

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
LAUREA MAGISTRALE IN FISICA

Modellizzazione di serie finanziarie, scaling e definizione di tempo

Autore:
Quirici Lorenzo,
1127887

Relatore:
Prof. Stella Attilio
Corelatore:
Dott. Caraglio Michele

Anno accademico 2016-2017

Indice

1	Proprietà statistiche	5
1.1	I fatti stilizzati	6
1.2	Problematiche dell'analisi statistica	9
1.3	La PDF dei ritorni	11
2	Il tempo in Finanza	12
2.1	Una digressione sul tempo	14
2.2	Alcune scale temporali utilizzate	15
3	Financial Scaling Time	17
3.1	Vantaggi e limiti del FST	18
3.2	Requisiti, proprietà e costruzione del FST	19
3.3	Metodologia di analisi	20
3.4	Kolmogorov-Smirnov test	21
3.5	L'analisi	22
3.6	I risultati	23
3.7	L'additività del FST	63
4	Conclusioni	66
	Bibliografia	70

Introduzione

In questo lavoro vogliamo proporre una nuova definizione di scala temporale, basata su una simmetria di scaling, che ci consenta di semplificare e, soprattutto, rendere coerente lo studio delle serie temporali finanziarie.

La teoria della relatività generale ci fornisce un notevole esempio di una costruzione non banale di scala temporale basata su un principio di simmetria: il tempo proprio di un corpo in movimento è definito a partire dalla richiesta di invarianza delle leggi fisiche per diversi osservatori [3].

Questo esempio ci suggerisce di guardare altri ambiti in cui un principio di simmetria potrebbe aiutarci a definire una utile scala temporale, in particolar modo nei campi in cui sono disponibili per lo studio statistico solo serie temporali non riproducibili.

Le serie temporali non stazionarie sono molto comuni in Meteorologia [18], Sismologia [25], Finanza [3]. La non stazionarietà delle serie determina un grosso problema nell'analisi statistica dei fenomeni. Quando si acquisiscono dati osservativi relativi ad un fenomeno non stazionario, come ad esempio un terremoto o i ritorni finanziari, bisogna capire come analizzare, interpretare e, soprattutto, cosa si intende con proprietà statistiche dei dati. La stazionarietà è una richiesta fondamentale per poter definire le proprietà di un fenomeno. Quando registriamo una serie temporale, stiamo acquisendo la realizzazione di un processo la cui dinamica non può essere replicata ed è pertanto unica. A causa di ciò le serie temporali costituiscono un problema per le analisi statistiche, poiché dobbiamo trovare un modo per trattare dei dati che non possono essere riprodotti e che hanno una evoluzione temporale non deterministica.

Quando si analizza statisticamente un fenomeno non riproducibile su base di serie temporale si sfruttano le medie empiriche. Affinché queste medie empiriche abbiano pieno senso è necessario che certe proprietà siano statisticamente conservate nel tempo. Ad esempio, se si desidera campionare una distribuzione di ritorni $r_{\Delta t}$ definiti su un intervallo di tempo Δt , campionando i ritorni di tanti intervalli Δt diversi lungo la serie temporale, devo assumere che la distribuzione risulti stazionaria, cioè non dipenda da dove si colloca l'intervallo lungo la serie temporale. Non è detto che i ritorni soddisfino questa proprietà nel tempo fisico a causa di effetti stagionali che ne caratterizzano il processo, come, ad esempio, la variabilità intragiornaliera dei ritorni e le chiusure del mercato nel fine settimana [11].

A seconda del fenomeno analizzato sono state proposte diverse soluzioni per rendere il fenomeno stazionario in modo da poterlo studiare statisticamente. Ad esempio, studiando i terremoti [25], si è osservato che la distribuzione dei periodi di attesa tra i terremoti, diventa invariante in scala se si ridefinisce opportunamente il tempo. In questo modo il processo dei tempi di attesa diventa stazionario [3].

In Finanza non è facile definire una scala temporale opportuna per descrivere il processo dei ritorni [9]. Il tempo fisico è ben definito, ma i mercati sono soggetti a chiusure notturne, nel fine settimana e festive. Utilizzando il tempo fisico non siamo in grado di modellizzare la dinamica dei prezzi durante la chiusura, né di tener conto in maniera immediata delle nuove informazioni che influenzano i mercati [9]. Si utilizzano diverse scale temporali, basate sulle caratteristiche del processo o sul metodo di registrazione della serie, per rendere il processo dei ritorni stazionario. Ad esempio il business time [7, 9] è il tempo che trascorre tra l'apertura e la chiusura del mercato. In questa scala vengono eliminati periodi di chiusura e i relativi ritorni, rompendo la corrispondenza tra i prezzi e i ritorni. Oppure vi è il transaction time [7, 9, 26] definito in base al numero di transazioni, o al volume, del mercato. Entrambe queste scale sono additive, ma escludono i periodi di chiusura del mercato, alterando la corrispondenza fra processo dei ritorni e evoluzione dei prezzi.

La non stazionarietà del processo dei ritorni è dovuta inoltre, e soprattutto, agli effetti stagionali, come, ad esempio, l'alta variabilità infragiornaliera dei ritorni, le chiusure dei week-ends. Le stagionalità determinano un andamento periodico "spiccato" e predicibile nell'attività dei mercati, il quale risulta essere di difficile analisi statistica quando si vogliono indagare le caratteristiche del processo dei ritorni [7]. Sono state definite delle scale temporali, come il theta time (θ -time) [7, 26] o il tau time (τ -time) [7, 26] che, contraendo o dilatando il tempo in base all'intensità dell'attività finanziaria riescono a rimuovere questi effetti stagionali oltre a rendere il processo stazionario. Altre scale ancora tendono ad assegnare un intervallo di tempo arbitrario ai periodi di chiusura. Inoltre scale come il tau time non soddisfano la proprietà di additività.

Il processo dei ritorni è non stazionario soprattutto a livello infragiornaliero. Se si calcola la volatilità infragiornaliera nel tempo fisico, si osserva che questa ha la caratteristica forma a U dei processi infragiornalieri finanziari non stazionari. In particolar modo tutti i giorni presentano una volatilità simile.

La scala temporale da noi proposta, chiamata financial scaling time (FST), è definita a partire da una simmetria di scaling semplice. Questa simmetria, molto utilizzata nel gruppo di rinormalizzazione della meccanica statistica, ci permette di unificare e analizzare in modo semplice e generale dati empirici raccolti in diverse condizioni. In questo modo siamo in grado di identificare le stesse proprietà statistiche osservando il fenomeno a diverse scale [9].

La ricerca del FST è cominciata dall'osservazione del comportamento periodico dell'autocorrelazione di volatilità dei ritorni, in determinate finestre temporali. Questo comportamento periodico ci ha portato a pensare che ogni giorno di attività finanziaria sia una singola realizzazione dello stesso processo e queste realizzazioni si comportano in maniera simile. Abbiamo diviso pertanto la serie temporale nei diversi giorni di attività finanziaria, ognuno dei quali costituisce una singola realizzazione (storia) indipendente dello stesso processo e abbiamo raggruppato queste storie giornaliere in ensemble. In questo modo abbiamo potuto approssimare le medie d'ensemble ai valori di aspettazione.

Considerando l'ensemble delle diverse storie giornaliere abbiamo analizzato i ritorni finanziari $r_{\Delta t}$ valutati su diversi intervalli temporali Δt .

Si è osservata l'esistenza di una simmetria approssimata quando sono state confrontate le PDFs dei ritorni valutati su intervalli intergiornalieri diversi. Più precisamente per intervalli che vanno da alcuni giorni a diverse settimane, le

PDFs empiriche dei ritorni finanziari sono osservate essere approssimativamente invarianti in scala, col significato fisico di invarianza di scala dei fenomeni critici [3, 12].

Questa simmetria di scaling non è riscontrata però quando si vanno ad analizzare i ritorni valutati su intervalli intragiornalieri, dove le non stazionarietà incidono sulle PDFs dei ritorni [3]. Il financial scaling time è definito, pertanto, a partire dalla richiesta di un'invarianza di scala anche per le PDFs dei ritorni valutati su intervalli infragiornalieri. Ovvero, il FST è definito in modo tale che sia soddisfatta una simmetria di scaling anche per i regimi intragiornalieri dei ritorni.

Nonostante molti studi propongano un multiscaling [27, 28], il quale prevede l'utilizzo di diversi esponenti di scaling a seconda del momento della distribuzione che si vuole studiare, quella da noi utilizzata è una simmetria di scaling semplice con esponente $1/2$. Questa scelta, come vedremo, ha molti vantaggi tra cui quello di garantire l'additività della nostra scala temporale [3].

Il nostro approccio si basa solamente sui dati empirici ed è indipendente da modelli parametrici che prevedono il calcolo di determinati momenti della distribuzione.

I risultati conseguiti sono validi per periodi che vanno da alcuni minuti a diversi giorni [3], in tempo fisico, e ci consentono di dare una naturale quantificazione ai periodi di chiusura del mercato, non modificando le naturali proprietà della PDF dei ritorni. In questo modo potremmo utilizzare la PDF per applicazioni finanziarie successive. Quando valutata sul FST la PDF dei ritorni, mantiene le sue caratteristiche originali ed è stazionaria. Attraverso la stazionarietà possiamo, ad esempio, in linea di principio, sfruttare medie empiriche molto ricche, poiché disponiamo di una quantità consistente di dati, e non medie di ensemble per poter effettuare alcune previsioni di mercato. Attraverso il FST possiamo sfruttare la PDF dei ritorni per analisi finanziarie future.

Il lavoro è strutturato come segue. Nel primo capitolo definiremo le quantità analizzate, definiremo le proprietà statistiche dei ritorni e introdurremo i fatti stilizzati. Nel secondo capitolo discuteremo le problematiche statistiche dell'analisi delle serie temporali ed introdurremo alcune scale temporali utilizzate in finanza. Nel terzo capitolo introdurremo la scala temporale da noi proposta, spiegando le motivazioni della nostra scelta ed esponendo la metodologia con cui è stata ricavata. Successivamente descriveremo gli assets analizzati e i campioni considerati nella nostra analisi, andando ad esporre i risultati conseguiti. Discuteremo alcune caratteristiche del FST, in particolar modo il suo legame con la volatilità intragiornaliera e l'additività, confronteremo tra loro l'andamento dei diversi assets. Il quarto e ultimo capitolo è dedicato alle conclusioni.

Capitolo 1

Proprietà statistiche

A partire dagli anni Novanta, grazie all'avvento di computers più potenti, è stato possibile acquisire ed elaborare un numero sempre maggiore di dati finanziari [2, 7]. Questi dati sono i prezzi s , degli assets, i quali oggi vengono registrati tick by tick (transazione per transazione) con una frequenza superiore ai 10^3 s^{-1} . I prezzi di un asset $s(t)$ nel tempo t costituiscono una serie temporale finanziaria, la quale è una collezione di dati ottenuti attraverso misure successive di una grandezza eseguite ad intervalli di tempo consecutivi.

Nel nostro caso la grandezza in questione è il prezzo degli assets, il quale è stato registrato, nei campioni che analizzeremo, ogni minuto. Inoltre le serie temporali costituiscono una determinata realizzazione, generalmente di durata finita, di un processo stocastico a tempo discreto.

Volendo dare una definizione generale, non rigorosa, un processo stocastico è una famiglia di variabili aleatorie, indicizzata da una qualche famiglia di parametri, che chiamiamo ω .

Quando registriamo una serie temporale, stiamo registrando la traiettoria della variabile $s(t)$, per un determinato ω , ovvero una ben precisa realizzazione. Il parametro omega però è una variabile nascosta, ovvero non sappiamo quanto valga, sappiamo solo che è fissato.

La nostra serie temporale $s(t)$ è costituita dall'incremento dei prezzi minuto per minuto:

$$s(t + \Delta t) = s(t) + \Delta s_t \quad (1.1)$$

ove $\Delta t = 1$ minuto e Δs_t costituisce l'incremento assoluto del prezzo $s(t)$.

Si definisce **ritorno** finanziario $r(t)$, l'incremento di prezzo relativo

$$r_{\Delta t}(t) = \frac{\Delta s_t}{s(t)} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{s(t)} \approx \ln s(t + \Delta t) - \ln s(t), \quad (1.2)$$

dove l'approssimazione vale se l'incremento di prezzo relativo all'intervallo Δt è piccolo [4].

Nella moderna letteratura finanziaria è postulato che la variabile rilevante per lo studio delle serie temporali non è l'incremento di prezzo Δs , ma il ritorno $r_{\Delta t}$: infatti differenti assets possono avere prezzi completamente diversi, ma comunque ritorni giornalieri ($\Delta t = 24 \text{ h}$) simili [4].

In seguito utilizzeremo la seguente definizione di ritorno:

$$r_{\Delta t}(t) = \ln s(t) - \ln s(t - \Delta t) = \ln \left(\frac{s(t)}{s(t - \Delta t)} \right). \quad (1.3)$$

dove Δt è l'intervallo su cui è calcolato il ritorno.

