr\theta_p = k(r\theta - y). \quad (2.1)$$

Analogamente accade per F_2 , ad eccezione del fatto che, considerando che essa agisce nel verso opposto a F_1 , il suo segno sarà l'inverso:

$$F_2 = k(y - r\theta). \quad (2.2)$$

Per la seconda legge di Newton (e ricordando che $y(t)$ è la posizione del carrello di stampa) risulta:

$$F_1 - F_2 = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}.$$

Pertanto, da (2.1) e (2.2) si ha

$$m\ddot{y} = 2k(r\theta - y),$$

da cui si ottiene la prima equazione dinamica:

$$\ddot{y} + \frac{2k}{m}y = \frac{2kr}{m}\theta. \quad (2.3)$$

La seconda equazione dinamica non aggiunge nulla di nuovo ma serve per poter realizzare un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Essa lega la velocità del carrello alla posizione e verrà ripresa nel paragrafo 2.2.

2.1.2 Dinamica rotatoria del sistema

In questa sezione vedremo come è possibile generare le forze F_1 e F_2 al fine di poter variare la posizione della testina di stampa. La prima variabile interna in gioco è la *coppia del motore*, T_m , data da

$$T_m = K_C i,$$

²Ad esempio il margine più a sinistra dell'area di stampa. Non è riduttivo fare un'ipotesi di questo tipo, in quanto un'altra posizione di riferimento produrrebbe gli stessi effetti a meno di una traslazione dell'origine. Dal momento che, come si vedrà più avanti, non interessa la posizione assoluta ma quella relativa all'origine, la scelta di un suo diverso posizionamento non comporta alcuna significativa differenza.

dove K_C è la *costante di coppia* del motore e i è la corrente da fornire ad esso per generare la coppia. Poiché il motore non viene pilotato in corrente, bensì in tensione, si introduce un altro parametro che tiene conto della resistenza di armatura e di campo, cioè la *resistenza equivalente* R_e . Oltre a questi elementi resistivi si dovrebbero considerare anche degli effetti induttivi, ma per semplicità essi vengono trascurati. In questo modo la coppia viene espressa nella forma:

$$T_m = \frac{K_C}{R_e} v, \quad (2.4)$$

dove con v abbiamo indicato la tensione da fornire al motore per generare la coppia motrice. Si noti che la tensione v è anche l'ingresso del sistema.

Dobbiamo ora legare la coppia del motore alle altre variabili in gioco. Possiamo considerare la dinamica rotatoria come quella di un corpo rigido di forma circolare bidimensionale (puleggia) che trasmette il moto rotatorio a un'altra puleggia tramite una cinghia soggetta a un certo *attrito viscoso*. Proseguiamo valutando la risultante dei momenti rispetto al centro del motore (che è lo stesso della puleggia sinistra). Dall'altra parte, presupponendo noto il *coefficiente di attrito viscoso della puleggia* f , dobbiamo trovare il *momento d'inerzia* totale J rispetto al centro.

Al momento totale contribuisce la coppia del motore, alla quale si oppone la coppia generata dalla forza risultante ($F_1 - F_2$) che fa ruotare la puleggia sinistra in senso opposto tramite un braccio che è pari al raggio della puleggia stessa. In altre parole, dall'equazione del moto di rotazione di un corpo rigido, si ha che

$$T_m - r(F_1 - F_2) = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt}.$$

Quindi, avendo come parametro noto l'inerzia del motore J_m , calcoliamo il momento d'inerzia totale riportato all'asse del motore come

$$J = J_m + mr^2, \quad (2.5)$$

dove m è la massa del carrello. In sintesi, mettendo assieme le equazioni (2.4), (2.1) e (2.2), si ottiene la terza equazione dinamica che regola il movimento della testina di stampa:

$$\frac{K_C}{R_e} v - 2kr(r\theta - y) = J\ddot{\theta} + f\dot{\theta}. \quad (2.6)$$

La quarta equazione dinamica, analogamente alla seconda, serve a legare la posizione angolare alla velocità angolare di un punto sull'estremità della puleggia sinistra.

2.2 Modello di stato

A questo punto è necessario riprendere le quattro equazioni fin qui trovate e tradurle in un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine, dal quale si ottiene il modello di stato.

Innanzitutto introduciamo il **vettore di stato** $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ che consentirà di definire quali tra quelle citate finora sono variabili di stato. Certamente una di queste

è la posizione del carrello y , nonché uscita del sistema e , come menzionato in precedenza, anche la sua derivata lo sarà, in quanto nel modello di stato compaiono soltanto derivate al più del primo ordine. Le altre variabili di stato sono la posizione angolare θ , legata all'ingresso v e all'uscita y dalla (2.6), e la sua derivata, per lo stesso motivo espresso in precedenza.

Pertanto si definisce il vettore di stato in modo nel seguente modo

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ y(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}$$

Le due equazioni introdotte per abbassare di ordine le derivate seconde, riferendoci al vettore $\mathbf{x}(t)$, sono le seguenti:

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_4(t) = x_3(t) \quad (2.8)$$

Quindi la (2.3), con queste sostituzioni, si traduce in

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) + \frac{2k}{m}x_2(t) = \frac{2kr}{m}x_4(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \end{cases}$$

mentre la (2.6) (indicando con $u(t)$ l'ingresso $v(t)$) diventa

$$\begin{cases} \frac{K_C}{R_e}u(t) - 2kr[r x_4(t) - x_2(t)] = J\dot{x}_3(t) + f x_3(t) \\ \dot{x}_4(t) = x_3(t) \end{cases}$$

Mettendo assieme tutte le equazioni, si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{2k}{m}x_2(t) + \frac{2kr}{m}x_4(t) & (2.9) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) & (2.10) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{2kr}{J}x_2(t) - \frac{f}{J}x_3(t) - \frac{2kr^2}{J}x_4(t) + \frac{K_c}{JR_f}u(t) & (2.11) \\ \dot{x}_4(t) = x_3(t) & (2.12) \\ y(t) = x_2(t) & (2.13) \end{cases}$$

ovvero, in forma matriciale,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = H\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (2.14)$$

dove

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2k}{m} & 0 & \frac{2kr}{m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2kr}{J} & -\frac{f}{J} & -\frac{2kr^2}{J} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_c}{JR_f} \\ 0 \end{bmatrix} \quad H = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0].$$

Il progetto prevede, come si vedrà nel capitolo 3, di studiare in primo luogo la stabilità del sistema ed eventualmente apportare alcuni miglioramenti al fine di raggiungere un determinato scopo. Per fare questo è stato scelto di procedere con un **modello ingresso-uscita (I/O)**. Nel prossimo paragrafo vedremo come riportarci a una tale struttura. Tuttavia è possibile, come vedremo nel paragrafo 3.3.1, fare alcune considerazioni anche sul modello di stato.

2.3 Modello ingresso-uscita

Dal sistema di equazioni differenziali trovato in precedenza dobbiamo ora creare una sola equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, che costituirà il modello I/O. Le uniche 2 funzioni del tempo (come dice il nome) che dovranno comparire in essa sono l'uscita ($y(t) \equiv x_2(t)$) e l'ingresso $u(t)$, insieme alle loro derivate. Quindi, a partire dal modello di stato, esprimiamo le altre variabili di stato come funzioni di ingresso e uscita e loro derivate. Ad esempio, da (2.9) si ottiene

$$x_4 = \frac{m}{2kr} \frac{dx_1}{dt} + x_2 = \frac{m}{2kr} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{r}y \quad (2.15)$$

quindi, da (2.15) e da (2.12)

$$x_3 = \frac{m}{2kr} \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{1}{r} \frac{dy}{dt}.$$

Pertanto, derivando ulteriormente, si ottiene

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{m}{2kr} \frac{d^4y}{dt^4} + \frac{1}{r} \frac{d^2y}{dt^2}$$

Infine, da (2.11)

$$\frac{m}{2kr} \frac{d^4y}{dt^4} + \frac{1}{r} \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2kr}{J}y - \frac{mf}{2krJ} \frac{d^3y}{dt^3} - \frac{f}{Jr} \frac{dy}{dt} - \frac{mr}{J} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2kr}{J}y + \frac{K_C}{JR_e}u$$

che, riordinata, produce l'**equazione del modello ingresso-uscita**:

$$y^{(4)}(t) + \frac{f}{J}y^{(3)}(t) + \frac{2k(J + mr^2)}{mJ}y^{(2)}(t) + \frac{2kf}{mJ}y^{(1)}(t) = \frac{2krK_C}{mJR_e}u(t) \quad (2.16)$$

Questo è il modello che verrà utilizzato in seguito per l'analisi del sistema.

Capitolo 3

Definizione del progetto ed analisi del sistema in catena aperta

Lo scopo del progetto è quello di controllare la posizione del carrello di stampa di una stampante ad inchiostro, in modo che la testina (contenuta all'interno del carrello) riesca a seguire un dato profilo di stampa entro un certo limite di errore.

3.1 Introduzione dei parametri

Cominciamo a dare qualche valore ai parametri di progetto menzionati nel paragrafo 2.1:

$$m = 400 \text{ g}$$

$$r = 5.45 \text{ mm}$$

$$k = 7.5 \times 10^5 \text{ N/m}$$

$$K_C = 6.45 \times 10^{-2} \text{ Nm/A}$$

$$J_m = 1.23 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

$$I_P = 10 \text{ A}$$

$$f = 15 \times 10^{-6} \text{ kg/(m}^2\text{s)}$$

$$R_e = 2.96 \text{ } \Omega$$

Per ora consideriamo solo il *valore nominale* di questi parametri; nel paragrafo 4.3 verrà valutato anche l'effetto delle variazioni di alcuni parametri dovuti all'incertezza con cui sono noti questi dati.

Dalla (2.5) risulta pertanto che $J = 2.42 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$. Abbiamo introdotto un nuovo parametro che riguarda il motore, cioè la *corrente di picco* I_P che può assorbire. Di solito si sconsiglia di far lavorare il motore con il massimo della corrente sopportabile, altrimenti si può incorrere in fenomeni di saturazione. Dal momento che abbiamo supposto che il sistema sia lineare sarà opportuno tenersi a distanza da queste condizioni estreme.

Tipicamente, infatti, un eventuale picco di corrente non deve durare per un lungo periodo, ma solo per un istante molto breve.

Con questo abbiamo introdotto un **primo vincolo** a cui il progetto dovrà attenersi, ovvero, sfruttando la resistenza equivalente e la *legge di Ohm*, dovrà essere

$$v(t) \leq R_e I_P = 2.96 \, \Omega \times 10 \, A = 29.6 \, V. \quad (3.1)$$

3.2 Profilo di stampa

3.2.1 Profilo di velocità

Come visto in precedenza, la posizione della testina deve seguire un certo profilo di stampa. Anziché partire dalla relazione che ha la posizione nel tempo, è più semplice iniziare da una descrizione della velocità¹. Infatti la stampa avviene a velocità costante, pertanto il motore dovrà portare il carrello alla *velocità di regime*² $v_m = 0.6 \, m/s$ e poi dovrà fermarlo alla fine del foglio, per poi ripetere lo stesso procedimento nel verso opposto.

Per questo progetto si è presa in osservazione la stampa di un foglio in formato A4, la cui area *stampabile* è di $20 \times 28 \, cm$. La dimensione interessata è la larghezza, quindi poniamo $l_p = 0.2 \, m$. È opportuno mantenere la velocità il più possibile costante in questo tratto per avere una buona qualità di stampa.

Si potrebbe pensare di utilizzare un semplice profilo di velocità a onda quadra, in cui il motore porta istantaneamente la velocità del carrello da 0 al valore di regime, mentre all'inversione di marcia la porta dal valore massimo al suo opposto. Questa soluzione non è però fisicamente realizzabile in quanto le transizioni istantanee non esistono in natura. Neppure una prima approssimazione con una transizione di velocità *molto* brusca è una buona ipotesi. Infatti il motore dovrebbe essere in grado di fornire tutta la forza necessaria per l'accelerazione in un tempo brevissimo, e questo significherebbe avere altissimi picchi di corrente che, come menzionato in precedenza, devono essere evitati.

La soluzione a cui si giunge è una variante della seconda proposta, in cui però il tratto di accelerazione è più lungo, permettendo così al motore di non essere sovraccaricato in questi tratti. A tale scopo sono presenti dei margini all'esterno dell'area di stampa che permettono l'accelerazione del carrello. Questi sono di $4 \, cm$ per lato.

Il tratto di accelerazione può essere costituito da un qualsiasi tipo di moto accelerato; tuttavia, per semplicità, si è scelto di imporre un *moto uniformemente accelerato*. Andiamo quindi a calcolare quanto tempo richiedono i tratti di accelerazione e di stampa, dal momento che sono univocamente legati a velocità e accelerazione per via dei moti uniformi. D'ora in poi ci riferiremo solamente a un tratto di "andata", in cui la testina si muove dall'origine alla posizione massima. Il tratto inverso segue lo stesso profilo

¹Si noti che solo in questo paragrafo indichiamo con v la velocità del carrello, da non confondere con la tensione del motore, che abbiamo indicato anche con u . Non c'è possibilità di equivoco in quanto la tensione non verrà mai nominata qui, mentre la velocità non avrà una grande importanza al di fuori di questo paragrafo. Lo stesso vale per la posizione, indicata con x come lo stato, anche se il modello di stato non verrà quasi mai usato.

²Nel tratto di "ritorno" chiaramente la velocità avrebbe valore negativo perché la posizione parte dal valore massimo e arriva all'origine. In questo caso però consideriamo, anche se non esplicitamente segnalato, il suo valore in modulo.

(pertanto i tempi dedicati a ogni tratto sono gli stessi), con l'unica differenza che tutte le velocità hanno segno negativo.

Osserviamo che le condizioni iniziali del moto sono nulle, ovvero il carrello parte da fermo (quindi $v(0) = 0$) e all'origine (quindi $x(0) = 0$). Banalmente, poiché nel tratto centrale di stampa il moto è *rettilineo uniforme*, si ottiene $T_p = l_p/v_m = 0.333$ s. Nel tratto di accelerazione (avendo che $v(T_1) = v_m$ e $v(0) = 0$) valgono

$$a = \frac{v_m}{T_a} \quad \text{e} \quad l_a = \frac{1}{2}aT_a^2$$

dove a è l'accelerazione e l_a la lunghezza del tratto di accelerazione di 4 cm. Dalla relazione di destra si ottiene, scartando la soluzione negativa, che

$$T_a = 2\frac{l_a}{v_m} = 0.133 \text{ s}$$

Per ragioni di simmetria, anche il tratto in decelerazione l_d avrà durata $T_d = T_a = 0.133$ s. Ne risulta che la velocità di stampa in funzione del tempo nel tratto di andata è la seguente

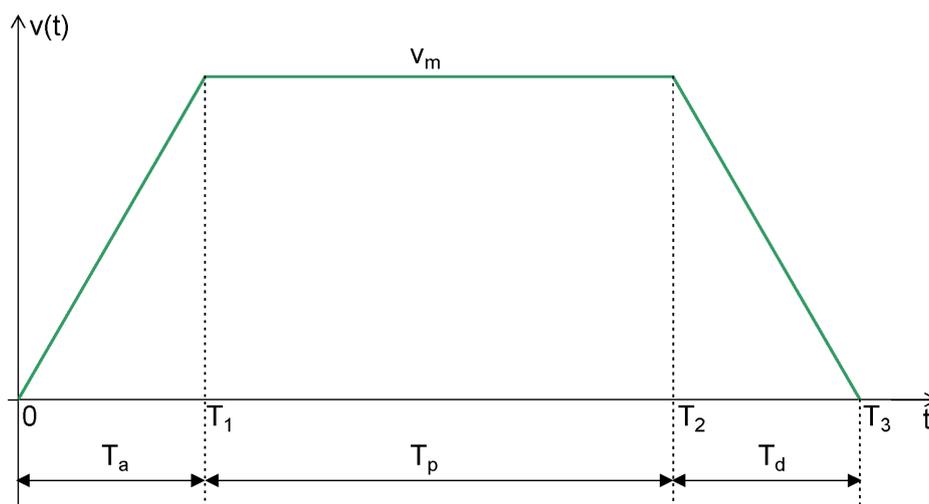


Figura 3.1: Profilo di velocità di stampa nel tratto di “andata”

Riassumendo, nel primo tratto, di lunghezza l_a , la testina impiega un tempo T_a per portarsi, con accelerazione costante, da una velocità nulla a v_m , quindi esegue un tratto a velocità costante lungo l_p per T_p secondi e poi decelera nel margine destro l_d per il tempo T_a , finché la velocità ritorna a 0, dopodiché si ripete tutto invertendo il segno della velocità, come riportato in Figura 3.2.

3.2.2 Profilo di posizione

Per quanto pratico, il profilo di velocità non è direttamente utilizzabile. Infatti la variabile da controllare è la posizione y . Tuttavia, sapendo che esse sono legate dalla relazione $v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ è possibile ricavare la posizione da seguire invertendo la relazione precedente.

Integrando entrambi i membri, infatti, la relazione non cambia, purché vengano presi alcuni accorgimenti. Innanzitutto si osserva che la posizione deve essere una funzione

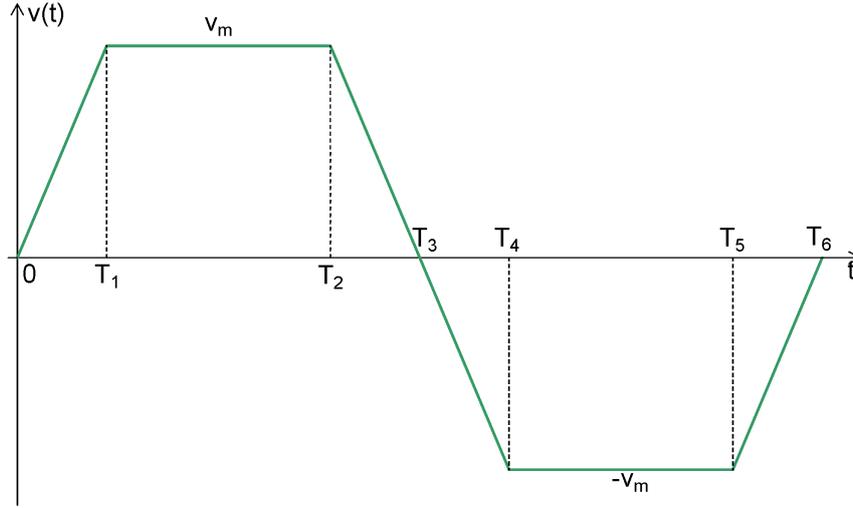


Figura 3.2: Profilo di velocità di stampa completo

continua nel tempo: la testina si sposta gradualmente da un'estremità all'altra e deve coprire in totale un tratto contiguo lungo 28 cm. In sostanza, l'obiettivo è quello di trovare una funzione continua che derivata produca proprio il profilo di velocità.

