



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

Meccanica quantistica supersimmetrica e teoria di Morse

Relatore

Prof. Stefano Giusto

Laureando

Alessio Miscioscia

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione	1
Meccanica quantistica supersimmetrica	3
Formulazione Lagrangiana	4
Sigma models	8
Formulazione con path-integral	10
Istantoni	11
Disuguaglianza debole di Morse	13
Derivazione della disuguaglianza debole di Morse	14
Disuguaglianza debole di Morse su \mathbb{T}^2	16
Complesso di Witten	19
Effetto tunnel ed istantoni	19
Complesso di Witten	21
Complesso di Witten per \mathbb{T}^2	23
Appendice: Indice dell'operatore \mathcal{D}_-	25

Introduzione

Molti concetti della matematica moderna hanno applicazioni rilevanti in fisica. D'altra parte l'articolo del 1982 di E. Witten [7] dimostra che anche la fisica suggerisce spunti interessanti alla matematica. In questo lavoro di tesi si studia la teoria di Morse con gli strumenti dati dalla meccanica quantistica supersimmetrica.

La supersimmetria fu introdotta, nel 1971, da Yu.A. Golfand e E.P. Likhtman in un articolo dal titolo "Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance" [1]. In quel periodo si stava cercando un gruppo che coniugasse simmetrie interne e spazio-temporali: la supersimmetria si propone come una soluzione al problema, mostrando un'allettante prospettiva di unificazione tra particelle elementari e forze che agiscono su di esse, rivelando una simmetria fra fermioni e bosoni. Pur nascendo in teorie di campo quantistiche la proposta supersimmetrica ha conseguenze importanti anche nella teoria quantistica non relativistica.

La teoria di Morse studia la topologia di una varietà attraverso alcune funzioni, dette funzioni di Morse, con Hessiano calcolato nei punti critici non singolare. I risultati più rilevanti sono sintetizzati nelle disuguaglianze di Morse che legano la coomologia di De Rham alle funzioni di Morse. In particolare la disuguaglianza debole di Morse afferma che la dimensione dell' i -esimo gruppo di coomologia di De Rham è sempre minore, o al più uguale, al numero di punti critici con i autovalori negativi.

E. Witten mostrò per primo che la teoria di Morse può essere presentata come un problema fisico. Attraverso lo studio di tale problema è possibile, non solo ottenere le disuguaglianze di Morse, ma anche raffinarle. In particolare lo studio degli stati ad energia nulla di un sistema supersimmetrico vincolato ad una varietà permette di ottenere informazioni sui gruppi di coomologia di De Rham della varietà stessa. Infatti, come verrà presentato in questa tesi, la dimensione della coomologia è pari al numero di autostati che annichiliscono un'Hamiltoniana supersimmetrica con dominio ristretto alle forme differenziali di grado i . Quest'ultima affermazione è vera indipendentemente dal potenziale scelto.

L'idea è di scrivere il potenziale in funzione di un parametro reale t e di una funzione di Morse $h(x)$ ponendo $V(x) = \frac{1}{2}t^2 (h'(x))^2$. Si considera il limite per $t \rightarrow \infty$; in questo modo il potenziale tende a divergere ovunque, meno che nei punti critici della funzione $h(x)$ e dunque le autofunzioni dell'Hamiltoniana sono necessariamente localizzate nei pressi di tali punti.

Verrà affrontato dapprima una trattazione puramente perturbativa in cui la meccanica quantistica supersimmetrica gioca un ruolo fondamentale in quanto, nel limite per $t \rightarrow \infty$, si possono trovare gli autostati relativi agli autovalori nulli in modo esatto con una semplice approssimazione quadratica del potenziale. Questo procedimento è sufficiente a ricostruire la disuguaglianza debole di Morse. Tuttavia questa è una trattazione di natura locale mentre la coomologia di De Rham (la dimensione dei gruppi di coomologia in particolare) contiene informazioni relative alla topologia e dunque informazioni di natura non locale.

In meccanica quantistica esistono però dei fenomeni "invisibili" alla teoria perturbativa e che sono di fatto di natura non locale. Questi fenomeni sono detti fenomeni non perturbativi. Uno di questi è l'effetto tunnel, ovvero la possibilità che la particella superi una zona con potenziale tendente ad infinito, classicamente proibita, per raggiungere una zona con potenziale finito. Se la supersimmetria facilita la trattazione perturbativa la trattazione non perturbativa rimane non banale.

Viene proposta un'approssimazione semiclassica della teoria non perturbativa che rende possibile scrivere una soluzione analitica al problema che si concretizzerà nel complesso di Witten, ovvero un

complesso di cocatene i cui gruppi di coomologia, mescolando la teoria perturbativa con le correzioni semiclassiche non perturbative, hanno la dimensione dei gruppi di coomologia di De Rham. Tale dimensione è, in questo modo, calcolata esattamente e si può considerare questo risultato come una versione più raffinata della disuguaglianza debole di Morse.

Entrando nel dettaglio dell'elaborato, nel primo capitolo si introducono le nozioni necessarie, in particolare relative alla meccanica quantistica supersimmetrica nella sua versione unidimensionale, prima nella formulazione Lagrangiana classica e poi in quella Hamiltoniana nella quale sarà possibile quantizzare il problema. Successivamente quanto affrontato verrà generalizzato per una generica varietà a più dimensioni.

Si introducono alla fine del capitolo i path-integrals e gli istantoni, necessari alla trattazione semiclassica per le correzioni non perturbative.

Nel secondo capitolo viene discussa la teoria di Morse nella teoria perturbativa: si dimostra la disuguaglianza debole di Morse e si propone un esempio esplicativo nel caso del toro \mathbb{T}^2 . La scelta della varietà è giustificata in quanto la coomologia di De Rham di tale varietà non è banale, ma permette alcune semplificazioni riguardanti la metrica che consentono di concentrarsi esclusivamente sugli obiettivi di questa tesi. Esempi più complessi possono comunque essere consultati in altri lavori, ad esempio si propone il caso di $SO(3)$: [5].

Nell'ultimo capitolo si effettuano le correzioni non perturbative alla teoria e si costruisce il complesso di Witten. Infine vengono effettuate tali correzioni anche all'esempio sul toro.

Meccanica quantistica supersimmetrica

In questo capitolo si affronteranno le principali proprietà della meccanica quantistica supersimmetrica. È noto, dai postulati della meccanica, che le osservabili sono operatori autoaggiunti densamente definiti, agenti su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} . Ipotizziamo che si possa scrivere lo spazio di Hilbert come la somma diretta dei settori di superselezione dati dai sottospazi di \mathcal{H} corrispondenti agli stati bosonici \mathcal{H}^+ e agli stati fermionici \mathcal{H}^- , dunque

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$$

La meccanica quantistica supersimmetrica ipotizza l'esistenza di due operatori

$$Q, Q^\dagger : \mathcal{H}^\pm \rightarrow \mathcal{H}^\mp$$

che soddisfino

$$Q^2 = (Q^\dagger)^2 = 0 \quad \{Q, Q^\dagger\} = 2H \quad (1)$$

dove con H indichiamo l'operatore Hamiltoniano. Queste ipotesi bastano a verificare che Q, Q^\dagger sono cariche conservate, infatti

$$[H, Q] = [QQ^\dagger, Q] + [Q^\dagger Q, Q] = Q [Q^\dagger, Q] + [Q^\dagger, Q] Q = \cancel{QQ^\dagger Q} - \overbrace{QQQ^\dagger}^{=0} + Q^\dagger \overbrace{QQQ}^{=0} - \cancel{QQ^\dagger Q} = 0$$

Allo stesso modo si può derivare che anche Q^\dagger commuta con l'Hamiltoniana H .

Sarà chiaro nei prossimi paragrafi che questi due operatori sono le cariche conservate delle trasformazioni di supersimmetria e per questa ragione si dicono supercariche. Chiamiamo ora $(-1)^F$ (la motivazione del nome di questo operatore sarà evidente quando lo si scriverà esplicitamente nella formulazione Lagrangiana) l'operatore definito come

$$(-1)^F |\psi\rangle = \begin{cases} 1 & |\psi\rangle \in \mathcal{H}^+ \\ -1 & |\psi\rangle \in \mathcal{H}^- \end{cases}$$

Siccome Q e Q^\dagger mappano vettori appartenenti al settore di superselezione bosonico a vettori appartenenti al settore di superselezione fermionico e viceversa, allora le supercariche anticommutano con l'operatore $(-1)^F$. Si può calcolare che per un generico stato Ψ

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \langle \Psi | QQ^\dagger | \Psi \rangle + \langle \Psi | Q^\dagger Q | \Psi \rangle = \|Q^\dagger \psi\|^2 + \|Q\psi\|^2 \quad (2)$$

Da questa osservazione si osserva che l'Hamiltoniana è semidefinita positiva, ovvero il suo spettro è composto da autovalori negativi o al più nulli. Ci si concentra ora sugli autovettori corrispondenti agli autovalori nulli che giocheranno un ruolo fondamentale nelle discussioni che seguono. L'equazione 2 mostra che se uno stato annichilisce l'Hamiltoniana deve annichilire anche le supercariche.

Scriviamo ora lo spazio di Hilbert come somma diretta degli autospazi dell'Hamiltoniana (formalmente ciò è possibile in quanto le osservabili, come l'Hamiltoniana, sono autoaggiunte e densamente definite), siano $\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_1 < \dots < \mathcal{E}_{n-1} < \mathcal{E}_n$ gli elementi dello spettro dell'Hamiltoniana e diciamo $\mathcal{H}_{(i)}$ l'autospazio corrispondente a \mathcal{E}_i , dunque

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{H}_{(i)}$$

ma siccome le supercariche commutano con l'Hamiltoniana allora abbiamo che

$$Q, Q^\dagger : \mathcal{H}_{(i)}^\pm \rightarrow \mathcal{H}_{(i)}^\mp$$

Dunque possiamo scrivere ogni autospazio dell'Hamiltoniana come

$$\mathcal{H}_{(i)} = \mathcal{H}_{(i)}^+ \oplus \mathcal{H}_{(i)}^-$$

Se ogni stato in $\mathcal{H}_{(i)}^+$ viene mandato in $\mathcal{H}_{(i)}^-$ e viceversa allora si può supporre che questi due spazi siano isomorfi, ciò in effetti è vero, ma solo per $i > 0$, ed è semplice mostrare che un isomorfismo è dato da $Q_1 := Q + Q^\dagger$, infatti

$$Q_1^2 = (Q + Q^\dagger)^2 = \overbrace{Q^2}^{=0} + \overbrace{(Q^\dagger)^2}^{=0} + QQ^\dagger + Q^\dagger Q = \{Q, Q^\dagger\} = 2H$$

Dunque quando restringiamo Q_1 ad $\mathcal{H}_{(i)}$ si ha $Q_1^2 = 2\mathcal{E}_i$ e quindi Q_1 è invertibile per $i = 1, \dots, n$. Non è invece possibile definire un isomorfismo fra \mathcal{H}_0^+ e \mathcal{H}_0^- : questo è dovuto al fatto che gli stati in questi spazi annichiliscono le supercariche.

Questo ragionamento ci porta a concludere che gli spazi \mathcal{H}_n^+ e \mathcal{H}_n^- hanno la stessa dimensione per $n > 0$, per $n = 0$ ciò non è vero e la differenza

$$\dim \mathcal{H}^+ - \dim \mathcal{H}^- = \dim \mathcal{H}_0^+ - \dim \mathcal{H}_0^-$$

sarà una proprietà della teoria considerata.

Formulazione Lagrangiana

Per descrivere un sistema supersimmetrico è utile scrivere la Lagrangiana della teoria. Questo ci permetterà di comprendere in modo più semplice il ruolo delle variabili e degli operatori in gioco, costruendo l'Hamiltoniana e gli operatori descritti nelle pagine precedenti esplicitamente. Inoltre la costruzione lagrangiana della teoria ci permetterà di passare agilmente alla formulazione con i path-integrals.