Questa definizione implica in realtà il fatto che si stiano considerando ritorni aggregati. Sfruttando l'additività del tempo fisico, consideriamo un intervallo temporale T , e suddividiamolo in n intervalli uguali Δt , $T = n\Delta t$. Abbiamo quindi $n + 1$ istanti temporali, tali che $t_k - t_{k-1} = \Delta t$, $t_k \in \{t_1, \dots, t_n\}$.

Calcoliamo i ritorni, dell'intervallo T e della somma dei singoli intervalli Δt . Si ha che:

$$\begin{aligned}
 r_T(t_n) &= \sum_{k=1}^n r_{\Delta t}(t_k) \\
 &= \ln s(t_n) - \ln s(t_n - \Delta t) + \ln s(t_{n-1}) - \ln s(t_{n-1} - \Delta t) + \dots \\
 &\quad \dots + \ln s(t_1) - \ln s(t_1 - \Delta t) \\
 &= \ln s(t_n) - \ln s(t_1 - \Delta t) \\
 &= \ln s(t_n) - \ln s(t_0) \\
 &= \ln s(t_n) - \ln(t_n - T) \\
 &= r_T(t_n).
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Abbiamo quindi mostrato che Eq. (1.3) sottointende l'aggregazione dei ritorni. Definiamo poi **volatilità** dei ritorni, la misura della loro variazione in valore assoluto, in una data finestra temporale. In formule $\sigma_{\Delta t}(t) = \langle |r_{\Delta t}(t)| \rangle_t = \sum_{i=1}^N |r_{\Delta t}(t_i)|/N$, ove $\langle \cdot \rangle_t$ indica la media temporale. La volatilità misura quindi la dispersione dei ritorni rispetto al loro valore medio, quando questo è nullo. Nel caso non lo sia è sufficiente traslare il processo sottraendo ai ritorni il loro valor medio.

1.1 I fatti stilizzati

Molte analisi del mercato finanziario hanno cercato di correlare l'andamento dei valori degli assets con determinati eventi economici o politici, considerando questi ultimi alla base delle fluttuazioni dei prezzi. Questo tipo di approccio porta a pensare che diversi assets abbiano comportamenti differenti poiché legati ad avvenimenti diversi. Mezzo secolo di studi empirici sulle serie temporali finanziarie mostra, che nel caso in cui si esaminino le proprietà di queste da un punto di vista statistico, i ritorni, apparentemente casuali, condividono proprietà statistiche non banali [11].

Queste proprietà, chiamate **fatti stilizzati**, sono state definite a partire da un comportamento comune che è stato osservato nell'andamento dei ritorni di diversi assets, in periodi diversi. Tali proprietà riassumono pertanto un comportamento qualitativo comune tra gli assets [11]. Se si è interessati invece alle proprietà peculiari del singolo asset, queste devono essere indagate in maniera più specifica e approfondita rispetto alla descrizione data dai fatti stilizzati.

Riassumiamo i fatti stilizzati principali, osservabili nella maggior parte degli asset, seguendo il lavoro di Cont R. [11].

- **Assenza di autocorrelazione:** data una serie di ritorni a tempo discreto $r_{\Delta t}(0), r_{\Delta t}(\Delta t), \dots, r_{\Delta t}(n\Delta t)$ la loro autocorrelazione (lineare) empirica

$$\begin{aligned}
 C(T) &= \text{corr}(r_{\Delta t}(t), r_{\Delta t}(t + T)) = \langle r_{\Delta t}(t)r_{\Delta t}(t + T) \rangle_t \\
 &= \frac{1}{n - k + 1} \sum_{i=0}^{n-k} r_{\Delta t}(i\Delta t)r_{\Delta t}((i + k)\Delta t),
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

ove $\langle \cdot \rangle_t$ indica la media temporale lungo la serie temporale, $T = k\Delta t$, diventa pressoché nulla per intervalli di tempo T superiori ai $10 \div 20$ minuti, sotto i quali, invece, sono osservabili effetti microscopici di mercato, poiché i prezzi reagiscono alle nuove informazioni disponibili.

Questa osservazione è stata ampiamente documentata ed è spesso citata a supporto dell'ipotesi di mercato efficiente, ovvero quando tutti gli investitori hanno le stesse informazioni e quindi i prezzi dei titoli quotati rispecchiano le informazioni disponibili [11]. Se i movimenti dei prezzi avessero correlazioni significative, queste potrebbero essere sfruttate per formulare delle strategie di guadagno certo, privo di rischi: si avrebbe in tal caso arbitraggio, ma in un mercato equo ideale si dovrebbe avere assenza di opportunità di arbitraggio.

- **Allargamento delle code:** la distribuzione (non condizionata) dei ritorni ha code larghe (fat tails) rispetto a quelle delle distribuzione normale, che pertanto non è idonea a descrivere la PDF dei ritorni marginali, poiché sottostima la probabilità degli eventi più rari. Le fat tails hanno un andamento a potenza: nella recente letteratura le code sono state quantificate attraverso la kurtosi \mathcal{K} , o momento quarto, della distribuzione, che misura quanto è piccata la distribuzione, rispetto alla distribuzione gaussiana, la cui kurtosi è 3 [1].

$$\mathcal{K} = \frac{\langle (r_{\Delta t}(t) - \langle r_{\Delta t}(t) \rangle)^4 \rangle_t}{\sigma_{\Delta t}^4} - 3, \quad (1.6)$$

dove $\sigma_{\Delta t}^2$ è la varianza del ritorno e per una distribuzione normale ($\mathcal{K} = 0$).

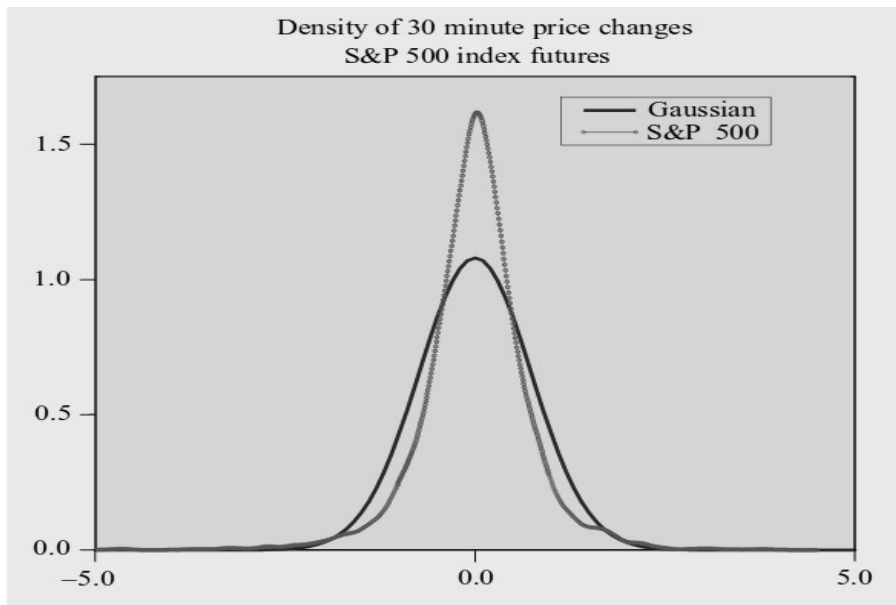


Figura 1.1: Densità di probabilità di ritorni calcolati ogni mezz'ora per l'asset S&P nel 1995. E' riportata per confronto la distribuzione gaussiana.

- **Asimmetria perdita-guadagno:** la PDF dei ritorni $p(r_{\Delta t}(t))$ mostra una asimmetria: si osservano grandi ritorni negativi ma non altrettanto ampi aumenti dei ritorni.
- **Gaussianità per aggregazione:** aumentando l'intervallo Δt su cui si calcolano i ritorni, la loro distribuzione tende sempre più a quella gaussiana. Quando infatti non vi è correlazione tra questi, si verificano le condizioni del teorema del limite centrale [1, 2, 5, 13].

Questo teorema asserisce che la somma di n variabili aleatorie i.i.d., aventi la stessa varianza σ^2 , finita, e media nulla, nel limite $n \rightarrow \infty$ tende a distribuirsi secondo una gaussiana con scarto quadratico medio pari a $\sigma\sqrt{n}$.

Osserviamo pertanto da Figura 1.2 che, aumentando l'intervallo temporale su cui vengono calcolati i ritorni, la loro distribuzione tende a quella normale.

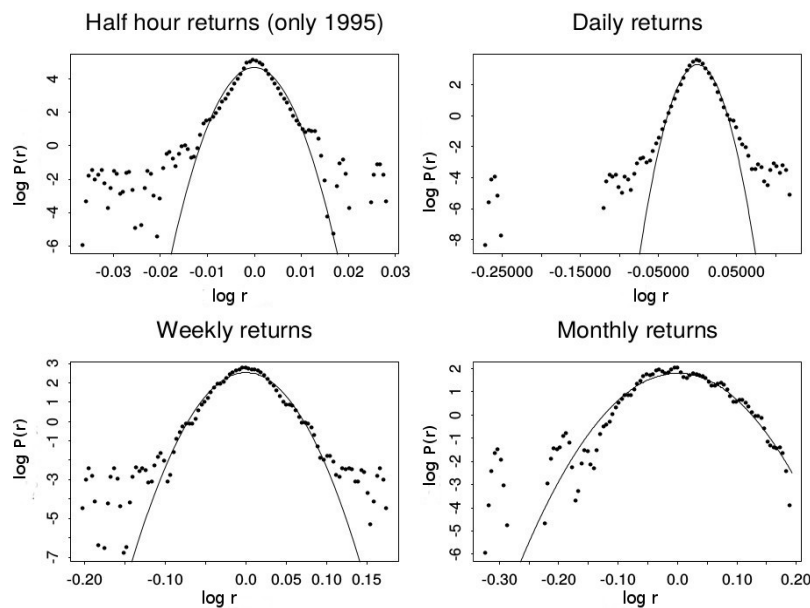


Figura 1.2: Grafico delle densità empiriche dei ritorni dell'asset IBM dal 2 Gennaio 1973 al 25 Gennaio 1996, e delle densità normali stimate. I ritorni calcolati ogni mezz'ora si riferiscono all'anno 1995. L'asse delle ordinate è in scala logaritmica per mostrare l'andamento delle code.

- **Clustering di volatilità:** La volatilità misura l'ampiezza delle fluttuazioni dei prezzi in una data finestra temporale, più generalmente si riferisce al grado di imprevedibilità dei cambi di una data variabile nel tempo. Nelle serie temporali finanziarie si osserva che la volatilità dei ritorni è elevata per lunghi periodi di tempo e bassa per i grandi intervallo di tempo successivi: ampi cambiamenti tendono a essere seguiti da ampie variazioni, sia positive che negative, e piccole variazioni tendono a essere seguite da piccoli cambiamenti. Anticipiamo la formula che abbiamo utilizzato nel corso della nostra analisi per il calcolo della volatilità

$$\sigma_{\Delta t}(t - t_0) = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^L (r_{\Delta t}(t - t_0)^{(l)})^2}{L}} \quad (1.7)$$

dove t_0 indica l'istante d'inizio del nostro processo ($t_0=9:40$) e l indica una particolare storia, o realizzazione, della nostra serie. Spiegheremo questo concetto nel Cap. 3.

- **Lento decadimento dell'autocorrelazione nei ritorni assoluti:** questo fatto può essere considerato dimostrazione di quello precedente. Se infatti consideriamo come misura della volatilità il valore assoluto dei ritorni, si ha che la funzione di autocorrelazione dei ritorni assoluti (funzione di autocorrelazione della volatilità) è positiva e decade lentamente con legge a potenza ($\sim \text{const}/T^\eta$, $\eta \in [0.2 : 0.4]$) [5],

$$C_{\sigma, \Delta t}(T) = \frac{\langle |r_{\Delta t}(t+T)| |r_{\Delta t}(t)| \rangle_t - \langle |r_{\Delta t}(t+T)| \rangle_t \langle |r_{\Delta t}(t)| \rangle_t}{\sqrt{(\langle [r_{\Delta t}(t+T)]^2 \rangle_t - \langle [r_{\Delta t}(t+T)] \rangle_t^2)(\langle [r_{\Delta t}(t)]^2 \rangle_t - \langle [r_{\Delta t}(t)] \rangle_t^2)}} \quad (1.8)$$

ove T è un multiplo intero di Δt , $\langle \cdot \rangle_t$ è una media empirica a finestra scorrevole rispetto a t , fatta su tutte le coppie $(t, t+T)$ nel set di dati [3].

- **Effetto leva:** generalmente la volatilità di un asset ha correlazione negativa con i ritorni dell'asset stesso, cioè la funzione di leva

$$L_{\Delta t}(T) = \frac{1}{K} \langle |r_{\Delta t}(t+T)|^2 r_{\Delta t}(t) \rangle_t, \quad (1.9)$$

ove T è un multiplo intero di Δt , $\langle \cdot \rangle_t$ indica la media temporale, K è un fattore di normalizzazione, assume valori negativi, tendendo asintoticamente a zero, per $T > 0$. Questo implica che un andamento negativo persistente per un asset può portare ad una crescita di volatilità.