Per prima cosa, troviamo in forma analitica la velocità del carrello, costituita da tratti di rampa e gradino. Ricordando che l'accelerazione a è la pendenza della velocità nel primo tratto, si ottiene la seguente funzione definita a tratti

$$v(t) = \begin{cases} at, & \text{per } 0 \leq t \leq T_1; \\ v_m, & \text{per } T_1 < t \leq T_2; \\ v_m - a(t - T_2), & \text{per } T_2 < t \leq T_3. \end{cases} \quad (3.2)$$

Quindi calcoliamo l'integrale indefinito di questa funzione, ricordando che esistono infinite soluzioni che differiscono per una costante. Se eseguiamo l'integrale in 3 pezzi, pertanto, otterremo 3 costanti; tuttavia, una sola tripla $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ sarà quella che ci permetterà di ottenere una funzione continua che parte dall'origine e arriva a $y_{max} = 28$ cm. Si giunge a

$$y_{rif}(t) = \int v(t)dt = \begin{cases} a\frac{t^2}{2} + \phi_1, & \text{per } 0 < t < T_1; \\ v_m t + \phi_2, & \text{per } T_1 < t < T_2; \\ (v_m + aT_2)t - a\frac{t^2}{2} + \phi_3, & \text{per } T_2 < t < T_3. \end{cases} \quad (3.3)$$

È necessario ora estendere la funzione negli istanti 0, T_1 , T_2 e T_3 per continuità. Non serve alcun nuovo calcolo, in quanto abbiamo già visto la lunghezza dei tratti nel paragrafo precedente (basta solo ricordare che $x_2 = l_a + l_p = 20 + 4 = 24$ cm)

Poiché la testina parte dall'origine, è immediato porre $\phi_1 = 0$, in modo che $y_{rif}(0) = 0$. Lo stesso vale per l'istante finale, quindi è ovvio che $y_{rif}(T_3) = 0.28$ m. Eguagliamo poi le prime 2 equazioni di (3.3) in T_1 per ottenere ϕ_2 :

$$a\frac{T_1^2}{2} = v_m T_1 + \phi_2 \quad \text{da cui} \quad \phi_2 = -\frac{v_m T_1}{2}$$

e facciamo lo stesso per le ultime 2 equazioni in T_2 :

$$v_m T_2 + \phi_2 = (v_m + aT_2)T_2 - a\frac{T_2^2}{2} + \phi_3 \quad \text{da cui} \quad \phi_3 = -\frac{v_m}{2} \left[T_1 + \frac{T_2^2}{T_1} \right].$$

Riscriviamo quindi la (3.3) con i prolungamenti per continuità:

$$y_{rif}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} a, & \text{per } 0 \leq t \leq T_1; \\ v_m t - \frac{v_m T_1}{2}, & \text{per } T_1 < t \leq T_2; \\ (v_m + aT_2)t - a\frac{t^2}{2} - \frac{v_m}{2} \left(T_1 + \frac{T_2^2}{T_1} \right), & \text{per } T_2 < t \leq T_3; \end{cases} \quad (3.4)$$

che graficata produce (sempre nel tratto dall'origine a fine corsa):

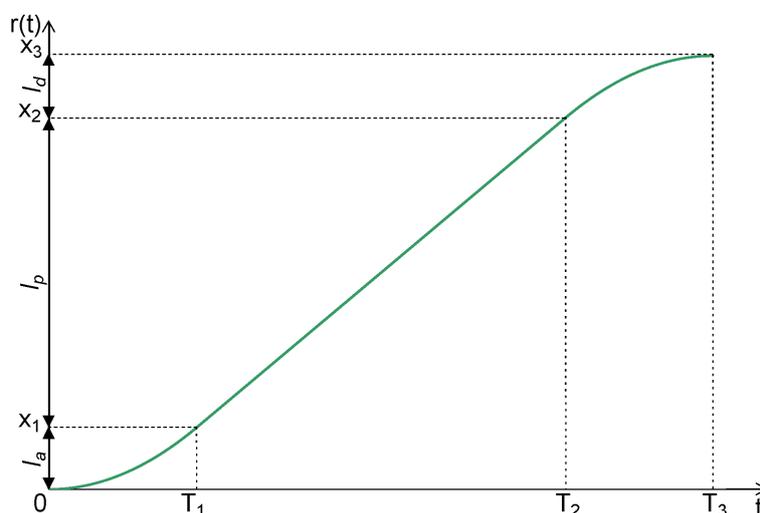


Figura 3.3: Profilo della posizione di riferimento

3.2.3 Tolleranza permessa

Abbiamo visto finora quale posizione dobbiamo far assumere al carrello di stampa nel tempo. Chiaramente il sistema nella pratica non permetterà di raggiungere alla perfezione questo obiettivo. Dobbiamo allora introdurre dei parametri fondamentali che sono dei limiti di tollerabilità entro i quali dobbiamo attenerci.

Se da una parte abbiamo introdotto un vincolo sull'ingresso, ora dovremo introdurne un altro su cui ci focalizzeremo principalmente, in quanto ciò che interessa è che la testina stampi con un piccolo margine di errore. In altre parole, per prima cosa vogliamo che l'errore di posizione sia piccolo, e poi verifichiamo che il raggiungimento di tale situazione sia possibile, cioè che esista un ingresso che rispetti il vincolo (3.1). Oltretutto non è detto che la saturazione comprometta l'obiettivo sulla posizione, come vedremo nel capitolo 5.

Definiamo quindi l'**errore di posizione** $e(t) := y_{rif} - y(t)$. Sperimentalmente si è visto che, per una buona qualità di stampa, l'errore di posizione non deve essere superiore

a 0.2 mm. Quindi dovremo rispettare il **secondo vincolo**

$$|e(t)| \leq 0.2 \text{ mm} \quad (3.5)$$

Sebbene sia (3.1) che (3.5) valgano in senso lato, sarebbe opportuno mantenersi a distanza da essi, in quanto delle eventuali variazioni parametriche potrebbero far sì che questi limiti non vengano rispettati.

Un **terzo vincolo** riguarda l'intervallo di valori che può assumere la posizione: logicamente dovrà essere $y(t) \in [0, l_1 + l_2 + l_3]$, ma, per vari motivi che si vedranno in seguito, questo potrebbe essere violato.

3.3 Analisi del sistema in catena aperta

Cominciamo ora a valutare come si comporta il sistema preso in considerazione: partiremo innanzitutto dal valutare il sistema in catena aperta per poter capire se è utilizzabile ed eventualmente come risponde. Naturalmente ha senso impiegare un sistema che nel complesso sia stabile, quindi vedremo in questo e nei prossimi capitoli come fare in modo di rispettare questa proprietà.

3.3.1 Analisi del modello di stato

Per prima cosa si può già estrapolare qualche ultima informazione dal modello di stato. Vediamo se è verificata la stabilità del sistema. Per il momento non abbiamo condizioni iniziali che ci vengono imposte, quindi verifichiamo la presenza o meno di **asintotica stabilità** tramite il calcolo degli autovalori della matrice di stato \mathbf{F} . Il polinomio caratteristico porge

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{F}| = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{2k}{m} & 0 & -\frac{2kr}{m} \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2kr}{J} & \lambda + \frac{f}{J} & \frac{2kr^2}{J} \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \left[\frac{2k}{m} \left(1 + \frac{f}{J} \right) + \left(\frac{2k}{m} + \frac{2k}{J} r^2 \right) \lambda + \frac{f}{J} \lambda^2 + \lambda^3 \right]$$

da cui si deduce che c'è un autovalore a parte reale nulla, il che permette di avere *al più* semplice stabilità. Possiamo già dire, pertanto, che il sistema in catena aperta non è utilizzabile in quanto il sistema è solo semplicemente stabile ed è facile che una piccola variazione dei parametri renda il sistema non solo non asintoticamente stabile, ma pure instabile.

3.3.2 Analisi del modello ingresso-uscita

Sebbene abbiamo già visto nel paragrafo precedente che il sistema ad anello aperto non è asintoticamente stabile, è bene valutare alcune proprietà del modello I/O, in quanto è quello che verrà usato d'ora in poi.

Calcoliamo per prima cosa la sua **funzione di trasferimento ad anello aperto** $G(s)$, che otteniamo a partire dalla (2.16):

$$G(s) = \frac{\frac{2krK_C}{mJR_e}}{s \left(s^3 + \frac{f}{J}s^2 + \frac{2k(J + mr^2)}{mJ}s + \frac{2kf}{mJ} \right)} \quad (3.6)$$

A conferma di quanto visto in precedenza, è presente un polo nell'origine che impedisce la stabilità BIBO.

Introducendo i valori numerici opportuni, tramite Matlab sono stati calcolati poli, zeri e guadagno di Bode di questa funzione di trasferimento. Ne risulta che $G(s)$ ha:

- un polo nell'origine
- un polo semplice in $p = -2.4$, quindi poniamo $\omega_p = \frac{1}{|p|} = 0.416$ rad/s
- 2 poli complessi coniugati $-0.102 \pm j2360$ che quindi hanno:
 - pulsazione naturale $\omega_n = 2.36 \times 10^3$ rad/s
 - fattore di smorzamento $\xi = 4.32 \times 10^{-5}$
 - pulsazione di risonanza $\omega_r = 2.36 \times 10^3$ rad/s
- guadagno di Bode $K_B = 7.92$, che espresso in dB vale 18 dB.

L'unico elemento di instabilità è dunque il polo nell'origine. Per ora non siamo interessati ai diagrammi di Bode e Nyquist, in quanto l'analisi di stabilità per il sistema ad anello aperto si può concludere qui. Riprenderemo questa funzione di trasferimento nel capitolo 4, quando, con la retroazione, riusciremo a ottenere un sistema migliore.

Capitolo 4

Analisi del sistema in catena chiusa: realizzazione dei compensatori

Abbiamo visto nel paragrafo 3.3 che il sistema ad anello aperto non è né asintoticamente né BIBO stabile. Diviene quindi d'obbligo passare a una struttura ad anello chiuso che, oltre a portare i ben noti benefici, ci permetterà di stabilizzare il sistema.

4.1 Caratteristiche del sistema in catena a chiusa

4.1.1 Schema a blocchi

Per poter migliorare le prestazioni del sistema (ed eventualmente per stabilizzarlo), introduciamo un **compensatore**. Tra le varie strutture per il sistema ad anello chiuso è stato scelto di porre il compensatore in serie (prima) del processo $G(s)$, impiegando quindi una **retroazione unitaria**. Il sistema risultante è rappresentato in Figura 4.1.

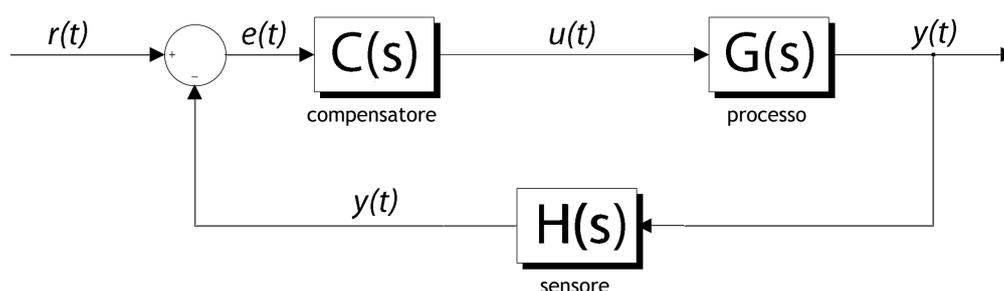


Figura 4.1: Schema a blocchi del sistema in catena chiusa

Si noti che, non a caso, abbiamo indicato con $e(t)$ il segnale di errore con cui si alimenta il controllore. Infatti tale segnale è proprio quello definito dalla (3.5).

Apparentemente non sembra si tratti di una retroazione unitaria, perché nell'anello di retroazione è presente un blocco, ovvero il *sensore di posizione*, che serve a convertire la posizione del carrello di stampa rispetto all'origine in una tensione opportuna da confrontare con quella di riferimento. Questo perché, nella pratica, il sommatore deve lavorare con 2 segnali che siano omogenei, nel nostro caso tensioni, mentre in assenza del

senso esso non sarebbe in grado di comparare una posizione con una tensione. Tuttavia non è riduttivo supporre che la conversione sia 1:1. Infatti non abbiamo ancora definito il *segnale di riferimento* $r(t)$, ma abbiamo a disposizione l'uscita che vorremmo inseguire. Pertanto la tensione di errore sarà sempre proporzionale all'errore di posizione secondo il rapporto di conversione del sensore, in quanto sia il segnale di riferimento che quello effettivamente prodotto saranno amplificati dello stesso fattore. In qualsiasi caso, però, questo guadagno deve essere compensato prima del segnale di uscita, perché il sensore non fa parte del sistema che vogliamo studiare, ma è solo uno strumento che ci permette di chiudere fisicamente l'anello in retroazione. In sostanza questo eventuale guadagno compensato non porterebbe ad alcuna differenza nello studio del sistema, quindi ai fini pratici l'effetto del sensore è quello di convertire le unità di misura in maniera opportuna.

4.1.2 Risposta a regime

Finora non abbiamo mai parlato delle caratteristiche che deve avere la risposta al gradino. Infatti il sistema non è mai sollecitato da tale segnale. Tuttavia la risposta al gradino ci può dare lo stesso delle informazioni qualitative. Pertanto, analizzando questo segnale, possiamo già capire le caratteristiche del sistema, almeno limitatamente all'ordine di grandezza. Ad esempio, se volessimo valutare se esso è sufficientemente pronto, basterebbe osservarne il *tempo di assestamento*¹ per capire già se complessivamente è buono o meno.

Osserviamo inoltre che non si può mai parlare di regime: il segnale di riferimento è infatti periodico. Anche qui però possiamo fare dei ragionamenti a posteriori riguardo al fatto che, se il sistema è pronto, al termine del tratto di stampa possiamo già considerarci in buona approssimazione a regime.

Nel paragrafo 4.2.1 analizzeremo il diagramma di Bode del processo $G(s)$. Da lì capiremo che la strategia più veloce per il progetto del controllore sarà quella di piazzare prima poli e zeri e successivamente il guadagno statico, perché non abbiamo caratteristiche precise per quanto riguarda la risposta al gradino. Inoltre non abbiamo mai detto di che tipo dovrà essere il sistema: non avendo alcun regime permanente non è un requisito che ci viene imposto direttamente. A causa della presenza di un solo polo nell'origine in $G(s)$, comunque il sistema retroazionato è almeno di tipo 1.

Possiamo osservare che il segnale di posizione di riferimento (3.4) è una rampa con transitori parabolici. Scegliamo quindi di non introdurre altri poli nell'origine tramite le future scelte del controllore, in modo da lasciare invariato il tipo del sistema, il che in prima approssimazione sarebbe sufficiente a mantenere l'errore costante.

Potremmo essere tentati di calcolare l'errore a regime come l'inverso del guadagno statico del controllore. Questa strategia però è sconsigliabile perché prevede che il sistema sia sufficientemente pronto, in modo da rendere abbastanza buono il concetto di regime.

È utile fare un'altra precisazione: il tratto parabolico non è di stampa, quindi non è importante che sia verificata la (3.5) nei tratti esterni. Pertanto, nonostante di solito si cerchi di avere una sovralongazione, s , più bassa possibile, qui tale obiettivo è secondario. Detto questo non possiamo trascurare i fenomeni oscillatori, perché ad essi è legato il *tempo di assestamento*, t_s , che indica la prontezza del sistema. Quindi, se possibile, cercheremo di trovare un margine di fase buono per garantire transitori rapidi. Inoltre, se

¹Nel seguito faremo sempre riferimento al tempo di assestamento al 10 %.

da una parte la sovraelongazione può inficiare la prontezza di risposta, dall'altra potrebbe generare problemi di carattere meccanico: se è tale che la posizione della testina va fuori dell'intervallo consentito ci potrebbero essere dei danni.

A questo punto entriamo nel nucleo del progetto: in seguito, tramite la scelta di diversi compensatori, vedremo se riusciremo a raggiungere l'obiettivo rispettando i vincoli proposti, ed eventualmente faremo un confronto tra più scelte concorrenti. Tramite vari ambienti di Matlab, tra cui ad esempio SISOtool, riusciremo a valutare sia la risposta al segnale di riferimento che la corrente assorbita dal motore, in modo da vedere se sono stati rispettati i due vincoli.

4.2 Scelta del compensatore

4.2.1 Nessun compensatore

Come prima scelta vediamo la più semplice in assoluto, ovvero chiudiamo in retroazione il solo processo $G(s)$, considerandolo come un caso particolare di quello in Figura 4.1 in cui $C(s) = 1$. Per prima cosa tracciamo il diagramma di Bode di modulo e fase di $G(s)$, utile anche in tutto il resto del progetto.

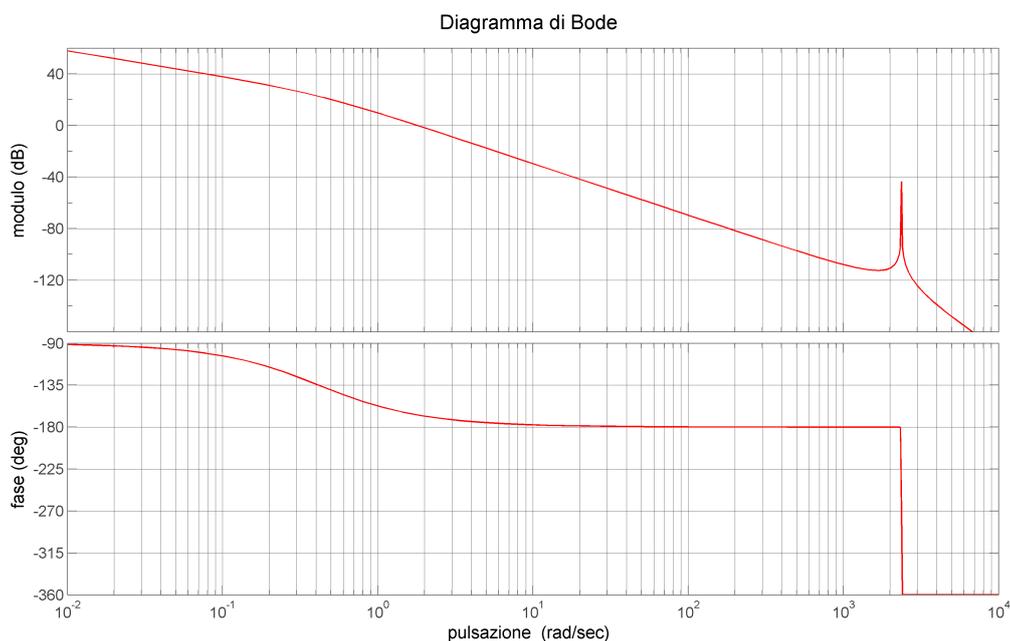


Figura 4.2: Diagramma di Bode di modulo e fase del processo $G(s)$

Per completezza in Figura 4.3 tracciamo anche il diagramma di Nyquist.