Prima di procedere con una teoria supersimmetrica si consideri una teoria (non supersimmetrica) costruita su una varietà riemanniana M dotata di una metrica g_{ij} . Servirà definire sia la varietà unidimensionale \mathcal{J} parametrizzata dal tempo t sia le mappe $x^i : \mathcal{J} \rightarrow M$. Consideriamo la Lagrangiana per un potenziale generico $V(x)$ (lo si intende dipendente da tutte le x^i), non è difficile convincersi che una possibile Lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} - V(x)$$

e dunque l'azione per la teoria vale

$$S[x] = \int L dt = \int dt \left(\frac{1}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} - V(x) \right)$$

Infatti il primo termine è proprio la diretta generalizzazione del termine cinetico (ovvero $\dot{x}^2/2$) al caso di una varietà riemanniana; il secondo termine è invece l'usuale termine di potenziale.

Nell'introdurre la descrizione Lagrangiana per una teoria supersimmetrica, si studierà prima il caso in cui la varietà M sia unidimensionale, scegliendo $M = \mathbb{R}$, per poi passare, nel paragrafo successivo, a generalizzare nel caso di sigma models su varietà generiche, come in [3].

Quando si introduce una teoria supersimmetria non sono sufficienti le variabili x^i dette anche bosoniche, ma ci sarà bisogno di introdurre le "superpartner" fermioniche che saranno variabili complesse e verranno denominate con ψ^i e $\bar{\psi}^i$: queste sono matematicamente delle variabili di Grassmann. Per definizione, se le variabili bosoniche soddisfano $[x_i, x_j] = 0$, le variabili fermioniche soddisfano $\{\psi^i, \psi^j\} = 0$, questo comporta immediatamente la nilpotenza di tali variabili; infatti

$$\{\psi^i, \psi^i\} = 2\psi^i\psi^i = 2(\psi^i)^2 = 0$$

inoltre si pongono per definizione gli integrali di Berezin, ovvero

$$\int d\psi^i = \int d\bar{\psi}^i = 0 \quad \int \psi^i d\psi^i = \int \bar{\psi}^i d\bar{\psi}^i = 1$$

Ciò che si propone ora è di costruire l'equivalente supersimmetrico della Lagrangiana appena discussa. Ci si limiti momentaneamente al caso unidimensionale sulla varietà \mathbb{R} (ovvero $M = \mathbb{R}$) per discutere la Lagrangiana. Si vedrà direttamente il caso di un generico potenziale, che converrà scrivere come la metà del quadrato della derivata di una certa funzione $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$L[X, \psi, \bar{\psi}] = \frac{\dot{x}}{2} + \frac{i}{2} (\bar{\psi}\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi) - \overbrace{\frac{1}{2} (h'(x))^2}^{V(x)} - h''(x)\bar{\psi}\psi$$

Prima di tutto bisogna verificare che sia reale. In effetti questo è vero, l'unico termine per cui ciò non è evidente è l'ultimo, ma $(\bar{\psi}\dot{\psi}) = \overline{\dot{\bar{\psi}}\psi} = \dot{\bar{\psi}}\psi$.

Consideriamo ora le trasformazioni di supersimmetria

$$\delta x = \epsilon\bar{\psi} - \bar{\epsilon}\psi \quad \delta\psi = \epsilon(i\dot{x} + h'(x)) \quad \delta\bar{\psi} = \bar{\epsilon}(-i\dot{x} + h'(x)) \quad (3)$$

dove ϵ è una variabile complessa di Grassmann. Verifichiamo che l'azione corrispondente a tale Lagrangiana abbia variazione nulla sotto tali trasformazioni

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt \delta L = \int dt \delta \left(\frac{\dot{x}}{2} + \frac{i}{2} (\bar{\psi}\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi) - \frac{1}{2} (h'(x))^2 - h''(x)\bar{\psi}\psi \right) = \\ &= \int dt \left(\delta\dot{x}\dot{x} + \frac{i}{2} (\delta\bar{\psi}\dot{\psi} + \bar{\psi}\delta\dot{\psi} - \delta\dot{\bar{\psi}}\psi - \dot{\bar{\psi}}\delta\psi) - h'h''\delta x - h''' \delta x \bar{\psi}\psi - h''\delta\bar{\psi}\psi - h''\bar{\psi}\delta\psi \right) = \\ &= \int dt \left(-\ddot{x}\delta x + i (\delta\bar{\psi}\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\delta\psi) - h'h''\delta x - h''' \delta x \bar{\psi}\psi - h''\delta\bar{\psi}\psi - h''\bar{\psi}\delta\psi \right) \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si sono effettuate delle integrazioni per parti in modo da evitare di calcolare variazioni di derivate. Anche se non specificato fino ad ora è fondamentale richiedere che i campi si annullino per $t \rightarrow \pm\infty$. Questa condizione consente di concludere che quando si integra per parti, la componente non integrata sia nulla, dunque non si terrà mai in conto il termine di bordo. A questo punto è sufficiente inserire le informazioni date in 3 per ottenere

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt \left(-\ddot{x} (\bar{\epsilon}\psi - \epsilon\bar{\psi}) - h''h' (\epsilon\bar{\psi} - \bar{\epsilon}\psi) + (\bar{\epsilon}\dot{x} + i\bar{\epsilon}h') \dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}} (\epsilon\dot{x} - i\epsilon h') + \right. \\ &\quad \left. - h''' (\epsilon\bar{\psi} - \bar{\epsilon}\psi) \bar{\psi}\psi + -h'' (-i\bar{\epsilon}\dot{x} + \bar{\epsilon}h') \psi - h''\bar{\psi} (i\epsilon\dot{x} - \epsilon h') \right) = \\ &= \int dt \left(-\ddot{x} (\bar{\epsilon}\psi - \epsilon\bar{\psi}) - h''h' (\epsilon\bar{\psi} - \bar{\epsilon}\psi) + \bar{\epsilon}\dot{x}\psi + i\bar{\epsilon}h''\psi - \epsilon\dot{\bar{\psi}}\psi - \bar{\psi}i\epsilon h'' + \right. \\ &\quad \left. - h''' (\epsilon\bar{\psi} - \bar{\epsilon}\psi) \bar{\psi}\psi + -h'' (-i\bar{\epsilon}\dot{x} + \bar{\epsilon}h') \psi - h''\bar{\psi} (i\epsilon\dot{x} - \epsilon h') \right) \end{aligned}$$

dove si è integrato per parti e utilizzato, opportunamente, le proprietà delle variabili di Grassman. Si giunge all'equazione

$$\delta S = \int dt \left(-h''h' (\epsilon\bar{\psi} - \bar{\epsilon}\psi) - h''' (\epsilon\bar{\psi} - \bar{\epsilon}\psi) \bar{\psi}\psi - h''h' (\bar{\epsilon}\psi - \epsilon\bar{\psi}) \right) = \int dt h''' (\epsilon\bar{\psi} - \bar{\epsilon}\psi) \bar{\psi}\psi$$

Dunque δS è nulla in quanto le variabili fermioniche sono nilpotenti.

Il teorema di Noether ci assicura l'esistenza di due cariche conservate che, come nel paragrafo precedente, verranno chiamate supercariche. Per trovarle è sufficiente promuovere ϵ ad una funzione $\epsilon(t)$ e variare l'azione. Si consideri dunque la variazione dell'azione dal momento in cui sono state usate le trasformazioni 3, ma questa volta sia $\epsilon = \epsilon(t)$ una funzione del tempo. Si proceda con le stesse semplificazioni di prima, ma considerando che quando si integra per parti si otterranno anche derivate

di ϵ . Non è necessario fare di nuovo il calcolo, in quanto è già stato calcolato che i termini in cui non vengono derivate ϵ o $\bar{\epsilon}$ si elidono. Teniamo quindi solo i termini che prima non erano presenti

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt \left(-\dot{x} (\dot{\epsilon}\bar{\psi} - \dot{\bar{\epsilon}}\psi) - \frac{i}{2} (-\dot{\bar{\epsilon}}(-i\dot{x} + h')\psi + \bar{\psi}\dot{\epsilon}(i\dot{x} + h')) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \int dt \left(\overbrace{i\dot{\bar{\psi}}(i\dot{x} + h')}^Q + \overbrace{i\dot{\bar{\epsilon}}\psi(-i\dot{x} + h')}^{\bar{Q}} \right) \end{aligned}$$

Si ottengono le due cariche conservate

$$Q = \bar{\psi}(i\dot{x} + h'(x)) \quad \bar{Q} = \psi(-i\dot{x} + h'(x))$$

È necessario quantizzare il sistema; nel farlo si deve passare alla formulazione Hamiltoniana e promuovere le variabili a operatori. Fatto ciò si troverà quanto anticipato nel paragrafo precedente. Per quanto riguarda il momento coniugato a x è sufficiente porre

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}$$

Per calcolare invece il momento coniugato a ψ si integri per parti la componente fermionica dell'azione, in modo da avere

$$S^- = \int dt \left(\frac{i}{2} (\bar{\psi}\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi) - h''(x)\bar{\psi}\psi \right) = \int dt \left(i\bar{\psi}\dot{\psi} - h''(x)\bar{\psi}\psi \right)$$

Derivando quanto integrato in $\dot{\psi}$ si trova dunque che il momento coniugato relativo a ψ è $\pi_\psi = i\bar{\psi}$; con un ragionamento del tutto analogo il momento coniugato a $\bar{\psi}$ è $\pi_{\bar{\psi}} = -i\psi$. Per trovare l'Hamiltoniana in una generica teoria si deve ricordare che, per un qualunque sistema, vale che

$$S = \int (p \cdot dq - H(q, p) dt)$$

utilizzando questa identità per la componente fermionica dell'azione, data da

$$S^- = \int (i\bar{\psi} d\psi - H^- dt) = \int dt (i\bar{\psi}\dot{\psi} - H^-)$$

segue, da un confronto con l'espressione per S^- precedente, che la componente fermionica dell'Hamiltoniana è $H^- = h''(x)\bar{\psi}\psi$. Per quanto riguarda la componente bosonica si tratta di un caso molto semplice in quanto $p = \dot{x}$ e dunque $H^+ = p^2/2 + 1/2(h'(x))^2$. Si devono ora promuovere le variabili ad operatori e nel farlo dobbiamo stabilirne l'algebra. Poniamo i commutatori canonici

$$[x, p] = i \quad \{\psi, \bar{\psi}\} = 1$$

La seconda equazione si scrive equivalentemente $\{\psi, \pi_\psi\} = i$; la presenza dell'anti-commutatore è necessaria per conservare l'analogia con l'algebra delle variabili considerate. Infatti se le variabili bosoniche x commutano fra loro, quelle fermioniche anti-commutano e dunque quando si quantizza non viene usato il commutatore ma l'anti-commutatore. Usando questa proprietà di anticommutazione si può riscrivere il contributo fermionico dell'hamiltoniana come $H^- = h''(\frac{1}{2}\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}\psi\bar{\psi}) = h''/2[\bar{\psi}, \psi]$ e dunque si giunge alla forma

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} (h'(x))^2 + \frac{1}{2} h''(x) [\bar{\psi}, \psi] \quad (4)$$

Gli operatori ψ e $\bar{\psi}$ corrispondono ad un'algebra che ricorda quella degli operatori di costruzione e distruzione dell'oscillatore armonico; infatti $\{\psi, \bar{\psi}\} = 1$ e $\{\psi, \psi\} = \{\bar{\psi}, \bar{\psi}\} = 0$. Perciò in analogia

con l'oscillatore armonico si definisce l'operatore $F = \bar{\psi}\psi$. È anche possibile ricavare questo operatore come carica conservata. Si considerino le trasformazioni

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{i\alpha}\bar{\psi} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Si osservi che la Lagrangiana è invariante sotto tali trasformazioni; infatti ogni volta che compare la variabile fermionica ψ , questa viene sempre moltiplicata per $\bar{\psi}$ o una sua derivata. Le trasformazioni in equazione 5 corrispondono alle variazioni infinitesime

$$\delta x = 0 \quad \delta\psi = -i\alpha\psi \quad \delta\bar{\psi} = i\alpha\bar{\psi}$$

Inserendo questa informazione nella variazione dell'azione, già calcolata in precedenza, e promuovendo α ad una variabile del tempo $\alpha = \alpha(t)$ si ottiene

$$\delta S = \int dt i \left(i\alpha\bar{\psi}\dot{\psi} + i\alpha\dot{\bar{\psi}} \right) - \cancel{h''i\alpha\bar{\psi}\psi} + \cancel{h''i\alpha\bar{\psi}\psi} = - \int dt \left(-\cancel{\alpha\dot{\bar{\psi}}\psi} - \dot{\alpha}\bar{\psi}\psi + \cancel{\alpha\dot{\bar{\psi}}\psi} \right) = \int dt \dot{\alpha}\bar{\psi}\psi$$

Si conclude che la carica conservata è $F = \bar{\psi}\psi$.