- **Correlazione volume-volatilità:** le misure di volatilità sono correlate con il volume (quantità di titoli scambiati) delle attività di scambio.

Il fatto che vi sia correlazione nella volatilità dei ritorni, ma non nei ritorni stessi, in alcune modellizzazioni suggerisce di scomporre i ritorni nel prodotto

$$r_{\Delta t}(t) = \sigma_{\Delta t}(t) \epsilon(t), \quad (1.10)$$

ove $\epsilon(t)$ è un rumore bianco, non correlato nel tempo, e $\sigma_{\Delta t}(t) > 0$ è un fattore di volatilità condizionata, la cui dinamica deve essere specificata in modo da descrivere i dati empirici. Evidenziamo però che sono osservabili solamente i ritorni nella loro totalità e non le singole componenti separatamente. In questo caso si dice che $\sigma_{\Delta t}(t)$ e $\epsilon(t)$ sono variabili nascoste.

1.2 Problematiche dell'analisi statistica

Abbiamo visto che una serie temporale finanziaria è una determinata realizzazione di un processo stocastico. In particolare le serie temporali costituiscono un processo non stazionario.

Un fenomeno viene definito stazionario quando la sua funzione di densità di probabilità (PDF), la quale "contiene" le proprietà del fenomeno, non cambia se viene tralata nel tempo. In altre parole per ogni set di istanti temporali t_1, \dots, t_k , dato un intervallo Δt su cui sono definiti i ritorni e un qualsiasi intervallo T , si deve avere che la distribuzione congiunta dei ritorni $r_{\Delta t}(t_1), \dots, r_{\Delta t}(t_k)$ è la

stessa della distribuzione congiunta dei ritorni, traslati lungo la serie temporale, $r_{\Delta t}(t_1 + T), \dots, r_{\Delta t}(t_k + T)$ [11].

Non è detto che i ritorni soddisfino questa proprietà nel tempo fisico a causa di effetti stagionali, di cui parleremo nel prossimo capitolo, che ne caratterizzano il processo [11]. Quando studiamo una serie temporale disponiamo di una singola, lunga realizzazione. Presi i dati relativi a due finestre temporali distinte, non abbiamo la certezza che la medesima analisi statistica sui due sets di dati fornisca i medesimi risultati.

Possiamo osservare la non stazionarietà del processo dei ritorni, quando valutato nel tempo fisico, andando ad analizzare la volatilità infragiornaliera di questo. Questa mostra un andamento a U. Tale andamento è tipico negli assets finanziari e rivela il loro spiccato carattere non stazionario.

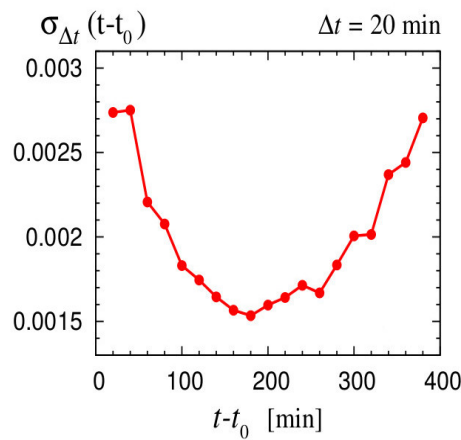


Figura 1.3: Volatilità infragiornaliera $\sigma_{\Delta t}(t-t_0)$, con $\Delta t = 20$ minuti e $t_0=9:40$, calcolata secondo Eq. (1.7), per l'asset S&P.

La non stazionarietà costituisce un grosso problema per una corretta analisi statistica della serie, poiché bisogna capire come analizzare ed interpretare i dati di cui disponiamo [16]. Abbiamo visto inoltre che il processo dei ritorni gode di proprietà qualitative riassunte nei fatti stilizzati [11] ma, come possiamo definire delle proprietà se queste non si conservano nel tempo a causa della natura del processo?

Quando registriamo una serie temporale, stiamo acquisendo una realizzazione del processo stocastico che non può essere replicata e che ha una evoluzione temporale casuale. Dal momento che le uniche medie che possiamo calcolare sono quelle temporali, potremmo richiedere che la serie temporale goda della proprietà di ergodicità, ovvero che le medie temporali di questo convergano, per grandi tempi, alle medie campionarie:

$$\langle r_{\Delta t} \rangle_e = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_{\Delta t}(t), \quad (1.11)$$

in modo tale da poter calcolare la media campionaria in modo alternativo.

Vorremmo poi che i nostri stimatori statistici, calcolati a partire dal campione, come ad esempio la media $\langle f(r_{\Delta t}) \rangle$, di una funzione f dei ritorni, fossero uguali alle quantità che stimano, definite come momenti di distribuzioni teoriche (sconosciute) delle osservazioni (medie d'ensemble $\mathbb{E}[f(r_{\Delta t})]$) [11]. L'identificazione delle due

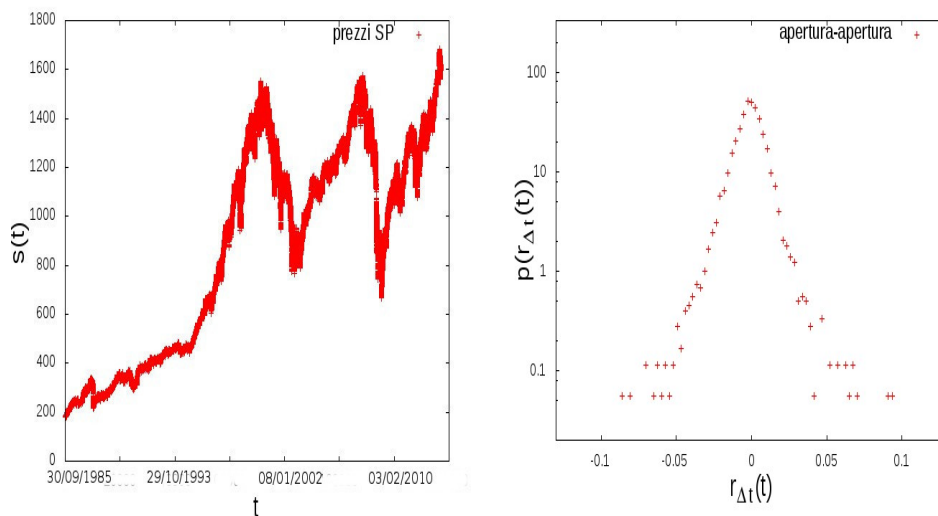
medie è un fatto comune in meccanica statistica, infatti in un sistema macroscopico si dispone di circa $N = 10^{23}$ particelle ed il relativo errore $1/\sqrt{N}$ è molto piccolo, al contrario però, analizzando circa cinque anni di ritorni giornalieri di un asset, si hanno $N \simeq 10^5$ dati, il problema scaturisce quindi poiché i campioni hanno un numero di dati relativamente basso. E' bene quindi definire sempre un intervallo di confidenza per le statistiche applicate.

Come vedremo in seguito, il nostro processo soddisfa ai requisiti dell'analisi d'ensemble e approssimeremo le medie campionarie con le medie d'ensemble.

1.3 La PDF dei ritorni

Per concludere la nostra analisi statistica discutiamo ora la distribuzione dei ritorni. Esaminando la funzione di densità di probabilità dei ritorni PDF, $p(r_{\Delta t}(t))$, di diversi asset finanziari si osserva che questa è non gaussiana, piccata e con code larghe [11]. Quest'ultima caratteristica diventa molto più pronunciata se si considerano i ritorni intragiornalieri ($\Delta t < 24$ h). In Figura 1.4(b) è riportata come esempio la distribuzione dei ritorni giornalieri ($\Delta t = 24$ h), per l'asset S&P.

Nello studio delle distribuzioni dei ritorni che proporremo in seguito, non ci ricondurremo ad alcun modello parametrico, lasciando invece che “siano i dati a parlare da sé [11]”, considerando le loro PDFs empiriche.



(a) Andamento dei prezzi $s(t)$ nel tempo t . Come si può notare l'andamento non è facilmente analizzabile (b) PDF dei ritorni giornalieri, $\Delta t = 24h$. L'asse delle ordinate è in scala logaritmica.

Figura 1.4: Prezzi, registrati ogni minuto a partire dall'apertura del mercato (8:40) fino alla chiusura (15:00) (a) e relativi ritorni giornalieri, calcolati come in Eq. (1.3), da apertura ad apertura (b), per l'asset S&P dal 30 settembre 1985 al 28 giugno 2013.

Capitolo 2

Il tempo in Finanza

Nel capitolo precedente abbiamo visto che, se analizzato in funzione del tempo fisico, il processo dei ritorni è non stazionario. Questo è un fatto intrinseco delle serie temporali finanziarie: avvenimenti di carattere politico influenzano il mercato, le strategie di scambio evolvono nel tempo, così come il numero di partecipanti e il loro accesso al mercato, soprattutto sul lungo periodo [4]. Il “ritorno medio in segno” degli assets appare essere instabile (variabile) nel tempo: il ritorno passato di un asset è raramente un buono stimatore dei ritorni futuri [4].

Soprattutto a livello infragiornaliero, il processo dei ritorni è affetto da stagionalità, di cui parleremo a breve, come ad esempio, la variabilità infragiornaliera dei ritorni, le chiusure dei week-ends [11].

Il requisito di stazionarietà è di fondamentale importanza per lo studio statistico del processo dei ritorni, per poter definire le proprietà di questo processo e per poter effettuare delle previsioni sugli andamenti del mercato.

Il tempo fisico, che è ben definito, non è una scala idonea alla descrizione dell’attività finanziaria. I mercati sono soggetti a chiusure notturne, nel fine settimana e nelle festività, pertanto la loro attività si arresta, mentre il tempo fisico continua a scorrere. In questo modo attraverso il tempo fisico non sappiamo come modellizzare la dinamica dei prezzi e l’arrivo di nuove informazioni nelle ore di chiusura dei mercati [9]. Utilizzando il tempo fisico si osserva un “gap” dei prezzi tra la chiusura del mercato e la riapertura, dovuta all’arrivo di informazioni nel periodo di inattività [4]. Il gap tra i prezzi alla chiusura notturna del mercato e la riapertura mattutina è significativo: in termini di volatilità si osserva che la notte equivale a circa due ore di attività durante le ore di mercato (un quarto della volatilità del mercato, notte esclusa)[4].

Non è facile definire una opportuna scala temporale per descrivere il processo dei ritorni.

Negli anni sono state proposte e utilizzate diverse scale temporali sulle quali definire il processo dei ritorni in modo da renderlo stazionario [7, 26]. Definire una nuova scala su cui valutare il processo, implica riformulare il processo in modo tale da renderne più facile lo studio [26]. Queste scale si basano sulla definizione di un tempo definito a partire dalle caratteristiche del processo stesso o dalla frequenza di acquisizione dei dati [26].

Molti approcci definiscono scale temporali in cui i periodi di chiusura dei mercati vengono tagliati dal computo, altre invece vi associano intervalli di durata arbitraria. In questo modo però vanno ad eliminare o a stimare in modo improprio i ritorni relativi ai periodi di chiusura, rompendo la corrispondenza tra i prezzi e i

ritorni.

Abbiamo premesso che a rendere il processo non stazionario è, in particolare, il carattere stagionale delle serie temporali finanziarie, soprattutto a livello infragiornaliero. Le stagionalità determinano un andamento periodico, “spiccato” e predicibile nell’attività dei mercati, che spesso va a sovrastare le caratteristiche più fini del processo di ritorni [7]. Esempi di effetti stagionali sono la variabilità infragiornaliera dei ritorni, o gli effetti di chiusura del mercato nei week-ends [11]. Esse possono essere individuate confrontando i comportamenti dei mercati nel corso degli anni e osservandone delle caratteristiche comuni [17] oppure andando ad indagare l’autocorrelazione di volatilità [7] (Eq.(1.8)). Questa, come si può vedere in Figura 2.1, mostra un comportamento periodico giornaliero.

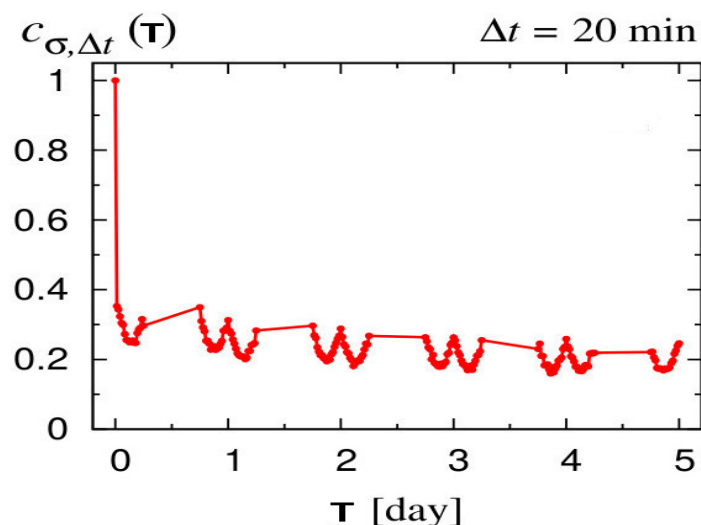


Figura 2.1: Autocorrelazione di volatilità per $\Delta t = 20$ minuti (in tempo fisico) al tempo ritardato T , per l’asset S&P, calcolata secondo Eq. (1.8). Si è tenuto conto di tutte le possibili coppie di ritorni ritardati, con T multiplo intero di Δt . La periodicità è una diretta conseguenza della forma ad U della volatilità infragiornaliera.