Come può intuire dalla Figura 4.2 il sistema presenta una pulsazione di attraversamento ω_a di 1.79 rad/s e un margine di fase m_φ molto basso, ovvero di 13.1° , quindi ci si può aspettare una risposta al gradino con molte oscillazioni. Poiché il guadagno di Bode di $G(s)$ è positivo e non ci sono poli a parte reale positiva, vale il **criterio di Bode**;

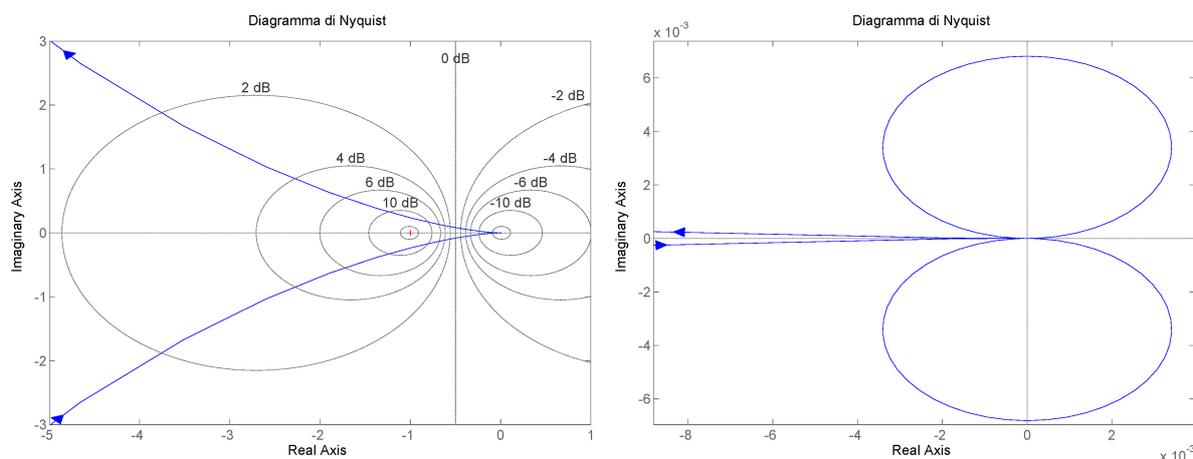


Figura 4.3: Diagramma di Nyquist di $G(s)$ e un suo dettaglio nell'intorno dell'origine

pertanto, data l'assenza di più pulsazioni di attraversamento e la presenza di un margine di fase positivo, il sistema è BIBO-stabile.

Possiamo valutare l'ordine di grandezza del **tempo di salita** (*rise time*, t_r) che ci può dare informazioni utili, anche se non è proprio quello che ci interessa. Sappiamo che esso è proporzionale all'inverso della banda passante della funzione di trasferimento in catena chiusa, la quale coincide con la pulsazione di attraversamento di $G(s)$, quindi risulta che t_r è dell'ordine dei secondi. Siccome sono presenti molte oscillazioni probabilmente il tempo di assestamento sarà ancora maggiore di quello di salita. Ciò è assolutamente inaccettabile, in quanto dopo il tratto di accelerazione (della durata di 133 ms) il sistema deve essere pronto. In Figura 4.4 vediamo la conferma di quanto detto.

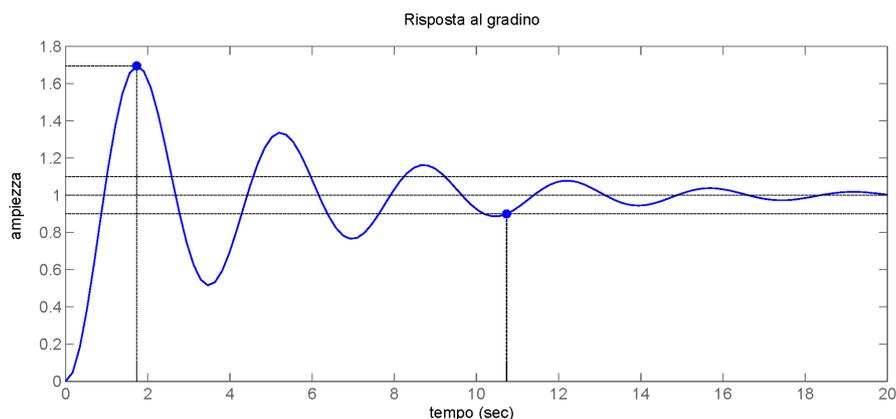


Figura 4.4: Risposta al gradino del sistema retroazionato

Infatti risulta che $t_s \simeq 10.7 s$ e $s \simeq 69.6\%$. Valutiamo l'uscita realmente prodotta e il suo errore, seguendo come riferimento il profilo di posizione. Il risultato è in Figura 4.5.

Come affermato in precedenza, poiché il sistema complessivo risulta molto lento si ha un errore di posizione parecchio al di sopra di quanto consentito, pertanto dobbiamo fare un'altra scelta per il tipo di controllore. Da quanto visto fin qui in generale sarà necessario alzare di molto la frequenza di attraversamento e, per quanto possibile, anche il guadagno complessivo ad anello aperto, pur mantenendo il sistema complessivo stabile.

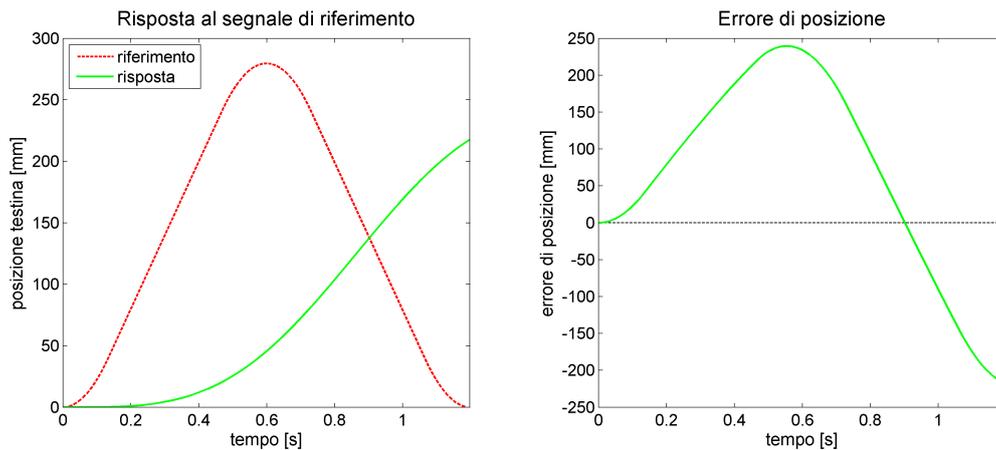


Figura 4.5: Risposta al profilo di posizione del sistema retroazionato

4.2.2 Controllore Proporzionale (P)

Proviamo innanzitutto ad aumentare il guadagno in catena diretta, imponendo $C(s) = K_p$: così facendo è naturale che aumenti anche la pulsazione di attraversamento. Il limite, chiaramente, è la stabilità. La maniera più veloce per procedere è il *luogo delle radici*, tracciato in Figura 4.6.

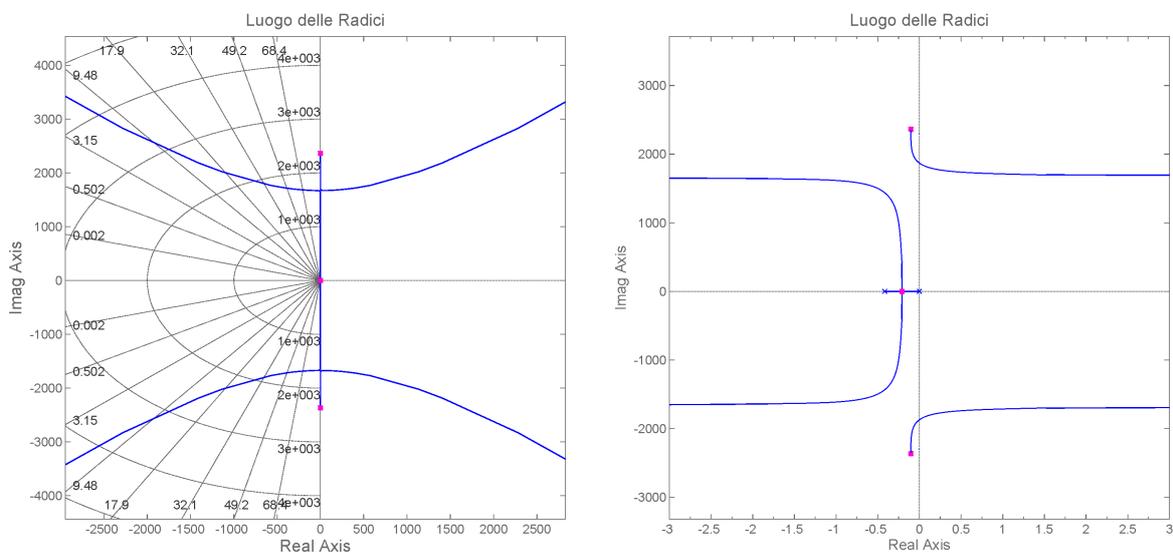


Figura 4.6: Luogo delle radici di $G(s)$ con dettaglio nelle vicinanze dell'asse immaginario

Purtroppo, come si vede anche nel diagramma di Bode di $G(s)$, il margine di fase diminuirà, pertanto avremo una risposta piena di oscillazioni nel transitorio.

Sperimentalmente, analizzando con SISOtool la risposta al gradino all'aumentare di K_p , si nota che il tempo di assestamento non cambia di molto finché non ci avviciniamo all'asse immaginario con i rami che partono dai poli complessi coniugati. Da qui in poi la situazione peggiora e il sistema risulta sempre meno pronto, finché rimaniamo nel caso stabile. Questo perché diminuisce il tempo di salita ma anche il fattore di smorzamento.

La scelta migliore si ha ponendo $K_p = 23$, che porta a $t_s = 10.9$ s ma $s = 92.8\%$. La risposta al profilo di posizione del sistema complessivo è riportata in Figura 4.7.

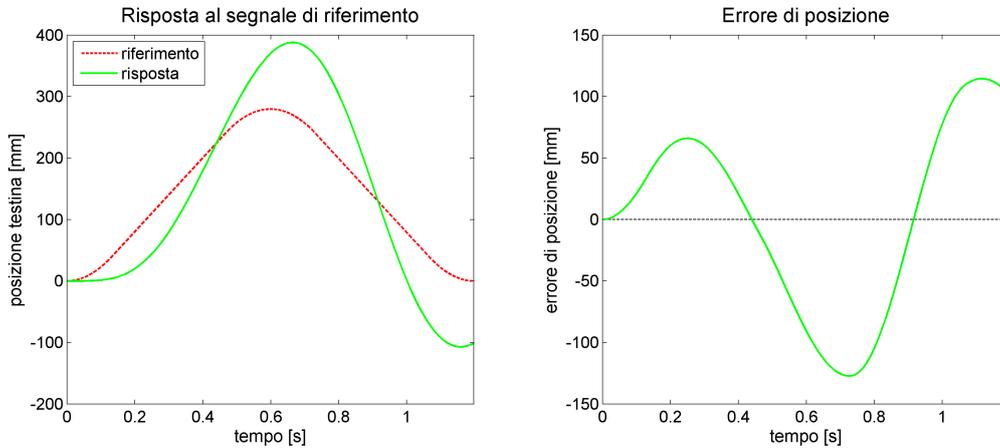


Figura 4.7: Risposta al profilo del sistema con controllore proporzionale

Come si può vedere, la risposta è migliorata rispetto al caso precedente, tuttavia siamo ancora molto lontani dal raggiungimento del nostro obiettivo. Inoltre la posizione va al fuori dell'intervallo consentito, quindi questa soluzione è del tutto inaccettabile.

4.2.3 Rete anticipatrice (*lead*)

Proviamo a ricorrere a diverse strategie per capire quale sia la migliore. Abbiamo appena provato ad aumentare il modulo del diagramma di Bode di $C(s)G(s)$ incrementando il guadagno statico del controllore, ma abbiamo concluso che questo non comporta molti benefici. Ci conviene quindi cercare di aumentare ω_a con l'azione dello zero presente nella rete anticipatrice, lasciando per ora unitario il guadagno di Bode di $C(s)$.

Dal momento che ω_a è più piccola di ω_r possiamo collocare lo zero in 3 posizioni: prima, dopo o in corrispondenza con il primo polo. Ovviamente, se scegliamo di metterlo dopo il polo, è opportuno non superare ω_a altrimenti la sua utilità sarebbe nulla. Comunque questa scelta non è la migliore, perché, se vogliamo aumentare ω_a , è bene porre lo zero il prima possibile. In ogni caso vogliamo che il picco di risonanza rimanga sotto 0 dB², altrimenti ci portiamo in una situazione di instabilità (inoltre, avendo più attraversamenti dell'asse orizzontale, i transitori peggiorerebbero).

Valutiamo quindi l'azione che dovrà avere la rete anticipatrice, ovvero quanto distante dovrà essere lo zero dal polo. Dal momento che il picco di risonanza è di -43 dB, la distanza tra di essi dovrà essere tale che il guadagno del compensatore dopo il polo non superi questo valore (preso con il segno opposto). Trattandosi di un solo zero (che aumenta la pendenza del modulo di 20 dB/decade) significa che la distanza non deve

²In realtà non dovremmo considerare il picco di risonanza, bensì la pulsazione alla quale la fase attraversa i -180° : è da questo punto in poi che, per garantire la stabilità del sistema, il modulo non deve più superare 0 dB. Poiché la transizione di fase è molto brusca e non ci sono altri contributi di fase rilevanti alla frequenza di risonanza, possiamo fare riferimento con una buona approssimazione a questa pulsazione, anche perché, come abbiamo già visto, con un margine di fase troppo basso la risposta sicuramente non migliora.

essere superiore a $43/20 = 2.15$ decadi, ovvero $\omega_2 = 10^{2.15}\omega_1 = 141.3\omega_1$, dove abbiamo indicato con ω_1 e ω_2 le pulsazioni corrispondenti rispettivamente allo zero e al polo della rete anticipatrice.

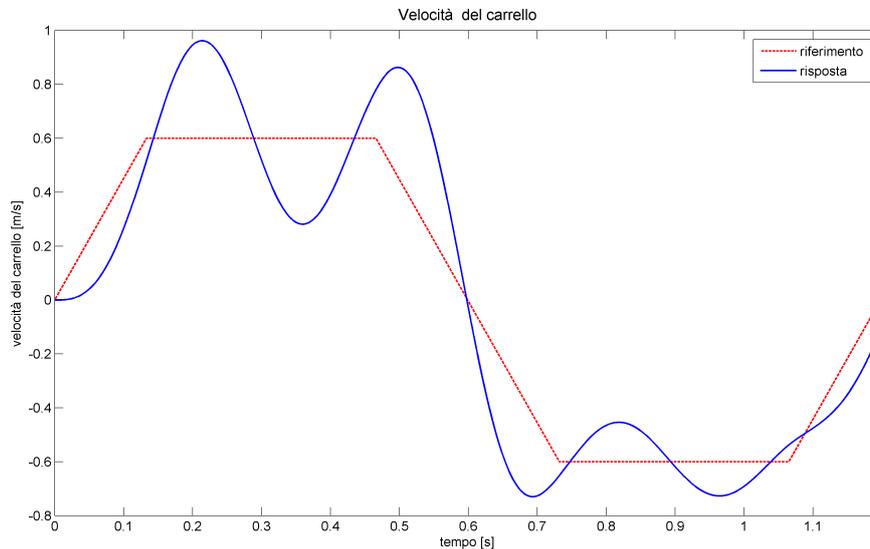


Figura 4.8: Velocità del carrello usando una rete anticipatrice con $\omega_1 = 0.01$ rad/s

Ora è necessario capire dove far intervenire la rete anticipatrice. Potremmo essere tentati di mettere lo zero in corrispondenza al primo polo di $G(s)$, ma si può fare di meglio, perché diminuendo ω_1 si alza di conseguenza ω_a . Sperimentalmente, però, si nota un limite inferiore a cui si può arrivare con ω_1 , dato dal terzo vincolo. Infatti, poiché il sistema non è ancora molto pronto (qui t_s è dell'ordine di qualche decimo di secondo), il tratto centrale è caratterizzato da continue accelerazioni e decelerazioni; come si vede in Figura 4.8, in prossimità della fine c'è una nuova accelerazione. Quando il sistema dovrebbe frenare, lo fa con un certo ritardo e quindi impiega più tempo, il quale è sufficiente per compiere un tratto più lungo del margine predisposto, come si vede in Figura 4.9.

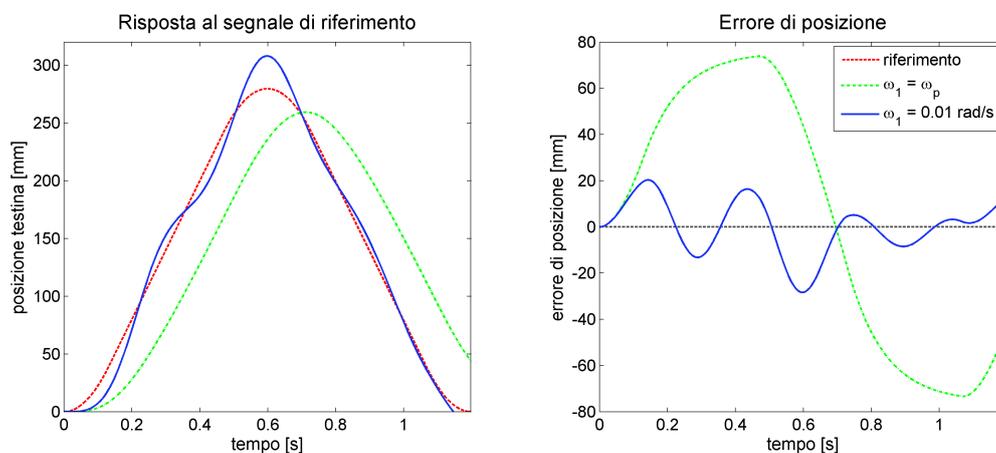


Figura 4.9: Risposta del sistema con 2 reti anticipatrici a confronto

In Figura 4.9 vediamo a confronto l'uscita prodotta in queste 2 situazioni, in cui in un caso $\omega_1 = \omega_p$ e nell'altro $\omega_1 = 0.01$ rad/s.