L'operatore F soddisfa le seguenti leggi di commutazione

$$\begin{aligned} [F, \psi] &= \overbrace{\bar{\psi}\psi\psi}^{=0} - \psi\bar{\psi}\psi = -\psi\bar{\psi}\psi - \overbrace{\psi\psi\bar{\psi}}^{=0} = \psi\{\bar{\psi}, \psi\} = -\psi \\ [F, \bar{\psi}] &= \bar{\psi}\psi\bar{\psi} - \overbrace{\bar{\psi}\bar{\psi}\psi}^{=0} = \bar{\psi}\psi\bar{\psi} + \overbrace{\bar{\psi}\psi\psi}^{=0} = \bar{\psi}\{\bar{\psi}, \psi\} = \bar{\psi} \end{aligned}$$

dove sono stati aggiunti dei termini nulli in modo da riconoscere degli anticommutatori.

Questi commutatori, sempre in analogia con l'oscillatore armonico, suggeriscono che F abbia autovalore 1 quando agisce su uno stato fermionico e autovalore nullo quando agisce su uno stato bosonico. Procedendo nell'analogia con gli operatori di costruzione e distruzione dell'oscillatore armonico, sia $|0\rangle$ lo stato tale che $\psi|0\rangle = 0$; tutti gli altri stati si possono calcolare ponendo $\bar{\psi}^n|0\rangle$, ma essendo $\bar{\psi}$ nilpotente, l'unico altro stato oltre allo stato $|0\rangle$ sarà $\bar{\psi}|0\rangle$.

È necessario trovare una rappresentazione per questi operatori, ovvero definire lo spazio di Hilbert concreto. Per le variabili x e p si può utilizzare $L^2(\mathbb{R}, dx)$, scrivendo gli operatori in rappresentazione $\{x\}$ come noto. Per le variabili $\psi, \bar{\psi}$ invece si è visto che lo spazio ha dimensione 2 in quanto una base è $\{|0\rangle, \bar{\psi}|0\rangle\}$. Dunque possiamo porre

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si è trovata una rappresentazione dello spazio di Hilber

$$\mathcal{H} = \overbrace{L^2(\mathbb{R}) \otimes |0\rangle}^{\mathcal{H}^B} \oplus \overbrace{L^2(\mathbb{R}) \otimes \bar{\psi}|0\rangle}^{\mathcal{H}^F}$$

Le supercariche, una volta effettuato il processo di quantizzazione, diventano $Q = \bar{\psi}(ip + h'(x))$ e $Q^\dagger = \psi(-ip + h'(x))$.

Nel paragrafo precedente sono state poste le condizioni in 1. Che Q, Q^\dagger siano nilpotenti deriva dalla nilpotenza di ψ e $\bar{\psi}$, si vuole ora verificare la seconda condizione

$$\begin{aligned} \{Q, Q^\dagger\} &= \{\bar{\psi}(ip + h'(x)), \psi(-ip + h'(x))\} = \\ &= \{\bar{\psi}ip, -\psi ip\} + \{\bar{\psi}h'(x), \psi h'(x)\} + i\{\bar{\psi}p, \psi h'(x)\} - i\{\bar{\psi}h'(x), \psi p\} = \\ &= p^2 + (h'(x))^2 + i(\bar{\psi}\psi - \psi\bar{\psi})[p, h'(x)] = \\ &= p^2 + (h'(x))^2 + h''(x)[\bar{\psi}, \psi] = 2H \end{aligned}$$

Servirà in seguito una formula esplicita per gli stati $|\Psi\rangle$ che annichiliscono l'Hamiltoniana. Per ricavarla imponiamo ad un generico stato $|\Psi\rangle = f_1(x)|0\rangle + f_2(x)\bar{\psi}|0\rangle$ che

$$Q|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{d}{dx} + h'(x) & 0 \end{pmatrix} |\Psi\rangle = 0 \quad Q^\dagger|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{dx} + h'(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |\Psi\rangle = 0$$

Si trovano le equazioni

$$\left(\frac{d}{dx} + h'(x)\right) f_1(x) = 0 \quad \left(-\frac{d}{dx} + h'(x)\right) f_2(x) = 0$$

che hanno per soluzioni $f_1(x) = c_1 \exp(-h(x))$, $f_2(x) = c_2 \exp(h(x))$. Entrambe queste funzioni devono essere normalizzabili per cui non è detto che siano accettabili: questo dipenderà dal comportamento di $h(x)$ al tendere di $x \rightarrow \pm\infty$.

Sigma models

Si procede ora a generalizzare tali risultati al caso di una generica varietà M . Sia \mathcal{J} la varietà unidimensionale parametrizzata dal tempo t . Definiamo le variabili bosoniche e le variabili fermioniche

$$\phi^i : \mathcal{J} \rightarrow M \quad \psi, \bar{\psi} \in \Gamma(\mathcal{J}, \phi^*TM \otimes \mathbb{C})$$

$\Gamma(\mathcal{J}, \phi^*TM \otimes \mathbb{C})$ è l'insieme delle sezioni del fibrato tangente rappresentate localmente come

$$\psi = \psi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_\phi$$

dove (x^1, \dots, x^n) è una carta locale per M . Definiti quindi i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita Γ_{ij}^k e la derivata

$$D_t \psi^i = \partial_t \psi^i + \Gamma_{kj}^i \partial_t \phi^j \psi^k$$

la Lagrangiana per una particella libera è data da

$$L_\ell = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{\phi}^i \dot{\phi}^j + \frac{i}{2} g_{ij} \left(\bar{\psi}^i D_t \psi^j - D_t \bar{\psi}^i \psi^j \right) - \frac{1}{2} R_{ijkl} \psi^i \bar{\psi}^j \psi^k \bar{\psi}^l$$

Sostanzialmente i primi due termini sono analoghi ai termini per la particella libera considerati nella sezione precedente dove sono stati calcolati i prodotti scalari tenendo conto della metrica, e la derivata sulle variabili fermioniche è stata covariantizzata sostituendo alla derivata temporale la derivata D_t . L'ultimo termine non compariva nel caso precedente: in caso di metrica piatta il tensore di curvatura di Riemann R_{ijkl} è nullo. Tuttavia tale termine è necessario in una teoria supersimmetrica se la varietà non è piatta.

Introduciamo ora un potenziale, anche in questo caso ci converrà scriverlo in termini di una funzione $h : M \rightarrow \mathbb{R}$. Il termine di Lagrangiana dovuta al potenziale è analogo al caso del paragrafo precedente, ma anche in questo caso compare la metrica e la derivata seconda sulla funzione h deve essere covariantizzata: posto $D_i \partial_j h = \partial_i \partial_j h - \Gamma_{ij}^k \partial_k h$ si trova che il termine di Lagrangiana dovuta al potenziale è

$$L_V = -\frac{1}{2} g^{ij} \partial_i h \partial_j h - D_i \partial_j h \bar{\psi}^i \psi^j$$

Si verifica che l'azione corrispondente alla Lagrangiana $L = L_\ell + L_V$ è invariante sotto trasformazioni di supersimmetria

$$\delta \phi^i = \epsilon \bar{\psi}^i - \bar{\epsilon} \psi^i \quad \delta \psi^i = \epsilon \left(i \dot{\phi}^i - \Gamma_{jk}^i \bar{\psi}^j \psi^k + g^{ij} \partial_j h \right) \quad \delta \bar{\psi}^i = \bar{\epsilon} \left(-i \dot{\phi}^i - \Gamma_{jk}^i \bar{\psi}^j \psi^k + g^{ij} \partial_j h \right)$$

Anche queste trasformazioni sono simili a quelle presentate precedentemente, ma viene tenuto conto della metrica e dei simboli di Christoffel. La variazione dell'azione è

$$\begin{aligned} \delta S = \int dt (\delta L_\ell + \delta L_V) = \int dt \left(\frac{1}{2} g_{ij} \delta \dot{\phi}^i \dot{\phi}^j + \frac{1}{2} g_{ij} \dot{\phi}^i \delta \dot{\phi}^j + \frac{i}{2} g_{ij} \left(\delta \bar{\psi}^i \dot{\psi}^j + \delta \bar{\psi}^i \Gamma_{kl}^j \dot{\phi}^k \psi^l + \bar{\psi}^i \delta \dot{\psi}^j + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{\psi}^i \Gamma_{kl}^j \dot{\phi}^k \delta \psi^l + \bar{\psi}^i \Gamma_{kl}^j \delta \dot{\phi}^k \psi^l - \delta \bar{\psi}^i \dot{\psi}^j - \dot{\phi}^k \Gamma_{kl}^i \delta \bar{\psi}^l \psi^j - \Gamma_{kl}^j \delta \dot{\phi}^k \bar{\psi}^l \psi^i - \bar{\psi}^i \delta \dot{\psi}^j - \Gamma_{kl}^i \dot{\phi}^k \bar{\psi}^l \delta \psi^j \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} R_{ijkl} \left(\delta \psi^i \bar{\psi}^j \psi^k \bar{\psi}^l + \psi^i \delta \bar{\psi}^j \psi^k \bar{\psi}^l + \psi^i \bar{\psi}^j \delta \psi^k \bar{\psi}^l + \psi^i \bar{\psi}^j \psi^k \delta \bar{\psi}^l \right) - \left(\partial_i \partial_j h - \Gamma_{ij}^k \partial_k h \right) \left(\delta \bar{\psi}^i \psi^j + \bar{\psi}^i \delta \psi^j \right) \right) \end{aligned}$$

Ora è possibile procedere come nel caso precedente, ma ricordando alcune proprietà della metrica e del tensore di Riemann; in particolare si devono usare le proprietà $g_{ij} = g_{ji}$, $R_{ijkl} = R_{klij} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Inoltre è utile ricordare la definizione in termini di simboli di Christoffel del tensore di Riemann

$$R_{ijkl} = \partial_k \Gamma_{jl}^i - \partial_l \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jl}^m \Gamma_{km}^i - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{lm}^i$$

Inserendo tali informazioni si ottiene che l'azione è invariante sotto le trasformazioni di supersimmetria e, attraverso la procedura di Noether, è possibile ricavare le cariche conservate. Anche queste ultime sono analoghe alle supercariche viste nel paragrafo precedente, ricordandosi di eseguire il prodotto scalare con la metrica g_{ij}

$$Q = \bar{\psi}^i \left(i g_{ij} \dot{\phi}^j + \partial_i h \right) \quad \bar{Q} = \psi^i \left(-i g_{ij} \dot{\phi}^j + \partial_i h \right)$$

La carica F e i momenti coniugati si possono ricavare in modo analogo al caso unidimensionale. Si osserva, ancora una volta, che si tratta di una semplice generalizzazione dei risultati precedenti:

$$F = g_{ij} \bar{\psi}^i \psi^j \quad \pi_{\psi^i} = i g_{ij} \bar{\psi}^j \quad p_i = g_{ij} \dot{\phi}^j$$

Si procede a quantizzare il problema: si pongano i commutatori canonici (per le variabili fermioniche si sostituisce al commutatore l'anti-commutatore per le ragioni discusse nel paragrafo precedente)

$$[\phi^i, p_j] = i \delta_j^i \quad \{\psi^i, \psi^j\} = g^{ij}$$

e si scrivano le supercariche $Q = \bar{\psi}^i (ip_i + \partial_i h)$ e $Q^\dagger = \psi^i (-ip_i + \partial_i h)$ e la carica $F = g_{ij} \psi^i \psi^j$. L'Hamiltoniana, in generale, è soggetta ad ambiguità dovuta all'ordine con cui gli operatori agiscono; questa ambiguità in una teoria supersimmetrica è risolta dall'ipotesi che l'Hamiltoniana sia la metà dell'anticommutatore delle cariche Q e Q^\dagger . Dunque l'Hamiltoniana vale

$$H = \frac{1}{2} \{Q, Q^\dagger\}$$

Per completare la quantizzazione però bisogna specificare uno spazio di Hilbert concreto. Questa volta il contributo delle variabili fermioniche non ha dimensione 2: anche se le variabili fermioniche sono nilpotenti non si può dire nulla sul prodotto di due di esse. Allo scopo di generalizzare lo spazio di Hilbert ottenuto nel caso di varietà M unidimensionale si prenda

$$\mathcal{H} = \Omega(M) \otimes \mathbb{C}$$

dove Ω è lo spazio delle forme definite sulla varietà M . Tale spazio è dotato il prodotto interno Hermitiano, ovvero

