

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CORSO DI LAUREA IN
INGEGNERIA INFORMATICA

Feedback del CSI per Reti Cellulari in Modalità FDD

Laureando
SIMONE RAGUSA

Relatore
PROF. STEFANO TOMASIN

ANNO ACCADEMICO 2021/2022

Indice

1	Introduzione	1
2	Modello del sistema	3
3	Codifica senza distorsione	7
3.1	Codifica di sorgenti correlate	8
3.2	Approccio feedback-only	9
3.3	Procedura di codifica	11
3.3.1	Sparsificazione della matrice di densità di probabilità discreta congiunta	13
4	Codifica con distorsione	15
4.1	Codifica con feedforward	18
4.2	Da Mixed Side Information a Wyner-Ziv	19
4.3	Procedura di codifica con distorsione	20
5	Conclusioni	23
A	Progettazione dei codebook	25
B	Procedura di codifica: esempio numerico	27
	Bibliografia	31

Sommario

Nelle reti cellulari, la modalità frequency-division duplexing (FDD) consente la trasmissione simultanea sul canale di uplink (UL) e downlink (DL), e a tale scopo sono adoperate due bande di frequenza separate. Per questo motivo la stima del canale di DL è solitamente effettuata dallo user terminal (UT) e successivamente inviata alla base station (BS). In questa tesi, si rielabora una procedura presente in letteratura che permette di ottenere una stima del canale di DL alla BS, sfruttando la dipendenza parziale tra i canali di UL e DL, minimizzando il tasso medio della segnalazione utile alla procedura stessa. Anzitutto si è riportato il teorema presentato in [1] che, utilizzando il teorema di Slepian-Wolf [2], mostra come un approccio feedback-only sia sufficiente a minimizzare il tasso della segnalazione per effettuare una codifica in assenza di distorsione. Questo risultato porta all'elaborazione della procedura sopra citata, riportata in forma estesa in questa tesi. Infine, si riportano delle strategie possibili note in letteratura per il caso della codifica in presenza di distorsione. Dal teorema di Wyner-Ziv [3] si ha infatti che la segnalazione di feedforward può contribuire a ridurre il tasso di feedback quando si ammette una distorsione.

Capitolo 1

Introduzione

Le prestazioni di un sistema di comunicazione possono essere migliorate se il trasmettitore conosce le caratteristiche del canale sul quale avviene la trasmissione. Ad esempio, quando più canali con *additive white Gaussian noise* (AWGN, rumore Gaussiano bianco additivo) sono disponibili in parallelo, la conoscenza del canale consiste nel sapere l'attenuazione e la differenza di fase introdotta in ogni canale. Le caratteristiche del canale sono di solito acquisite con un processo di stima che opera sul segnale ricevuto, pertanto la stima è disponibile tipicamente al ricevitore.

L'ottenimento di una stima del canale al trasmettitore dipende invece da come i dispositivi alternano la trasmissione e la ricezione dei segnali e da quali canali usano nelle due fasi. Nelle reti cellulari, due modalità sono possibili, vale a dire, *time-division duplexing* (TDD, duplex a divisione di tempo) e *frequency-division duplexing* (FDD, duplex a divisione di frequenza). In modalità TDD, le trasmissioni in *downlink* (DL) (dalla *base station* (BS, stazione base) agli *user terminals* (UTs, terminali utente)) e le trasmissioni in *uplink* (UL) (dagli UTs alla BS) avvengono sulla stessa banda di frequenza, ma in istanti di tempo differenti. In modalità FDD, la BS e gli UTs utilizzano bande di frequenza separate per lo scambio di dati in UL e DL, consentendo la trasmissione simultanea in entrambe le direzioni. Ottenere la stima delle caratteristiche del canale al trasmettitore risulta più semplice quando si opera in modalità TDD a causa della reciprocità del canale. In questo caso infatti

quando la BS ha stimato il canale in ricezione dallo UT, conosce anche il canale in trasmissione verso lo UT. D'altra parte, operando in modalità FDD, lo UT stima il canale e invia la stima alla BS. Nel seguito faremo riferimento a questo procedimento come approccio feedback-only. In particolare, la BS trasmette dei segnali pilota tramite i quali lo UT stima il canale e ne manda indietro una versione quantizzata alla BS.

In questa trattazione, proponiamo una procedura di feedback del CSI a tasso variabile con approccio feedback-only, il cui obiettivo è di minimizzare l'overhead della segnalazione. Per fare ciò, sfrutteremo la dipendenza statistica presente tra il canale di UL e il canale di DL, che origina dall'ambiente fisico in cui si trova il canale fisico di comunicazione.

Il materiale riportato in questa tesi riprende ed estende quanto presentato in [1].

Notazione

Presentiamo ora la notazione che verrà utilizzata nel seguito in questo documento.

Sia \mathbb{C} l'insieme dei numeri complessi. Indichiamo vettori riga e matrici in grassetto, rispettivamente con lettere minuscole e maiuscole. Pertanto, x_i indica l' i -esimo elemento del vettore \mathbf{x} , mentre $A_{i,j}$ denota l'elemento posizionato sull' i -esima colonna e la j -esima riga della matrice \mathbf{A} . Denotiamo il trasposto della matrice \mathbf{A} con \mathbf{A}^T e il trasposto coniugato con \mathbf{A}^H . Il prodotto interno tra due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{1 \times N}$ è dato da $\mathbf{x}\mathbf{y}^H \triangleq \sum_i x_i \bar{y}_i$, con \bar{y}_i il complesso coniugato di y_i . La norma di un vettore \mathbf{x} è definita come $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2 \triangleq (\mathbf{x}\mathbf{x}^H)^{1/2}$. Gli insiemi sono denotati con lettere maiuscole calligrafiche, e $|\mathcal{A}|$ indica la cardinalità dell'insieme \mathcal{A} . Infine, denotiamo la probabilità di un evento E con $\mathbb{P}(E)$, il valore atteso di una variabile casuale X con $\mathbb{E}[X]$, l'entropia di X con $\mathbb{H}(X)$, e l'informazione mutua tra due variabili aleatorie X e Y con $I(X; Y)$.

Capitolo 2

Modello del sistema

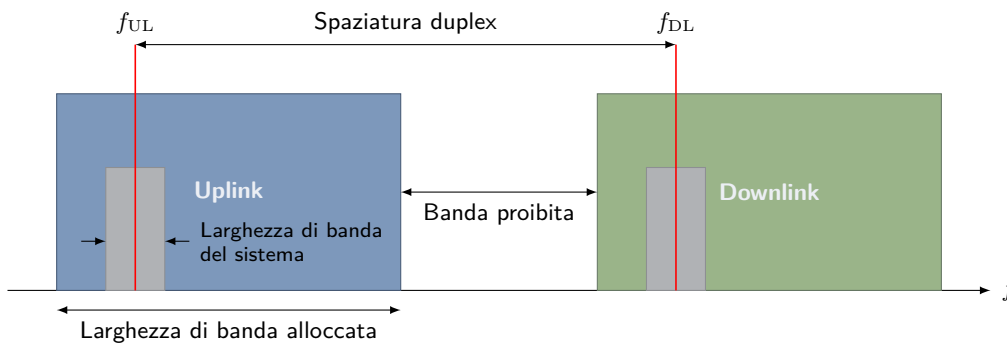


Figura 2.1: Struttura tipica dei moderni sistemi cellulari FDD.

Consideriamo il sistema cellulare in modalità FDD illustrato in Figura 2.1, dove f_{UL} e f_{DL} denotano le frequenze della portante centrale di UL e DL, rispettivamente. Assumiamo che la BS comunichi con diversi UTs e che tutti i dispositivi siano dotati di una singola antenna.