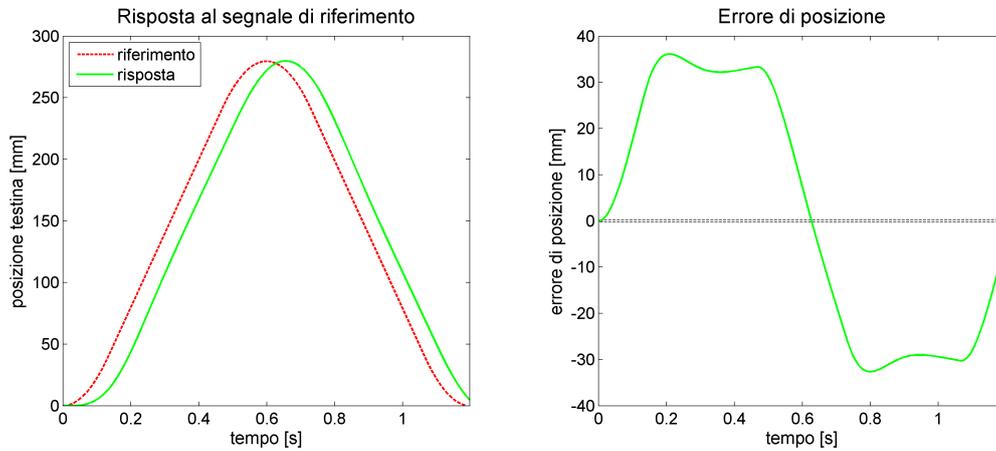


Figura 4.10: Risposta al profilo di stampa del sistema con $C(s)$ in (4.1)

Sperimentalmente si è verificato che, ponendo $\omega_1 = 0.17$ rad/s, il sistema rispetta il terzo vincolo. In definitiva la rete anticipatrice impiegata è

$$C(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_1}}{1 + \frac{s}{141.3\omega_1}} = \frac{1 + \frac{s}{0.17}}{1 + \frac{s}{24}} \quad (4.1)$$

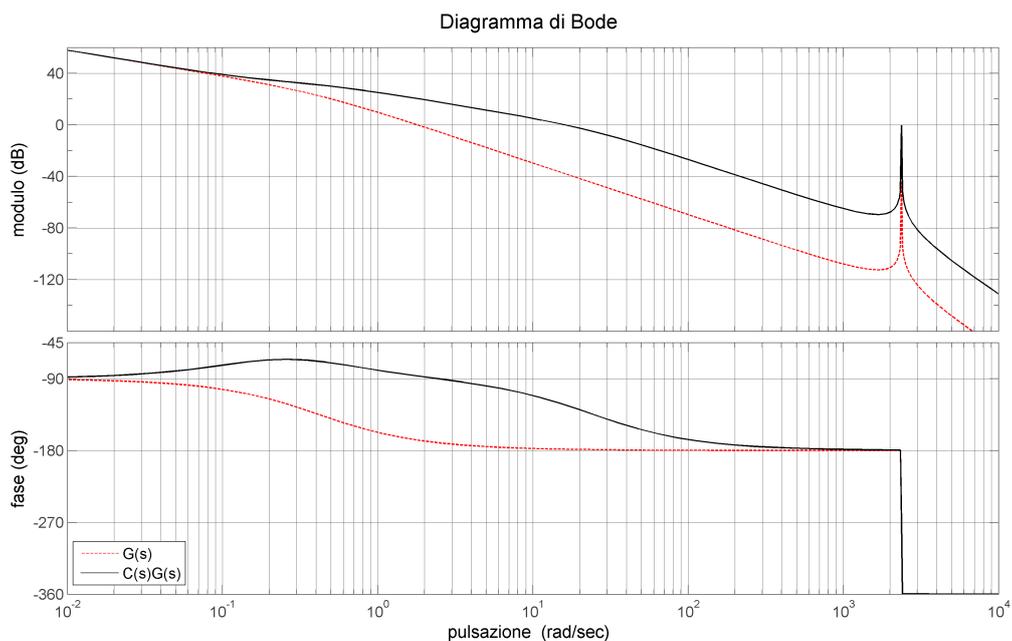


Figura 4.11: Diagramma di Bode di $G(s)$ e $C(s)G(s)$

Con questo controllore risulta $\omega_a \simeq 16 \text{ rad/s}$ e $m_\varphi \simeq 57^\circ$, e quindi la risposta al gradino è nettamente migliore a prima. La risposta al profilo di stampa è riportata in Figura 4.10, mentre in Figura 4.11 vediamo il confronto tra i diagrammi di Bode di $G(s)$ e della funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$.

Purtroppo, però, il sistema non soddisfa ancora il secondo vincolo. Questa rete, pertanto, non è ancora adatta.

4.2.4 Rete ritardatrice (*lag*)

L'impiego di una rete ritardatrice non è di alcuna utilità, in quanto la frequenza di attraversamento diminuirebbe e con essa il tempo di risposta del sistema.

4.2.5 Rete a sella

Vediamo ora una soluzione che ci permette di avere più gradi di libertà. Purtroppo, dovendo rispettare la sequenza *polo-zero-zero-polo*, abbiamo che il primo effetto è quello di una rete ritardatrice. Non possiamo mettere il polo a frequenze troppo basse, altrimenti questo diventa dominante e il tempo di risposta cala. È consigliabile quindi posizionarlo nelle vicinanze di ω_p . In altre parole, una volta piazzato il primo polo, ci troviamo in una situazione in cui la fase del sistema in catena aperta scende velocemente verso i -270° (ricordiamo la presenza di un polo nell'origine), e quindi è necessario posizionare uno zero molto vicino per mantenere il sistema stabile. Questo effetto ad ogni modo non migliora le cose: la rete ritardatrice abbassa il guadagno complessivo e quindi diminuisce anche ω_a . Possiamo però compensare aumentando il guadagno statico del controllore. In qualsiasi caso a questo punto l'effetto anticipativo non può fare molto: siamo in una situazione simile a quella in cui, nella rete anticipatrice, volevamo mettere lo zero dopo il primo polo di $G(s)$. Bisogna fare attenzione a piazzare la parte anticipatrice in modo che il picco di risonanza non superi 0 dB, come fatto in precedenza.

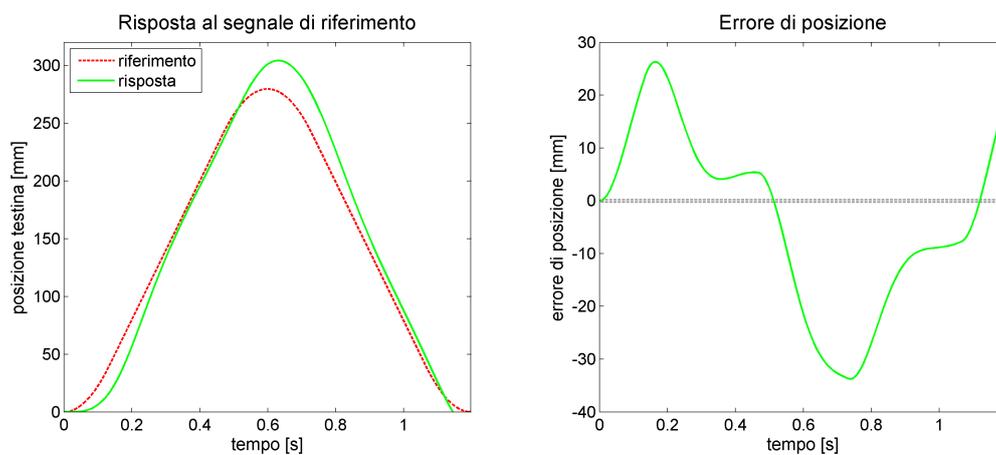


Figura 4.12: Risposta del sistema al profilo di stampa adottando la rete a sella (4.2)

Una possibile rete a sella, in cui abbiamo fatto coincidere gli zeri e posizionato il primo polo in ω_p , è la seguente:

$$C(s) = 80 \frac{\left(1 + \frac{s}{2}\right)^2}{\left(1 + \frac{s}{0.416}\right)\left(1 + \frac{s}{18.2}\right)} \quad (4.2)$$

Con questa rete abbiamo ottenuto $t_s = 0.245 \text{ s}$ e $s = 43\%$. La risposta al profilo e il diagramma di Bode del sistema in catena aperta sono riportati in Figura 4.12 e 4.13. Anche in questo caso purtroppo il terzo vincolo non è stato rispettato. Non ha senso provare a risolvere in altre maniere, perché avremmo bisogno di un sistema più pronto per ovviare a questo, cosa che non è possibile con questo tipo di rete compensatrice.

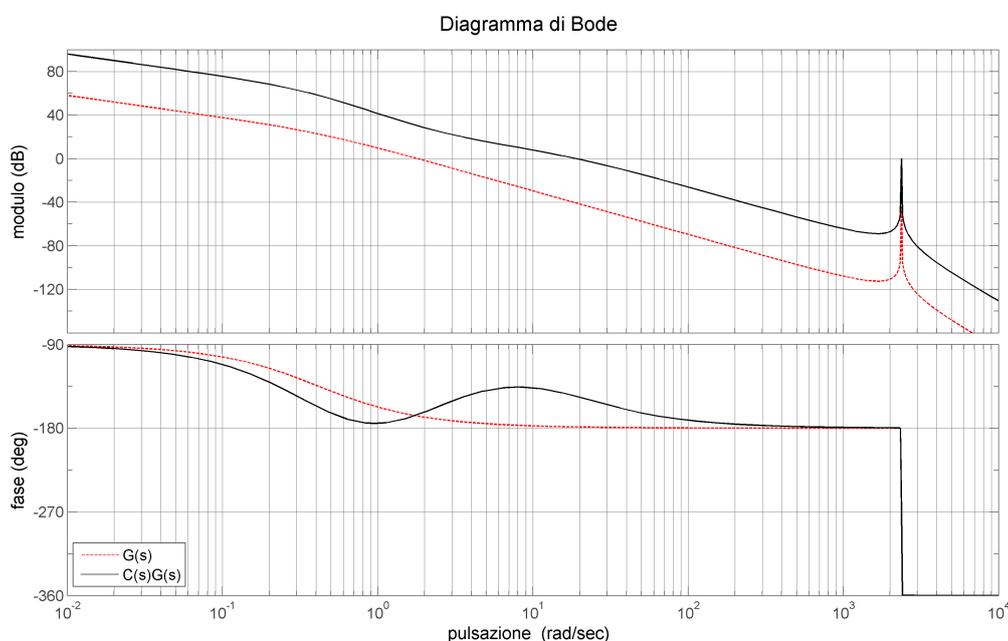


Figura 4.13: Diagramma di Bode di $G(s)$ e $C(s)G(s)$

4.2.6 Altre reti compensatrici con 2 zeri

Si potrebbe pensare se una qualche altra soluzione con 2 zeri (e opportunamente 2 poli per rendere il compensatore proprio) possa essere valida. Scartando l'ipotesi di posizionare un polo prima dei 2 zeri (rete a sella) e di mettere entrambi i poli prima degli zeri (la fase avrebbe un calo drastico), rimane la possibilità di posizionare 2 zeri alternati a 2 poli oppure i 2 zeri prima dei 2 poli.

La prima delle 2 ipotesi non produce nulla di buono: se partiamo dal polo, dobbiamo posizionare una rete ritardatrice, che non migliora la risposta, mentre se partiamo dallo zero non riusciremmo a fare molto di meglio della rete anticipatrice, perché poli e zeri

posizionati dopo ω_a non hanno effetto sul tempo di risposta del sistema, mentre abbiamo visto che posizionare la prima coppia a frequenze troppo basse non permette di rispettare il terzo vincolo.

Rimane la sola possibilità di poter sfruttare 2 zeri seguiti da 2 poli. Ma anche questa scelta non è produttiva: gli zeri alzano il modulo di $G(s)$, cosa che potrebbe rendere il sistema instabile. Per contrastare questo, è necessario porre gli altri 2 poli molto vicini ad essi, annullando quasi tutti i benefici portati. L'ultima eventuale scelta potrebbe essere di impiegare 2 zeri complessi coniugati in modo da sopprimere completamente il picco di risonanza. A questo punto si potrebbe alzare a piacere il guadagno per rendere il sistema pronto. L'unico problema è che la fase, a una decade da ω_p , si è già praticamente assestata sui -180° , quindi il margine di fase risulta molto basso, comportando oscillazioni poco smorzate in transitorio. Un altro problema è il fatto che, non appena ω_r si discosta dal suo valore nominale, il picco di risonanza ricompare e in questo modo il sistema diventerebbe instabile.

Pertanto non sono sufficienti 2 soli zeri per soddisfare le caratteristiche desiderate del sistema.

4.2.7 Rete compensatrice con 3 zeri e 3 poli

4.2.7.1 Ipotesi realizzative

Ci sono varie scelte per il posizionamento relativo di poli e zeri in questa configurazione. Tuttavia, possiamo già eliminarne qualcuna, in quanto, dovendo alzare il margine di fase, i poli dovranno essere messi in generale dopo gli zeri.

Per prima cosa possiamo posizionare uno zero nelle vicinanze di ω_p : approssimativamente è il polo dominante che determina il tempo di salita del sistema complessivo. Facendo così, possiamo spostare in avanti il primo polo ed aumentare di conseguenza il margine di fase. Possiamo poi riprendere il caso scartato in precedenza in cui volevamo sopprimere i poli complessi coniugati. Ora il margine di fase è soddisfacente, però il problema delle variazioni parametriche rimane. Tuttavia si può notare che posizionando i 2 zeri prima di ω_r , sebbene il picco non venga eliminato, in qualsiasi caso la fase non scende sotto i -90° , mentre ponendoli dopo il sistema risulterebbe instabile. A questo punto non ha più una grossa rilevanza il fatto di avere lo stesso fattore di smorzamento della coppia di poli: l'importante è che la transizione di fase che porta la coppia di zeri sia (con una buona approssimazione) esaurita prima dell'intervento dei poli complessi di $G(s)$, altrimenti la fase si avvicinerebbe a -180° . Quindi possiamo alzare il guadagno del compensatore per raggiungere l'errore desiderato. Facendo questo, però, è possibile che ci siano più attraversamenti dell'asse degli 0 dB. Solitamente questo comporta delle oscillazioni (non molto marcate) nel transitorio, ma poiché, come abbiamo già discusso, non stiamo fornendo un gradino al sistema, questo effetto è trascurabile.

Si capisce che i poli devono essere posti in alta frequenza, perché, fino al picco di risonanza, il margine di fase è sufficiente: la loro presenza è di secondaria importanza.

4.2.7.2 Prima valutazione numerica

Cominciamo a piazzare il primo zero in corrispondenza di ω_p . Quindi andiamo a sistemare la coppia di zeri complessi coniugati un po' prima di ω_r . Proviamo, per esempio,

a fare in modo che una variazione del 20% di ω_r consenta comunque di mantenere il sistema stabile. Questo significa che dobbiamo far sì che la frequenza di risonanza ω_{2z} della coppia di zeri sia inferiore a $0.8\omega_r$. Scegliamo quindi $\omega_{2z} = 1.8 \times 10^3$ rad/s. Poiché vogliamo ξ molto basso, possiamo approssimare anche qui la pulsazione naturale a quella di risonanza e imponiamo che il fattore di smorzamento sia lo stesso dei poli complessi coniugati di $G(s)$.

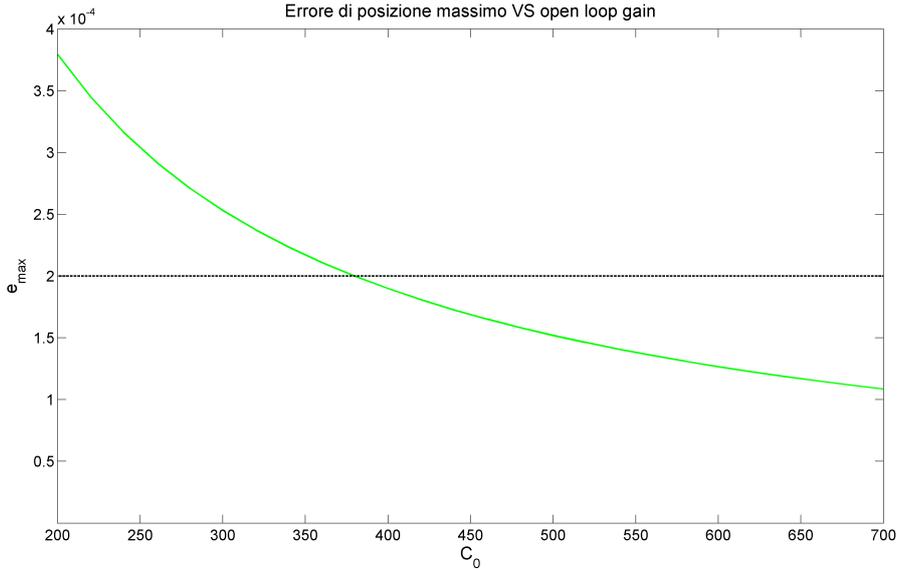


Figura 4.14: Errore massimo commesso in funzione del guadagno del controllore C_0 .

A questo punto trascuriamo per il momento il posizionamento dei poli del compensatore perché è necessario sapere la frequenza di attraversamento complessiva, mentre dobbiamo ancora agire sul guadagno in catena aperta. Per calcolare il guadagno statico del controllore C_0 faremo ricorso a Matlab con una funzione che simula l'uscita del sistema al variare di C_0 e traccia un grafico dell'errore massimo commesso rispetto a quest'ultimo, in modo da avere un risultato preciso. Il risultato è in Figura 4.14.

In definitiva si ottiene $C_0 = 381$. Adesso possiamo posizionare i poli in alta frequenza dove vogliamo, purché non influiscano in maniera rilevante sulla risposta al gradino, in modo che il loro effetto non si ripercuota in uscita. Come prima scelta posizioniamo tutti e tre i poli due decadi dopo l'ultimo attraversamento dell'asse a 0 dB, ovvero a 5.7×10^5 rad/s. Abbiamo realizzato il controllore

$$C_1(s) = 381 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_p}\right) \left(1 + \frac{2\xi s}{\omega_{2z}} + \frac{s^2}{\omega_{2z}^2}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{HF}}\right)^3} = \quad (4.3)$$

$$381 \frac{\left(1 + \frac{s}{0.416}\right) \left(1 + \frac{s}{5.6 \times 10^7} + \frac{s^2}{3.24 \times 10^6}\right)}{\left(1 + \frac{s}{5.7 \times 10^5}\right)^3}$$

Il diagramma di Bode del sistema in catena aperta è in Figura 4.15. Da questo, grazie al criterio di Bode, si può vedere come il sistema sia BIBO-stabile.