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_M \bar{\omega}_1 \wedge \star \omega_2$$

dove \star è detto operatore di Hodge definito dalla relazione

$$\alpha \wedge \star \beta = \det((\alpha_i, \beta_j)) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

Su questo spazio gli operatori considerati sono dati da

$$\phi^i = x^i \times \quad p_i = -i\nabla_i \quad \bar{\psi}_i = dx^i \wedge \quad \psi^i = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Essendo lo stato $|0\rangle$ uno stato bosonico che annichilisce ψ^i per ogni i , allora valgono le seguenti corrispondenze

$$|0\rangle \leftrightarrow 1 \quad \bar{\psi}^i |0\rangle \leftrightarrow dx^i \quad \bar{\psi}^i \dots \bar{\psi}^k |0\rangle \leftrightarrow dx^i \wedge \dots \wedge dx^k$$

Le supercariche in questa rappresentazione diventano

$$Q = \bar{\psi}^i (ip_i + \partial_i h) = dx^i \wedge \frac{\partial}{\partial x^i} + dx^i \wedge \partial_i h = d + dh \wedge = e^{-h} d e^h = d_h$$

dove si è riconosciuto la definizione di differenziale esterno d . Naturalmente l'aggiunto di Q è legato all'aggiunto del differenziale esterno, che se applicato ad una p -forma definita su una varietà di dimensione n , è dato da $d^\dagger = (-1)^{np+n+1} \star d \star$. In particolare si avrà

$$Q^\dagger = (d + dh \wedge)^\dagger = e^h d^\dagger e^{-h} := d_h^\dagger$$

Ne consegue che l'Hamiltoniana è

$$H = \frac{1}{2} \{Q, Q^\dagger\} = \frac{1}{2} (d_h d_h^\dagger + d_h^\dagger d_h) = \frac{\Delta_h}{2} \quad (6)$$

dove, con Δ , si identifica l'operatore di Laplace, definito come $\{d, d^\dagger\}$, e si definisce Δ_h , l'equivalente operatore dove si sostituisce d_h a d e d_h^\dagger a d^\dagger .

Formulazione con path-integrals

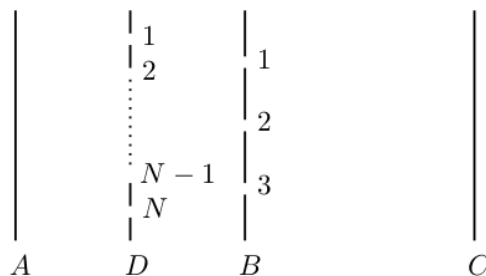
Non sarà sufficiente valutare solo la formulazione operatoriale del sistema. Serve invece introdurre, una formulazione alternativa, basata sul concetto di path-integrals. Non è obiettivo di questa tesi introdurre i path-integrals in modo formale, dimostrandone le proprietà; per una trattazione più ampia si rimanda a [6]. Si farà invece un'introduzione all'argomento, focalizzando l'attenzione sui concetti utili per il seguito della tesi.

L'idea intuitiva si basa su considerazioni relative all'esperimento delle due fenditure. Nel corso di tale esperimento si osserva che, facendo passare dalle due fenditure un singolo elettrone, si vede sullo schermo una figura di interferenza. Per spiegare ciò che succede è necessario introdurre le funzioni d'onda $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ relative ai casi in cui le fenditure 2 e 1, rispettivamente, sono chiuse. Il modulo quadro delle funzioni d'onda rappresenta, in accordo con l'interpretazione di Copenhagen, la densità di probabilità che l'elettrone si trovi in una data posizione.

Per spiegare l'esperimento bisogna supporre che a sommarsi non siano le densità di probabilità, come sarebbe naturale in una teoria classica, ma le funzioni d'onda. In questo modo, quando viene calcolato il modulo quadro, oltre alla somma delle densità di probabilità, compare un termine di interferenza come mostrato dall'esperimento.

Immaginiamo ora di aumentare il numero di fenditure come in figura 1.

Figura 1: Rappresentazione di un esperimento con molte fenditure.



Se sullo schermo D si prenda un numero di fenditure $N \rightarrow \infty$, allora la somma sulle funzioni d'onda diventa, per definizione, un integrale di Riemann. È poi possibile prendere il limite per infiniti schermi, con infinite fenditure, come lo schermo D .

Si immagini di fissare il punto di partenza x_i e il punto di arrivo x_f di una particella in moto nello spazio; si può descrivere il moto di tale particella attraverso la funzione d'onda, pensata come la somma delle funzioni d'onda relative agli infiniti cammini con punto d'inizio x_i e punto di fine x_j .

Capire quale sia la funzione d'onda relativa ad un singolo cammino rimane la questione da affrontare. Per trovare questa quantità è sufficiente applicare quanto visto fino ad ora. La trattazione esplicita si può consultare sulle note [6]: di seguito viene spiegata solo l'idea in modo da poter comprendere il risultato.

Si consideri la probabilità di transizione dell'evoluzione temporale di uno stato x_i con lo stato x_f e si suddivida l'intervallo temporale in N segmenti di larghezza ϵ ; si definisca $t_k = k\epsilon$. Usando N volte la relazione di completezza $\int |x\rangle \langle x| dx = 1$ si può riscrivere la probabilità che l'evoluzione di x_i sia x_f (ovvero $\langle x_f | e^{-iHt} | x_i \rangle$) come prodotto di $N - 1$ integrali. Supponendo che l'Hamiltoniana si possa scrivere come $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ e ponendo il limite per $\epsilon \rightarrow 0$ si ottiene

$$\langle x_f | e^{-iHt} | x_i \rangle = \int D[x] e^{iS(x)} \quad \int D[x] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{dx_k}{A} \quad (7)$$

Allo stesso modo è possibile calcolare il valor medio di un operatore $F(x)$, si ottiene

$$\langle x_i | e^{-itH} F(x) e^{-itH} | x_f \rangle = \int D[x] F(x) e^{iS(x)}$$

Istantoni

Serve una forma analitica approssimata per i path-integrals nel limite semiclassico. L'idea è di espandere l'azione intorno alla soluzione classica. Prima di fare ciò è utile effettuare un cambio di variabile $t \rightarrow -i\tau$ in modo tale che l'esponenziale che compare nell'integrando non sia oscillante. Sotto questo cambio di variabile si ha che $S \rightarrow iS_E$ e dunque l'esponenziale integrato diventa reale. Un path-integral in cui è stato effettuato tale cambio di variabile è detto euclideo (da cui il pedice E). La ragione di tale nome ha origine dal fatto che, considerando un tempo immaginario, l'intervallo spazio temporale nella metrica di Minkowski diventa identico all'intervallo calcolato con tempi reali nella metrica euclidea.

Ricordiamo che le soluzioni classiche sono, per il principio di minima azione, le soluzioni tali per cui $\delta S = 0$, da cui deriva che il primo ordine nell'espansione è nullo. Arrestandoci al secondo ordine, chiamando $\bar{x}(t)$ le soluzioni classiche e ponendo $x(t) = \bar{x}(t) + y(t)$ si ottiene

$$S[x(t)] \simeq S[\bar{x}(t)] + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 y(t_1) \left. \frac{\delta^2 S}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} \right|_{x(t)=\bar{x}(t)} y(t_2)$$

Si assuma che l'operatore $\frac{\delta^2 S}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)}$ non abbia autovalori nulli. Il risultato dell'integrale ottenuto inserendo l'espansione per $S[x(t)]$ nell'espressione di un path-integral è noto: si tratta di una generalizzazione dell'integrale di Gauß. In effetti è possibile passare ad un sistema di coordinate in cui l'operatore $\frac{\delta^2 S}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)}$ sia diagonale; in tale sistema

$$\int \prod_i dx^i \exp \left(- \sum_j x^i A_{ij} x^j \right) = \prod_i \int dx^i e^{-x^i \lambda_i x^i} = \sqrt{\frac{(\pi)^N}{\det A}}$$

Applicando ciò al path-integral 7 si ottiene che

$$\langle x_f | e^{-iHt} | x_i \rangle \simeq \frac{e^{-S_E(\bar{x})}}{\sqrt{\det \left(\left. \frac{\delta S_E}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} \right|_{x=\bar{x}} \right)}}$$

Fino ad ora però si sono considerate solo variabili bosoniche; si cerca ora di effettuare lo stesso calcolo per le variabili fermioniche. Si consideri il caso unidimensionale definito dalla variabile di Grassmann ψ e la complessa coniugata $\bar{\psi}$, allora

$$e^{-a\bar{\psi}\psi} = 1 - a\bar{\psi}\psi \quad \Rightarrow \quad \int d\bar{\psi} d\psi e^{a\bar{\psi}\psi} = a$$

dove si sono usati gli integrali di Berezin esposti in precedenza.

Analogamente si calcola il caso di diverse variabili fermioniche $\psi^i, \bar{\psi}^i$. Assumiamo quindi che l'azione abbia la forma $S[\psi] = \sum_i \bar{\psi}^i \lambda_i \psi^i$, che si può pensare come l'azione $S[\psi] = \sum_{i,j} \bar{\psi}^i A_{ij} \psi^j$, in una opportuna base in cui l'operatore A_{ij} , non singolare, sia stato diagonalizzato; si ha che

$$\begin{aligned} \int \prod_i d\bar{\psi}^i d\psi^i \exp\left(-\sum_j \bar{\psi}^i A_{ij} \psi^j\right) &= \int \prod_i d\bar{\psi}^i d\psi^i e^{-\bar{\psi}^i \lambda_i \psi^i} = \\ &= \prod_i \int d\bar{\psi}^i d\psi^i e^{-\bar{\psi}^i \lambda_i \psi^i} \\ &= \prod_i \lambda_i = \det A \end{aligned}$$

Disuguaglianza debole di Morse

Con gli strumenti presentati nel capitolo precedente, si vuole studiare la disuguaglianza di Morse. Questa disuguaglianza lega proprietà topologiche, contenute nella coomologia di De Rham, allo studio di alcune funzioni dette funzioni di Morse. Si faranno solo cenni alla struttura matematica, in quanto i risultati verranno ricavati attraverso considerazioni fisiche che permetteranno, nel capitolo successivo, di raffinare la teoria; per approfondirne gli aspetti formali si rimanda a [2].

La coomologia di De Rham è utile nello studio delle varietà in quanto è un invariante topologico, ovvero varietà omeomorfe hanno la stessa coomologia di De Rham. Viene introdotta tale coomologia e si definisce il numero di Betti che compare nelle disuguaglianze di Morse.

Su una generica varietà M , di dimensione n , si consideri il differenziale esterno d , che agisce sulle forme differenziali di grado μ e ha come immagine una forma di grado $\mu + 1$. Ricordiamo che una forma ω si dice chiusa se $d\omega = 0$, cochiusa se $d^\dagger\omega = 0$ ed esatta se esiste una forma χ tale per cui $\omega = d\chi$. Sia $\Omega^\mu(M)$ lo spazio vettoriale di tutte le μ -forme su M .

Ogni coomologia è associata ad un complesso di cocatene, ovvero una sequenza di gruppi abeliani legati da un differenziale nilpotente ($d^2 = 0$). La coomologia di De Rham è associata al seguente complesso di cocatene

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(M) \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{n-2}} \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d_n} 0$$

dove con d_i si indica il differenziale esterno con dominio ristretto alle i -forme.

Si osservi che il complesso di cocatene è limitato; infatti bisogna ricordare che $\Omega^m(M) = 0$ se $m > n$ in quanto non possono esistere forme di grado maggiore della dimensione della varietà. Inoltre bisogna verificare che la composizione di d_i con d_{i+1} sia la mappa nulla: la verifica è immediata dal momento che ogni forma esatta, ovvero che si possa scrivere come $d_i\omega$, è anche chiusa, ovvero $d_{i+1}d_i\omega = 0$. Si definiscono quindi i gruppi di coomologia di De Rham

$$H^i(M) = \frac{\ker(d_i : \Omega^i(M) \rightarrow \Omega^{i+1}(M))}{\text{Im}(d_{i-1} : \Omega^{i-1}(M) \rightarrow \Omega^i(M))}$$

Le dimensioni di tali gruppi si dice numero di Betti B_i , in altri termini $B_i = \dim H^i$.