In questa trattazione ci concentriamo su una trasmissione multiportante a singola antenna, implementata, ad esempio, con *orthogonal frequency-division multiplexing* (OFDM, multiplex a divisione di frequenze ortogonali) e *single-carrier frequency-division multiple access* (SC-FDMA, accesso multiplo a divisione di frequenza a singola portante) per le trasmissioni in DL e UL, rispettivamente, così come nello standard *Long-Term Evolution* (LTE). Si noti che le derivazioni riportate e le tecniche proposte si applicano anche ad altri contesti, come ad esempio scenari *multiple-input multiple-output*

(*MIMO*) a banda stretta dove i canali sono descritti da matrici che delineano i collegamenti tra coppie di antenne. Nella nostra situazione, i canali di UL e DL sono entrambi descritti da $N/2$ numeri complessi (con N pari), ognuno denotante il coefficiente di una sottoportante OFDM.¹

Il canale aggregato UL-DL è descritto da un vettore di N numeri complessi. Ci concentriamo sul problema dell'acquisizione del canale di DL alla BS, e assumiamo che questa acquisizione avvenga in momenti diversi per ognuno degli UT. Restringiamo il nostro studio al caso in cui un solo UT è presente nel sistema. Denotiamo i vettori dei canali di UL e DL come

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^{(U)} &= [h_0^{(U)}, \dots, h_{N/2-1}^{(U)}] \in \mathbb{C}^{1 \times N/2}, \\ \mathbf{h}^{(D)} &= [h_{N/2}^{(D)}, \dots, h_{N-1}^{(D)}] \in \mathbb{C}^{1 \times N/2},\end{aligned}\tag{2.1}$$

e il vettore del canale globale come

$$\mathbf{h} = [\mathbf{h}^{(U)}, \mathbf{h}^{(D)}] \in \mathbb{C}^{1 \times N}.\tag{2.2}$$

In generale, i canali di UL e DL sono in relazione tra loro, dal momento che hanno origine dallo stesso canale fisico. Infatti, i fenomeni fisici (quali, ad esempio, la riflessione, la dispersione e l'assorbimento) che determinano il canale a una data frequenza hanno un comportamento simile a frequenze vicine. Questo risulta particolarmente vero per un canale con solo pochi dispersori, come ad esempio un canale a onde millimetriche. In generale, poiché il segnale ricevuto alla BS e allo UT viene in entrambi i casi normalizzato a una data potenza adeguata per eseguire la quantizzazione, assumiamo che sia $\mathbf{h}^{(U)}$ che $\mathbf{h}^{(D)}$ abbiano norma unitaria, ovvero,

$$\|\mathbf{h}^{(U)}\|^2 = 1, \quad \|\mathbf{h}^{(D)}\|^2 = 1.\tag{2.3}$$

¹Si noti che in un contesto MIMO la dimensione dei due vettori potrebbe essere differente. È il caso ad esempio di uno scenario *multi-user MIMO* (*MU-MIMO*), nel quale una BS con M antenne serve K UTs a singola antenna, e tipicamente si ha $M \gg K$ di modo da poter servire più utenti o operare meglio alle frequenze delle onde millimetriche. Ad ogni modo, le derivazioni riportate non dipendono dalla dimensione dei due vettori e possono essere facilmente generalizzate.

In alcuni casi, come ad esempio nello standard LTE, il feedback del coefficiente di normalizzazione viene effettuato del segnale di *channel-quality information* (*CQI*, informazione sulla qualità del canale); per cui, possiamo considerare il problema del feedback della norma come a sé stante.²

Assumiamo inoltre che, all’inizio della trasmissione, la BS trasmetta un numero sufficiente di simboli pilota affinché lo UT possa ottenere una stima perfetta del canale di DL e, allo stesso modo, lo UT trasmetta sufficienti simboli pilota di modo che la BS ottenga una perfetta stima del canale di UL.

Il problema affrontato è come ottenere una stima del canale di DL alla BS, tramite uno scambio di comunicazioni con lo UT. Alla BS, questa conoscenza viene poi utilizzata per il bit- e power-loading delle sottoportanti e/o per il beamforming quando più antenne vengono utilizzate. Quindi, la nostra attenzione è sia sulle strategie di segnalazione che sulla quantizzazione vettoriale di $\mathbf{h}^{(U)}$ e $\mathbf{h}^{(D)}$, denotate rispettivamente come

$$q(\mathbf{h}^{(U)}), \quad q(\mathbf{h}^{(D)}), \quad (2.4)$$

utilizzando il minor numero di bit possibile nello scambio di informazioni tra BS e UT. L’approccio considerato in questa trattazione utilizza il feedback del CSI a tasso variabile. In questo caso, la BS non effettua una segnalazione in feedforward, mentre il segnale di feedback che viene trasmesso dallo UT utilizza un numero variabile di bit ed è ottenuto tramite uno schema di codifica entropica Slepian-Wolf basato sul lavoro di Al Jabri e Al-Issa.[4]

Come misura di distorsione, utilizziamo l’*errore quadratico medio normalizzato* (*NMSE*, dall’inglese “normalized mean squared error”) dell’errore di quantizzazione, ovvero,

$$\text{NMSE} = \mathbb{E} \left[\|\mathbf{h}^{(D)} - q(\mathbf{h}^{(D)})\|^2 \right], \quad (2.5)$$

dove la normalizzazione fa riferimento al fatto che $\mathbf{h}^{(D)}$ è stato normalizzato a norma unitaria. Per cui, la (2.5) può anche essere interpretata come *er-*

²Si noti che in un contesto MIMO massivo, l’effetto di indurimento del canale può anch’esso essere sfruttato per recuperare l’informazione riguardo la norma del canale.

rore quadratico medio (MSE) per componente vettoriale. Si noti che questa definizione differisce da altre comunemente definite come MSE normalizzato.

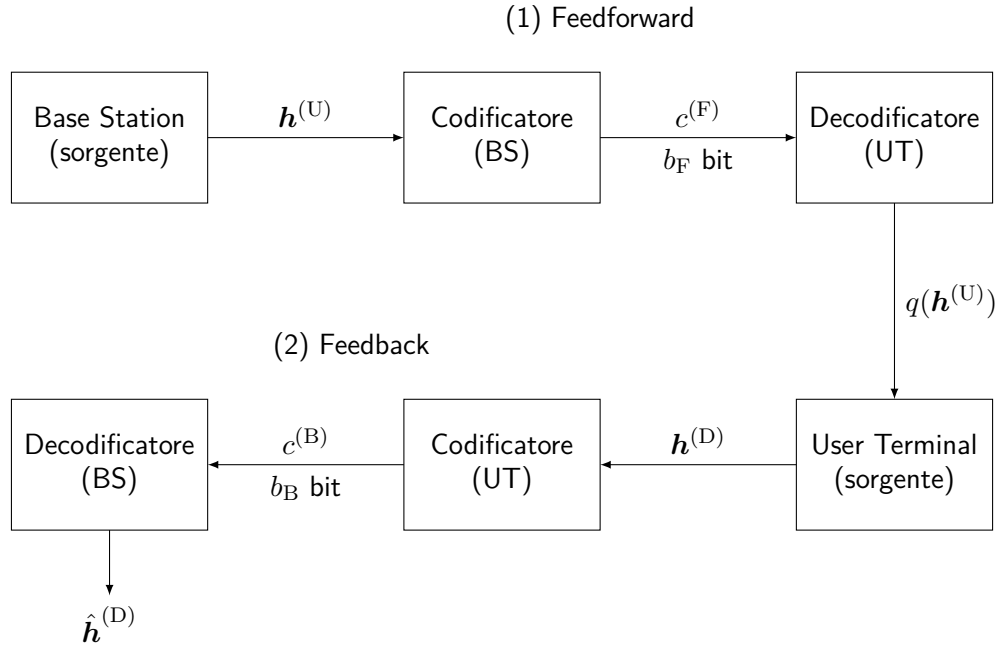


Figura 2.2: Schema del sistema Base Station-User Terminal con fasi di codifica/decodifica dei canali di Uplink e Downlink. Per la descrizione delle variabili di feedforward $c^{(F)}$ e feedback $c^{(B)}$ si veda l'Appendice A.