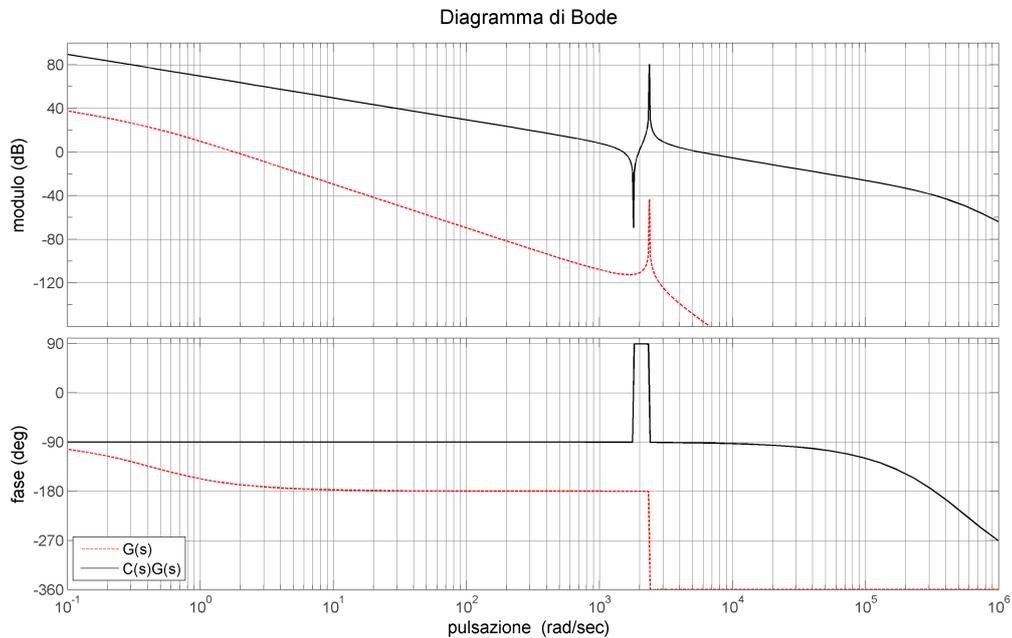


Figura 4.15: Diagramma di Bode di $G(s)$ e $C_1(s)G(s)$

A conferma della scelta di C_0 , in Figura 4.16 vediamo come varia l'errore di stampa.

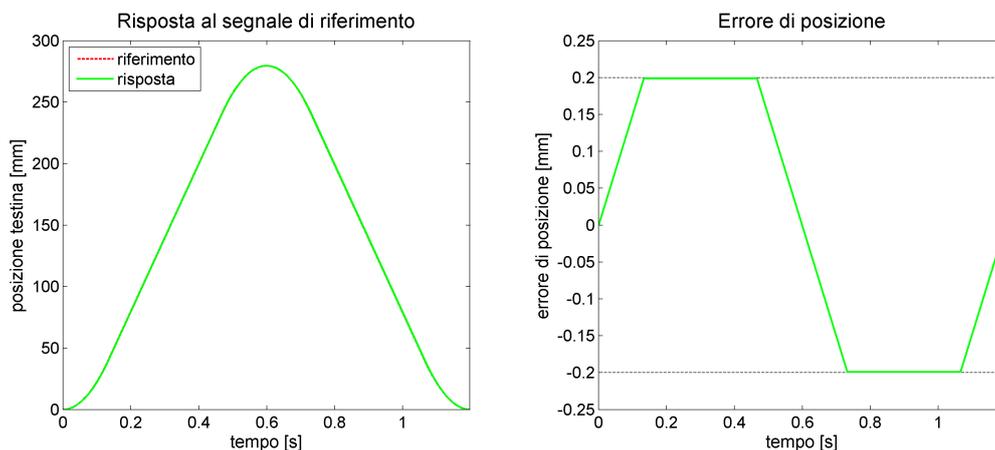


Figura 4.16: Risposta ed errore del sistema al segnale di riferimento

Per completezza riportiamo anche la risposta al gradino in Figura 4.17, dove si può vedere che il tempo di assestamento di questo sistema retroazionato è di 3.26 ms, mentre la sovraelongazione massima del 13.9%.

Qui si può vedere l'effetto di avere più attraversamenti del cerchio unitario: nel transitorio non è il primo picco ad avere il valore massimo, bensì il secondo. In generale questo rallenta la risposta del sistema, ma in questo caso il tempo di assestamento è già

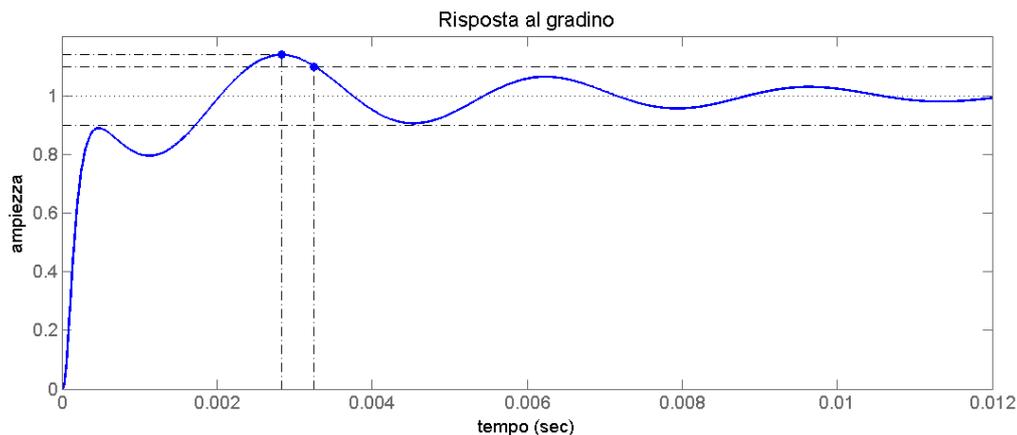


Figura 4.17: Risposta al gradino del sistema retroazionato

sufficientemente basso. Infatti il periodo di accelerazione è di 80 ms: questo tempo è sufficiente al sistema per portarsi a regime con buona approssimazione. In Figura 4.16 si vede anche come in questo tratto l'errore tenda a divergere, perché il sistema complessivo non è di tipo 2, mentre nel tratto centrale, dove applichiamo una rampa, si stabilizza su un valore costante.

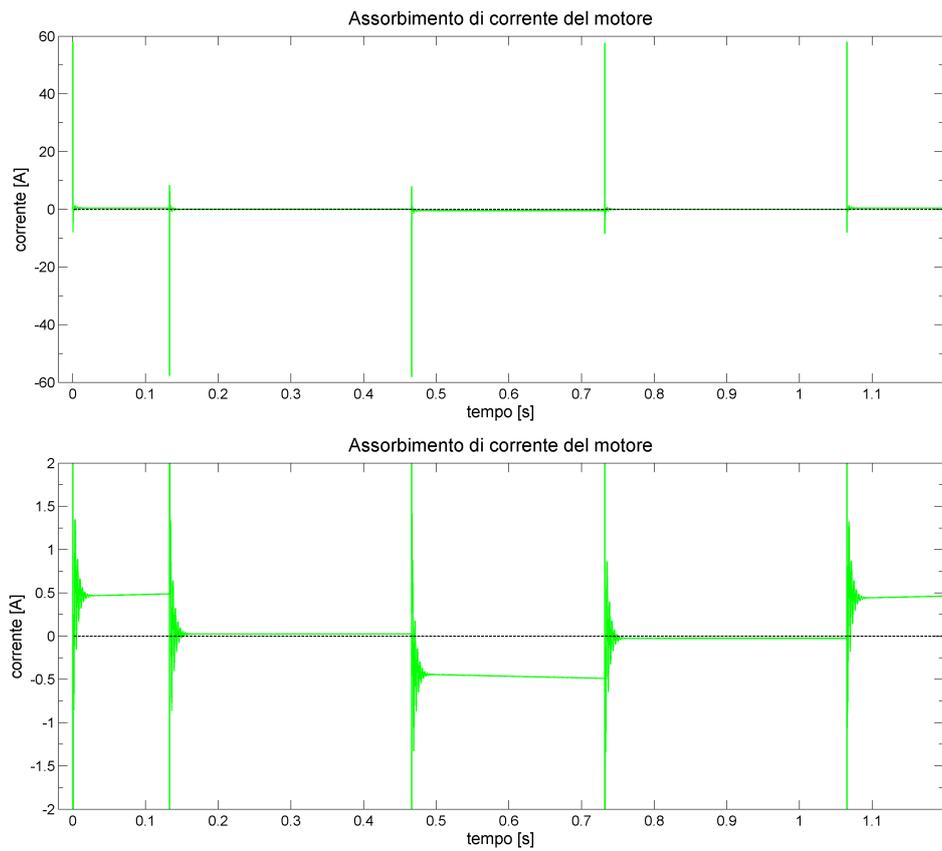
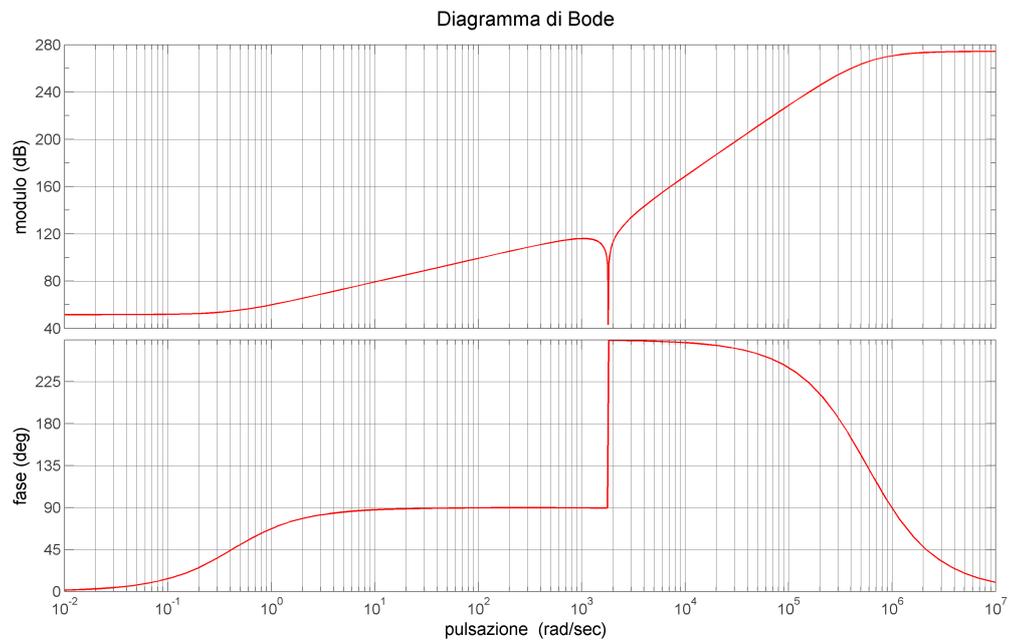
Sembra che per ora abbiamo raggiunto il nostro obiettivo, ovvero l'errore di stampa è stato contenuto entro un valore prefissato. In realtà non abbiamo ancora considerato il primo vincolo. Vedremo come questo comporterà delle modifiche da apportare al controllore (4.3).

4.2.7.3 Problematiche di realizzazione

Come già anticipato, purtroppo con il controllore (4.3) non riusciamo a mantenere una corrente sufficientemente bassa in ingresso al motore.

Come si vede dalla Figura 4.18 si hanno dei picchi di corrente in corrispondenza dei punti in cui il motore deve frenare o accelerare. Si pensi che, se avessimo previsto un tratto di accelerazione più breve, questi picchi sarebbero ancora più ampi. Per il resto, il motore assorbe una corrente che è accettabile. Per la precisione, essendo il sistema pronto, il profilo di velocità è seguito ottimamente (non riportiamo la figura in quanto la differenza è impercettibile), quindi il motore esegue per lo più anche in pratica un moto uniformemente accelerato nei tratti opportuni (trascurando momentaneamente gli effetti dissipativi): per fare questo ha bisogno di una corrente costante, cosa che si può notare nel dettaglio di Figura 4.18. Nel tratto di stampa, invece, il motore dovrebbe proseguire per inerzia, ma, a causa degli effetti dissipativi, è necessaria una piccola corrente per mantenere il moto rettilineo uniforme. In altre parole nel tratto centrale la corrente assorbita non è nulla, ma ha un valore molto basso (non visibile in Figura 4.18). Un'ultima precisazione riguarda il segno della corrente: si tratta di un segno positivo quando il motore accelera, negativo quando deve frenare. Tutto questo è una questione di riferimenti che abbiamo implicitamente assunto nel momento in cui abbiamo realizzato il modello matematico.

Riprendiamo ora il problema che è emerso: è chiaro che questo è dovuto al controllore che abbiamo progettato, e ad ogni modo dobbiamo risolverlo con esso. Vediamo se

Figura 4.18: Corrente fornita al motore dal controllore $C_1(s)$ e dettaglio a regimeFigura 4.19: Diagramma di Bode del solo compensatore $C_1(s)$

tracciando il suo diagramma di Bode riusciamo a estrapolare qualche informazione utile.

La prima cosa che si nota in Figura 4.19 è l'andamento del guadagno dopo il picco di risonanza della coppia di zeri complessi coniugati. Se avessimo a disposizione lo spettro del segnale di errore potremmo capire se questo problema sia dovuto a un guadagno eccessivo in alta frequenza, perché, in riferimento alla Figura 4.1, si ha che $U(s) = C(s)E(s)$, da cui ricaveremmo il segnale $u(t)$, quindi potremmo progettare $C(s)$ in modo che $u(t)$ non superi una certa soglia. D'altra parte, però, è anche giusto che il controllore abbia un guadagno elevato a tutte le frequenze, così eventuali disturbi provenienti dall'esterno non intaccherebbero eccessivamente le caratteristiche del sistema.

Piuttosto di metterci a trovare $E(s)$, il cui calcolo sarebbe estremamente laborioso in quanto non abbiamo $e(t)$ in forma analitica (e quindi dovremmo calcolare anche quello), possiamo provare a sfruttare i gradi di libertà che ci sono rimasti. In particolare avevamo deciso di posizionare i poli in modo che coincidessero e fossero collocati due decadi dopo l'ultimo attraversamento dell'asse a 0 dB, garantendo una risposta al gradino con oscillazioni (se presenti) molto smorzate. Lasciando i poli coincidenti, se proviamo a porre $\omega_{HF} = 10^5$ rad/s otteniamo un abbassamento del guadagno del controllore in alta frequenza e allo stesso tempo i picchi di corrente si riducono notevolmente, anche se non

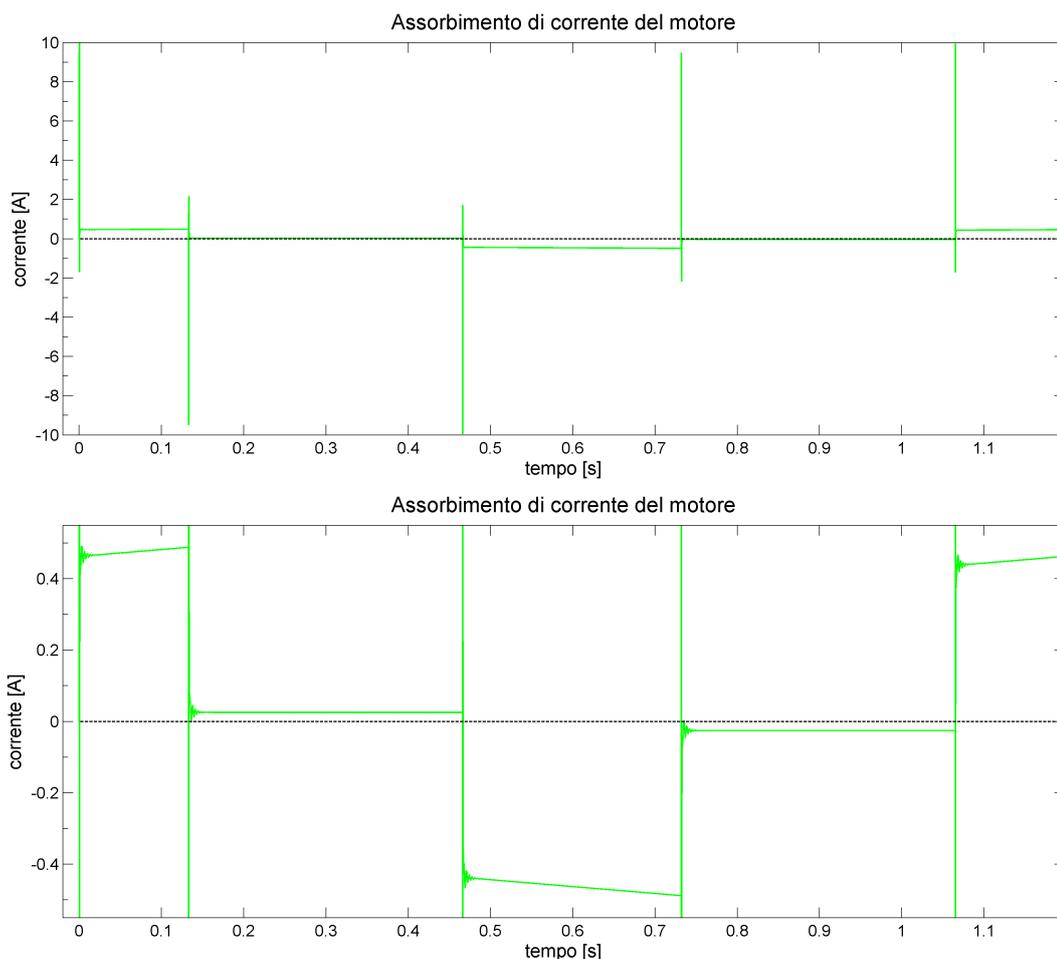


Figura 4.20: Corrente fornita al motore dal controllore $C_2(s)$ e dettaglio a regime

sono ancora accettabili. Riducendo ancora la pulsazione dei poli si riesce a raggiungere un risultato valido senza avere intaccato né la risposta al gradino né l'errore di stampa. Sperimentalmente abbiamo ottenuto che la pulsazione in cui posizionare i poli in modo tale che la corrente raggiunga al più il valore limite è di 8.6×10^4 rad/s. Ne consegue che il compensatore realizzato risulta essere

$$C_2(s) = 381 \frac{\left(1 + \frac{s}{0.416}\right) \left(1 + \frac{s}{5.6 \times 10^7} + \frac{s^2}{3.24 \times 10^6}\right)}{\left(1 + \frac{s}{8.6 \times 10^4}\right)^3} \quad (4.4)$$

In questo modo la risposta del sistema al profilo di stampa rimane pressoché invariata. A conferma di quanto visto in Figura 4.20 riportiamo l'assorbimento di corrente del motore impiegando il nuovo controllore (4.4).