Dalla definizione dell' i -esimo gruppo di coomologia è evidente che questo è isomorfo allo spazio delle i -forme chiuse ma non esatte. Queste sono anche le forme appartenenti al nucleo dell'operatore di Laplace. Per mostrare tale risultato è necessario osservare che una forma ω che appartiene al nucleo del Laplaciano deve necessariamente essere chiusa e cochiusa, infatti

$$0 = (\Delta\omega, \omega) = (dd^\dagger\omega, \omega) + (d^\dagger d\omega, \omega) = \|d\omega\|^2 + \|d^\dagger\omega\|^2$$

Anche l'implicazione inversa è vera: se una forma è chiusa e cochiusa allora $\Delta\omega = \{d, d^\dagger\}\omega = 0$. La condizione di cochiusura di una forma ω appartenente al nucleo del Laplaciano è equivalente alla condizione che ω non sia esatta in quanto se per assurdo $\omega = d\chi$, imponendo che sia cochiusa, si avrebbe

$$0 = (d^\dagger\omega, \chi) = (d^\dagger d\chi, \chi) = \|d\chi\|^2 = \|\omega\|^2$$

Si conclude che l'unica forma chiusa esatta appartenente al nucleo del Laplaciano è la forma banale e dunque si è dimostrato che il gruppo di coomologia H^i è isomorfo al nucleo del Laplaciano ristretto

alle i -forme.

Si consideri, sulla varietà M , una funzione $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui essa abbia matrice Hessiana, calcolata nei punti critici, non singolare. Una funzione con tale proprietà è detta funzione di Morse. Detto P un punto critico di h , si dice indice di Morse μ del punto P il numero di autovalori negativi della matrice Hessiana calcolata in P . Definiamo M_μ il numero di punti critici con indice di Morse μ . La disuguaglianza debole di Morse afferma che il numero di Betti B_p è minore o uguale del numero di punti critici di indice di Morse p , in formule

$$M_p \geq B_p$$

Un altro risultato della teoria di Morse afferma che i punti critici di h formano un modello di coomologia per la varietà M . Più precisamente sia X_p uno spazio vettoriale di dimensione M_p : lo si può costruire imponendo che i punti critici di indice di Morse p ne costituiscano una base. Il risultato in questione prova l'esistenza di un differenziale nilpotente $\delta : X_p \rightarrow X_{p+1}$ e garantisce che la dimensione dei gruppi di coomologia del complesso di cocatene

$$0 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\delta} X_1 \xrightarrow{\delta} X_2 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} X_{n-1} \xrightarrow{\delta} X_n \xrightarrow{\delta} 0 \quad (8)$$

è pari alla dimensione dei gruppi di coomologia di De Rham. Tuttavia la teoria di Morse non consente di esprimere esplicitamente il differenziale per tale complesso di cocatene.

Quello che si propone ora è di derivare la disuguaglianza debole di Morse attraverso lo studio di un sistema supersimmetrico, come eseguito da E. Witten in [7]. Nei prossimi capitoli si mostrerà che lo studio della teoria di Morse attraverso metodi e strumenti fisici, come quelli considerati nel capitolo precedente, consente di costruire esplicitamente i gruppi di coomologia relativi al complesso di cocatene 8.

La trattazione generale sarà continuamente affiancata ad un'applicazione esplicita dei risultati: la varietà considerata per tale applicazione è un toro bidimensionale \mathbb{T}^2 .

Derivazione della disuguaglianza debole di Morse

Osserviamo che una particella libera su una varietà M ha Hamiltoniana $H = \Delta$, infatti calcolando l'equazione 6 nel caso in cui h sia la mappa nulla, si trova che

$$2H = \{Q, Q^\dagger\} = \{d, d^\dagger\} = \Delta$$

Abbiamo visto che il gruppo di coomologia $H^\mu(M)$ è isomorfo al nucleo dell'operatore di Laplace che, nel caso di particella libera, coincide con l'Hamiltoniana. Dunque il numero di Betti B_μ è pari alla dimensione del nucleo dell'Hamiltoniana ristretta alle μ -forme.

Si consideri ora un sistema supersimmetrico con potenziale $t h$ dove $t \in \mathbb{R}$ e $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse. Sappiamo dalla trattazione precedente che le supercariche sono $Q = e^{-th} d e^{th}$ e $Q^\dagger = e^{th} d^\dagger e^{-th}$ e l'Hamiltoniana è espressa in 6. A priori dovremmo ipotizzare che i gruppi di coomologia dati dal nucleo dell'Hamiltoniana con potenziale siano differenti dai gruppi di coomologia dati dal nucleo dell'Hamiltoniana per una particella libera; tuttavia si può dimostrare che ciò non è vero. Si consideri la mappa $\Gamma : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ che associa ad una forma ω la forma $e^{-th}\omega$. È evidente che tale mappa è invertibile. Inoltre è facile verificare che essa mappa forme chiuse e non esatte nel senso del differenziale esterno d in forme chiuse ma non esatte nel senso dell'operatore $d_h = e^{-th} d e^{th}$. In effetti presa una k -forma ω chiusa ma non esatta nel senso di d , allora si ha che

$$d_h \Gamma(\omega) = e^{-th} d e^{th} e^{-th} \omega = e^{-th} d \omega = 0$$

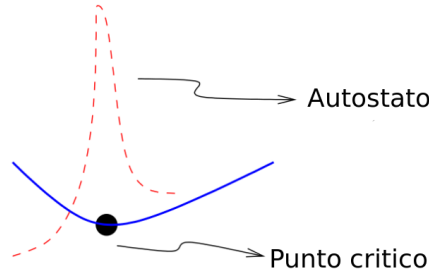
Dunque la forma $\Gamma(\omega)$ è chiusa nel senso di d_h . Inoltre la forma $\Gamma(\omega)$ non può essere esatta, in quanto se per assurdo lo fosse, e quindi esistesse una forma χ tale per cui $d_h \chi = \Gamma(\omega)$, si avrebbe

$$e^{-th} d e^{th} \chi = e^{-th} \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = d e^{th} \chi$$

ma allora la forma ω sarebbe esatta contraddicendo le ipotesi. Essendo Γ invertibile allora i gruppi di coomologia dati dal nucleo dell'Hamiltoniana per particella libera e dal nucleo dell'Hamiltoniana con potenziale sono isomorfi. In particolare, se ci restringiamo alle sole μ -forme, il numero di Betti B_μ è dato dalla dimensione del loro nucleo.

Ciò riconduce allo studio degli autostati che annichiliscono l'Hamiltoniana. Si è appena mostrato che tali autostati non dipendono dal parametro t , per cui è possibile scegliere il valore di t come conveniente. Si osserva che, essendo $Q = d + t dh \wedge$, il potenziale presente nell'Hamiltoniana nel limite di t che tende ad infinito si presenta come una serie di potenziali a delta centrati nei punti critici della funzione h ; di conseguenza le funzioni d'onda corrispondenti agli autostati relativi agli autovalori nulli saranno localizzati nei pressi di tali punti critici.

Figura 2: Raffigurazione della funzione d'onda di un autostato localizzato in un intorno del punto critico.



Questa considerazione evidenzia che la scelta di $t \rightarrow \infty$ lega gli autostati, relativi agli autovalori ad energia nulla, ai punti critici della funzione h . Useremo dunque un'approssimazione per $t \gg 1$ per cercare autovalori nulli e relative autofunzioni dell'Hamiltoniana. Essendo tali autofunzioni localizzate in alcuni intorni dei punti critici, si può passare ad una trattazione locale del problema, scegliendo quindi la metrica piatta. Scriviamo dunque l'Hamiltoniana in un intorno del punto critico P , che supponiamo avere indice di Morse μ . Calcolando esplicitamente l'Hamiltoniana nel caso di metrica piatta si giunge a

$$2H = \Delta + t^2 \|dh\|^2 + t \partial_i \partial_j h [\bar{\psi}^i, \psi^j] = \partial_i \partial^i + t^2 \|dh\|^2 + t \partial_i \partial_j h [\bar{\psi}^i, \psi^j]$$

ovvero la generalizzazione in più variabili dell'equazione 4.

Essendo le funzioni d'onda relative agli autostati corrispondenti ad autovalori nulli dell'Hamiltoniana localizzati in un intorno di P , si può espandere la funzione h

$$h(x) \simeq h(P) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i (x^i)^2$$

dove i termini c_i sono gli autovalori della matrice Hessiana. L'approssimazione termina al secondo ordine, vedremo che nel limite di $t \rightarrow \infty$ questa approssimazione consente di trovare esattamente il numero di autovalori nulli e il relativo autostato, ma in questo momento è trattata come approssimazione. Inserendo l'espansione nell'Hamiltoniana, si ottiene una Hamiltoniana approssimata \tilde{H} , data da

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} + c_i^2 t^2 (x^i)^2 + t c_i [\bar{\psi}^i, \psi^i] \right)$$

Gli autovalori di \tilde{H} sono semplici da trovare: i primi due termini formano l'Hamiltoniana per un oscillatore armonico, il cui spettro è noto e il termine $[\bar{\psi}^i, \psi^i]$ ha autovalori ± 1 , infatti applicato alla forma $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ restituisce

$$[\bar{\psi}^i, \psi^i] (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = \begin{cases} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} & \text{se } i \in \{i_1, i_2, \dots, i_p\} \\ -dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} & \text{se } i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_p\} \end{cases}$$

e di conseguenza lo spettro di $[\bar{\psi}^i, \psi^i]$ è $\{\pm 1\}$. Gli autovalori di \tilde{H} sono contenuti in

$$\sigma(\tilde{H}) = \left\{ \frac{t}{2} \sum_i (|c_i| (1 + 2 n_i) + c_i m_i), \quad n_i \in \mathbb{N}, \quad m_i \in \{1, -1\} \right\}$$

L'ipotesi che il punto P abbia indice di Morse μ ci indica che esistono μ autovalori negativi dell'Hessiano; in altre parole il numero di c_i negativi è μ .

Ponendo $n_i = 0$ per ogni i e scegliendo $m_i = -\text{sgn}(c_i)$ si trova un autovalore nullo. Per calcolare l'autofunzione corrispondente a questo autovalore osserviamo l'Hamiltoniana

$$\tilde{H}_i = -\frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} + c_i^2 t^2 (x^i)^2 + t c_i [\bar{\psi}^i, \psi^i]$$

Quest'ultima è unidimensionale e dunque si può applicare quanto discusso nel primo capitolo relativamente agli stati ad energia nulla. In particolare si osserva che gli esponenziali di argomento $c_i (x^i)^2$ divergono se $c_i > 0$ mentre gli esponenziali di argomento $-c_i (x^i)^2$ divergono per $c_i < 0$. c_i non può mai essere nullo in quanto si è ipotizzato che h sia una funzione di Morse. Si conclude pertanto che gli stati che annichiliscono l'Hamiltoniana unidimensionale sono

$$\Psi_i = \begin{cases} e^{-t|c_i|(x^i)^2} |0\rangle & \text{se } c_i > 0 \\ e^{-t|c_i|(x^i)^2} \bar{\psi}^i |0\rangle & \text{se } c_i < 0 \end{cases}$$

Osservando che $\tilde{H} = \sum_{i=1}^n \tilde{H}_i$ e che gli operatori \tilde{H}_i commutano fra loro, l'autofunzione corrispondente all'autovalore nullo dell'Hamiltoniana è

$$\Psi = \prod_{i=1}^n \Psi_i = \exp\left(-t \sum_{i=1}^n |c_i| (x^i)^2\right) \prod_{j:c_j < 0} \bar{\psi}^j |0\rangle \quad (9)$$

È evidente che, essendo P un punto critico di indice di Morse μ , esistono μ autovalori negativi dell'Hessiano e dunque Ψ è una μ -forma.

Ma allora ad ogni punto critico della funzione h è possibile associare un'unica autofunzione che annichilisce l'Hamiltoniana \tilde{H} o, in altre parole, il numero di autostati che annichiliscono \tilde{H} è il numero di punti critici di indice di Morse μ , ovvero M_μ . Essendo \tilde{H} un'approssimazione di H , dovuta ad un'espansione di h , gli autostati che annichiliscono H devono necessariamente annichilire anche \tilde{H} , ma in generale non è vero il contrario. Dunque il numero di autostati che annichiliscono H è maggiore del numero di stati che annichiliscono \tilde{H} .