Capitolo 3

Codifica senza distorsione

Consideriamo la seguente procedura:

1. La BS stima il canale di uplink, lo codifica con un codificatore adeguato e invia la versione codificata allo UT.
2. Lo UT stima il canale di downlink e, utilizzando anche il messaggio ricevuto al punto 1, codifica il canale e lo trasmette alla BS.
3. La BS utilizza il canale di UL stimato al punto 1, la sua versione codificata del punto 1 e il messaggio ricevuto al punto 2 per stimare il canale.

Le codifiche effettuate ai punti 1 e 2 sono con parole di codice di lunghezza variabile, pertanto il tasso di comunicazione nei punti 1 e 2 è variabile. Sia b_F il numero medio di bit usati per la codifica al punto 1 e b_B il numero medio di bit usati per la codifica al punto 2.

Detto quindi b_F il numero di bit trasmessi in feedforward, ovvero dalla BS allo UT, e detto b_B il numero di bit trasmessi come feedback, dallo UT alla BS, definiamo

$$B = b_F + b_B$$

il numero medio totale di bit scambiati tra BS e UT.

Nella procedura a tasso variabile, illustrata in seguito, imponiamo $b_F = 0$, ovvero nessun bit viene inviato dalla BS allo UT in feedforward. In parti-

colare, permettiamo al numero di bit di feedback di variare, pertanto la segnalazione di feedback ha un tasso variabile.

Anzitutto, modelliamo lo scenario considerato come una codifica di sorgente di due sorgenti correlate (i canali di UL e DL, in questo caso). Quindi, dimostreremo che la presenza di una segnalazione di feedforward da parte della BS non contribuisce a ridurre il tasso medio della segnalazione di feedback, risultando quindi superflua al fine di ridurre l'overhead complessivo. Infine, proponiamo una procedura con approccio feedback-only a tasso variabile, basata sull'entropia condizionale del canale di DL condizionata al canale di UL.

3.1 Codifica di sorgenti correlate

Dal teorema di Shannon sulla codifica di sorgente [5] è noto che per codificare una sorgente X , un tasso $R > \mathbb{H}(X)$ è sufficiente. Consideriamo ora due sorgenti correlate $(X, Y) \sim p(x, y)$. In questo caso, un tasso pari a $\mathbb{H}(X, Y)$ è sufficiente per codificarle congiuntamente. Supponiamo che al ricevitore si desideri ricostruire X e Y separatamente. Si vede facilmente che un tasso $R = R_X + R_Y > \mathbb{H}(X) + \mathbb{H}(Y)$ è sufficiente. Tuttavia, Slepian e Wolf [2] hanno dimostrato che un tasso totale pari a $R = \mathbb{H}(X, Y)$ è sufficiente anche per codificare separatamente le due sorgenti correlate.

Riportiamo nel seguito il teorema di Slepian-Wolf [6]. In Figura 3.1 è illustrata la situazione considerata.

Teorema 1 (Slepian-Wolf [6]). *Sia $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ una sequenza di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite, tali che la generica coppia $(X, Y) \sim p(x, y)$, con X e Y congiunte.*

Per il problema della codifica di sorgenti distribuite per la sorgente (X, Y) , la regione di tasso raggiungibile è data da

$$R_X \geq \mathbb{H}(X | Y), \quad (3.1)$$

$$R_Y \geq \mathbb{H}(Y | X), \quad (3.2)$$

$$R_X + R_Y \geq \mathbb{H}(X, Y). \quad (3.3)$$

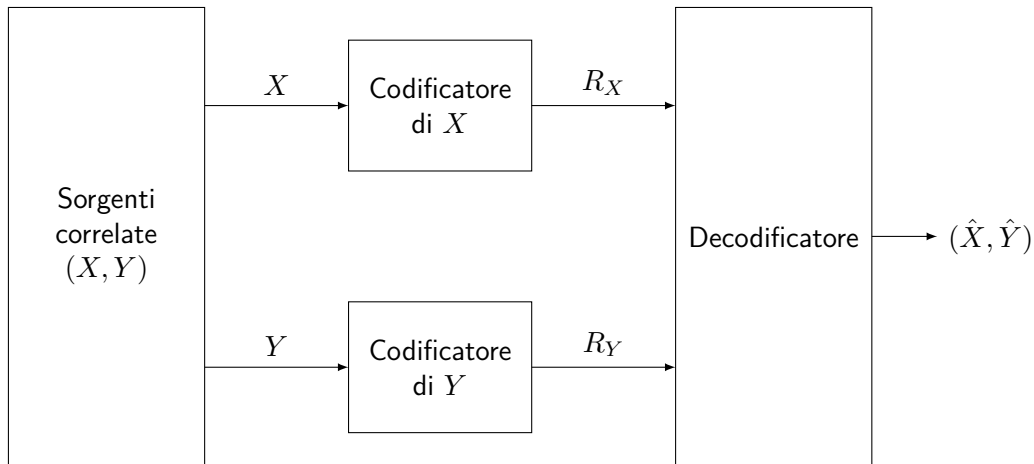


Figura 3.1: Configurazione per la codifica di sorgente Slepian-Wolf.

La Figura 3.2 mostra la regione descritta dal Teorema 1.

3.2 Approccio feedback-only

Mostriamo adesso l'ottimalità dell'approccio feedback-only per la segnalazione del CSI quando un tasso di segnalazione variabile viene utilizzato. Per semplicità di derivazione, assumiamo che entrambi i canali $\mathbf{h}^{(U)}$ e $\mathbf{h}^{(D)}$ possano essere rappresentati da alfabeti di dimensione finita molto grande. In particolare, per $\mathbf{h}^{(D)}$, consideriamo una quantizzazione tale da garantire l'MSE desiderato sul canale di DL alla BS. Quindi, assumiamo che la BS intenda ricostruire perfettamente il canale di DL senza distorsione. Inoltre, imponiamo un vincolo solamente sul numero medio totale di bit della segnalazione B , senza ulteriormente richiedere un bilanciamento tra i tassi di segnalazione in UL e DL.

Teorema 2. *Per una procedura di segnalazione che utilizza un feedback a tasso variabile con media b_B e un feedforward a tasso variabile con media b_F , il tasso minimo totale della segnalazione $B = b_B + b_F$ è ottenuto con un approccio feedback-only, ovvero per $b_F = 0$.*

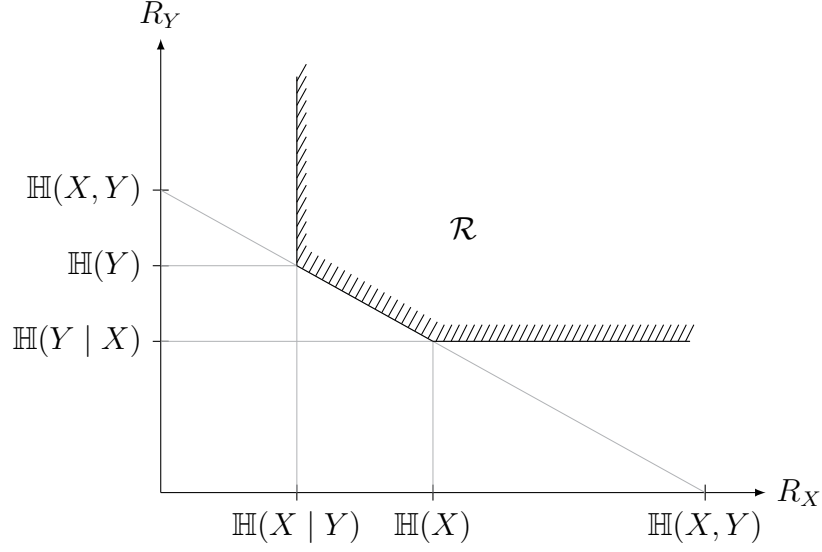


Figura 3.2: Regione \mathcal{R} di tasso raggiungibile con la codifica di sorgente Slepian-Wolf.