La periodicità dell’autocorrelazione di volatilità, nel tempo fisico, è una diretta conseguenza della forma ad U della volatilità infragiornaliera (Figura 1.3). In particolare ogni giorno si osservano due U, una è data dal fatto che stiamo studiando la volatilità infragiornaliera dei giorni successivi all’istante temporale in cui ci troviamo, l’altra è dovuta al fatto che stiamo mediando anche sull’istante iniziale (quello in cui ci troviamo) da noi considerato.

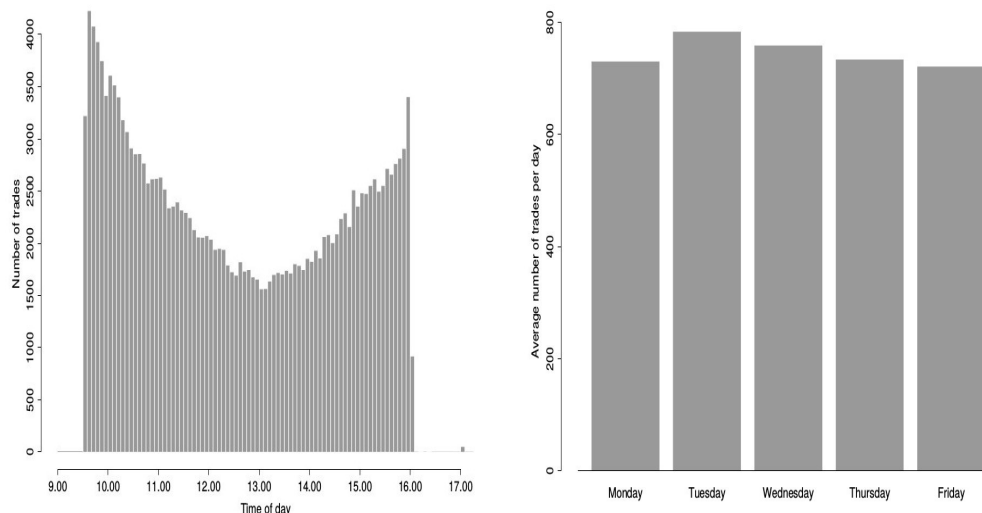
Costituendo le stagionalità un disturbo per l’identificazione dei processi più fini dell’attività di mercato sono state definite delle scale temporali che, oltre a garantire la stazionarietà del processo dei ritorni, riescano a rimuovere questi effetti stagionali [7, 26]. Queste scale si basano sulla dilatazione o contrazione del tempo a seconda dell’intensità dell’attività finanziaria.

Abbiamo visto che i ritorni hanno una alta variabilità infragiornaliera [11]. Questa attività di mercato non uniforme, nel tempo fisico, e la differente intensità degli scambi si possono osservare a livello giornaliero [13, 20], settimanale [13, 20], mensile [17], annuale [17].

Nell’arco della giornata si osserva che all’apertura dei mercati gli scambi sono più frequenti, così come alla chiusura, mentre verso l’ora di pranzo tendono a rallentare uniformandosi, come si può osservare in Figura 2.2. Dalla stessa figura

possiamo inoltre constatare che se si osserva l'andamento settimanale degli scambi, questo è minore il lunedì rispetto al resto della settimana.

La diversa intensità degli scambi si può osservare anche su scala maggiore. Indagando il processo dei ritorni in maniera mensile si osserva il “turn of the month effect” [17], che consiste in aumento dei prezzi degli asset durante i primi e gli ultimi giorni del mese. Durante l'anno vi sono dei mesi in cui l'attività finanziaria è maggiore (da Novembre ad Aprile), ed altri in cui diminuisce (da Maggio ad Ottobre), osservando un aumento degli scambi soprattutto durante le festività natalizie [17].



(a) Numero di scambi in un intervallo di 5 minuti per l'asset IBM. (b) Numero medio di scambi giornalieri dell'asset IBM, per una settimana.

Figura 2.2: Numero di scambi per l'asset IBM nell'anno 1995.

In realtà non deve sorprenderci che la questione della definizione di una opportuna scala temporale in finanza sia così complicata. Il tempo è qualcosa che diamo spesso per scontato, un collante tra gli eventi che caratterizzano la nostra vita.

Prima di trattare più dettagliatamente le scale temporali proposte facciamo un piccola digressione sul significato di tempo.

2.1 Una digressione sul tempo

Seguendo il lavoro di Zumbach [7], soffermiamoci sul concetto di tempo, non solo da un punto di fisico.

La parola tempo può essere utilizzata con due accezioni: la prima indica un punto nell'asse del tempo, un istante, ad esempio “domani all'una”; l'altra indica un intervallo, ad esempio “in due ore”.

In Fisica il concetto di tempo è largamente utilizzato, appare in tutte le equazioni basilari: Newton, Schroedinger, . . . In un articolo dell'“Encyclopedia of Physics (Lerner e Trigg, 1991), nonostante si parli del tempo, non ne viene mai data una definizione vera e propria, ma piuttosto vi sono una serie di riflessioni sul fatto che il tempo possa avere un inizio o una fine, se esiste una unità fondamentale temporale, su quale sia il miglior metro di misura del tempo.

In Fisica si può misurare il tempo in secondi: stando alla dicitura ufficiale del

BIPM (Bureau international des poids et mesures), il secondo è definito come la durata di 9192631770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di Cesio-133, ^{133}Cs .

Considerando un punto di vista più psicologico, la nostra mente divide gli eventi in: passati, presenti e futuri, consapevole che vi sia un flusso del tempo verso il futuro. Questo flusso non scorre a velocità uniforme: ognuno di noi percepisce i fatti che vive in modo diverso, alterando la propria percezione di tempo, se si annoia il tempo passa lentamente, se si diverte il tempo trascorre veloce. Il tempo fisico diventa solamente un collante tra gli eventi che viviamo.

Tornando però su una visione più concreta, possiamo dire che la variabile fisica tempo, t , è alla base di diverse equazioni, ma non è così ovvio il perché t che descrive l'equazione del calore, sia lo stesso dell'equazione di Schroedinger, e perché possa essere misurato con un orologio. Utilizziamo il medesimo concetto di tempo per descrivere i regimi classici, quantistici e relativistici, i quali obbediscono a principi differenti.

Nella pratica misuriamo lo scorrere del tempo attraverso le oscillazioni di un pendolo regolare (isocrono), e siamo in grado di correlare questa misura ad altre scale, come ad esempio l'orbitare dei pianeti intorno al Sole. Ma se non ci fossero eventi, se non ci fosse nulla, avrebbe senso parlare di tempo? Il tempo esiste fine a se stesso, cioè se non ci fossero eventi di cui misurare la durata, il tempo esisterebbe?

2.2 Alcune scale temporali utilizzate

Tornando alla Finanza, che non obbedisce alle leggi della Fisica, non è chiaro perché il tempo fisico debba essere un parametro valido nelle descrizioni dei mercati: non esiste alcun pendolo regolare in Finanza [7]. Pur essendo il tempo fisico ben definito non è una variabile idonea a descrivere l'andamento dei mercati.

Sopra abbiamo menzionato alcuni tipi di scale temporali utilizzate in finanza. Descriviamole ora brevemente.

- Business/trading time: è ben definito per i mercati, è il tempo che scorre durante le ore di apertura del mercato. Tiene conto solo di quando il mercato è aperto, tagliando notti, week-end, festività. In questo modo però taglia anche i ritorni relativi alle chiusure del mercato rompendo la corrispondenza tra i prezzi e i ritorni. Esso non è inoltre in grado di modellizzare opportunamente le nuove informazioni che arrivano durante i periodi di inattività e che determinano un gap dei prezzi [7, 9]. Questa scala temporale è additiva;
- Transaction time: è definito a partire dal modo in cui vengono registrati gli scambi. Si aggiunge uno ad ogni transazione e tiene conto del numero di transazioni [7];
- Transaction/Volume time: in cui si aggiunge il valore di ogni transazione, tiene conto del volume delle transazioni [2, 7];
- θ -time: contrae o dilata il tempo in base all'intensità dell'attività finanziaria, in questo modo riesce a rimuovere gli effetti stagionali [7, 26];

- τ -time: o “tempo intrinseco” è definito a partire dalla volatilità. Contrae o dilata il tempo in base all’andamento di questa. In questo modo si comprende meglio l’importanza degli avvenimenti del mercato. Un modello predittivo basato su questo tempo ha memoria della storia dei prezzi [7, 26].

Non tutte queste scale sono additive, in particolare non lo sono il theta e il tau time, poiché contraggono o dilatano il tempo in base all’andamento dell’attività o della volatilità. Con queste scale si è però in grado di rimuovere gli effetti stagionali del mercato. Alcune scale, come il business time, sono inoltre predefinite, possono essere determinato a priori, mentre il tau time necessita della conoscenza della volatilità. Questa differenza è molto importante se si vogliono effettuare delle previsioni, poiché è molto più semplice estendere della scale temporali predefinite.

Capitolo 3

Financial Scaling Time

L'ipotesi di stazionarietà, se il processo dei ritorni è valutato in funzione del tempo fisico, non è valida. In particolare, se si indaga il processo ad alta frequenza, si osserva che gli effetti intragiornalieri, come ad esempio l'andamento a U della volatilità, diventano predominanti. Questo fatto rende la media temporale di Eq. (1.11) inadatta per identificare i valori di aspettazione desiderati, poiché i dati acquisiti ad alte frequenze mostrano una chiara non omogeneità nel tempo [16], come discusso in Cap. 2.

Allo stesso tempo però osservando il comportamento periodico dell'autocorrelazione di volatilità dei ritorni in determinate finestre temporali, si può constatare che tutti i giorni hanno volatilità simile (si veda Figura 2.1). Questo fatto ci porta a pensare che ogni giorno di attività finanziaria sia una singola realizzazione dello stesso processo e queste realizzazioni si comportano in maniera simile. In altre parole ogni giorno di attività può essere considerato una realizzazione iterata di uno stesso processo stocastico sottostante.

Possiamo dividere pertanto ogni serie temporale nei diversi giorni di attività finanziaria, ognuno dei quali costituisce una singola realizzazione (storia) indipendente dello stesso processo [14]. Questo ci permette di organizzare i dati come un ensemble di tutti i giorni (24 ore, da apertura, 9:30, ad apertura del mercato), notte compresa.

In questa circostanza, un modo per superare il problema della non omogeneità temporale è considerare le medie d'ensemble. Questo significa raggruppare i dati in raccolte, chiamate ensemble, di storie temporali separate, tutte della stessa durata. Se si riesce a disporre di un numero, L , elevato di storie (noi disponiamo di $L \sim 3 \times 10^3$), si possono analizzare i dati attraverso gli strumenti dell'analisi di ensemble. La media di quest'ultima viene definita come

$$\langle f(r_{\Delta t}(t)) \rangle = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L f(r_{\Delta t}^{(l)}(t)), \quad (3.1)$$

dove t corre nella finestra temporale della singola storia. Si può constatare che Eq. (3.1) indica la stima di una media su tutte le storie l , fatto che ci permette di calcolare diversi valori della stessa quantità media, in diversi momenti della loro finestra temporale di riferimento. Eq. (1.11), invece, non ci permette alcuna distinzione pratica tra i dati presi in diversi istanti del giorno.

Il calcolo della volatilità di Eq. (1.7) è stato svolto attraverso la media d'ensemble.

Sino ad ora abbiamo visto la necessità di ridefinire una scala temporale per poter rendere il processo dei ritorni, che soddisfa i fatti stilizzati, stazionario:

questa è una condizione fondamentale dal punto di vista di un'analisi statistica. Abbiamo inoltre descritto alcune definizioni di tempo utilizzate in finanza.

Quello che ci proponiamo di fare qui è costruire una nuova scala temporale che permetta l'esistenza di una simmetria di scaling per le PDFs dei ritorni valutati su diversi intervalli, soprattutto infragiornalieri.

Questa simmetria è uno strumento molto utile per analizzare sistemi a diverse scale temporali o spaziali. Essa trova la sua formulazione nel gruppo di rinormalizzazione della meccanica statistica, il cui approccio principale è basato sul postulare delle relazioni di scaling tra le variabili con cui si sceglie di descrivere il sistema a diverse scale. In questo modo i dati empirici registrati in diverse condizioni possono essere unificati e l'analisi d'ensemble può essere svolta con metodi molto generali, che ci permettono di osservare le medesime proprietà statistiche a diverse risoluzioni [16].