Si è già mostrato che il numero di autostati corrispondenti all'autovalore nullo di H è il numero di Betti; per quanto appena affermato, $M_p \geq B_p$. Tale stima corrisponde proprio la disuguaglianza debole di Morse.

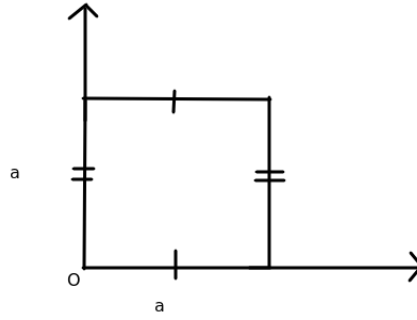
Disuguaglianza debole di Morse su \mathbb{T}^2

Come preannunciato, si applicano i risultati trovati in un caso concreto. Si sceglie come varietà \mathbb{T}^2 , il quale è caratterizzato dai seguenti gruppi di coomologia e relativi numeri di Betti

$$H^p = \begin{cases} \mathbb{C} & p = 0, 2 \\ \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} & p = 1 \\ 0 & p \neq 0, 1, 2 \end{cases} \quad B_p = \begin{cases} 1 & p = 0, 2 \\ 2 & p = 1 \\ 0 & p \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$

Si osserva che un modo per costruire un toro è considerare, nel piano \mathbb{R}^2 , un quadrato di lato a e imporre una relazione di equivalenza per ogni coppia di lati non adiacenti come mostrato in figura 3.

Figura 3: Raffigurazione di un quadrato di lato a in \mathbb{R}^2 in cui i lati non adiacenti sono legati dalle relazioni di equivalenza $|$ e $||$. Questa costruzione è isomorfa ad un toro.



Questa costruzione permette di parametrizzare il toro utilizzando le variabili che definiscono gli assi di \mathbb{R}^2 : sia denotino tali variabili con x e y . Tale scelta consente di considerare la metrica euclidea ereditata da \mathbb{R}^2 .

Esistono diverse funzioni di Morse. Seguendo l'esempio in [4], si consideri la funzione di Morse

$$h(x, y) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

Derivandola si ottiene

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right)$$

Si osserva facilmente che i punti critici sono dati da $x = 0, a/2$ e $y = 0, a/2$ e dunque sono $(0, 0)$, $(0, a/2)$, $(a/2, 0)$, $(a/2, a/2)$. Calcolando le derivate seconde si ottiene

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{2\pi^2}{a^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{2\pi^2}{a^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0$$

Si osserva che l'Hessiano calcolato nei punti critici non è mai singolare e dunque la funzione h è una funzione di Morse.

Valutando gli autovalori dell'Hessiano, procedura molto semplice dato che esso è diagonale, si può dedurre l'indice di Morse μ dei quattro punti critici. Inoltre applicando la formula 9 si può trovare lo stato Ψ che annichilisce l'Hamiltoniana corrispondente al punto critico in questione. Tali risultati sono riportati nella tabella 1.

Tabella 1: Punti critici con corrispondenti indici di Morse e stati che annichiliscono l'Hamiltoniana per il potenziale $t h$ con $h(x, y) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)$

Punto critico	μ	Ψ
$(0, 0)$	0	$\exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}(x^2 + y^2)\right)$
$(0, a/2)$	1	$\exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}(x^2 + y^2)\right) dy$
$(a/2, 0)$	1	$\exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}(x^2 + y^2)\right) dx$
$(a/2, a/2)$	2	$\exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}(x^2 + y^2)\right) dx \wedge dy$

Da questi si deduce che i numeri M_p di punti critici con indice di Morse p sono

$$M_p = B_p = \begin{cases} 1 & p = 0, 2 \\ 2 & p = 1 \\ 0 & p \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$

Dunque la disuguaglianza di Morse è valida come uguaglianza in quanto $B_p = M_p$ per ogni p . Tuttavia questo accade a causa di una fortuita scelta della funzione di Morse. Scegliendone una diversa non è detto che valga l'uguaglianza.

Si consideri la funzione di Morse

$$h(x, y) = \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

Derivandola si trova

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{2\pi}{a} \sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right)$$

Dunque i punti critici si trovano per $x = 0, a/4, a/2, 3a/4$ e $y = 0, a/2$. Derivando ulteriormente la funzione h si trovano le derivate seconde

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{8\pi^2}{a^2} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{2\pi^2}{a^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0$$

Dalle derivate seconde, che costituiscono le entrate della matrice Hessiana, si può verificare che h sia una funzione di Morse e si possono valutare gli indici di Morse μ dei punti critici. Applicando la formula 9 si trovano gli stati che annichiliscono l'Hamiltoniana corrispondenti ai punti critici. I risultati sono riassunti in tabella 2.

Tabella 2: Punti critici con corrispondenti indici di Morse e stati che annichiliscono l'Hamiltoniana per il potenziale th con $h(x, y) = \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)$

Punto critico	μ	Ψ
(0, 0)	0	$\exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}(4x^2 + y^2)\right)$
(a/2, 0)	0	$\exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}(4x^2 + y^2)\right)$
(0, a/2)	1	$\exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}(4x^2 + y^2)\right) dy$
(a/2, a/2)	1	$\exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}(4x^2 + y^2)\right) dy$
(a/4, 0)	1	$\exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}(4x^2 + y^2)\right) dx$
(3a/4, 0)	1	$\exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}(4x^2 + y^2)\right) dx$
(a/4, a/2)	2	$\exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}(4x^2 + y^2)\right) dx \wedge dy$
(3a/4, a/2)	2	$\exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}(4x^2 + y^2)\right) dx \wedge dy$

In questo caso risulta non valida l'uguaglianza $B_p = M_p$:

$$B_p \leq M_p = \begin{cases} 2 & p = 0, 2 \\ 4 & p = 1 \\ 0 & p \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$

Nel prossimo capitolo si vedrà come raffinare la disuguaglianza di Morse e quest'ultima funzione h sarà considerata come esempio.

Complesso di Witten

Si vuole ora raffinare la disuguaglianza di Morse. Nel farlo si costruirà esplicitamente la coomologia relativa al complesso di cocatene 8.

La disuguaglianza debole di Morse è stata derivata precedentemente espandendo opportunamente la funzione di Morse h per grandi t . Si potrebbe pensare che si possa migliorare la stima aggiungendo termini nell'espansione. Ciò però non è vero: l'analisi perturbativa mostra che aggiungendo termini all'espansione della funzione h non varia il numero di stati ad energia nulla.

Che non sia sufficiente aggiungere termini all'espansione per migliorare la stima dei numeri di Betti è oltretutto ragionevole se consideriamo che tali numeri sono le dimensioni dei gruppi di coomologia di De Rham che contengono proprietà topologiche. Infatti la stima proposta nel capitolo precedente è di natura locale, e tale rimane anche aggiungendo ulteriori ordini perturbativi, ma delle grandezze di natura locale non possono contenere informazioni sulla struttura topologica. Serve allora considerare effetti di natura non locale.

Se ne conclude che gli stati ad energia nulla trovati precedentemente in modo approssimato sono gli stati ad energia nulla nell'analisi perturbativa, ma non forniscono tutta l'informazione necessaria. L'esempio precedente mostra che per alcune funzioni l'uguaglianza $B_p = M_p$ non vale.

Effetto tunnel ed istantoni

In questo paragrafo si aggiungerà alla trattazione precedente la possibilità di effetto tunnel. Siamo interessati all'effetto tunnel solo fra punti critici, in quanto, come spiegato in precedenza, nel limite di $t \rightarrow \infty$ le funzioni d'onda sono localizzate solo in intorno dei punti critici. Si consideri allora un punto critico P_i di indice di Morse μ_i a cui associamo la funzione d'onda Ψ_i , esplicitata nell'equazione 9. Si denotino con P_j gli altri punti critici di indici di Morse μ_j e anche a tali punti critici, attraverso la 9, associamo degli autostati Ψ_j . Allora vale che

$$Q\Psi_i = \sum_j \Psi_j \langle \Psi_j | Q | \Psi_i \rangle = \sum_j \Psi_j \int_M \Psi_j \wedge \star (d + dh \wedge) \Psi_i \quad (10)$$

dove sono già stati rimossi i termini che terrebbero in considerazione stati che non annichiliscono l'Hamiltoniana nell'analisi perturbativa in quanto tali termini sono nulli nel limite di $t \rightarrow \infty$. Gli stati Ψ_j sono invece autostati che annichiliscono l'Hamiltoniana nella teoria perturbativa, ma il termine $\langle \Psi_j | Q | \Psi_i \rangle$ non è necessariamente nullo in quanto, nella teoria non perturbativa, gli stati Ψ_j e Ψ_i potrebbero non annichilire l'Hamiltoniana. Inoltre è stato esplicitato il prodotto scalare. Da questa semplice scrittura si possono già escludere molti termini. Infatti $Q\Psi_i$ è una forma di grado $\mu_i + 1$ e, di conseguenza, il prodotto scalare dato dall'integrale presente nell'equazione 10 è nullo se $\mu_j \neq \mu_i + 1$. Dunque la somma che compare deve essere ristretta alla somma sui j tali per cui $\mu_j = \mu_i + 1$

$$Q\Psi_i = \sum_{j: \mu_j = \mu_i + 1} \Psi_j \langle \Psi_j | Q | \Psi_i \rangle = \sum_{j: \mu_j = \mu_i + 1} \Psi_j \int_M \Psi_j \wedge \star (d + dh \wedge) \Psi_i$$

Per il calcolo esplicito del prodotto scalare è conveniente passare alla formulazione con i path-integrals. Si introduca un parametro temporale complesso T da cui dipende $x^i = x^i(T)$; tale parametro lo si definisce in modo tale che $\lim_{T \rightarrow -\infty} x^k(T)$ sia la coordinata k -esima del punto critico P_i e $\lim_{T \rightarrow \infty} x^k(T)$

sia la coordinata k -esima del punto critico P_j . Dato che gli autostati Ψ_k tendono per $t \rightarrow \infty$ ad una delta di Dirac, e dunque in tale limite la funzione h può essere vista come un'operatore definito dall'equazione agli autovalori $h\Psi_i = h(P_i)\Psi_i$, allora è possibile riscrivere il prodotto scalare come segue

$$\langle \Psi_j | Q | \Psi_i \rangle = \frac{1}{h(P_i) - h(P_j)} \langle \Psi_j | -h(P_j)Q + Qh(P_i) | \Psi_i \rangle = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty}}{h(P_i) - h(P_j)} \langle \Psi_j | e^{-TH} [Q, h] e^{-TH} | \Psi_i \rangle$$

dove l'esponenziale e^{-TH} , per $T \rightarrow \infty$, proietta gli stati sulle autofunzioni, relative agli autovalori nulli, ottenute nella teoria perturbativa. Compare in questa espressione il commutatore fra Q e h ; si osservi che tale commutatore è uguale a $\partial_i h \bar{\psi}^i$, infatti applicato ad una forma ω si ha che

$$\begin{aligned} [Q, h]\omega &= [d + dh\wedge, h]\omega = (d + dh\wedge)h\omega - h(d + dh\wedge)\omega = d(h\omega) + h\,dh\wedge\omega - h\,d\omega - h\,dh\wedge\omega = \\ &= dh\wedge\omega + \cancel{h\,d\omega} + \cancel{h\,dh\wedge\omega} - \cancel{h\,d\omega} - \cancel{h\,dh\wedge\omega} = dh\wedge\omega = \partial_i h \, dx^i \wedge \omega = \partial_i h \, \bar{\psi}^i \omega \end{aligned}$$

Si giunge quindi alla forma appropriata per scrivere il prodotto scalare come un path-integral

$$\frac{\lim_{T \rightarrow \infty}}{h(P_i) - h(P_j)} \langle \Psi_j | e^{-TH} \partial_i h \bar{\psi}^i e^{-TH} | \Psi_i \rangle = \int_{\phi(-\infty)=P_i}^{\phi(\infty)=P_j} D[\phi] D[\psi] D[\bar{\psi}] e^{-S_E} \partial_i h \bar{\psi}^i \quad (11)$$

dove l'azione (euclidea) è

$$S_E = \int d\tau \left(\frac{1}{2} g_{ij} \left(\frac{d\phi^i}{d\tau} \frac{d\phi^j}{d\tau} + \bar{\psi}^i \frac{D\psi^j}{D\tau} \right) + \frac{1}{2} t^2 g^{ij} \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial x^j} + t \frac{D\partial h}{Dx^i \partial x^j} \bar{\psi}^i \psi^j + \frac{1}{2} R_{ijkl} \psi^i \bar{\psi}^j \psi^k \bar{\psi}^l \right)$$