Dimostrazione. Possiamo vedere la procedura di feedback come una codifica Slepian-Wolf (vedi Sezione 3.1) nella quale le due sorgenti correlate (i canali di UL e DL) vengono codificate separatamente e poi inviate a una destinazione (la BS) che deve ricostruire entrambe. Si noti che nel nostro scenario il canale di UL è già noto alla BS, di conseguenza questa parte della codifica risulta banale. Ora, in presenza di feedforward, lo UT conosce sia la variabile di feedforward $c^{(F)}$ che rappresenta la versione quantizzata di $\mathbf{h}^{(U)}$ (si veda l'Appendice A per la definizione formale di $c^{(F)}$) che il canale di DL $\mathbf{h}^{(D)}$. Pertanto, denotando con R_L il tasso medio per la rappresentazione locale del canale di UL alla BS, il teorema di Slepian-Wolf fornisce

$$b_B \geq \mathbb{H}(\mathbf{h}^{(D)}, c^{(F)} \mid \mathbf{h}^{(U)}), \quad (3.4)$$

$$R_L \geq \mathbb{H}(\mathbf{h}^{(U)} \mid \mathbf{h}^{(D)}, c^{(F)}), \quad (3.5)$$

$$b_B + R_L \geq \mathbb{H}(\mathbf{h}^{(D)}, \mathbf{h}^{(U)}, c^{(F)}). \quad (3.6)$$

Si noti che, dal momento che non ci sono limitazioni per la rappresentazione interna del canale di UL alla BS, la (3.5) e la (3.6) sono trascurabili, o in altre parole, non è limitante porre $R_L = \infty$; quindi, la sola condizione rilevante è

$$b_B \geq \mathbb{H}(\mathbf{h}^{(D)}, c^{(F)} \mid \mathbf{h}^{(U)}). \quad (3.7)$$

Tuttavia, poiché $c^{(F)}$ è funzione deterministica di $\mathbf{h}^{(U)}$, la (3.7) risulta equivalente a

$$b_B \geq \mathbb{H}(\mathbf{h}^{(D)} \mid \mathbf{h}^{(U)}). \quad (3.8)$$

Quindi, abbiamo dimostrato che la segnalazione in feedforward non è utile al fine di ridurre i bit di feedback. \square

Si noti come, considerando una codifica di sorgenti correlate distribuite Slepian-Wolf, il risultato ottenuto corrisponde al caso in cui una delle due sorgenti, anziché essere codificata e inviata al decodificatore, assume il ruolo di informazione laterale. Infatti, una stima del canale di UL $\mathbf{h}^{(U)}$ è già presente alla BS, e l'unica sorgente che dev'essere codificata (dallo UT) e inviata al decodificatore (la BS) è il canale di DL $\mathbf{h}^{(D)}$.

Inoltre, vogliamo sottolineare il fatto che questo risultato è valido in assenza di condizioni che sbilanciano i tassi di segnalazione in UL e DL, ovvero quando non ci sono ulteriori limitazioni su b_B e b_F . Nella pratica, gli svantaggi nel segnalare in UL e DL potrebbero essere differenti, e soluzioni alternative potrebbero divenire praticabili.

3.3 Procedura di codifica

Il Teorema 2 mostra che, quando una codifica a tasso variabile viene utilizzata, è possibile operare un approccio feedback-only. Proponiamo ora una procedura di codifica basata su quanto descritto da Al Jabri e Al-Issa.[4]

Modelliamo il canale di UL come una sorgente discreta di informazione, con alfabeto \mathcal{V} , che è, di fatto, il codebook utilizzato alla BS per la rappresentazione locale del canale di UL, con $|\mathcal{V}| = \gamma = 2^{b_U}$ parole di codice. Allo stesso modo, modelliamo il canale di DL come una sorgente discreta di informazione, con alfabeto $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$, cioè l'unico codebook di DL possibile (dato che per $b_F = 0$, $\alpha = 2^{b_F} = 1$), avente $|\mathcal{D}| = \beta = 2^{b_B}$ parole di codice. Per la realizzazione dei codebook si faccia riferimento all'Appendice A.

La distribuzione congiunta delle coppie $(\mathbf{v}_i, \mathbf{d}_j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{D}$ è descritta dalla matrice di densità di probabilità discreta congiunta \mathbf{P} , il cui (i, j) -esimo elemento è

$$p_{i,j} = p(\mathbf{v}_i, \mathbf{d}_j) = \mathbb{P}(q(\mathbf{h}^{(U)}) = \mathbf{v}_i, q(\mathbf{h}^{(D)}) = \mathbf{d}_j). \quad (3.9)$$

La sparsità della matrice \mathbf{P} aumenta con il crescere di B , di b_U , o della correlazione tra UL e DL.

Come descritto da Al Jabri e Al-Issa [4], è possibile minimizzare il tasso di codifica determinando una partizione di \mathcal{D} che abbia entropia minima, come illustrato nella procedura seguente.

1. Applicare la stessa dimensione di blocco ai due alfabeti, ovvero porre $b_B = b_U$.
2. Per ogni $j, j = 1, \dots, \beta$, costruire un sottoinsieme \mathcal{V}_i di \mathcal{V} tale che

$$\mathcal{V}_i = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathcal{V} \wedge \mathbf{d}_j \in \mathcal{D} \wedge p(\mathbf{v} \mid \mathbf{d}_j) > 0\}. \quad (3.10)$$

Si noti che, poiché $p(\mathbf{v} \mid \mathbf{d}_j) = \frac{p(\mathbf{v}, \mathbf{d}_j)}{p(\mathbf{d}_j)}$, la (3.10) è equivalente a

$$\mathcal{V}_i = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathcal{V} \wedge \mathbf{d}_j \in \mathcal{D} \wedge p(\mathbf{v}, \mathbf{d}_j) > 0\}, \quad (3.11)$$

dove $p(\mathbf{v}, \mathbf{d}_j)$ può essere valutata direttamente, nota la matrice di densità di probabilità discreta congiunta \mathbf{P} .

3. Costruire tutte le possibili partizioni \mathcal{P} di \mathcal{D} tali che

$$\forall \mathcal{D}_i \in \mathcal{P}, \forall \mathbf{d}_j, \mathbf{d}_k \in \mathcal{D}_i, j \neq k \implies \mathcal{V}_j \cap \mathcal{V}_k = \emptyset, \quad (3.12)$$

dove $\mathcal{V}_j, \mathcal{V}_k$ sono sottoinsiemi di \mathcal{V} come definiti al punto precedente.

4. Data una delle possibili partizioni \mathcal{P} del punto precedente, sia $\xi = |\mathcal{P}|$. Dato l' i -esimo insieme $\mathcal{D}_i \in \mathcal{P}$, sia $\tau = |\mathcal{D}_i|$, da cui $\mathcal{D}_i = \{\mathbf{d}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{d}_\tau^{(i)}\}$. Sia \mathbf{s}_i un simbolo che rappresenta l'insieme \mathcal{D}_i , con una probabilità associata $p(\mathbf{s}_i) = \sum_{j=1}^{\tau} p(\mathbf{d}_j^{(i)})$. Individuare la partizione di \mathcal{D} a entropia

minima tra quelle costruite al punto precedente, ovvero,

$$\mathcal{P}_{\min} = \min_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{\xi} p(\mathbf{s}_i) \log_2 \frac{1}{p(\mathbf{s}_i)}. \quad (3.13)$$

Dopo aver individuato la partizione di \mathcal{D} a entropia minima, la BS comunica allo UT di utilizzare tale partizione. Quindi, dopo aver stimato il canale di DL, lo UT determina il sottoinsieme \mathcal{D}_h a cui il vettore stimato appartiene fra quelli della partizione designata, e invia alla BS l'indice h di tale sottoinsieme, anziché quello di un singolo vettore del codebook. A seguito del ricevimento dell'indice h del sottoinsieme, la BS è in grado di discriminare l'esatto vettore di DL sfruttando l'informazione che già conosce sul canale di UL. Infatti, una volta noto il sottoinsieme di UL contenente il vettore del canale di DL, la BS può recuperare il canale di DL grazie alla proprietà di non sovrapposizione dei sottoinsiemi nella partizione.