Grazie all'approccio tramite gli ensemble, confrontando le PDFs dei ritorni valutati su diversi intervalli intergiornalieri, si osserva l'esistenza di una simmetria approssimata tra queste. Più precisamente per intervalli che vanno da alcuni giorni a diverse settimane, le PDFs empiriche dei ritorni finanziari sono osservate essere approssimativamente invarianti in scala [3].

Questa simmetria di scaling però non è osservata quando si vanno a confrontare le PDFs dei ritorni finanziari valutati su intervalli infragiornalieri, nel tempo fisico [3].

Nelle Sezioni seguenti andiamo quindi a definire una opportuna scala temporale, tale che le PDFs dei ritorni, valutati su intervalli infragiornalieri (nella nuova scala temporale), soddisfino una simmetria di scaling.

Nel contesto dei ritorni finanziari, postulare l'invarianza di scala nel tempo del sistema equivale a imporre per la PDF $p(r, \Delta t)$ dei ritorni r , definiti sull'intervallo Δt , la validità della legge di scaling:

$$p(r, \Delta t) = p(r_{\Delta t}) = \frac{1}{\Delta t^H} g\left(\frac{r}{\Delta t^H}\right), \quad (3.2)$$

ove g è la funzione di scaling, di cui non necessariamente conosciamo la forma analitica e H è l'esponente di Hurst del processo. Equazione (3.2) dice che la PDF dei ritorni, riscalata per l'intervallo temporale su cui sono calcolati i ritorni, elevato ad un esponente H tende asintoticamente ad una funzione di scaling g , pertanto g ed H costituiscono le caratteristiche del nostro processo. In particolare se $H = 1/2$ e g è gaussiana, si parla di scaling normale, ovvero il sistema può essere descritto da un processo stocastico con incrementi i.i.d., al contrario si parla di scaling anomalo se una o entrambe le condizioni, su H o su g , non sono verificate.

3.1 Vantaggi e limiti del FST

Sfruttando il comportamento periodico dell'autocorrelazione di volatilità, mostriamo che possiamo sfruttare una simmetria di scaling semplice come criterio operativo per la definizione di un nuovo tempo, che chiamiamo **Financial Scaling Time (FST)**, sul quale definire il processo dei ritorni in modo da renderlo stazionario. Questa definizione ci porta ad una semplificazione dello studio delle serie temporali, poiché sfruttando l'analisi d'ensemble, ci permette di scomporre in molteplici realizzazioni del medesimo processo stocastico. Il FST utilizza uno

scaling semplice, ovvero i ritorni su larga e piccola scala sono legati da leggi che dipendono solo dal rapporto di scala e dall'esponente (H nel nostro caso), in contrapposizione al multiscaling dove sono richiesti più esponenti per descrivere il comportamento di diversi momenti statistici della distribuzione [18, 28]. Questa scelta ci permette di costruire la nostra scala temporale solo attraverso la PDFs di ritorni, senza dover ricorrere al calcolo di particolari momenti della distribuzione [3]. La scelta del valore $H = 1/2$ è dettata da due ragioni, la prima è di carattere empirico, poiché diversi studi [3, 6] mostrano che i ritorni scalano con esponente prossimo ad $1/2$, la seconda è perché questo valore è quello che meglio garantisce l'additività della nostra scala temporale [3] (fatto non osservato con buona approssimazione nel multiscaling). Nonostante questa scelta di scaling le PDFs di diversi ritorni calcolati su diverse scale temporali soddisfano con buona approssimazione a questa legge. In altre parole per periodi che vanno da alcuni minuti a diverse settimane le funzioni di densità di probabilità empiriche dei ritorni finanziari sono approssimativamente invarianti in scala [3], a meno di opportuni limiti inferiori sulla durata dell'intervallo su cui vengono calcolati i ritorni. Ricordiamo che al di sotto di $\Delta t \approx 10 \div 20$ minuti, la correlazione lineare non è nulla, e come vedremo a breve, questo impone una restrizione sulla validità dello scaling da noi impiegato.

Un altro vantaggio della nostra definizione è che fornisce una naturale quantificazione dello scorrere del tempo nelle ore di chiusura del mercato, in modo che i rispettivi ritorni vengano opportunamente valutati. Come abbiamo visto nel capitolo precedente, invece, gli altri modelli tendono ad escludere questi ritorni dal computo, o ad assegnar loro un periodo di tempo arbitrario, le ore di chiusura del mercato, rompendo la corrispondenza tra i prezzi e i ritorni.

Cercheremo pertanto di definire il FST tramite una legge di scaling, con $H = 1/2$.

3.2 Requisiti, proprietà e costruzione del FST

La legge di scaling Eq. (3.2), quando il tempo è quello fisico e $H = 1/2$, non è verificata, ovvero non si riesce a trovare un soddisfacente collasso tra le PDFs dei ritorni valutati su intervalli di tempo infragiornalieri.

Quando espressa in termini di FST Eq. (3.2), per $H = 1/2$, diventa:

$$p(r, \Delta\tau) = \frac{1}{\Delta\tau^{1/2}} g\left(\frac{r}{\Delta\tau^{1/2}}\right), \quad (3.3)$$

dove abbiamo denominato con τ il tempo misurato in financial scaling time, $\Delta\tau > 0$ e g è una opportuna funzione di scaling.

In questo caso le PDFs dei ritorni, che sono valutati sul financial scaling time, collassano le une sulle altre, soddisfacendo alla legge di scaling Eq. (3.3).

Eq. (3.3) è valida, con buona approssimazione, in una finestra temporale che va da alcuni minuti a diversi giorni, mostrando il fatto che il FST è appositamente definito per soddisfare al meglio la simmetria di scaling desiderata [3].

La costruzione del FST è svolta come segue [3]. Suddividiamo l'asse del tempo fisico in intervalli consistenti con la periodicità giornaliera di formazione dei ritorni. Gli intervalli sono arbitrari, eccetto per il fatto che i loro estremi non devono cadere dentro il periodo di chiusura del mercato e che la loro durata ha un cut-off inferiore di 20 minuti come vedremo meglio tra breve. Conviene fissare l'apertura

mattutina del mercato come estremo inferiore del primo intervallo della partizione, a far coincidere l'ultimo intervallo di ogni giorno con la fine della notte (o del week-end). Questa partizione ci assicura l'additività degli intervalli temporali, nel tempo fisico.

Associamo una opportuna durata in FST a ogni intervallo con estremi appartenenti alla partizione. Ovviamente, detti $\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_2$ due intervalli contigui in FST, si ha che l'unione dei due, ha una durata:

$$\Delta\tau = \Delta\tau_1 + \Delta\tau_2. \quad (3.4)$$

Questo ci permette di mappare la partizione del tempo fisico nell'asse temporale τ , quello del FST. Quindi una partizione dell'asse temporale t possiede una immagine nell'asse τ e viceversa.

Equazioni (3.3) e (3.4) ci impongono un importante vincolo, che ci permette di determinare l'intervallo minimo su cui è applicabile il nostro metodo. Chiamati r_1 e r_2 i ritorni su due intervalli contigui di durata $\Delta\tau_1$ e $\Delta\tau_2$, rispettivamente, si ha necessariamente che $\mathbb{E}[(r_1 + r_2)^2] = (\Delta\tau_1 + \Delta\tau_2) \int dx g(x) x^2 = \mathbb{E}[r_1^2] + \mathbb{E}[r_2^2]$, dove

$$\mathbb{E}[r_1 r_2] = 0, \quad (3.5)$$

ed \mathbb{E} denota la media d'ensemble. L'assenza di correlazione lineare di Eq. (3.5) è valida se il mercato è efficiente e la durata degli intervalli è superiore ad alcuni minuti, in tempo fisico. Questo fatto è all'origine del cut-off inferiore che deve essere posto nella determinazione degli intervalli. Ricordiamo che per intervalli inferiori ai $\Delta t = 10 \div 20$ minuti, vi è correlazione lineare non trascurabile tra i ritorni.

3.3 Metodologia di analisi

Riferendoci a Eq. (3.3) e ripetendo che non stiamo utilizzando alcun modello parametrico, ma solamente i dati empirici, abbiamo scelto come campione x , e quindi come distribuzione empirica di riferimento g , quella dei ritorni giornalieri (da apertura a apertura del mercato, ovvero 24 ore), associando a questo intervallo di tempo la durata di 1 fst. Pertanto 1 giorno = 1 fst. Definito quindi il campione di riferimento x , abbiamo definito diversi altri campioni di ritorni y :

- mattina;
- pomeriggio;
- notte;
- trading-day;
- 20 minuti;
- 38 minuti;

i cui intervalli temporali sono riportati in Tabella 3.1.

Specifichiamo che quello che abbiamo definito trading-day si discosta dal business-time, poiché i nostri set di dati iniziano alle 9:30, ma per semplicità e regolarità degli intervalli, la nostra analisi inizia alle 9:40.

Per mostrare la validità di Eq. (3.3) e definire il FST ci siamo serviti del test di Kolmogorov-Smirnov (K-S test) per due campioni.

campione	inizio (t fisico)	fine (t fisico)	durata (t fisico)
mattina	9:40	12:20	2h 40'
pomeriggio	12:20	16:00	3h 40'
notte	16:00	9:40	17h 40'
trading-day	9:40	16:00	6h 20'
20 minuti	*	*	20'
38 minuti	**	**	38'
apertura-apertura	9:40	9:40	24h 0'

Tabella 3.1: Orari di inizio, fine, e durata, valutati in tempo fisico, dei diversi campioni di ritorni analizzati.

*Per i venti minuti si sono considerati tutti gli intervalli (che sono 19) da venti minuti contigui a partire dalle 9:40 fino a chiusura.

** Per i 38 minuti si sono considerati tutti gli intervalli (che sono 10) da 38 minuti contigui a partire dalle 9:40 fino a chiusura.

3.4 Kolmogorov-Smirnov test

Descriviamo il test di Kolmogorov-Smirnov. Questo è un test non parametrico unidimensionale utilizzato per testare il grado di accettabilità che la distribuzione empirica $\mathcal{F}_e(x)$ di un campione di variabili casuali provenga da una determinata distribuzione di probabilità teorica $\mathcal{F}_t(x)$. Il test può essere anche esteso al caso in cui si voglia verificare se due campioni indipendenti provengono dalla stessa distribuzione [15]. Nel nostro caso utilizzeremo il test a due campioni per determinare il valore dell'intervallo $\Delta\tau$ che garantisce il collasso ottimale tra le PDFs dei ritorni.

I requisiti fondamentali del test sono sia l'indipendenza tra il campione e la distribuzione di riferimento, sia l'indipendenza tra le variabili che costituiscono il campione; in tal caso il test dipende esclusivamente dalla grandezza del campione in analisi.

Supponiamo di avere un insieme $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ di n numeri e che si voglia verificare se tale insieme possa essere stato generato da una PDF $\mathcal{F}_t(x)$. Chiamate con $\mathcal{R}_e(x)$ la distribuzione cumulativa dei dati empirici e $\mathcal{R}_t(x)$ quella di $\mathcal{F}_t(x)$, definiamo la distanza di Kolmogorov-Smirnov come:

$$D_{e,t} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{\mathcal{R}_e(x) - \mathcal{R}_t(x)\}. \quad (3.6)$$

Se il campione proviene dalla distribuzione $\mathcal{F}_t(x)$ allora per $n \rightarrow \infty$ si avrà che $D_{e,t} \rightarrow 0$, risultato dovuto al teorema di Glivenko-Cantelli [15].

Quando si effettua il test, si pone un intervallo di confidenza sul valore di $D_{e,t}$. Se il valore di $D_{x,y}$ appartiene all'intervallo di confidenza, allora può essere accettato e si può stabilire che la distribuzione empirica delle variabili casuali proviene dalla distribuzione di probabilità teorica considerata.

Il test può essere utilizzato anche per serie temporali, se le variabili non presentano correlazione.

Contestualizziamo il test ai nostri campioni. Dati due campioni $\{x_i\}_{i=1}^{n_x}$, $\{y_i\}_{i=1}^{n_y}$, di n_x e n_y dati, con rispettive distribuzioni cumulative \mathcal{R}_x e \mathcal{R}_y , il test

consiste nel minimizzare, rispetto ad un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, l'estremo superiore della differenza delle due distribuzioni:

$$D_{x,y}(\lambda) = \left(\frac{n_x n_y}{n_x + n_y} \right)^{1/2} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{ \mathcal{R}_x(\lambda) - \mathcal{R}_y(\lambda) \}, \quad (3.7)$$

che stima quanto siano simili le distribuzioni \mathcal{R}_x e \mathcal{R}_y .