A questo punto in linea teorica abbiamo raggiunto il nostro obiettivo rispettando tutti i vincoli preposti. Ci siamo tenuti però sempre al limite di quanto possibile. Nel paragrafo 4.3 vediamo l'azione che avrebbero alcune variazioni parametriche e come sia ancora possibile migliorare la scelta del controllore, in modo che i limiti siano rispettati in maniera più rilassata e che queste variazioni non comportino problemi e compromettano gli obiettivi da raggiungere.

4.2.8 Rete compensatrice con 3 zeri reali e 3 poli

Nella pratica, in generale se possibile sarebbe meglio evitare l'introduzione di zeri reali con basso fattore di smorzamento, e ad ogni modo anche gli attraversamenti multipli dell'asse a 0 dB, in quanto le relazioni sulla risposta al gradino perdono di significato. Nel caso precedente, nonostante questo abbiamo comunque ottenuto un risultato valido perché abbiamo più volte evidenziato che non siamo più di tanto interessati alle caratteristiche della risposta al gradino.

Vediamo ora se è possibile trovare una soluzione con soli zeri e poli reali a partire dal compensatore $C_2(s)$. Come prima cosa proviamo solamente a prendere 2 zeri coincidenti alla pulsazione di risonanza di quelli precedenti (praticamente coincidente con ω_{2z}), mentre gli altri li lasciamo inalterati. Il controllore così trovato è

$$C_3(s) = 381 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_p}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{2z}}\right)^2}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{HF}}\right)^3} = 381 \frac{\left(1 + \frac{s}{0.416}\right) \left(1 + \frac{s}{1.8 \times 10^3}\right)^2}{\left(1 + \frac{s}{5.7 \times 10^5}\right)^3} \quad (4.5)$$

In questo modo però la fase del diagramma di Bode del sistema in catena diretta (in Figura 4.21) si avvicina molto a -180° in ω_{2z} , generando oscillazioni poco smorzate. Sebbene di questo possiamo non tenere conto, proviamo lo stesso ad abbassare la pulsazione della coppia di zeri. Dobbiamo comunque fare attenzione perché non possiamo metterli troppo in bassa frequenza.

Infatti, se esaminiamo quanto fatto nel controllore precedente, è necessario agire dapprima sul guadagno per cercare di sistemare l'errore, quindi posizionare i poli in alta

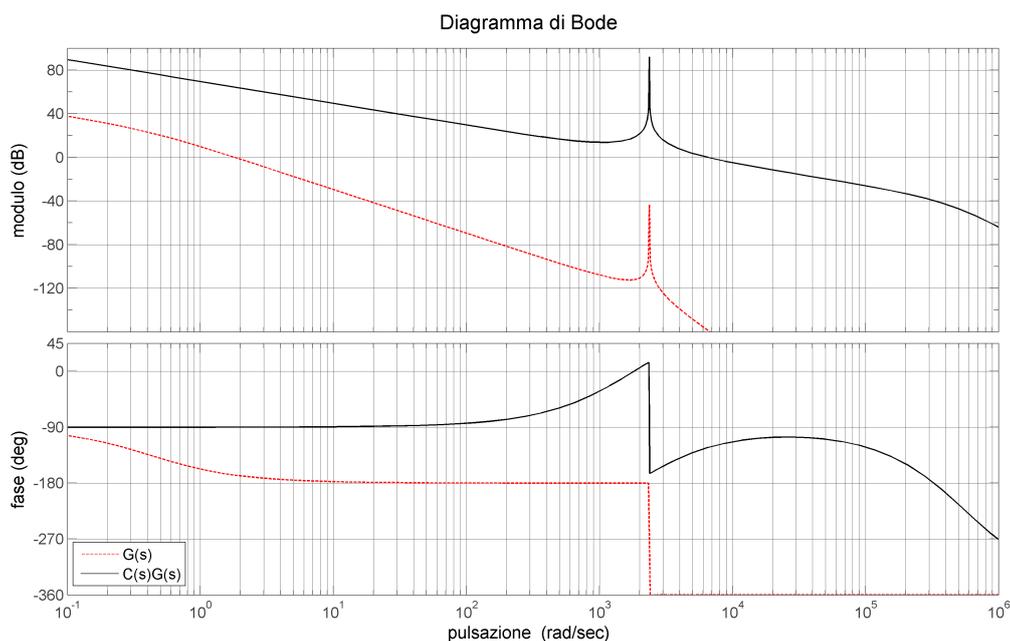


Figura 4.21: Diagramma di Bode del sistema in catena diretta utilizzando $C_3(s)$.

frequenza in modo tale che la corrente assorbita dal motore non superi il valore limite. Se mettiamo gli zeri troppo presto, anche loro portano un grande contributo alla corrente, che dovremo contrastare spostando i poli più indietro. Questo però non è detto che sia sempre realizzabile, perché il sistema potrebbe diventare instabile. Tra le altre cose, se possibile, sarebbe opportuno mantenere un buon margine di guadagno (almeno 10 dB), altrimenti una piccola variazione sul guadagno di Bode del sistema lo renderebbe instabile.

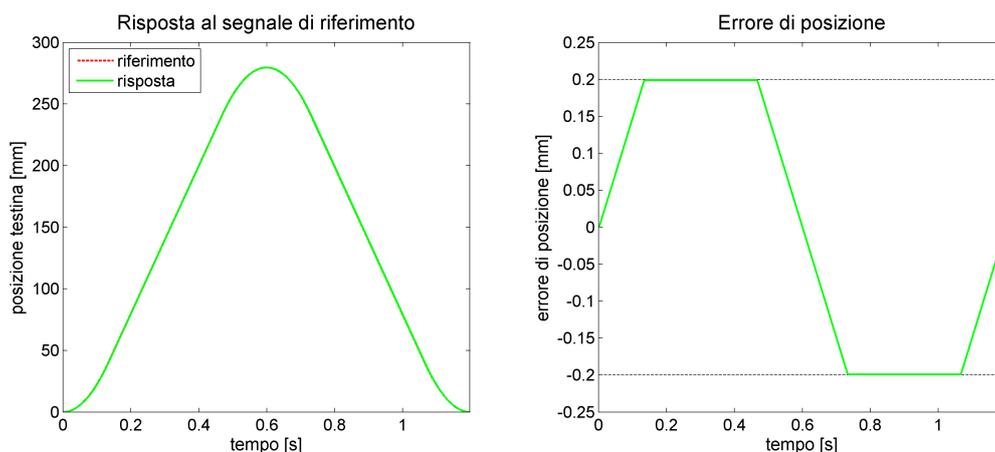


Figura 4.22: Risposta ed errore del sistema al segnale di riferimento

A fronte di questo, sperimentalmente si è visto che posizionando la coppia di zeri in modo tale che $\omega_{2z} = 1.4 \times 10^3$ rad/s si riesce a soddisfare tutti i vincoli. Mantenendo lo

stesso guadagno, come si vede in Figura 4.22 (i poli di $C(s)$ non influenzano la risposta), il sistema rispetta il primo vincolo. Per abbassare la corrente è sufficiente porre $\omega_{HF} = 4.9 \times 10^4$ rad/s, che si trova oltre ω_a e che non compromette la stabilità.

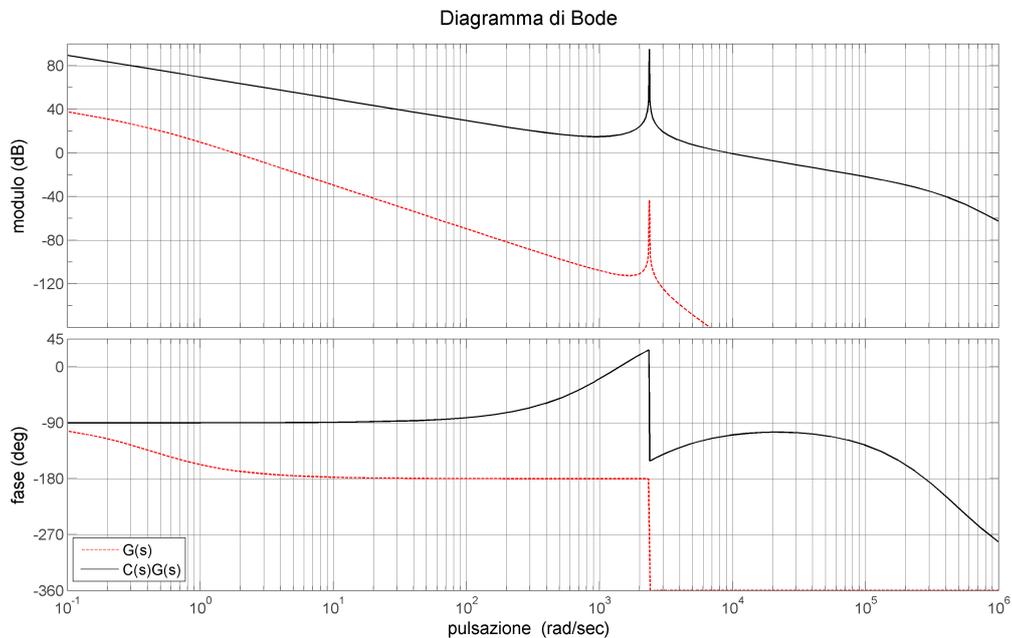


Figura 4.23: Diagramma di Bode del sistema in catena diretta utilizzando $C_4(s)$

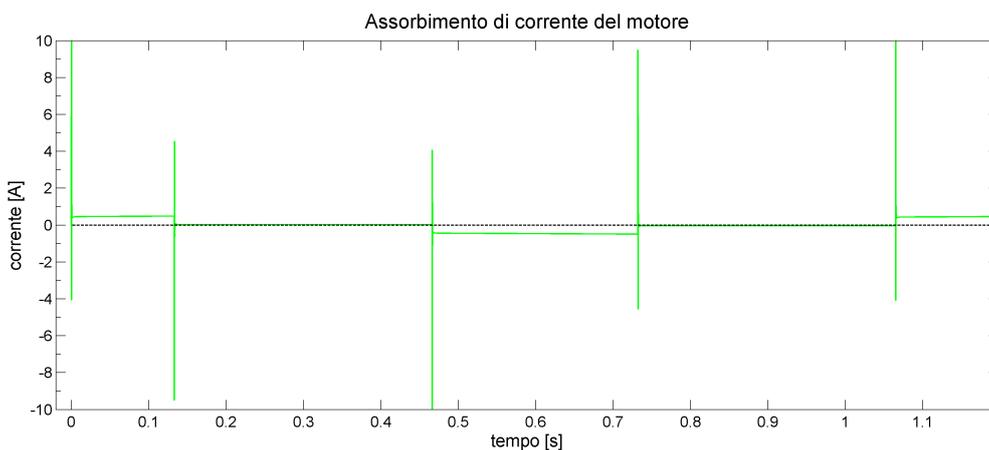


Figura 4.24: Andamento della corrente assorbita dal motore impiegando $C_4(s)$

Quindi in definitiva si ottiene

$$C_4(s) = 381 \frac{\left(1 + \frac{s}{0.416}\right) \left(1 + \frac{s}{1.4 \times 10^3}\right)^2}{\left(1 + \frac{s}{4.9 \times 10^4}\right)^3}. \quad (4.6)$$

In questo caso abbiamo completamente trascurato il margine di fase, tuttavia riusciamo lo stesso a raggiungere il nostro obiettivo, come si vede in Figura 4.24.

Si noti che, come ci eravamo riproposti, il diagramma di Bode di $C_4(s)G(s)$ in Figura 4.23 ha un solo attraversamento dell'asse a 0 dB.

4.3 Effetto delle variazioni parametriche

4.3.1 Introduzione

I compensatori validi progettati in precedenza, $C_2(s)$ e $C_4(s)$, non tengono conto di eventuali variazioni parametriche. Quando sono stati elencati i dati relativi a tutti i parametri non abbiamo considerato alcuna tolleranza. Per proteggerci da eventuali problemi, una volta fissati i margini di errore, dovremmo valutare quale sia il caso peggiore tenendo conto di tutti quelli possibili, e quindi riprogettare i compensatori con nuovi vincoli.

Tenendo conto che, oltre ad avere 7 parametri (e quindi dovremmo valutare la peggiore tra tutte le possibili combinazioni), dovremmo vedere il caso peggiore sia per la posizione che per la corrente, la quantità di calcoli che dovremmo svolgere sarebbe improponibile. Per questo motivo abbiamo scelto di svolgere il tutto in maniera sperimentale. Partiamo cioè da dei vincoli più rilassati di corrente e posizione e poi vediamo, facendo girare una serie di casistiche, se riusciamo a rispettarli. Per selezionare quali casistiche siano le più rilevanti valutiamo gli effetti di ogni singola variazione parametrica nel caso peggiore e migliore e poi teniamo conto solo di quelle che comportano differenze più ampie dal valore nominale.

Supponiamo innanzitutto di avere le seguenti tolleranze:

$$m = m_0 \pm 5\%$$

$$k = k_0 \pm 20\%$$

$$K_C = K_{C_0} \pm 10\%$$

$$J_m = J_{m_0} \pm 10\%$$

$$f = f_0 \pm 10\%$$

I parametri che non compaiono in lista si assumono noti con ottima precisione. I valori nominali sono indicati con il pedice 0 e sono riportati nel paragrafo 3.1. Come nuovi vincoli utilizziamo $i_{max} = 8 A$ ed $e_{max} = 0.16 mm$. Vediamo ora come dobbiamo intervenire su ognuno dei compensatori.

4.3.2 Variante del compensatore $C_2(s)$

Per prima cosa sistemiamo il guadagno statico del compensatore in modo tale da abbassare l'errore di posizione e mantenerlo sotto al nuovo valore massimo introdotto poco fa. Dalla Figura 4.14 si vede che dobbiamo imporre $C_0 = 475$. Quindi abbassiamo i poli in alta frequenza per compensare l'innalzamento della corrente dovuto a C_0 e, in ogni

caso, per adattarci al nuovo valore di i_{max} . Risulta ottimale $\omega_{HF} = 5.5 \times 10^4$ rad/s. Così abbiamo ottenuto

$$C_5(s) = 475 \frac{\left(1 + \frac{s}{0.416}\right) \left(1 + \frac{s}{5.6 \times 10^7} + \frac{s^2}{3.24 \times 10^6}\right)}{\left(1 + \frac{s}{5.5 \times 10^4}\right)^3} \quad (4.7)$$

Sperimentalmente si è visto che la corrente rimane in generale pressoché costante al variare dei parametri. Per quanto riguarda l'errore di posizione, le variazioni più consistenti in positivo (in modulo) sono un singolo aumento di J_m ed m e una diminuzione di K_C , mentre gli altri parametri danno un contributo trascurabile. Prendendo quindi questi casi estremi (anche se non è detto che siano in realtà i peggiori) si ottiene il grafico di Figura 4.25.

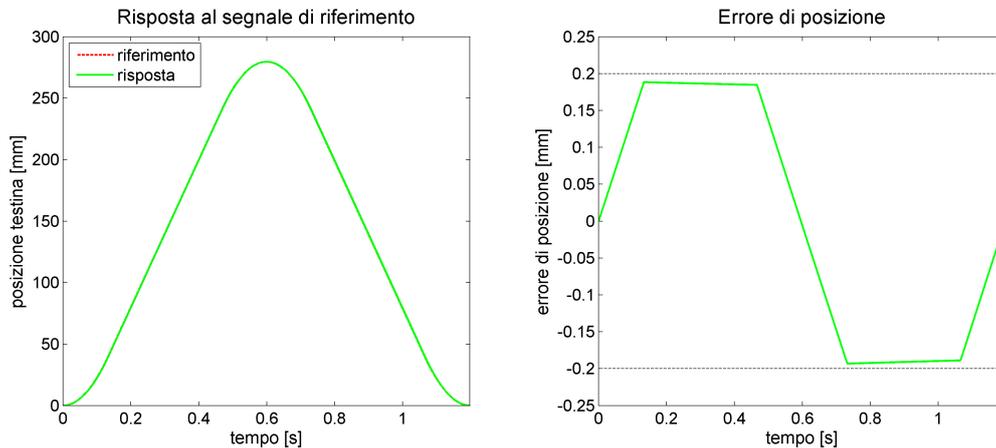


Figura 4.25: Risposta del sistema impiegando $C_5(s)$ in un caso tra i peggiori

In questo caso l'errore massimo è di 0.194 mm, dunque minore del vincolo progettuale (3.5). Facendo girare anche altri casi si nota che questo valore non viene mai superato, quindi la scelta di $C_5(s)$ permette con molta probabilità di rimanere entro i limiti imposti anche in caso di variazioni parametriche. Si noti che il picco di risonanza dipende in particolar modo dal valore di f e k , nel dettaglio il primo permette di variare l'ampiezza, il secondo invece modifica la frequenza di risonanza. Infine, si trova che il margine di guadagno di $C(s)G(s)$ è sempre superiore ai 10 dB. Questo significa che, finché il guadagno complessivo non aumenta di tale valore, il sistema continua a rimanere stabile.

4.3.3 Variante del compensatore $C_4(s)$

Vediamo ora lo stesso ragionamento fatto in precedenza ma con il compensatore $C_4(s)$, privo di zeri complessi coniugati. Anche qui per prima cosa adattiamo C_0 e ω_{HF} .

Otteniamo

$$C_6(s) = 475 \frac{\left(1 + \frac{s}{0.416}\right) \left(1 + \frac{s}{1.4 \times 10^3}\right)^2}{\left(1 + \frac{s}{3.05 \times 10^4}\right)^3} \quad (4.8)$$

Già nella ricerca di ω_{HF} ci accorgiamo che un suo valore troppo basso (basta raggiungere i 2000 rad/s) compromette la stabilità del sistema. A conferma di questo abbiamo che i margini di fase e di guadagno sono molto bassi (20° e 5.6 dB): infatti i poli risultano posizionati molto vicini a ω_a . D'altronde questo è stato il prezzo che abbiamo dovuto pagare per evitare l'inserimento di zeri complessi coniugati. Gli effetti singoli delle variazioni parametriche sono pressoché gli stessi di prima, perché il controllore non ne è affetto, mentre la corrente, come in precedenza, varia in maniera trascurabile.