3.3.1 Sparsificazione della matrice di densità di probabilità discreta congiunta

L'approccio proposto risulta tanto più efficace quanto più la matrice di densità di probabilità discreta congiunta è sparsa. Aumentare le dimensioni della matrice, ovvero aumentare b_B e b_U , incrementa la sparsità della matrice, ma avendo un vincolo su b_B (necessario a limitare l'overhead complessivo), e conseguentemente su b_U in base alla prima fase della procedura, è necessario ricorrere a una strategia differente.

La tecnica proposta consiste nell'indurre deliberatamente sparsità sulla matrice, ponendo a zero gli elementi della matrice le cui coppie di vettori di UL-DL presentano una bassa probabilità di verificarsi. A seguito di questo approccio, quei vettori che prima erano quantizzati da elementi ora posti a zero devono essere quantizzati utilizzando un'altra coppia di vettori, ovvero sia la seconda più vicina (secondo la metrica considerata). Questa procedura fornisce certamente una matrice sparsa, a scapito però di un NMSE maggio-

re, dal momento che non sempre è utilizzata la miglior coppia di vettori per la quantizzazione dei canali di UL e DL.

Capitolo 4

Codifica con distorsione

Consideriamo ora il problema di ricostruire il canale di DL $\mathbf{h}^{(D)}$ alla BS in presenza di una data distorsione d . Anche in questo caso ci concentriamo inizialmente sul caso senza feedforward ($b_F = 0$).

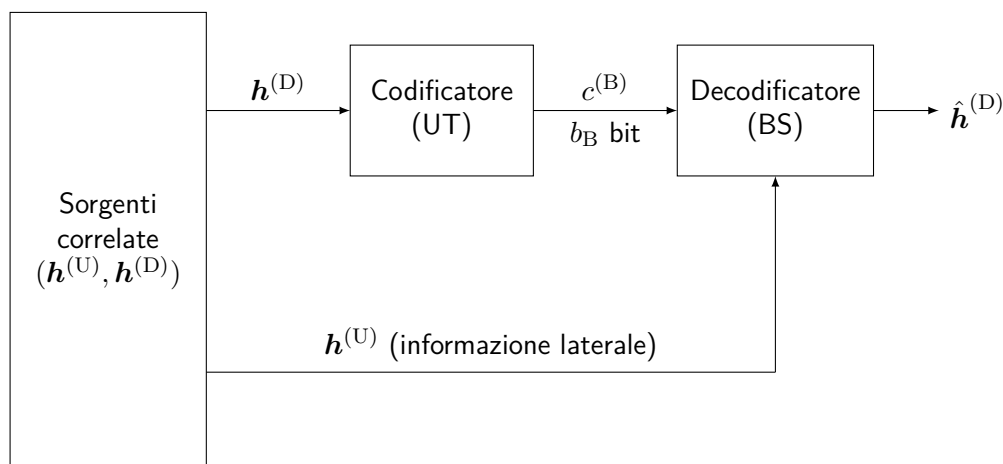


Figura 4.1: Configurazione del sistema per la codifica di sorgente in presenza di informazione laterale.

Anzitutto, poiché una stima del canale di UL è già presente alla base station, possiamo vedere lo scenario considerato come una codifica di sorgenti correlate distribuite (i canali di UL e DL) in presenza di informazione laterale (il canale di uplink $\mathbf{h}^{(U)}$ già noto alla BS). Desideriamo quindi utilizzare l'informazione laterale, nota solo al decodificatore (la BS nel nostro caso),

per ridurre il tasso di trasmissione b_B necessario per effettuare una trasmissione del canale di downlink $\mathbf{h}^{(D)}$ che risulti affidabile anche in presenza della suddetta distorsione d . La situazione appena descritta è rappresentata in Figura 4.1.

Un'estensione del teorema di Slepian-Wolf (Teorema 1) che consideri la presenza di distorsione è possibile grazie al lavoro di Wyner e Ziv. Di seguito, riportiamo la descrizione formale del problema considerato, e successivamente il teorema di Wyner-Ziv.[3]

Detto \mathcal{U} un insieme finito arbitrario, sia \mathcal{U}^n l'insieme dei vettori di n elementi con valori in \mathcal{U} . Denotiamo con \mathbf{X}^n un vettore aleatorio di cardinalità n . Per $k = 1, 2, \dots$, definiamo l'insieme

$$I_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}. \quad (4.1)$$

Siano $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \hat{\mathcal{X}}$ insiemi finiti e sia $\{(X_k, Y_k)\}_1^\infty$ una sequenza di estrazioni indipendenti di una coppia di variabili aleatorie dipendenti X, Y con valori in \mathcal{X} e \mathcal{Y} , rispettivamente. La distribuzione di probabilità per la coppia X, Y è data da

$$Q(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y), \quad x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}. \quad (4.2)$$

Sia $D : \mathcal{X} \times \hat{\mathcal{X}} \rightarrow [0, \infty)$ una funzione di distorsione. Un codice (n, M, Δ) è definito da una coppia di funzioni F_E, F_D , un "codificatore" e un "decodificatore", rispettivamente, dove

$$F_E : \mathcal{X}^n \rightarrow I_M, \quad (4.3)$$

$$F_D : \mathcal{Y}^n \times I_M \rightarrow \hat{\mathcal{X}}^n, \quad (4.4)$$

e

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D(X_k, \hat{X}_k) \right] = \Delta, \quad (4.5)$$

dove $\hat{\mathbf{X}}^n = F_D(\mathbf{Y}^n, F_E(\mathbf{X}^n))$. Diciamo che una coppia (R, d) è ottenibile se, per $\varepsilon > 0$ a piacere, esiste (per n sufficientemente grande) un codice (n, M, Δ) con

$$M \leq 2^{n(R+\varepsilon)}, \quad \Delta \leq d + \varepsilon. \quad (4.6)$$

Definiamo con \mathcal{R} l'insieme delle coppie (R, d) ottenibili, e definiamo

$$R^*(d) = \min_{(R,d) \in \mathcal{R}} R. \quad (4.7)$$

Poiché, per la definizione data, \mathcal{R} è un insieme chiuso, il minimo indicato nella definizione di $R^*(d)$ esiste. Inoltre, dal momento che $R^*(d)$ è una funzione non crescente in d , abbiamo $R^*(0) \geq \lim_{d \rightarrow 0} R^*(d)$. Per di più, dalla (4.7), per tutti i valori di $d \geq 0$, la coppia $(R^*(d), d) \in \mathcal{R}$. Infine, dal momento che \mathcal{R} è chiuso, $(\lim_{d \rightarrow 0} R^*(d), 0) \in \mathcal{R}$, e abbiamo che $R^*(0) \leq \lim_{d \rightarrow 0} R^*(d)$. Concludiamo quindi che $R^*(d)$ è continua in $d = 0$.

Sia $p(x, y, z), x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}, z \in \mathcal{Z}$, dove \mathcal{Z} è un insieme finito arbitrario, una distribuzione di probabilità che definisce le variabili aleatorie X, Y, Z , tali che la distribuzione marginale per X, Y è

$$\sum_{z \in \mathcal{Z}} p(x, y, z) = Q(x, y) \quad (4.8)$$

e tale che

$$Y, Z \text{ sono condizionate indipendentemente data } X. \quad (4.9)$$

Ora, per $d > 0$, definiamo $\mathcal{M}(d)$ come l'insieme delle distribuzioni di probabilità $p(x, y, z)$ che soddisfa (4.8) e (4.9), e che ha la proprietà che esiste una funzione $f : \mathcal{Y} \times \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$ tale che

$$\mathbb{E} \left[D(X, \hat{X}) \right] \leq d, \quad \text{dove } \hat{X} = f(Y, Z). \quad (4.10)$$

Teorema 3 (Wyner-Ziv [3]). *Definiamo, per $d > 0$, la quantità*

$$\bar{R}(d) \triangleq \inf_{p \in \mathcal{M}(d)} [I(X; Z) - I(Y; Z)] = \inf_{p \in \mathcal{M}(d)} I(X; Z | Y). \quad (4.11)$$