Nell'analisi delle nostre serie temporali abbiamo analizzato i ritorni valutati su intervalli superiori o uguali ai 20 minuti in modo che non fossero correlati. Non abbiamo poi definito alcun intervallo di confidenza per i valori di $D_{x,y}$ ottenuti, poiché non eravamo propriamente interessati a valutare se i campioni provenissero dalla medesima distribuzione. Abbiamo utilizzato i valori di $D_{x,y}$ per determinare il valore di $\Delta\tau$ che garantisca il collasso ottimale delle PDFs dei due campioni di ritorni.

Per farlo abbiamo minimizzato la distanza $D_{x,y}$ rispetto al parametro λ che è legato a $\Delta\tau$ attraverso la relazione $\lambda = 1/\sqrt{\Delta\tau_y}$.

Non aver stabilito un criterio di reiezioni per i valori di $D_{x,y}$ potrebbe comportare una approssimazione nella stima di alcuni $\Delta\tau$. Gli intervalli $\Delta\tau$ sono i valori che meglio permettono il collasso di scaling tra le PDFs dei ritorni e sono valutati a partire dalla minimizzazione di $D_{x,y}$, ma non è detto che il minimo trovato per la distanza sia in realtà un valore "accettabile" se si volesse valutare se i set di dati provengono dalla stessa distribuzione. In altre parole se consideriamo solamente il valore $\Delta\tau$ ottenuto dalla procedura, pur garantendo questo il collasso ottimale delle PDFs dei ritorni, non è detto che ne assicuri la perfetta sovrapposizione.

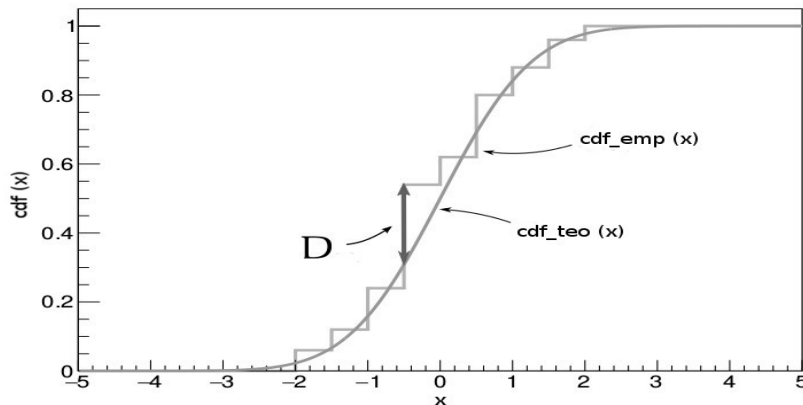


Figura 3.1: Esempio di K-S test tra una distribuzione cumulativa teorica e una sperimentale

3.5 L'analisi

Volendo mostrare che la legge di scaling è generale e non dipende dall'asset scelto, abbiamo analizzato diversi assets finanziari, definendo per ognuno di essi il rispettivo FST.

Descriviamo brevemente la procedura di analisi seguita.

Per ogni asset si è disposto delle registrazioni dei prezzi $s(t)$ e del relativo tempo t , registrati ogni minuto nel corso degli anni, con cadenza giornaliera, dall'apertura

(9:30) alla chiusura (16:00) del mercato, per un totale di 390 coppie $(t, s(t))$ al giorno. A partire dalle 9:40, seguendo Tabella 3.1 si è proceduto a calcolare quindi gli n_y $r'(t)$ ritorni per i diversi campioni

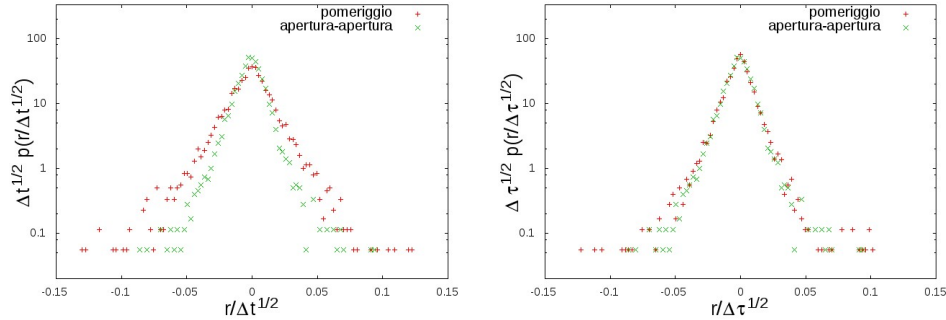
$$r'(t) = \ln \left(\frac{s(t)}{s(t - \Delta t)} \right). \quad (3.8)$$

Per ogni campione si è calcolata la media $\langle r' \rangle$, in modo da definire il ritorno con media nulla $r(t) = r'(t) - \langle r' \rangle$. Questi sono stati quindi disposti in un istogramma normalizzato che definisse la probability density function PDF dei ritorni, e confrontati con la PDF dei ritorni giornalieri (il campione di riferimento x), osservando che i due grafici non collassavano tra di loro.

Si è pertanto proceduto con il test di Kolmogorov-Smirnov. Riordinando in modo crescente i ritorni di ogni campione si è creata la distribuzione cumulativa di ognuno di essi, in modo tale che, ogni volta che si incontrava un ritorno, la cumulativa crescesse di $1/n_y$. Queste cumulative sono state confrontate con la cumulativa dei ritorni giornalieri, calcolando la distanza $D_{x,y}$, Eq. (3.7), di ogni campione. A questo punto si è applicato un metodo variazionale, moltiplicando i ritorni di ogni campione (escluso quello di riferimento) per un parametro λ . È stato ripetuto il K-S test al variare di λ e trovando la $D_{x,y}(\lambda)$ minima. È stata perciò registrata $(\lambda, D_{x,y}(\lambda))$ per la quale si aveva il minimo. Dal valore di λ si è quindi potuto ottenere il FST del relativo campione y attraverso

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\Delta\tau_y}}. \quad (3.9)$$

Per osservare che il parametro trovato fosse effettivamente quello corretto si è quindi applicata Eq. (3.3) ponendo il valore di $\Delta\tau$ ottenuto e osservando il collasso ottimale delle due PDFs.



(a) Scaling della PDF dei ritorni pomeridiani, in funzione del tempo fisico, secondo Eq. (3.2).

(b) Scaling della PDF dei ritorni pomeridiani, in funzione del financial scaling time, secondo Eq. (3.3).

Figura 3.2: Esempio di scaling secondo Eq. (3.2) in (a) e secondo Eq. (3.3) in (b) per l'asset S&P. La durata dell'intervallo in tempo fisico è quella riportata in Tabella 3.1. L'asse delle ordinate è in scala logaritmica.

3.6 I risultati

Riportiamo qui periodi, dati e risultati relativi a ciascun asset analizzato. I giorni in cui non sia stato possibile registrare tutti i prezzi (ad esempio per

chiusure anticipate del mercato) sono stati esclusi, arrivando ad analizzare L giorni per ogni asset, non è stata fatta distinzione per i giorni a cavallo di week-end o festività, sono stati considerati come consecutivi, avendo osservato che questo porta ad effetti trascurabili nell'analisi [3].

Nei grafici è stato riportato il primo ritorno di venti minuti della giornata ([9:40; 10:00]), mentre nelle tabelle è riportata la media di tutti i ritorni da venti minuti della giornata, $\langle r^{20\text{min}} \rangle = \sum_{i=1}^{19} r_{(i)}^{20\text{min}} / 19$. In modo analogo è stato riportato il primo ritorno di 38 minuti della giornata ([9:40; 10:18]), mentre nelle tabelle è riportata la media di tutti i ritorni da 38 minuti della giornata, $\langle r^{38\text{min}} \rangle = \sum_{i=1}^{10} r_{(i)}^{38\text{min}} / 10$. Gli intervalli Δt , utilizzati per valutare la legge di scaling nel tempo fisico sono stati considerati come frazione della giornata (24 ore=1440 minuti). Ad esempio per il trading-day si ha $\Delta t=380$ minuti/1440 minuti=0.26.

Nei grafici dei collassi tra le PDFs l'asse delle ordinate è in scala logaritmica.

Eccetto per l'asset S&P, analizzato per primo poiché è stato confrontato con [3] per verificare la correttezza della nostra analisi, gli altri assets sono riportati in ordine alfabetico.

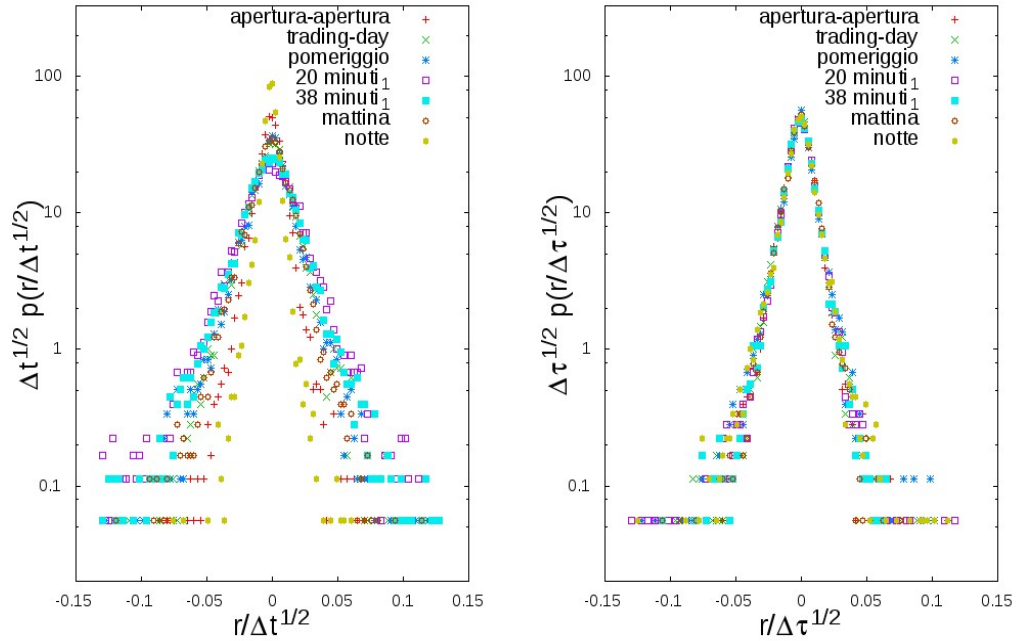
Si sono riportati anche la volatilità degli assets, calcolata secondo Eq. (1.7), per i 19 ritorni calcolati su $\Delta t = 20$ minuti, e il confronto tra lo scorrere del FST e lo scorrere, uniforme, del tempo fisico. Per ragioni grafiche di scala, nei confronti tra le scale temporali l'intervallo notturno è stato ridotto, pur restando superiore a quelli da 20 minuti.

Con quest'ultima parte di analisi si vuole verificare se vi sia una relazione tra la volatilità e l'andamento del financial scaling time.

S&P per intero S&P 500 è stato realizzato da Standard & Poor's nel 1957 e segue l'andamento di un paniere azionario formato dalle 500 aziende statunitensi a maggiore capitalizzazione. Sono stati acquisiti dati dal 30 Settembre 1985 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 6852$ giorni.

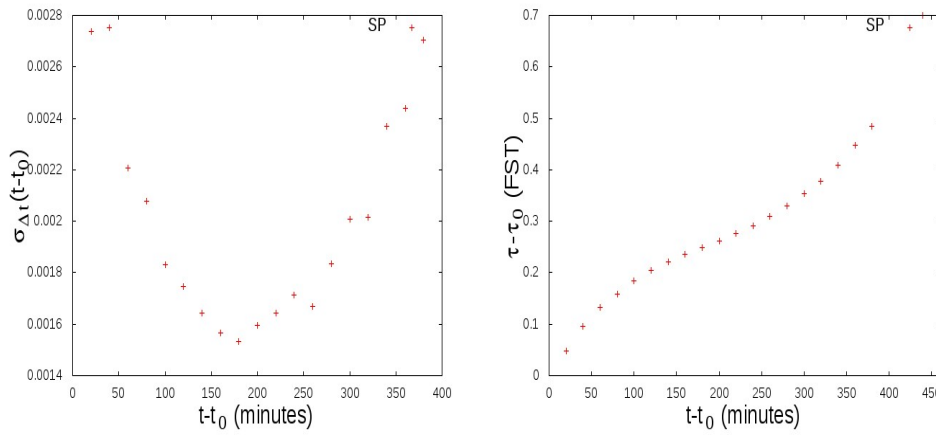
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	6852	0.336	0.776
pomeriggio	6852	0.259	0.965
notte	6851	0.215	0.854
trading-day	6852	0.658	0.580
20 minuti	6852	0.025	1.007
38 minuti	6852	0.053	0.729
apertura-apertura	6851	1	0

Tabella 3.2: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset S&P



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.3: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset SP, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

Figura 3.4: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset S&P.

Dal momento che per l'asset S&P si dispone di $L = 6852$ giorni di mercato, esso è quello che presenta una analisi più accurata.

Si può constatare da Figura 3.4 (b) l'andamento continuo del FST in funzione del tempo fisico: il FST scorre più rapido la mattina, rallenta nell'arco della giornata, per tornare a crescere nelle ore di chiusura dei mercati.