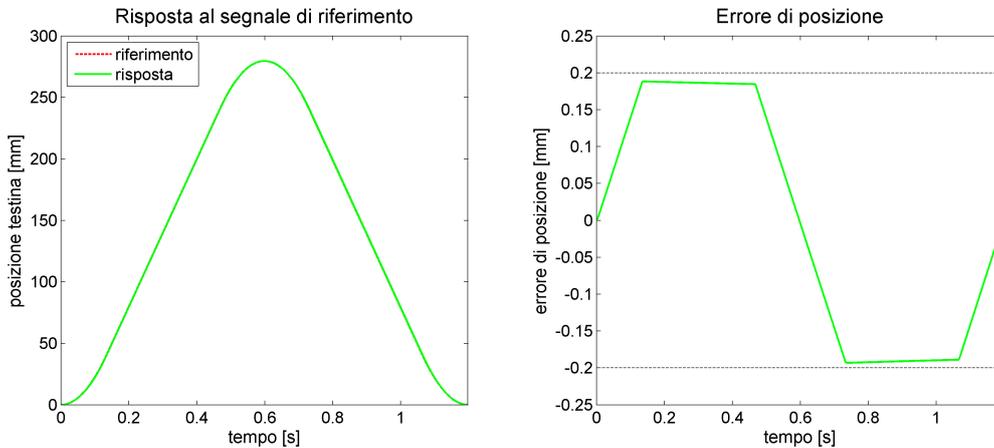


Figura 4.26: Risposta del sistema impiegando $C_6(s)$ in un caso tra i peggiori

In Figura 4.26 vediamo l'uscita del sistema quando consideriamo le situazioni singolarmente più sfavorevoli. Anche qui l'errore non supera 0.193 mm, quindi si può dire che il controllore (4.8) rispetta i vincoli preassegnati anche con limitate variazioni parametriche.

Tuttavia in questa situazione il caso migliore per l'errore di posizione non è un buon caso per la stabilità del sistema. Infatti il margine di guadagno si abbassa drasticamente. Se da una parte la variazione della costante elastica non comporta alcun effetto su errore e corrente, dall'altra contribuisce in maniera consistente a far variare questo parametro. In una situazione opposta a quella cercata per il caso peggiore, considerando un abbassamento di k e di f si ottiene un errore molto basso (inferiore a 0.136 mm), per contro però il margine di guadagno è di appena 2 dB. Sebbene abbiamo ipotizzato che il controllore non fosse affetto da errore, dobbiamo assicurarci che il suo guadagno statico non superi $1.26C_0$ (corrispondente a un incremento di 2 dB), ovvero dobbiamo garantire nella pratica che per nessun motivo C_0 superi il valore di 600, altrimenti potrebbe venire meno la stabilità del sistema se si verificano le condizioni appena citate.

Capitolo 5

Valutazione degli effetti prodotti da saturazione e disturbi

Dopo aver trovato il compensatore definitivo, vediamo ora come si comporta il sistema complessivo quando è sollecitato da un disturbo additivo e quando entrano in gioco delle non linearità, per esempio la saturazione. Per quanto gli argomenti da trattare possano essere vasti ci limiteremo solo ai casi più semplici.

5.1 Saturazione del compensatore

5.1.1 Saturazione per sovraccarico del motore

In questa sezione vediamo come reagisce il sistema quando sarebbe necessario fornire più corrente al motore di quanta esso ne possa assorbire, ovvero nell'ipotesi in cui esista un valore massimo di corrente accettabile in ingresso al motore.

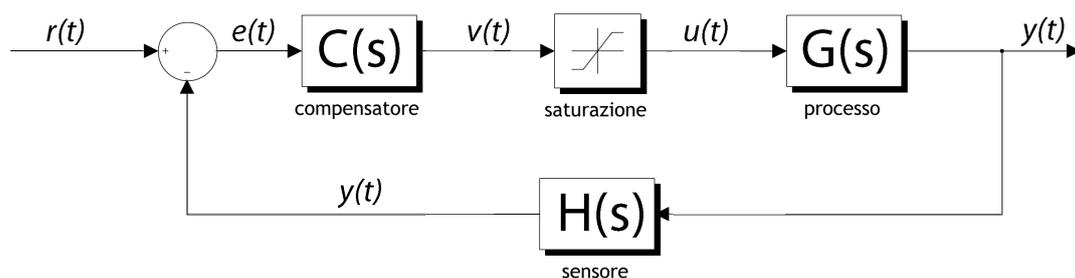


Figura 5.1: Schema a blocchi del sistema con saturazione

Poiché, in presenza di saturazione, stiamo trattando un sistema non lineare non vale più la sovrapposizione degli effetti, inoltre non valgono i metodi classici per l'analisi di stabilità. Per questo motivo è necessario ricorrere a una simulazione via software (nel nostro caso Simulink) per poter trarre delle conclusioni adeguate. Faremo sempre riferimento allo schema a blocchi di Figura 5.1, in cui, rispetto a quello di Figura 4.1, abbiamo aggiunto un blocco di saturazione subito dopo al compensatore. Per questa trattazione useremo un tipo di saturazione in cui il passaggio dalla zona lineare a quella non lineare è brusco,

e in zona di saturazione l'erogazione di corrente corrisponde al massimo disponibile. In Figura 5.2 si capisce meglio di cosa stiamo parlando.

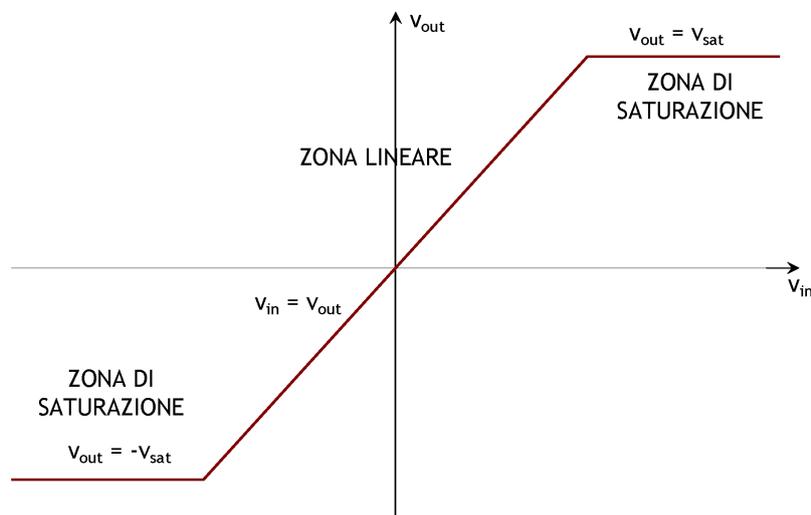


Figura 5.2: Caratteristica ingresso-uscita del blocco di saturazione

Consideriamo ora una situazione realistica in cui ci potrebbe essere saturazione. Supponiamo di non esserci resi conto di come poter risolvere i problemi nati con la scelta di $C_1(s)$. Siamo cioè in quel caso in cui vorremmo fornire i picchi di corrente ma non ce la facciamo perché possiamo al massimo erogare 10 A.

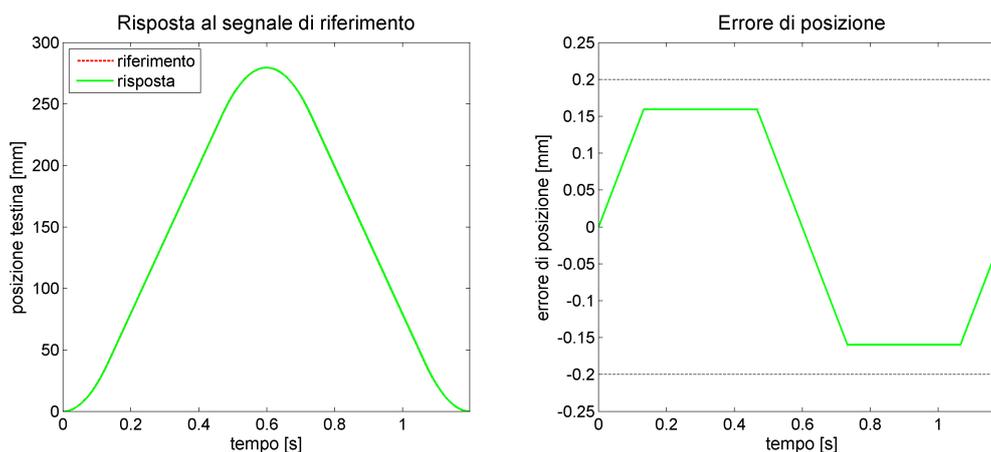


Figura 5.3: Risposta del sistema in presenza di saturazione di corrente a 10 A

Vediamo quindi cosa succederebbe al sistema in questo caso. Quello che si nota in Figura 5.3 è che la risposta complessiva rimane praticamente invariata se la corrente satura a 10 A. Quindi non era strettamente necessario abbassare i 3 poli in alta frequenza per far funzionare correttamente il sistema.

5.1.2 Saturazione limite

Torniamo ai sistemi finali in cui abbiamo utilizzato i compensatori $C_5(s)$ e $C_6(s)$. Vediamo ora fino a che corrente (o, equivalentemente, a che tensione, dato che sono legati

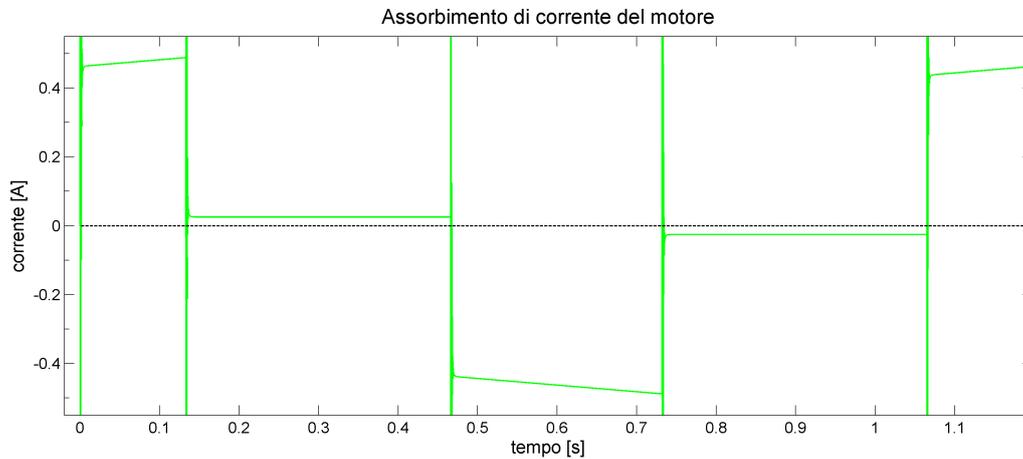


Figura 5.4: Dettaglio della corrente assorbita dal motore usando $C_6(s)$

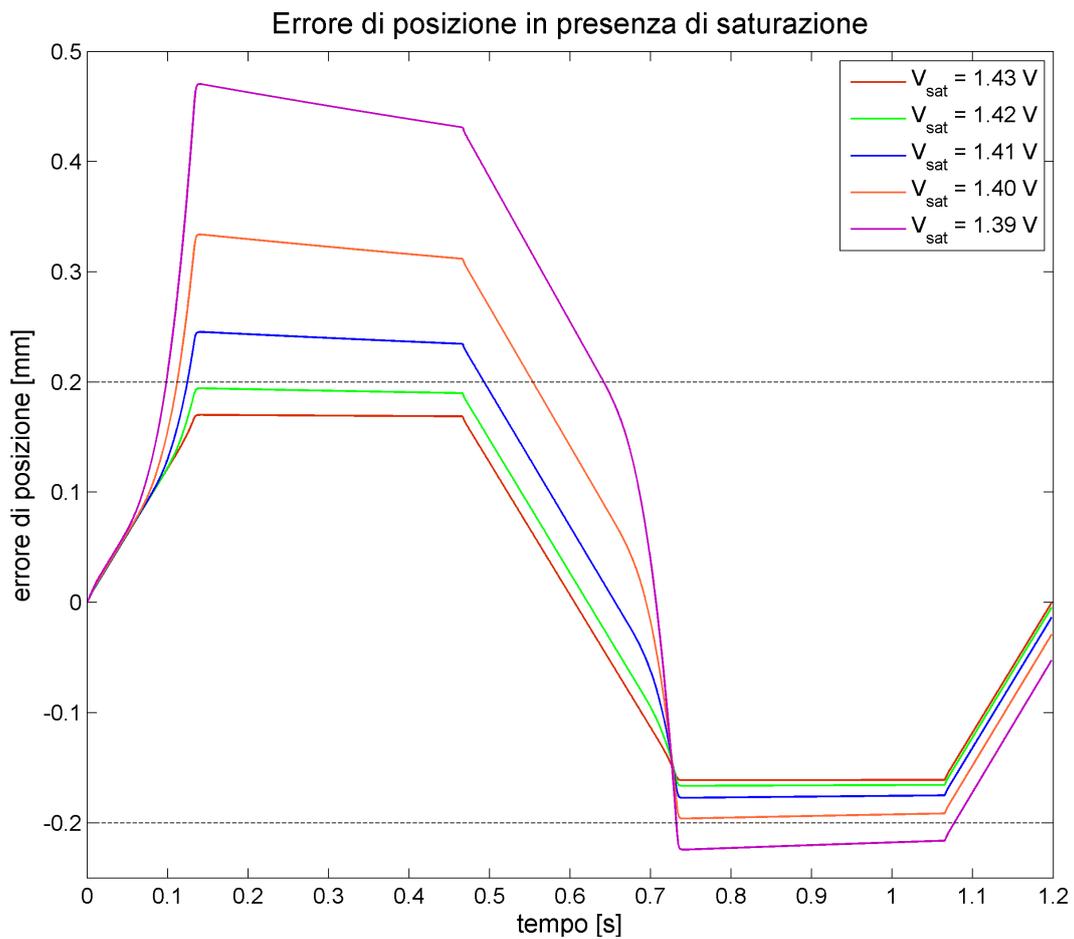


Figura 5.5: Evoluzione dell'errore al variare della tensione di saturazione

da R_e che è una costante) di saturazione ci possiamo spingere (in seguito a fenomeni esterni) in modo da rispettare i vincoli progettuali. Riportiamo nel dettaglio (dato che abbiamo visto che i picchi possono essere ignorati) la corrente assorbita nel caso del compensatore $C_6(s)$, tralasciando l'altro in quanto il risultato è molto simile. Vediamo per ora il comportamento del sistema complessivo usando $C_6(s)$ per varie correnti di saturazione. Quello che si nota dalla Figura 5.5 è che, fino a quando la corrente rimane sopra a circa 0.5 A, l'errore rimane praticamente immutato. Il cambiamento sostanziale si ha quando la tensione di pilotaggio scende a 1.42 V (la corrente di saturazione raggiunge 0.48 A), evidenziato in Figura 5.4. Da questo punto in poi l'errore aumenta vertiginosamente perché non viene più fornita neppure la corrente sufficiente per il tratto di accelerazione, cioè la velocità aumenta più lentamente.

Un discorso praticamente analogo si può fare per il compensatore $C_5(s)$, in quanto la corrente assorbita dal motore è la stessa.

5.2 Disturbo additivo tra compensatore e processo

Vediamo quanto è immune ai disturbi il sistema complessivo realizzato. D'ora in poi considereremo solo gli effetti ottenuti in presenza del compensatore $C_6(s)$, tenendo conto che, impiegando $C_5(s)$, i risultati non sono molto diversi. Per questo ci avvaliamo dello schema a blocchi in Figura 5.6, in cui, come avviene tipicamente, il rumore additivo entra tra compensatore e processo.

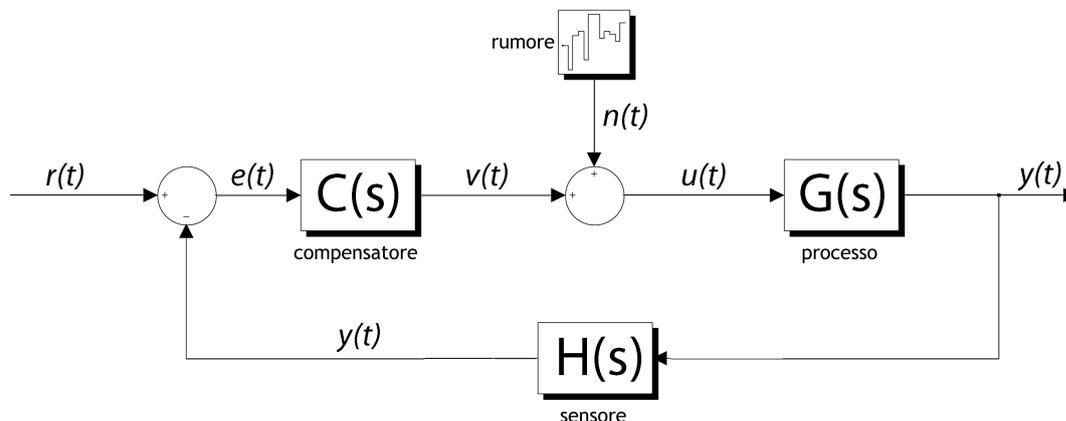


Figura 5.6: Schema a blocchi con rumore additivo del sistema retroazionato

Faremo riferimento esclusivamente al caso di *rumore additivo bianco a banda limitata*. Dal momento che il compensatore ha modulo molto maggiore di 1 a tutte le frequenze, al fine di alterare seriamente le prestazioni del sistema la potenza che deve avere il rumore dovrebbe essere abbastanza consistente.

Il tratto più critico è chiaramente quello di accelerazione e frenata. Per avere qualche riferimento numerico, la potenza utile in gioco in questi tratti, valutata come $R_e i^2(t)$, si aggira intorno alle decine di mW . Vediamo sperimentalmente come risponde il sistema al variare della potenza del rumore P_N .