Poiché $\mathcal{M}(d_1) \subseteq \mathcal{M}(d_2)$ per tutti i valori di $d_1 < d_2$, $\bar{R}(d)$ è non crescente, per $d \in (0, \infty)$. Quindi, possiamo definire

$$\bar{R}(0) = \lim_{d \rightarrow 0} \bar{R}(d). \quad (4.12)$$

Per $d \geq 0$, si ha

$$R^*(d) = \bar{R}(d). \quad (4.13)$$

Il teorema di Wyner-Ziv ci dice quindi che, in presenza di distorsione d , possiamo effettuare la trasmissione del canale di DL dallo UT alla BS con un tasso

$$b_B \geq \inf_{p \in \mathcal{M}(d)} I(\mathbf{h}^{(D)}; Z | \mathbf{h}^{(U)}), \quad (4.14)$$

dove la variabile aleatoria ausiliaria $Z \in \mathcal{Z}$, con \mathcal{Z} insieme finito, deve soddisfare i vincoli: i) $\mathbf{h}^{(U)}, Z$ sono indipendenti dato $\mathbf{h}^{(D)}$; ii) esiste una funzione $f: \mathcal{V} \times \mathcal{Z} \rightarrow \hat{\mathcal{D}}$, tale che $\mathbb{E}[D(\mathbf{h}^{(D)}, f(\mathbf{h}^{(U)}, Z))] \leq d$, dove $\hat{\mathcal{D}}$ è l'alfabeto in cui prende valori la versione ricevuta alla BS del canale di DL.

Nella pratica, risultati simili al limite teorico (4.14) si possono ottenere, ad esempio, utilizzando una codifica tramite sindrome che sfrutti la presenza dell'informazione laterale, ovvero la stima di $\mathbf{h}^{(U)}$ nota al decodificatore, la BS. A questo proposito, si veda il lavoro di S.S. Pradhan e K. Ramachandran[7].

4.1 Codifica con feedforward

Nel caso in cui si permette una distorsione nella ricostruzione del canale alla BS, la trasmissione di un segnale di feedforward può ridurre il tasso di feedback. Si noti che questo non avveniva nel caso senza distorsione, come dimostrato nella Sezione 3.2.

Supponiamo in particolare che la BS trasmetta allo UT una descrizione di $\mathbf{h}^{(U)}$ senza distorsione, quindi che in fase di codifica lo UT conosca perfettamente sia $\mathbf{h}^{(D)}$ che $\mathbf{h}^{(U)}$. In questo caso abbiamo un problema di teoria della distorsione condizionata (*Conditional Rate-Distortion Theory*). Usando le definizioni introdotte nella sezione precedente, in questo caso si ha [8] che

$$b_B \geq \inf_{p(\hat{\mathbf{h}}^{(D)} | \mathbf{h}^{(D)}, \mathbf{h}^{(U)})} I(\mathbf{h}^{(D)}; \hat{\mathbf{h}}^{(D)} | \mathbf{h}^{(U)}), \quad (4.15)$$

dove $\hat{\mathbf{h}}^{(D)}$ è la versione distorta di $\mathbf{h}^{(D)}$ ottenuta al decodificatore, ovvero alla base station.

Usando ipotesi più stringenti, supponiamo ora che la BS trasmetta allo UT una descrizione del canale di UL quantizzata $q(\mathbf{h}^{(U)})$. Questa condizione corrisponde al caso reale, infatti la quantizzazione è necessaria essendo $\mathbf{q}^{(U)}$ a valori continui. In questo caso la rappresentazione del canale di UL allo UT è imperfetta, e abbiamo allora un problema di distorsione con informazione laterale mista (*Rate-Distortion With Mixed Types of Side Information*) e si ha [9] che

$$b_B \geq \inf_{W \in \mathcal{M}_{\mathbf{h}^{(D)}|\mathbf{h}^{(U)}\{Z\}}(p,D)} I(\mathbf{h}^{(D)}; W | \mathbf{h}^{(U)}, Z), \quad (4.16)$$

dove $\mathcal{M}_{\mathbf{h}^{(D)}|\mathbf{h}^{(U)}\{Z\}}(p, D)$ è l'insieme di tutte le variabili aleatorie W descritte da un canale di test con la proprietà che $W \rightarrow (\mathbf{h}^{(D)}, \mathbf{h}^{(U)}) \rightarrow Z$ e per le quali esiste una funzione $f: \mathcal{W} \times \mathcal{U} \times \mathcal{Z} \rightarrow \hat{\mathcal{D}}$ tale che

$$\mathbb{E}[D(\mathbf{h}^{(D)}, \mathbf{h}^{\hat{(D)})}] \leq d, \quad \text{dove } \mathbf{h}^{\hat{(D)}} = f(W, \mathbf{h}^{(U)}, Z). \quad (4.17)$$

4.2 Da Mixed Side Information a Wyner-Ziv

Proposizione 1. *Sia X la sorgente codificata da un sistema Mixed Side Information [9]. Sia Y l'informazione laterale nota sia al codificatore che al decodificatore di questo sistema e Z l'informazione laterale nota al solo decodificatore. Tale sistema può essere ridotto a un sistema Wyner-Ziv [3] dove la sorgente è $X' = X, Y$ e l'informazione laterale (nota al solo decodificatore) è $Z' = Y, Z$.*

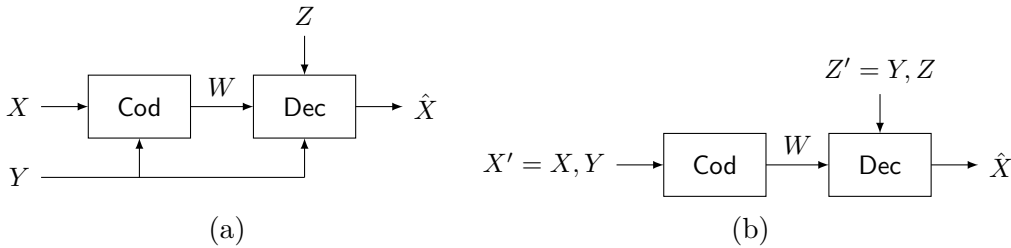


Figura 4.2: (a) Il sistema Mixed Side Information. (b) Il sistema Wyner-Ziv.

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che il tasso di trasmissione in funzione della distorsione per un sistema Wyner-Ziv con le caratteristiche descritte

dalla proposizione (rappresentato in Figura 4.2(b)) è equivalente al tasso di trasmissione in funzione della distorsione di un sistema *Mixed Side Information (MSI)*, mostrato in Figura 4.2(a). Inoltre, poiché in entrambi i casi il tasso di trasmissione è l'estremo inferiore di una certa informazione mutua, è sufficiente mostrare che le due informazioni mutue si equivalgono.

Sia W la variabile aleatoria ausiliaria per entrambi i sistemi. Per un sistema MSI si ha

$$\begin{aligned} I(X ; W | Y, Z) &= I(X ; W, Y, Z) - I(X ; Y, Z) \\ &= \mathbb{H}(X) - \mathbb{H}(X | W, Y, Z) - \mathbb{H}(X) + \mathbb{H}(X | Y, Z) \quad (4.18) \\ &= \mathbb{H}(X | Y, Z) - \mathbb{H}(X | W, Y, Z), \end{aligned}$$

e per un sistema Wyner-Ziv si ha

$$\begin{aligned} I(X' ; W | Z') &= I(X, Y ; W | Y, Z) \\ &= I(X, Y ; W, Y, Z) - I(X, Y ; Y, Z) \\ &= \mathbb{H}(X, Y) - \mathbb{H}(X, Y | W, Y, Z) - \mathbb{H}(X, Y) + \mathbb{H}(X, Y | Y, Z) \\ &= \mathbb{H}(X, Y | Y, Z) - \mathbb{H}(X, Y | W, Y, Z) \\ &= \mathbb{H}(X | Y, Z) - \mathbb{H}(X | W, Y, Z). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Si ha quindi che $I(X ; W | Y, Z) = I(X' ; W | Z')$ e la dimostrazione è conclusa. \square

4.3 Procedura di codifica con distorsione

Il risultato della Proposizione 1 ci permette di considerare il sistema in esame nella situazione in cui la trasmissione di feedforward è già avvenuta. A seguito del feedforward infatti, sia la BS che lo UT hanno a disposizione una descrizione del canale di UL quantizzata $q(\mathbf{h}^{(U)})$.