Consideriamo ora la componente bosonica dell'azione. Questa si può riscrivere

$$S_E^B = \int d\tau \frac{1}{2} \left(g_{ij} \frac{d\phi^i}{d\tau} \frac{d\phi^j}{d\tau} + t^2 g^{ij} \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial x^j} \right) = \frac{1}{2} \int d\tau \left| \frac{d\phi^i}{d\tau} \pm t g^{ij} \frac{\partial h}{\partial x^i} \right|^2 \mp t (h(P_j) - h(P_i))$$

infatti

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\phi^i}{d\tau} \pm t g^{ij} \frac{\partial h}{\partial x^i} \right|^2 \mp t \partial_i h \frac{d\phi^i}{d\tau} &= g_{ij} \frac{d\phi^i}{d\tau} \frac{d\phi^j}{d\tau} + t^2 g_{ij} g^{ik} g^{js} \partial_k h \partial_s h \pm t g_{ij} g^{jk} \partial_k h \frac{d\phi^i}{d\tau} \mp t \partial_i h \frac{d\phi^i}{d\tau} = \\ &= g_{ij} \frac{d\phi^i}{d\tau} \frac{d\phi^j}{d\tau} + t^2 g^{ij} \partial_i h \partial_j h \pm t \partial_i h \frac{d\phi^i}{d\tau} \mp t \partial_i h \frac{d\phi^i}{d\tau} = \\ &= g_{ij} \frac{d\phi^i}{d\tau} \frac{d\phi^j}{d\tau} + t^2 g^{ij} \partial_i h \partial_j h \end{aligned}$$

Inoltre il termine escluso dal modulo quadro può essere integrato come segue

$$\mp t \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \partial_i h \frac{d\phi^i}{d\tau} = \mp t \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{dh}{d\tau} = \mp t (h(P_j) - h(P_i))$$

La componente bosonica dell'azione ha un minimo quando il modulo quadro è nullo, ovvero quando l'argomento del modulo quadro è nullo. Dunque l'equazione per gli istantoni è data da

$$\frac{d\phi^i}{d\tau} \boxed{\pm} t g^{ij} \partial_i h = 0 \quad (12)$$

Rimane indeterminato il segno evidenziato. Si deve però ricordare che, affinché il path-integral 11 non diverga è necessario imporre che $\mp t (h(P_j) - h(P_i)) > 0$. Si sceglie quindi il segno $-$ se $h(P_j) - h(P_i) > 0$ e il segno $+$ se $h(P_j) - h(P_i) < 0$. Assumiamo di qui in avanti che valga il segno $-$: un procedimento analogo può essere seguito scegliendo il segno $+$.

Complesso di Witten

Si procede ora a valutare il path-integral 11 in un'approssimazione semiclassica, espandendo intorno ad una soluzione classica γ .

Per fare ciò è necessario scrivere l'azione in termini dell'operatore \mathcal{D}_- , definito dall'espressione

$$\mathcal{D}_\pm \rho^i = D_\tau \rho^i \pm t g^{ij} D_j \partial_k h \rho^k$$

dove gli operatori \mathcal{D}_\pm sono applicati ad un generico campo ρ^i . Effettuando il cambio di variabile $\phi^i(\tau) \rightarrow \gamma^i(\tau) + \xi^i(\tau)$, dove γ^i è un istantone, si trova che la componente bosonica dell'azione in approssimazione quadratica è

$$S_E^B = t(h(P_j) - h(P_i)) + \frac{1}{2} \int d\tau |\mathcal{D}_-\xi|^2$$

infatti

$$\left| \frac{d\phi^i}{d\tau} - t g^{ij} \frac{\partial h}{\partial x^j} \right|^2 = |\mathcal{D}_-\phi^i|^2 = |\mathcal{D}_-\gamma + \mathcal{D}_-\xi|^2 = |\mathcal{D}_-\xi|^2$$

La componente fermionica si può invece scrivere come

$$S_E^F = \int d\tau g_{ij} \bar{\psi}^i \mathcal{D}_+ \psi^j = - \int d\tau \mathcal{D}_- \bar{\psi}^i \psi^j$$

Dunque l'espressione del path-integral 11 è dato da

$$e^{-t(h(P_j)-h(P_i))} \int D[\phi] D[\psi] D[\bar{\psi}] \partial_i h \bar{\psi}^i \exp\left(-\int d\tau \left(\frac{1}{2} |\mathcal{D}_-\xi|^2 - \mathcal{D}_- \bar{\psi} \psi\right)\right)$$

È necessario separare i contributi relativi agli autovettori relativi agli autovalori nulli di \mathcal{D}_- per integrarli in modo diretto. Se non si operasse in questo modo i campi bosonici appartenenti al nucleo di \mathcal{D}_- farebbero divergere il path-integral in quanto comparirebbe l'integrale di e^0 su tutta la retta reale, mentre i campi fermionici appartenenti al nucleo di \mathcal{D}_- tenderebbero ad annullare il path-integral che non sarebbe ben definito. Serve dunque conoscere il nucleo dell'operatore \mathcal{D}_- in quanto questo è composto dagli autovettori relativi agli autovalori nulli. Si osserva che se $\gamma(\tau)$ risolve l'equazione 12, allora anche $\gamma(\tau + \tau_1)$ è soluzione di 12. In altre parole le traslazioni temporali di un elemento del nucleo di \mathcal{D}_- sono a loro volta contenute in tale nucleo. Si può dimostrare che l'indice dell'operatore \mathcal{D}_- , ovvero la quantità

$$\text{Ind } \mathcal{D}_- = \dim \ker \mathcal{D}_- - \dim \ker \mathcal{D}_+$$

è pari alla differenza di indici di Morse $\Delta\mu$. Si tratta di una dimostrazione tecnica: la si trova in appendice.

Si è già osservato che semplici considerazioni sull'integrale che compare in 10 portano a concludere che $\Delta\mu = 1$. Si assume che $\ker \mathcal{D}_+ = 0$ in modo tale che la dimensione del nucleo di \mathcal{D}_- sia pari all'indice, ovvero a 1. Tale assunzione è detta assunzione di genericità. Da tale assunzione segue che, detta $\gamma(\tau)$ una soluzione di 12

$$\ker \mathcal{D}_- = \{\gamma(\tau + \tau_1) : \tau_1 \in \mathbb{R}\}$$

Si osserva che per gli elementi del nucleo

$$\frac{d}{d\tau_1} \gamma^i = \frac{d\gamma^i}{d\tau}$$

L'operatore \mathcal{D}_- agisce anche sulla variabile fermionica $\bar{\psi}^i$; detto $\bar{\psi}_0$ l'autovettore corrispondente all'autovalore nullo di \mathcal{D}_- vale la seguente espansione per $\bar{\psi}^i$

$$\bar{\psi}^i = \frac{d\gamma^i}{d\tau} \bar{\psi}_0 + \dots$$

dove i termini $+\dots$ sono termini corrispondenti agli autovalori non nulli di \mathcal{D}_- .

Il contributo al path-integral è dunque

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \int d\bar{\psi}_0 \bar{\psi}_0 \frac{d\gamma^i}{dt} \partial_i h \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \frac{d\gamma^i}{d\tau_1}(\tau_1) \partial_i h(\gamma(\tau_1)) = h(P_j) - h(P_i)$$

Per quanto discusso nel paragrafo sugli istantoni il valore del path-integral, escludendo i termini corrispondenti all'autovalore nullo di \mathcal{D}_- , è dato da

$$\frac{\det' \mathcal{D}_-}{\sqrt{\det' (\mathcal{D}_-^\dagger \mathcal{D}_-)}} = \frac{\det' \mathcal{D}_-}{|\det' \mathcal{D}_-|} = \text{sgn} (\det' \mathcal{D}_-) = \pm 1 \quad (13)$$

dove il simbolo \det' indica il prodotto degli autovalori non nulli. Tendendo conto di tutti i termini calcolati si conclude che il contributo di un istantone al path-integral 11 è pari a

$$\pm (h(P_j) - h(P_i)) e^{-t(h(P_j) - h(P_i))}$$

Dunque il prodotto scalare che si voleva calcolare vale

$$\langle \Psi_j | Q | \Psi_i \rangle = \sum_{\gamma} n_{\gamma} e^{-t(h(P_j) - h(P_i))}$$

Il termine n_{γ} è il segno calcolato in 13. Tuttavia non è semplice comprendere di che segno si tratti dal calcolo esplicito del path-integral. Per definire tale segno è conveniente ricordare che il prodotto scalare poteva essere espresso come integrale, quindi il segno n_{γ} è il segno dato dall'integrale

$$\int \bar{\Psi}_j \wedge \star Q \Psi_i$$

valutato lungo γ . Per determinare tale segno è sufficiente valutare se l'integrando lungo γ ha orientazione concorde o discorde con quella della varietà M . Per rendere più precisa tale affermazione, dando un metodo sempre valido per calcolare n_{γ} , si consideri lo spazio $T_{P_i}^- M$ degli autovalori negativi dell'Hessiano di h nel punto P_i . Su tale spazio vettoriale la forma Ψ_i definisce un'orientazione. Lo spazio così costruito può essere trasportato attraverso il flusso spettrale generando un sotto-fibrato vettoriale T_i^- . Lo stesso procedimento può essere ripetuto per il punto P_j e la forma Ψ_j in modo da ottenere un secondo sotto-fibrato vettoriale T_j^- . T_i^- è un sotto-fibrato di T_j^- (si ricordi che $\mu_j = \mu_i + 1$). L'assunzione di genericità assicura che, in una generica situazione, solo un autovalore diventa negativo lungo il flusso spettrale e l'autovettore corrispondente è il vettore v_{γ} tangente a γ . La forma $Q\Psi_i$ definisce un'orientazione su $\mathbb{R} v_{\gamma} \oplus T_i^-$. Dunque se tale orientazione è concorde con quella determinata da Ψ_j su T_j^- allora $n_{\gamma} = 1$, altrimenti $n_{\gamma} = -1$.

Determinato tale segno si può concludere che

$$Q\Psi_i = \sum_{j: \Delta j=1} \Psi_j \sum_{\gamma} n_{\gamma} e^{-t(h(P_j) - h(P_i))} \quad (14)$$

L'esponenziale può anche essere eliminato attraverso un riscaldamento delle funzioni d'onda, infatti esso non contiene alcuna informazione fisica. Gli spazi generati dagli stati Ψ_i

$$C^{\mu} = \bigoplus_{\mu_i=\mu} \mathbb{C} \Psi_i$$

definiscono a loro volta il complesso di cocatene, detto complesso di Witten

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{Q} C^1 \xrightarrow{Q} C^2 \xrightarrow{Q} \dots \xrightarrow{Q} C^{m-1} \xrightarrow{Q} C^m \xrightarrow{Q} 0$$

Si osservi che tale definizione è ben posta, infatti Q è nilpotente. I gruppi di coomologia associati a questo complesso di cocatene, ovvero i gruppi

$$H^{\mu}(Q) = \frac{\ker(Q : C^{\mu} \rightarrow C^{\mu+1})}{\text{Im}(Q : C^{\mu-1} \rightarrow C^{\mu})}$$

sono gli spazi generati dagli stati ad energia nulla.

Essendo il numero di Betti B_p il numero di stati ad energia nulla allora B_p è dato dalla dimensione dei gruppi di coomologia del complesso di cocatene appena definito.

Si è dunque esibito un algoritmo per trovare esattamente il numero di Betti.