Ciò che si nota dalla Figura 5.7 è che, fintanto che $P_N < 10 mW$, si riesce comunque

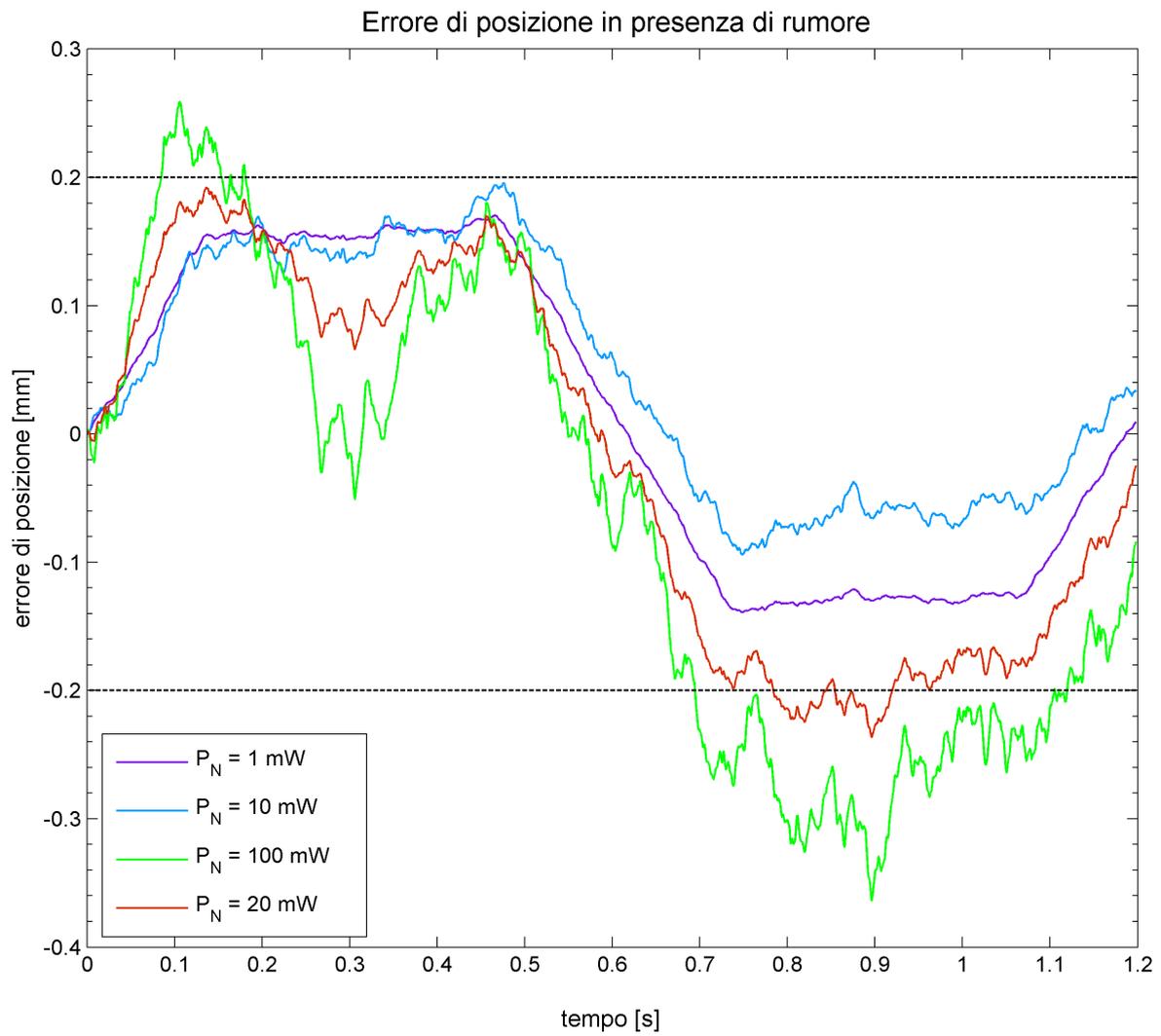
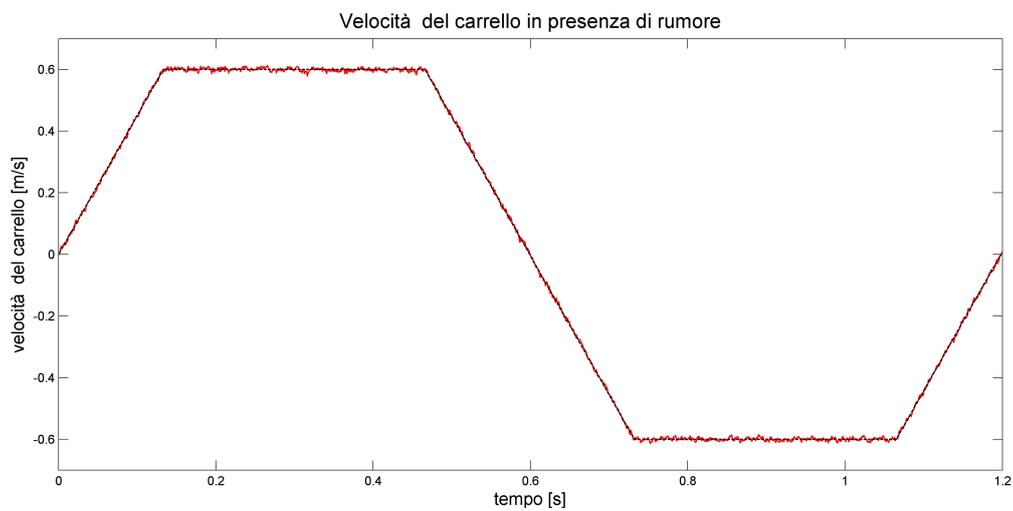


Figura 5.7: Evoluzione dell'errore al variare della potenza di rumore

Figura 5.8: Risposta di velocità del sistema con $P_N = 100$ mW

a rimanere dentro agli obiettivi di progetto. Da notare che, nel caso di $P_N = 100 \text{ mW}$, paragonabile alla potenza del segnale uscente dal compensatore, l'errore assoluto è ancora modesto, sebbene oltre i limiti consentiti, mentre il rapporto segnale/rumore è molto basso, segno che il sistema presenta una buona reiezione ai disturbi.

Per completezza in Figura 5.8 riportiamo anche la risposta di velocità, evidenziando solamente quella nel caso di $P_N = 100 \text{ mW}$. Si vede subito che, nonostante la potenza del rumore sia consistente, la velocità non si discosta molto dal valore ideale.

5.3 Effetto combinato di saturazione e rumore

Quanto visto nel paragrafo precedente non rispecchia il fatto che ci possa essere saturazione. Nella realtà, se sfruttiamo un modello come quello in Figura 5.9, potremmo dover considerare sia l'uno che l'altro effetto. Ovvero, se il rumore aggiunge del disturbo alla corrente di pilotaggio del motore, questo potrebbe essere tale da superare il massimo valore consentito.

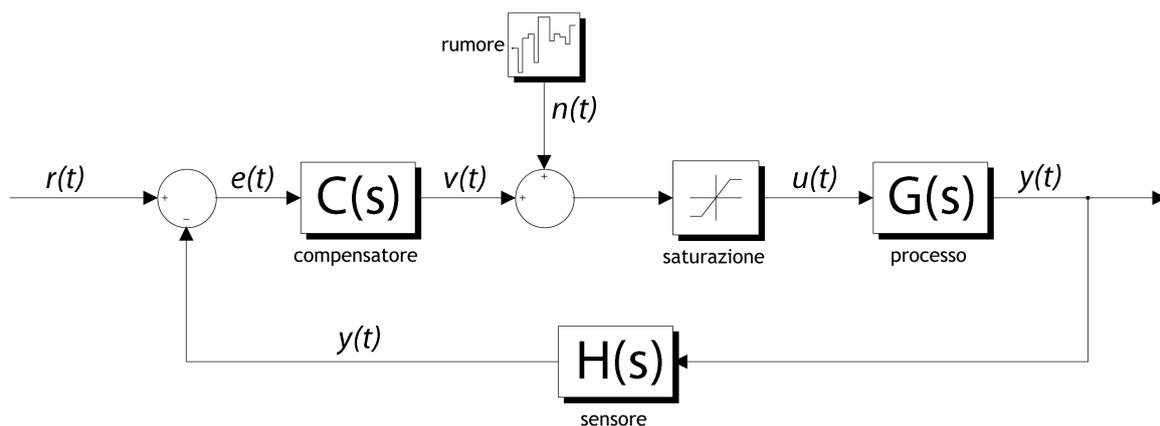


Figura 5.9: Schema a blocchi con rumore additivo del sistema retroazionato

Quindi i risultati emersi poco fa sono solo una situazione ideale, e vengono aggiornati di seguito. Faremo riferimento solo al caso in cui la corrente satura al valore limite di 10 A. Come si vede dalla Figura 5.10, già con potenze di rumore più basse il sistema presenta un errore più ampio perché la saturazione peggiora le prestazioni, in quanto non andiamo più a tagliare solo picchi di corrente, ma anche buona parte del segnale utile. Inoltre la buona reiezione ai disturbi è garantita solo nel caso di sistemi LTI, mentre ora siamo usciti da questo ambito. Tuttavia se, come in precedenza, mettiamo in relazione l'errore con la posizione effettiva, notiamo che l'errore relativo è molto basso, mentre la potenza del rumore è quasi paragonabile a quella del segnale, quindi anche in questo caso il sistema presenta una buona immunità ai disturbi.

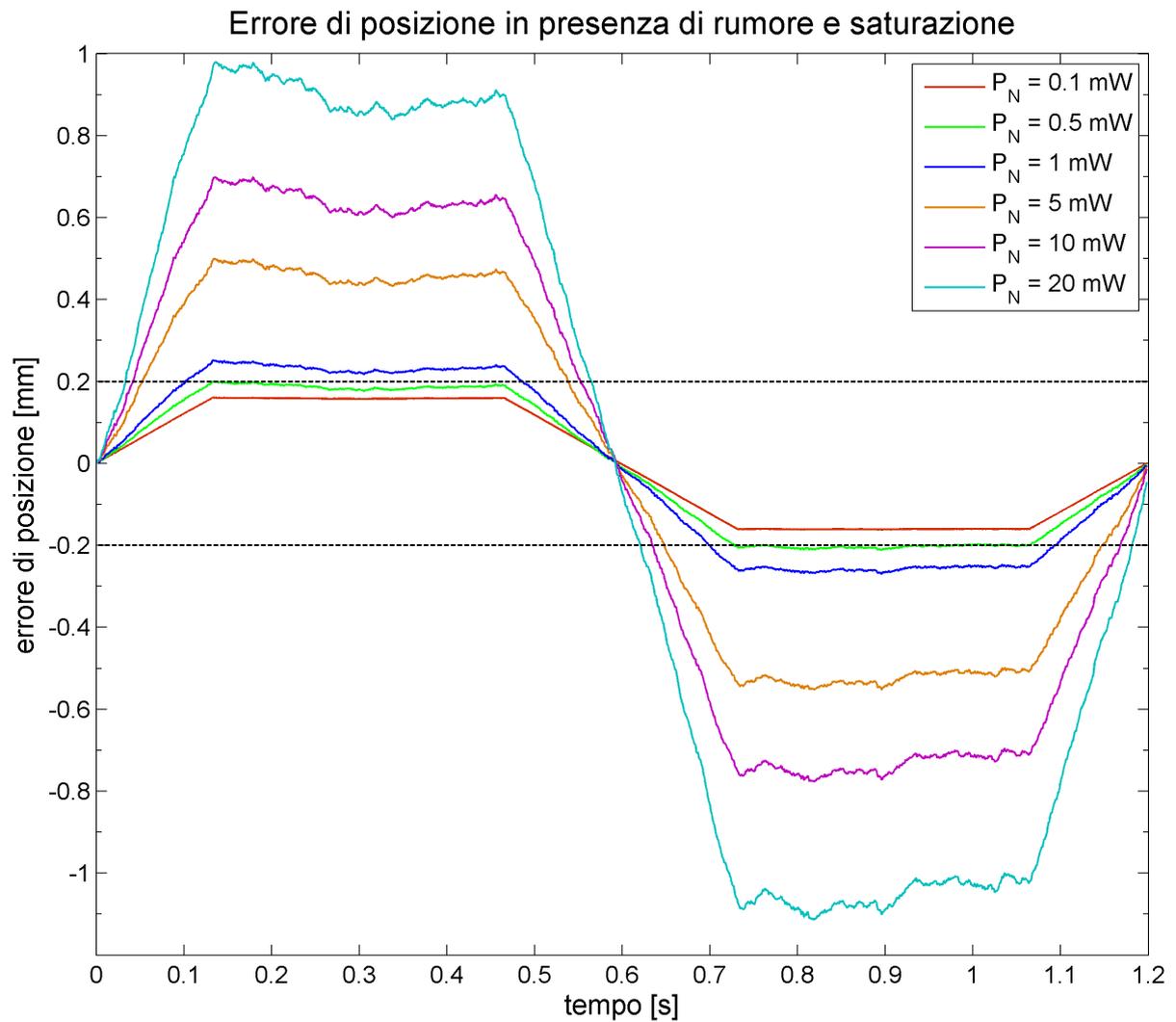


Figura 5.10: Evoluzione dell'errore al variare della potenza di rumore con saturazione

Capitolo 6

Conclusioni

Al termine di questo elaborato, riassumiamo quanto abbiamo fatto nei precedenti capitoli.

Siamo partiti dalle equazioni dinamiche che governano gli organi meccanici della stampante per costruire il modello di stato, da cui abbiamo trovato la funzione di trasferimento ad anello aperto del modello ingresso-uscita. Dopo aver analizzato questo processo siamo arrivati a dire che l'unica soluzione valida era quella di un controllo in retroazione. É stata effettuata una panoramica generale sui controllori classici più usati ma, a causa della particolare conformazione della funzione di trasferimento ad anello aperto, siamo dovuti ricorrere a un controllore di terzo grado.

A questo punto sono sorte una serie di problematiche, dovute al fatto che, se prima cercavamo unicamente di mantenere l'errore di posizione a livelli accettabili, poi ci siamo scontrati con problemi di saturazione. Dopo una serie di osservazioni e prove sperimentali siamo riusciti ad ovviare a questo problema ed abbiamo trovato 2 soluzioni valide, sfruttando 2 controllori diversi. Mentre il primo offre più robustezza, il secondo gode di una più semplice realizzazione pratica. Tuttavia, in situazioni non estreme entrambi i compensatori permettono di mantenere il margine di errore al di sotto di quanto richiesto, senza dover sovraccaricare il motore, come vediamo in Figura 6.1 e 6.2, dove viene considerato solo un grafico, in quanto il comportamento dei 2 compensatori, come più volte ribadito, è lo stesso.

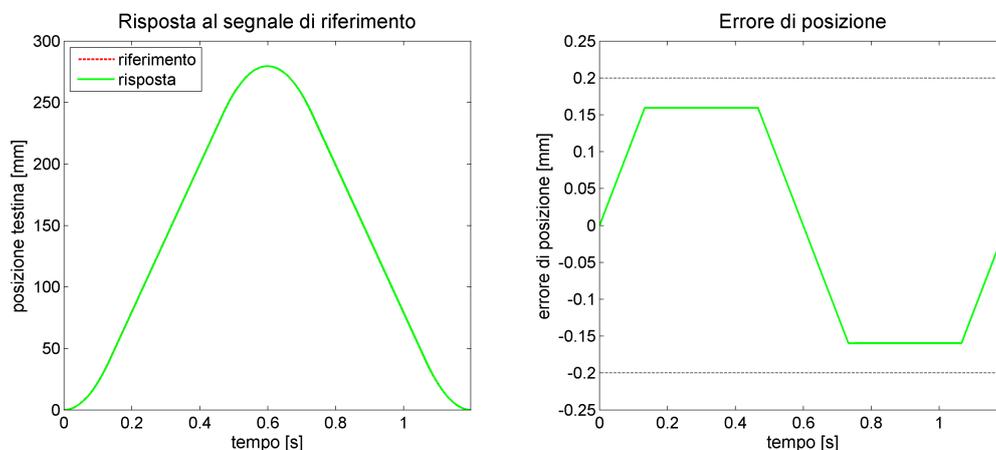


Figura 6.1: Risposta del sistema al profilo di posizione impiegando i controllori definitivi

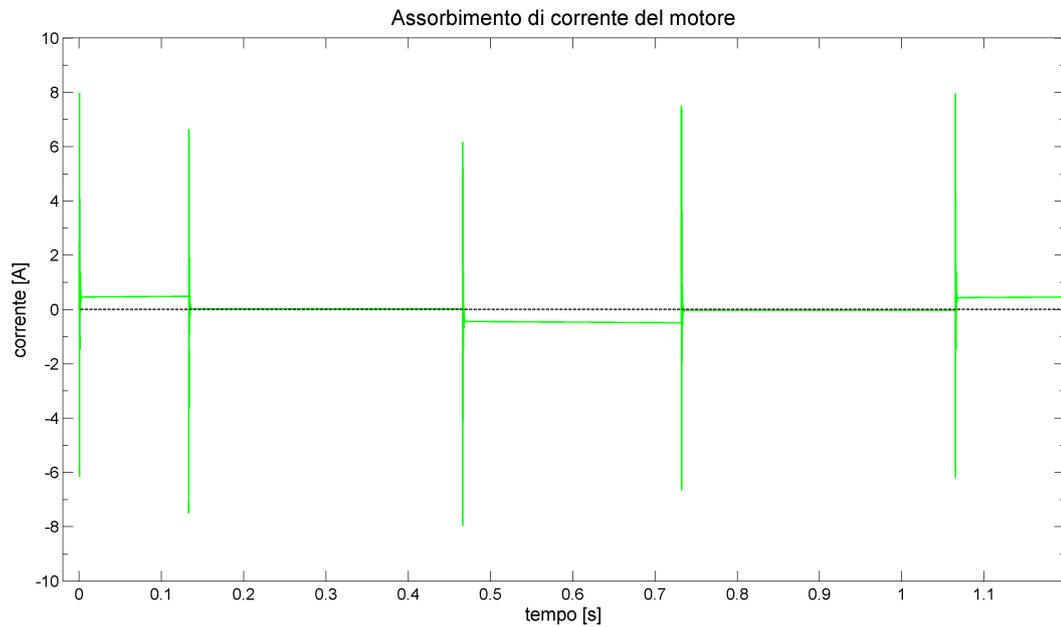


Figura 6.2: Corrente assorbita dal motore con i controllori $C_5(s)$ e $C_6(s)$

A questo punto abbiamo esaminato come risponde il sistema in varie casistiche non ideali, come variazioni parametriche, saturazione e rumore, facendo notare come non influiscano eccessivamente nelle prestazioni.

Solo allora abbiamo potuto dire di aver raggiunto il nostro obiettivo di progetto, rispettando tutti i vincoli imposti.

Bibliografia

- [1] M. Bisiacco, M.E. Valcher. *Controlli Automatici*. Libreria Progetto, 2008.
- [2] I.J. Nagrath, M. Gopal. *Control Systems Engineering*. Anshan, 5th edition, 2008.
- [3] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci. *Elementi di Fisica: Meccanica - Termodinamica*. EdiSES, 2001.
- [4] <http://it.wikipedia.org/wiki/Stampante>.