A questo punto è possibile sviluppare una procedura di codifica di sorgente per la trasmissione in feedback, la quale deve consentire alla BS di ricostruire il canale di DL minimizzando il tasso della trasmissione stessa.

Una panoramica di una possibile procedura è esposta di seguito, corredata da una versione schematizzata in Figura 4.3.

Allo UT, il canale di DL viene anzitutto quantizzato (per la costruzione del codebook si veda l'Appendice A). In seguito, il codificatore utilizza un codice di correzione d'errore per codificare l'informazione sul canale di DL quantizzato. Quindi, un sottoinsieme delle parole di codice ottenute viene trasmesso alla BS, considerando l'informazione laterale $q(\mathbf{h}^{(U)})$ in comune, così da evitare l'invio di informazioni già note al decodificatore. Alla ricezione, la BS impiega un decodificatore a decisione morbida (*soft-decision decoder*) per determinare, con l'aiuto dell'informazione laterale $\mathbf{h}^{(U)}$, la stima più probabile del canale di UL $\hat{\mathbf{h}}^{(D)}$.

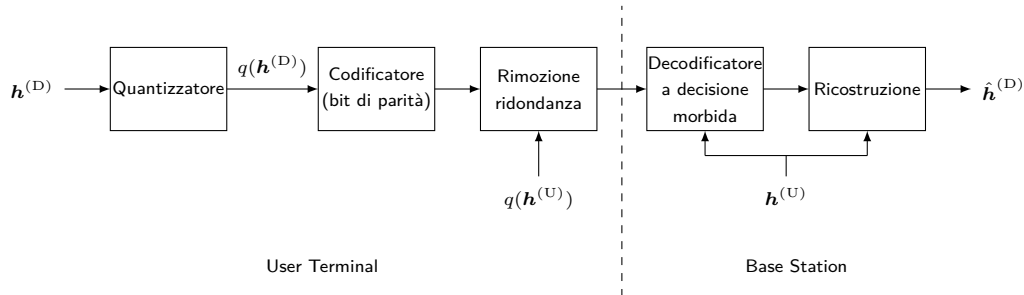


Figura 4.3: Schema della codifica di sorgente con distorsione per la trasmissione del canale di DL in feedback.

Il decodificatore a decisione morbida infatti può utilizzare un'informazione a priori sulla distribuzione delle parole di codice. Questa distribuzione è ottenuta dalla conoscenza del canale di UL e dalla correlazione di quest'ultimo con il canale di DL.

Capitolo 5

Conclusioni

In questa tesi ho riportato e analizzato quanto noto in letteratura sul problema della stima del canale di DL alla BS per sistemi cellulari FDD. Questo problema viene affrontato sfruttando la parziale dipendenza tra i canali di UL e DL data dal mezzo fisico di trasmissione. Sono stati considerati principalmente tre casi: il primo in assenza di distorsione, basato su una segnalazione feedback-only a tasso variabile, e gli ultimi due in presenza di distorsione, di cui uno senza e l'altro con segnalazione di feedforward.

Distorsione	Bit in feedforward	Bit in feedback
Assente	$b_F = 0$	$b_B = B$
Presente	$b_F = 0$	$b_B > 0$ (4.14)
Presente (solo in feedback)	$b_F > 0$	$b_B > 0$ (4.15)
Presente	$b_F > 0$	$b_B > 0$ (4.16)

Tabella 5.1: Configurazioni di bit ripartiti tra la segnalazione di feedforward e feedback nelle differenti situazioni studiate.

La precedente tabella riassume i risultati ottenuti nelle diverse configurazioni considerate. In questa tesi un'attenzione particolare è stata posta sul primo caso, quello in assenza di distorsione, di cui in Sezione 3.3 viene riportata una procedura di codifica che utilizza l'approccio feedback-only, la cui efficacia è stata dimostrata in [1].

Come osservato in Sezione 4.1, un ulteriore risultato presentato in questa tesi è che la presenza della segnalazione di feedforward, non utile a ridurre il NMSE nel caso senza distorsione, sia invece di aiuto al fine di ricostruire con maggior affidabilità il canale di DL alla BS nel caso in cui vi sia distorsione. In particolare, in una situazione realistica, poiché il canale di UL inviato in feedforward allo UT dev'essere quantizzato, la condizione al numero di bit per il tasso di feedback che si applica è la (4.16).

Appendice A

Progettazione dei codebook

Un codebook di β elementi in $\mathbb{C}^{1 \times N/2}$ è completamente definito da

- una partizione $\{\mathcal{R}_j, j = 1, \dots, \beta\}$ di $\mathbb{C}^{1 \times N/2}$, tale che $\bigcup_{j=1}^{\beta} \mathcal{R}_j = \mathbb{C}^{1 \times N/2}$, e che $\mathcal{R}_j \cap \mathcal{R}_\ell = \emptyset$ per $j \neq \ell$;
- β vettori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\beta$, dove il vettore i -esimo \mathbf{w}_i è associato all' i -esimo insieme \mathcal{R}_i della partizione descritta al punto precedente.

Sia $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\alpha\}$ il codebook di α parole di codice utilizzato alla BS per la quantizzazione della stima del canale di UL. Sia

$$c^{(\text{F})} = \arg \min_{i \in \{1, \dots, \alpha\}} \|\mathbf{u}_i - \mathbf{h}^{(\text{U})}\|^2 \quad (\text{A.1})$$

la *variabile* (o indice) *di feedforward*.

Sia $\{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_\alpha\}$ un insieme di α codebook noto sia alla BS che allo UT, dove l' i -esimo codebook $\mathcal{D}_i = \{\mathbf{d}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{d}_\beta^{(i)}\}$ contiene β parole di codice. Sia

$$c^{(\text{B})} = \arg \min_{j \in \{1, \dots, \beta\}} \|\mathbf{d}_j^{(c^{(\text{F})})} - \mathbf{h}^{(\text{D})}\|^2 \quad (\text{A.2})$$

la *variabile* (o indice) *di feedback*.

Infine, sia $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\gamma\}$ il codebook di $\gamma \geq \alpha$ parole di codice utilizzato alla BS per la quantizzazione locale del canale di UL.

La procedura di quantizzazione associa ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{1 \times N/2}$ a una regione dello spazio $\mathbb{C}^{1 \times N/2}$ stesso, ovvero $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_i$, e pertanto il vettore quantizzato è $q(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_i$. L'operazione di progettazione dei codebook, cioè la scelta delle regioni di quantizzazione $\{\mathcal{R}_i\}$ e dei relativi vettori \mathbf{w}_i , ha l'obiettivo di minimizzare una data metrica di quantizzazione. Nel nostro caso, i codebook di UL, \mathcal{U} e \mathcal{V} , sono progettati con lo scopo di minimizzare il NMSE, vale a dire,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{h}^{(U)}} \left[\|\mathbf{h}^{(U)} - q(\mathbf{h}^{(U)})\|^2 \right], \quad (\text{A.3})$$

(o l'equivalente per \mathcal{V}) dove il valore atteso è valutato sulla distribuzione di $\mathbf{h}^{(U)}$. Per il codebook di DL, ovvero $\mathcal{D}_{c(F)}$, invece, la metrica di quantizzazione da minimizzare è

$$\mathbb{E}_{\mathbf{h}^{(D)} | q(\mathbf{h}^{(U)})} \left[\|\mathbf{h}^{(D)} - q(\mathbf{h}^{(D)})\|^2 \right], \quad (\text{A.4})$$

dove il valore atteso è valutato sulla distribuzione di $\mathbf{h}^{(D)}$, dato che il canale di UL è stato quantizzato come $q(\mathbf{h}^{(U)}) = \mathbf{u}_{c(F)}$.