Osservando la volatilità infragiornaliera, valutata nel tempo fisico, questa ha la forma a U caratteristica dei processi non stazionari finanziari. Si può vedere come presenti, a meno di fluttuazioni, un unico minimo, ben pronunciato.

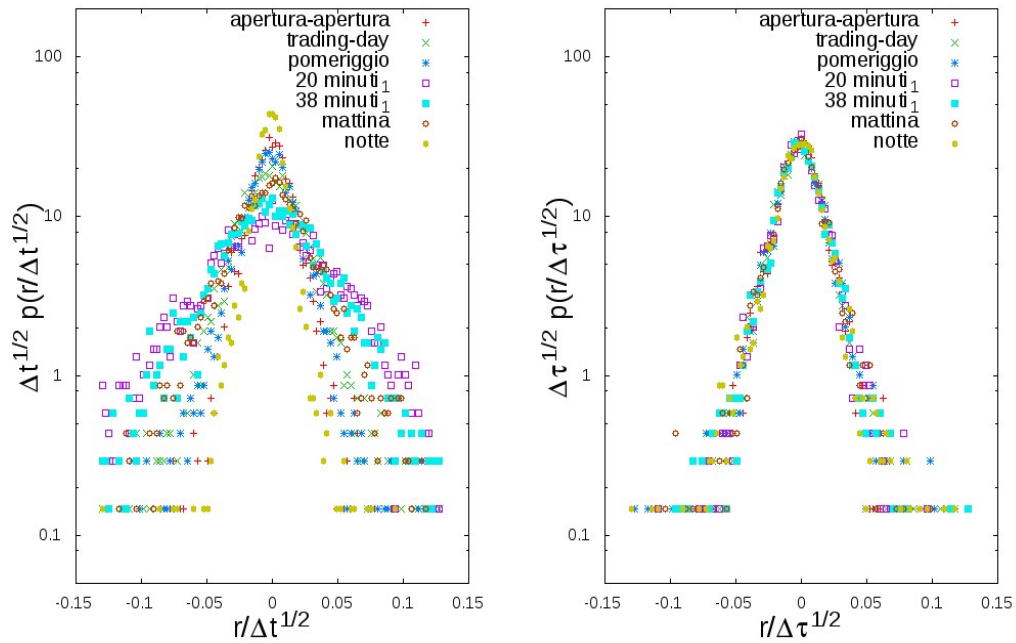
Confrontando il comportamento della volatilità con lo scorrere del FST vediamo come l'andamento regolare (la tipica forma ad U) della volatilità si rifletta nella crescita continua del FST. In corrispondenza del minimo della volatilità si osserva il rallentamento del FST attorno alla pausa pranzo. Questo rallentamento determina la presenza di un flesso nell'andamento del FST, i quale rappresentano i cambi di velocità del flusso del financial scaling time tra la mattina e il pomeriggio e la chiusura del mercato.

Nei successivi assets disponiamo di un numero inferiore di giorni di mercato, non raggiungendo i 3000 giorni. Questo fatto potrebbe ripercuotersi sulle statistiche.

BA E' il valore azionario della Boeing Company, registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 2 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2640$ giorni.

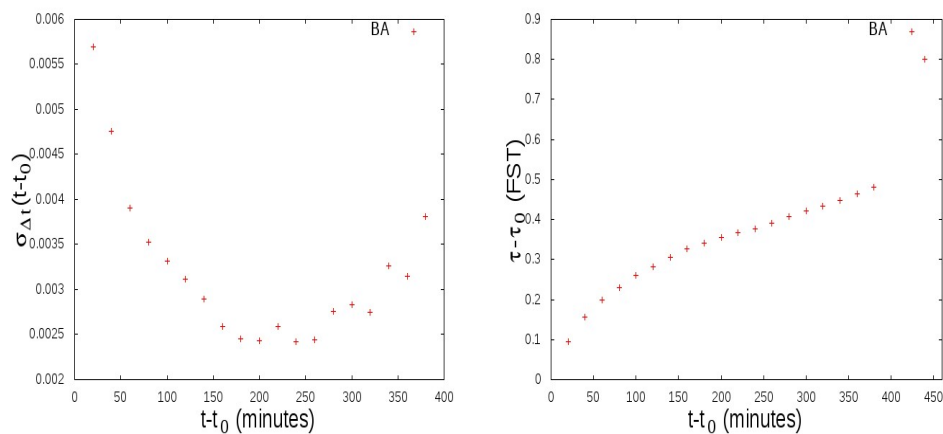
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2640	0.377	0.659
pomeriggio	2640	0.200	0.612
notte	2639	0.319	0.371
trading-day	2640	0.582	0.741
20 minuti	2640	0.025	1.291
38 minuti	2640	0.051	0.952
apertura-apertura	2639	1	0

Tabella 3.3: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset BA



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.5: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset BA, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

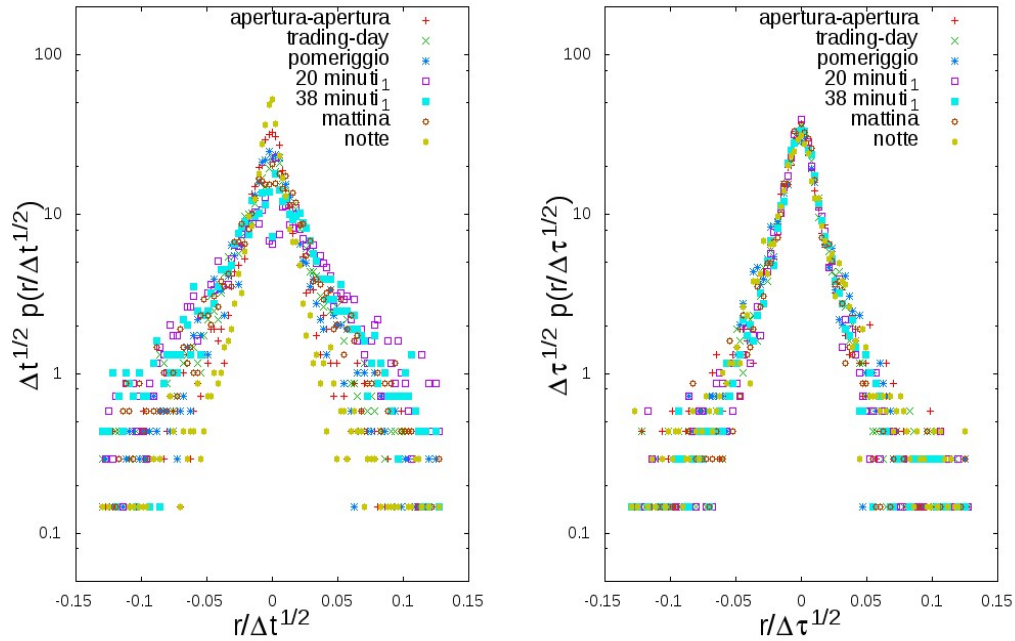
Figura 3.6: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset BA.

Osservando la volatilità infragiornaliera, questa ha, a meno di fluttuazioni, un solo minimo e la caratteristica forma ad U. Indagando l'andamento del FST possiamo osservare che esso ha un flesso, corrispondente ai cambi di velocità del flusso del financial scaling time.

BAC E' il valore azionario della Bank of America Corporation, registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 2 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2640$ giorni.

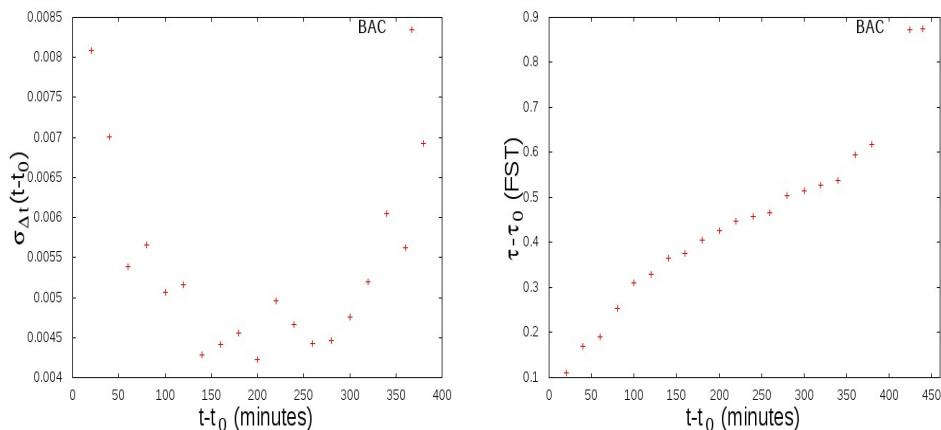
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2640	0.458	1.080
pomeriggio	2640	0.250	0.643
notte	2639	0.257	0.963
trading-day	2640	0.748	0.681
20 minuti	2640	0.032	2.41748
38 minuti	2640	0.058	1.691
apertura-apertura	2639	1	0

Tabella 3.4: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset BAC



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.7: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset BAC, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

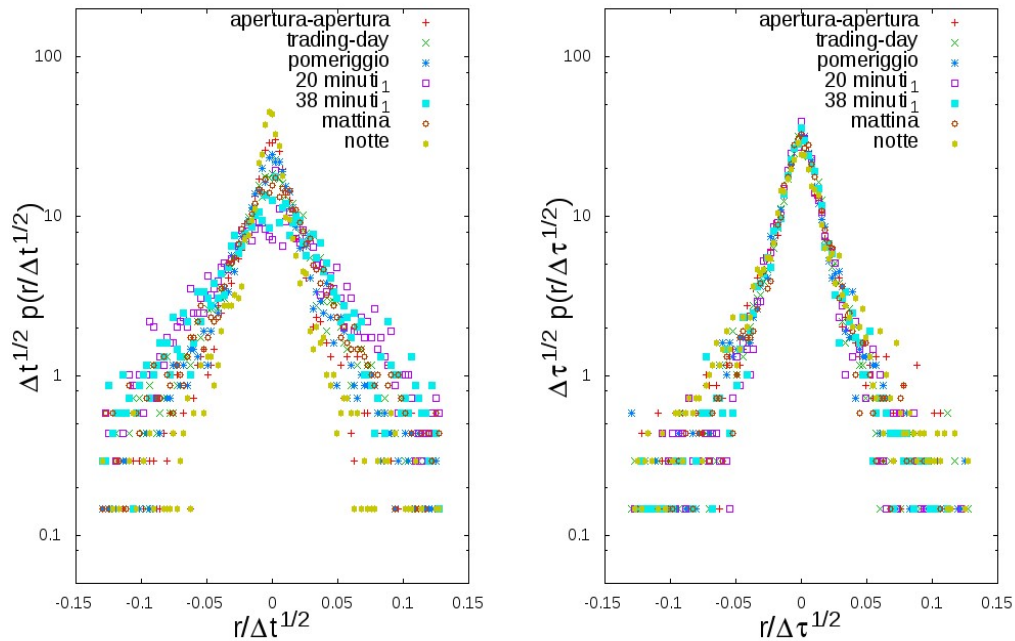
Figura 3.8: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset BAC.

Osservando la volatilità infragiornaliera, questa presenta numerose, importanti fluttuazioni. Nonostante la sua forma ad U si possono distinguere due minimi. In corrispondenza dei due minimi della volatilità vi sono i due rallentamenti del FST che determinano la presenza di flessi. Il comportamento “irregolare” della volatilità si riflette nell'andamento del FST. Possiamo osservare come, indipendentemente dai flessi, il FST presenti degli “scalini”. Se si confronta la posizione degli scalini, nel tempo fisico, con l'andamento della volatilità in quell'istante si osserva che i gradini del FST corrispondono alle fluttuazioni di volatilità.

C E' il valore azionario della Citigroup Inc., registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 2 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2640$ giorni.