Complesso di Witten per \mathbb{T}^2

A titolo esemplificativo si ricostruisce il complesso di Witten per il toro \mathbb{T}^2 . Si è visto che per la funzione di Morse

$$h(x, y) = \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

non vale l'uguaglianza $B_p = M_p$. Si risolvono allora le equazioni per gli istantoni 12. Avendo scelto la metrica euclidea le equazioni sono

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{a} \sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right)$$

Si tratta di due equazioni differenziali a variabili separabili. Le soluzioni possibili, se non sono costanti, sono date da

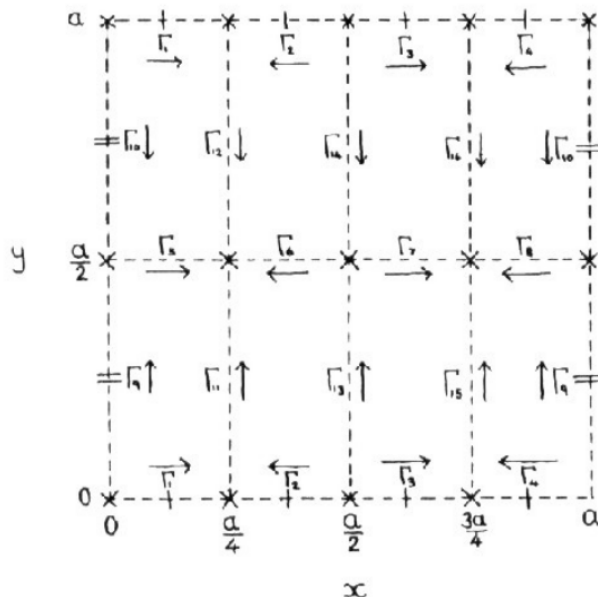
$$\cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) = -\tanh(t + c_x) \quad \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) = -\tanh(t + c_y) \quad (15)$$

dove c_x e c_y sono costanti reali. Biogna però ricordare che i lati del quadrato sono soggetti ad opportune relazioni di equivalenza, che rendono leggermente più complicato lo studio degli istantoni: ad esempio il punto $(0, 0)$ e il punto $(0, a/2)$ sono legati da due istantoni: il primo che dal punto $(0, 0)$ del piano sale l'asse y e il secondo che dal punto $(0, a)$ scende lungo lo stesso asse.

Prima di applicare esplicitamente l'equazione 14 si discute la scelta dei segni n_γ che viene effettuata seguendo il ragionamento prima esposto. Si prenda ad esempio la curva che parte dal punto $(a/2, 0)$ e arriva al punto $(0, a/2)$: la soluzione per x non è rilevante in quanto la forma associata al punto $(0, a/2)$ è proporzionale a dy . La soluzione per y è data in 15. Si osserva che tale istantone parte da un punto con componente y minore del punto di arrivo e deve essere monotona: la seconda componente del vettore tangente è positiva e positivo è anche il segno n_γ per questo istantone. Consideriamo poi la curva che parte dal punto $(a/2, 0)$ e giunge al punto $(a/2, a/2)$; anche in questo caso nessuna delle due componenti è costante, ma entrambe le soluzioni, ancora una volta monotone, sono date in 15. La forma associata al punto critico $(a/2, a/2)$ è una forma proporzionale a dy e dunque ci si concentra esclusivamente sulla seconda componente della curva. Questa ha derivata negativa in quanto la seconda componente del punto di partenza è minore della seconda componente del punto di arrivo e dunque ha segno n_γ negativo. Si procede analogamente per tutti gli istantoni.

Uno schema degli istantoni, in cui è indicata anche la direzione, è mostrato in figura 4.

Figura 4: Schema degli istantoni per il toro \mathbb{T}^2 .



Il complesso di Witten è dato da

$$0 \rightarrow \mathbb{C}\Psi_{(0,0)} \oplus \mathbb{C}\Psi_{(a/2,0)} \xrightarrow{Q} \mathbb{C}\Psi_{(0,a/2)} \oplus \mathbb{C}\Psi_{(a/2,a/2)} \oplus \mathbb{C}\Psi_{(a/4,0)} \oplus \mathbb{C}\Psi_{(3a/4,0)} \xrightarrow{Q} \mathbb{C}\Psi_{(a/4,a/2)} \oplus \mathbb{C}\Psi_{(3a/4,a/2)} \xrightarrow{Q} 0$$

Si applica esplicitamente la formula 14 (i cammini sono nominati come in figura 4): per i punti critici con indice di Morse nullo si ha

$$Q\Psi_{(0,0)} = n_{\Gamma_1}\Psi_{(a/4,0)} + n_{\Gamma_4}\Psi_{(3a/4,0)} + (n_{\Gamma_9} + n_{\Gamma_{10}})\Psi_{(0,a/2)} = \Psi_{(a/4,0)} - \Psi_{(3a/4,0)}$$

e procedendo in modo analogo

$$Q\Psi_{(a/2,0)} = n_{\Gamma_3}\Psi_{(3a/4,0)} + n_{\Gamma_2}\Psi_{(a/4,0)} = \Psi_{(3a/4,0)} - \Psi_{(a/4,0)}$$

Osservando la tabella 2 si potrebbe pensare che $\Psi_{(3a/4,0)}$ e $\Psi_{(a/4,0)}$ siano la stessa 0-forma, tuttavia bisogna ricordare che le carte locali con cui sono costruite sono diverse. La prima carta locale è tale per cui $h(3a/4,0) = 0$ mentre la seconda carta locale è stata scelta in modo che $h(a/4,0) = 0$. Dunque $Q\Psi_{(a/2,0)}$ e $Q\Psi_{(0,0)}$ sono entrambi diversi da zero, ma si osserva che la loro somma è nulla. Di conseguenza la forma $\Psi_{(a/2,0)} + \Psi_{(a/2,0)}$ rappresenta il nucleo dell'operatore Q con dominio ristretto a $\mathbb{C}\Psi_{(0,0)} \oplus \mathbb{C}\Psi_{(a/2,0)}$. Si conclude che

$$H^0(Q) = \{ \rho (\Psi_{(a/2,0)} + \Psi_{(a/2,0)}) : \rho \in \mathbb{C} \}$$

Procedendo in modo analogo si ottiene che

$$H^1(Q) = \frac{\{ \lambda_1 (\Psi_{(0,a/2)} + \Psi_{(a/2,a/2)}) + \lambda_2 \Psi_{(a/2,0)} + \lambda_3 \Psi_{(3a/4,0)} : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \}}{\{ \lambda_4 (\Psi_{(3a/4,0)} - \Psi_{(a/4,0)}) : \lambda_4 \in \mathbb{C} \}}$$

$$H^2(Q) = \frac{\{ \sigma_1 \Psi_{(a/4,a/2)} + \sigma_2 \Psi_{(3a/4,a/2)} : \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C} \}}{\{ \sigma_3 (\Psi_{(a/4,a/2)} - \Psi_{(3a/4,a/2)}) : \sigma_3 \in \mathbb{C} \}}$$

Le dimensioni dei gruppi di coomologia così trovati sono

$$\dim H^p(Q) = \begin{cases} 1 & p = 0, 2 \\ 2 & p = 1 \\ 0 & p \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$

e sono pari ai numeri di Betti B_p

Appendice: Indice dell'operatore \mathcal{D}_-

Si vuole dimostrare che l'indice dell'operatore \mathcal{D}_- , se applicato ad una qualunque mappa ϕ tale per cui $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \phi(\tau) = P_i$ e $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi(\tau) = P_j$, è pari alla differenza degli indici di Morse di P_j e P_i . L'idea è di costruire un operatore $\tilde{\mathcal{D}}_-$ per cui è semplice dimostrare tale affermazione per poi mostrare che l'indice di tale operatore è uguale all'indice di \mathcal{D}_-

Si definisca la generalizzazione del concetto di Hessiano ponendo

$$H_h : v^i \mapsto g^{ij} D_j \partial_k h v^k$$

Rispetto ad una base ortonormale $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$, H_h è rappresentabile come una matrice $n \times n$ simmetrica e quindi diagonalizzabile. Diciamo λ_i gli autovalori di tale matrice. Consideriamo una curva $\phi(\tau)$ tale per cui $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \phi(\tau) = P_i$ e $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi(\tau) = P_j$. Vale allora l'equazione agli autovalori

$$H_h(\phi(\tau)) e_i(\tau) = \lambda_i(\tau) e_i(\tau)$$

dove $e_i(\tau)$ è una base ortonormale per $T_{\phi(\tau)}M$ per ogni τ ; la famiglia di autovalori $\lambda_i(\tau)$ è detta flusso spettrale.

Siano μ_j e μ_i gli indici di Morse di P_j e P_i rispettivamente. Dalla definizione di indici di Morse si deduce che la differenza $\Delta\mu = \mu_j - \mu_i$ corrisponde al numero di autovalori $\lambda_i(\tau)$ che da positivi diventano negativi a cui si deve sottrarre il numero di autovalori che da negativi diventano positivi, in formule

$$\Delta\mu = \#\{i : \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \lambda_i > 0, \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda_i < 0, \} - \#\{i : \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \lambda_i < 0, \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda_i > 0, \}$$

Si consideri l'operatore

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\pm} = \frac{d}{d\tau} \pm \text{diag}(\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \dots, \lambda_n(\tau))$$

È evidente che $-\tilde{\mathcal{D}}_+ = \tilde{\mathcal{D}}_-$. Il nucleo dell'operatore $\tilde{\mathcal{D}}_-$ è composto dalle soluzioni dell'equazione $\tilde{\mathcal{D}}_{\pm} f_{\pm} = 0$, tali soluzioni sono

$$f_{i \pm} = \tilde{e}_i \exp\left(\mp \int_0^{\tau} d\tau' \lambda_i(\tau')\right)$$

dove \tilde{e}_i è l' i -esima componente della base canonica di \mathbb{R}^n . La soluzione f_{i+} è normalizzabile solo se $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \lambda_i > 0$ e $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda_i < 0$, se ne conclude la dimensione del nucleo di $\tilde{\mathcal{D}}_+$ è data da $\#\{i : \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \lambda_i > 0, \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda_i < 0, \}$. Le funzioni f_{i-} sono normalizzabili solo se $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \lambda_i < 0$ e $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda_i > 0$ e dunque la dimensione del nucleo di $\tilde{\mathcal{D}}_-$ è $\#\{i : \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \lambda_i < 0, \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda_i > 0, \}$.

Si conclude che

$$\text{Ind } \tilde{\mathcal{D}}_- = \dim \ker \tilde{\mathcal{D}}_- - \dim \ker \tilde{\mathcal{D}}_+ = \Delta\mu$$

Si osserva che $\tilde{\mathcal{D}}_-$ agisce sul fibrato ϕ^*TM e si può scrivere come $\tilde{\mathcal{D}}_- = \tilde{D}_\tau - \phi^*H_h$ dove \tilde{D}_τ è la connessione tale per cui i vettori $e_i(\tau)$ sono sempre paralleli.

Allo stesso modo l'operatore \mathcal{D}_- agisce sul fibrato ϕ^*TM e si può scrivere come $\mathcal{D}_- = D_\tau - \phi^*H_h$, dove D_τ è l'operatore indotto dalla connessione di Levi Civita.

Essendo \tilde{D}_τ e D_τ connessioni agenti sullo stesso fibrato allora devono avere lo stesso indice, per cui

$$\text{Ind } \tilde{\mathcal{D}}_- = \text{Ind } \mathcal{D}_- = \Delta\mu$$

come volevasi dimostrare.

Bibliografia

- [1] Yu.A. Golfand e E.P. Likhtman. «Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance». In: *JETP* 13.10 (1971), pp. 323–326. DOI: <https://inspirehep.net/literature/68412>.
- [2] Martin A. Guest. «Morse theory in the 1990's». In: (2001). DOI: <https://arxiv.org/abs/math/0104155v1>.
- [3] Kentaro Hori et al. *Mirror Symmetry*. 10. 2003, pp. 151–236.
- [4] Nicholas Mee. *Supersymmetric Quantum Mechanics and Geometry*. 1989. URL: <http://www.virtualimage.co.uk/nickmee/html/supersymmetry.html>.
- [5] Kazuto Oshima. «De Rham Cohomology of $SO(n)$ by Supersymmetric Quantum Mechanics». In: *J.Math.Phys.* 10 (1998), pp. 3120–3130. DOI: <https://arxiv.org/abs/hep-th/9802053>.
- [6] Riccardo Rattazzi. *The Path Integral approach to Quantum Mechanics Lecture Notes for Quantum Mechanics IV*. 2009. URL: <https://userswww.pd.infn.it/~feruglio/rattazzi.pdf>.
- [7] Edward Witten. «Supersymmetry and Morse Theory». In: *Differential Geometry* 17 (1982), pp. 661–692. URL: https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.jdg/1214437492.