Per la progettazione dei codebook tramite minimizzazione della (A.3) e (A.4), poiché nella pratica le densità di probabilità di $\mathbf{h}^{(U)}$ e $\mathbf{h}^{(D)} | q(\mathbf{h}^{(U)})$ non sono note a priori, è necessario fare ricorso a una procedura online, utilizzando vettori campionati aventi le statistiche desiderate. Una possibile opzione è, ad esempio, l'algoritmo *Linde-Buzo-Gray* (LBG).[10]

Appendice B

Procedura di codifica: esempio numerico

In questa appendice, riportiamo un esempio numerico della procedura di codifica proposta nella Sezione 3.3. Nella prima parte, effettuiamo anche l'operazione di sparsificazione descritta nella Sottosezione 3.3.1. Si noti che i valori numerici utilizzati hanno il solo scopo di illustrare la procedura proposta e sono pertanto artificiosi.

Sia \mathcal{V} , tale che $|\mathcal{V}| = \gamma = 2^{b_V}$, l'alfabeto della sorgente associata al canale di UL, equivalente al codebook utilizzato per la rappresentazione locale della versione quantizzata del canale di UL stesso alla BS. Similmente, sia \mathcal{D} , tale che $|\mathcal{D}| = \beta = 2^{b_B}$, l'alfabeto della sorgente associata al canale di DL, equivalente al codebook utilizzato per la rappresentazione della versione quantizzata del canale di DL.

Sia $b_B = b_U = 2$, da cui $\beta = \gamma = 4$. Sia data la seguente matrice $\mathbf{P} \in [0, 1]^{4 \times 4}$ di densità di probabilità discreta congiunta.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{36} & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} \\ \frac{1}{72} & \frac{1}{36} & \frac{7}{16} & \frac{1}{48} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Pertanto, le densità di probabilità marginali delle sorgenti associate ai canali

di UL e DL sono quelle riassunte nella seguente tabella.

i	1	2	3	4
$p(\mathbf{v}_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{2}$
$p(\mathbf{d}_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{2}{9}$

Tabella B.1: Densità di probabilità marginali di \mathcal{V} e \mathcal{D} .

Applichiamo la procedura di sparsificazione (vedi Sottosezione 3.3.1) alla matrice \mathbf{P} in (B.1), scegliendo arbitrariamente di mantenere solo 3 elementi non nulli, ottenendo quindi la seguente matrice $\check{\mathbf{P}}$ sparsa.

$$\check{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{16} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Facendo riferimento alla matrice $\check{\mathbf{P}}$ appena ottenuta, costruiamo i sottoinsiemi di \mathcal{V} descritti nella fase 2 della procedura a pagina 12. Si noti che, poiché la matrice è molto sparsa, non è inusuale ottenere sottoinsiemi vuoti, come in questo caso con \mathcal{V}_2 .

j	Simbolo in \mathcal{D}	Sottoinsieme di \mathcal{V}
1	\mathbf{d}_1	$\mathcal{V}_1 = \{\mathbf{v}_2\}$
2	\mathbf{d}_2	$\mathcal{V}_2 = \emptyset$
3	\mathbf{d}_3	$\mathcal{V}_3 = \{\mathbf{v}_4\}$
4	\mathbf{d}_4	$\mathcal{V}_4 = \{\mathbf{v}_2\}$

Tabella B.2: Simboli in \mathcal{D} e i corrispondenti sottoinsiemi di \mathcal{V} .

Determiniamo ora le possibili partizioni di \mathcal{D} , utilizzando i $\beta = 4$ sottoinsiemi di \mathcal{V} riportati in Tabella B.2, come indicato nella fase 3 della procedura. Ricordiamo che, detto B_n il numero di Bell di indice n , la condizione (3.12)

porta il numero di partizioni possibili, così come considerate nella procedura, a essere $\leq B_\beta$ (tipicamente vale il minore stretto). Calcoliamo inoltre, per ognuna delle partizioni trovate, la relativa entropia, associando ad ogni sottoinsieme un simbolo con probabilità pari alla somma delle probabilità dei suoi elementi, così come descritto nella fase 4. Riportiamo i risultati ottenuti in Tabella B.3.

n.	Partizione di \mathcal{D}	Entropia [bit]
1	$\{\{\mathbf{d}_1\}, \{\mathbf{d}_2\}, \{\mathbf{d}_3\}, \{\mathbf{d}_4\}\}$	1.69838
2	$\{\{\mathbf{d}_1\}, \{\mathbf{d}_2\}, \{\mathbf{d}_3, \mathbf{d}_4\}\}$	1.04085
3	$\{\{\mathbf{d}_1\}, \{\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_4\}, \{\mathbf{d}_3\}\}$	1.44008
4	$\{\{\mathbf{d}_1\}, \{\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}, \{\mathbf{d}_4\}\}$	1.34722
5	$\{\{\mathbf{d}_1\}, \{\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_4\}\}$	0.65002
6	$\{\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_3\}, \{\mathbf{d}_2\}, \{\mathbf{d}_4\}\}$	1.14627
7	$\{\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_3\}, \{\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_4\}\}$	0.88797
8	$\{\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}, \{\mathbf{d}_3\}, \{\mathbf{d}_4\}\}$	1.46881
9	$\{\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}, \{\mathbf{d}_3, \mathbf{d}_4\}\}$	0.81127
10	$\{\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}, \{\mathbf{d}_4\}\}$	0.76420

Tabella B.3: Partizioni di \mathcal{D} valide, e relativi valori di entropia in bit.

Osservando i risultati ottenuti, il minimo valore di entropia è dato dalla quinta partizione, e di conseguenza la partizione di \mathcal{D} che lo UT dovrà utilizzare è $\mathcal{P}_{\min} = \{\{\mathbf{d}_1\}, \{\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_4\}\}$, con una relativa entropia di 0.65002 bit.

Si noti come l'utilizzo della partizione di \mathcal{D} selezionata fornisca una riduzione del tasso di codifica del 50%, da 2 bit a 1 bit: è infatti sufficiente per lo UT inviare alla BS l'indice $h \in \{1, 2\}$ di uno dei due sottoinsiemi della partizione ($\mathcal{D}_1 = \{\mathbf{d}_1\}$ e $\mathcal{D}_2 = \{\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_4\}$), anziché l'indice di uno dei quattro simboli in \mathcal{D} .

Bibliografia

- [1] X. Zhang, M. Centenaro, S. Tomasin, N. Benvenuto, X. Luo, and S. Yang, “A study on csi feedback schemes exploiting feedforward information in fdd cellular systems,” *Transactions on Emerging Telecommunications Technologies*, vol. 32, no. 1, p. e3628, 2021, e3628 ett.3628. [Online]. Available: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/ett.3628>
- [2] D. Slepian and J. Wolf, “Noiseless coding of correlated information sources,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 19, no. 4, pp. 471–480, 1973.
- [3] A. Wyner and J. Ziv, “The rate-distortion function for source coding with side information at the decoder,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 22, no. 1, pp. 1–10, 1976.
- [4] A. K. Al Jabri and S. Al-Issa, “Zero-error codes for correlated information sources,” in *Cryptography and Coding*, M. Darnell, Ed. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1997, pp. 17–22.
- [5] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication,” *Bell System Technical Journal*, vol. 27, no. 3, pp. 379–423, 1948. [Online]. Available: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x>
- [6] *Network Information Theory*. John Wiley & Sons, Ltd, 2005, ch. 15, pp. 509–611. [Online]. Available: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/047174882X.ch15>

- [7] S. Pradhan and K. Ramchandran, “Distributed source coding using syndromes (discus): design and construction,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, no. 3, pp. 626–643, 2003.
- [8] R. M. Gray, “Conditional rate-distortion theory,” 1972.
- [9] M. Fleming and M. Effros, “On rate-distortion with mixed types of side information,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1698–1705, 2006.
- [10] Y. Linde, A. Buzo, and R. Gray, “An algorithm for vector quantizer design,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 28, no. 1, pp. 84–95, 1980.