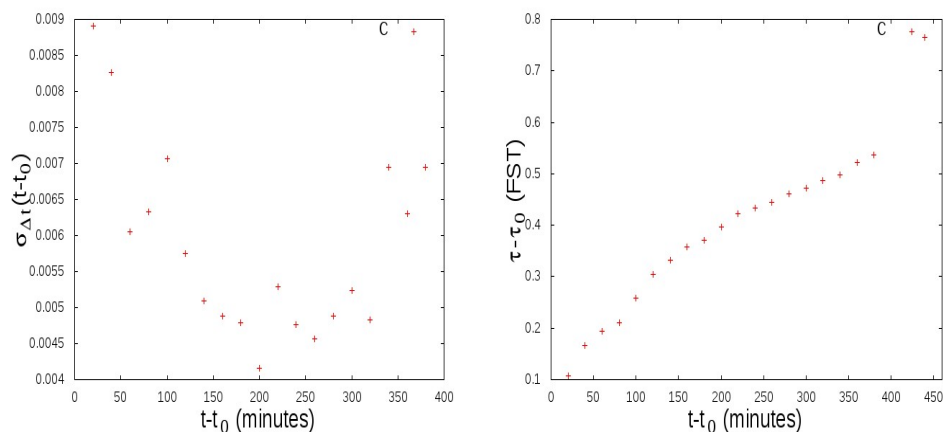
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2640	0.409	0.640
pomeriggio	2640	0.280	0.805
notte	2639	0.228	1.211
trading-day	2640	0.839	0.882
20 minuti	2640	0.028	1.868
38 minuti	2640	0.060	1.528
apertura-apertura	2639	1	0

Tabella 3.5: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset C



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.9: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset C, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

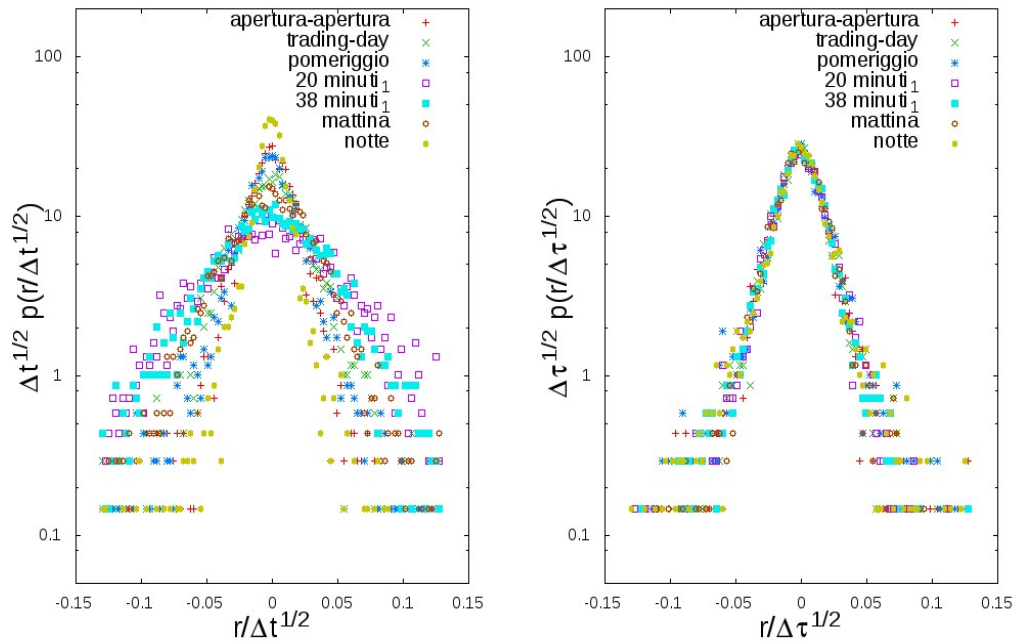
Figura 3.10: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset C.

La volatilità infragiornaliera ha un andamento fortemente irregolare, caratterizzato da numerose fluttuazioni. Questo comportamento si riflette nel FST che ha un andamento “brusco” caratterizzato da alcuni “gradini”. Indipendentemente da queste irregolarità si può distinguere il due flessi del FST corrispondente ai due minimi di volatilità, uno verso metà giornata e uno alla mattina.

CAT È il valore azionario della Caterpillar, Inc. , registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 3 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2639$ giorni.

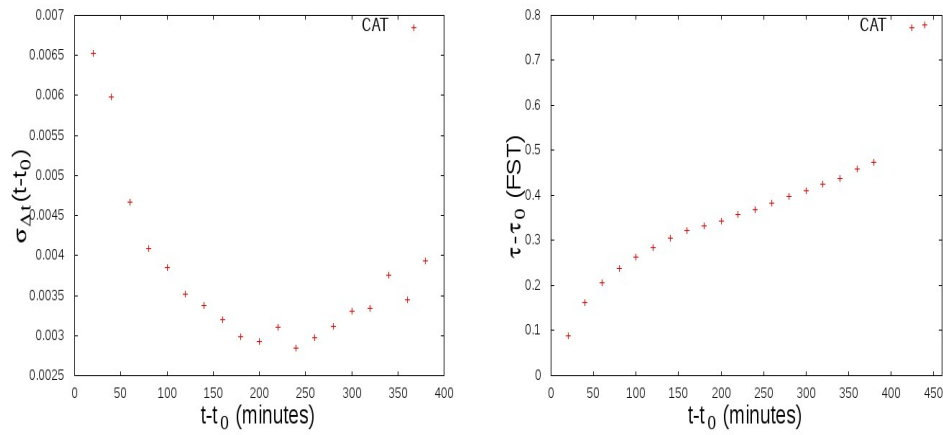
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2639	0.367	0.290
pomeriggio	2639	0.198	0.693
notte	2638	0.306	0.564
trading-day	2639	0.589	0.503
20 minuti	2639	0.025	1.190
38 minuti	2639	0.051	0.854
apertura-apertura	2638	1	0

Tabella 3.6: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset CAT



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.11: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset CAT, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

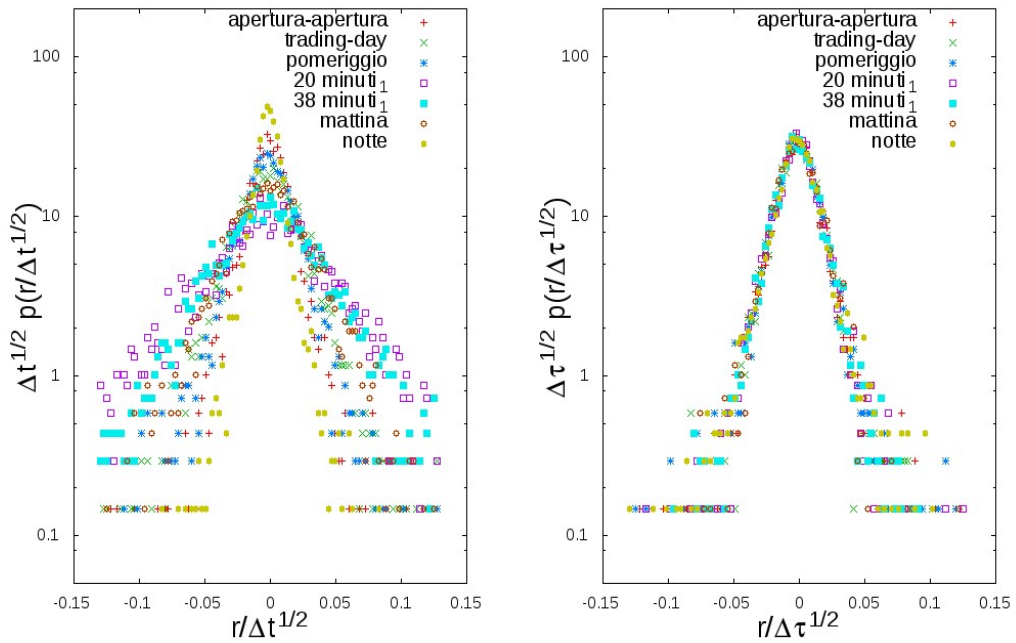
Figura 3.12: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset CAT.

Osserviamo che la volatilità ha la tipica forma ad U, con un solo minimo. In corrispondenza di questo minimo si osserva il rallentamento del FST e quindi la presenza di un flesso, dovuto ai cambi di velocità del flusso.

FDX È il valore azionario della FedEx Corporation, registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 3 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2639$ giorni.

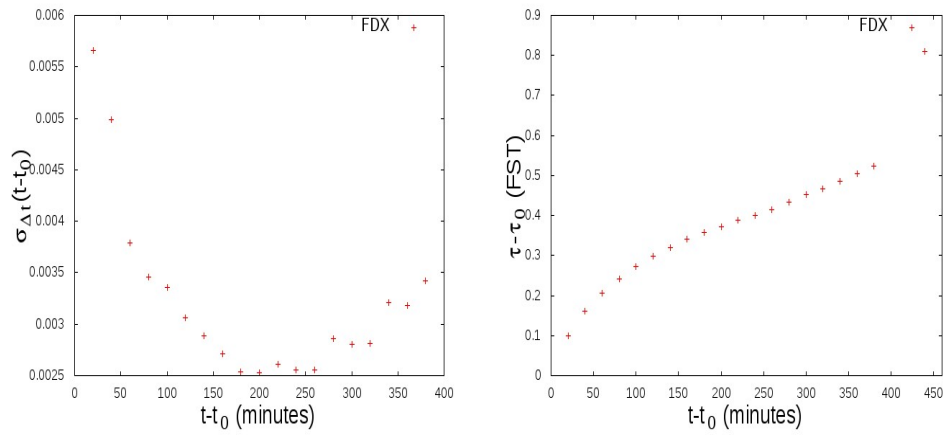
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2639	0.389	0.514
pomeriggio	2639	0.243	0.433
notte	2638	0.286	0.427
trading-day	2639	0.660	0.404
20 minuti	2639	0.027	0.953
38 minuti	2639	0.055	0.771
apertura-apertura	2638	1	0

Tabella 3.7: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset FDX



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.13: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset FDX, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

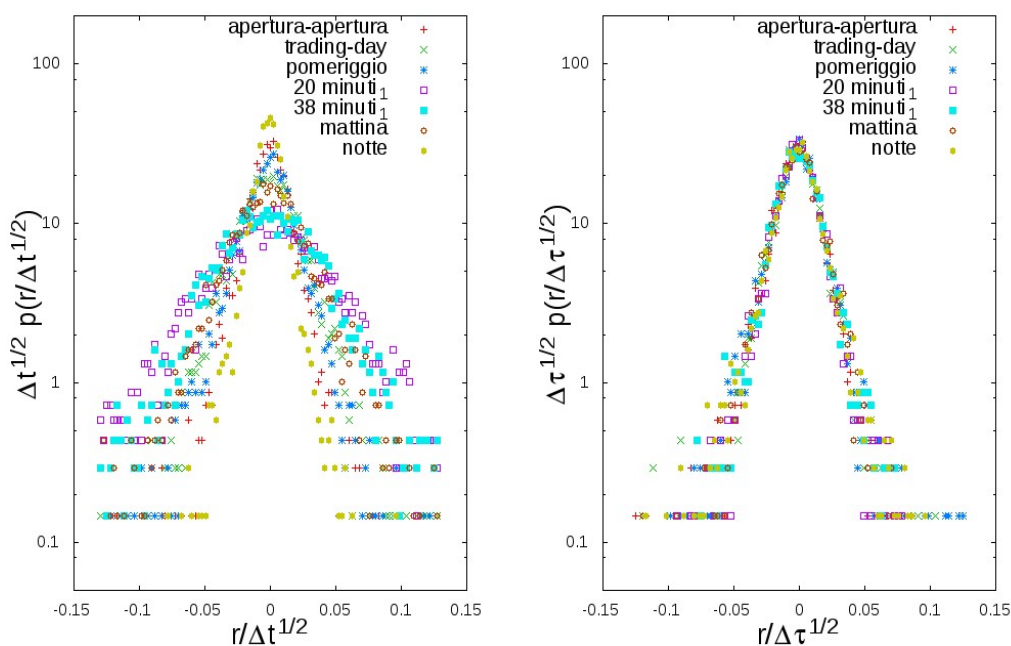
Figura 3.14: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset FDX.

La volatilità ha la tipica forma ad U con solo minimo, in corrispondenza del quale il FST scorre più lento. Si osserva un flesso nell'andamento del FST.

HON E' il valore azionario della Honeywell International Inc., registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 3 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2639$ giorni.

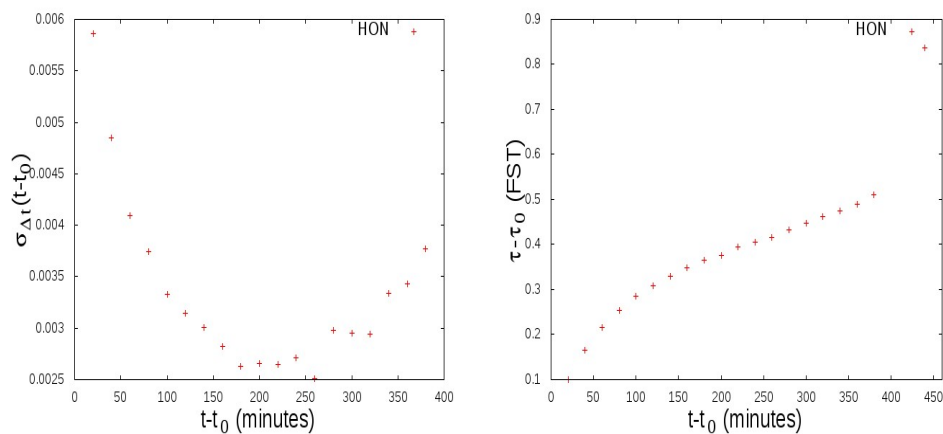
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2639	0.356	0.722
pomeriggio	2639	0.229	0.572
notte	2638	0.326	0.454
trading-day	2639	0.613	0.461
20 minuti	2639	0.027	1.665
38 minuti	2639	0.055	1.153
apertura-apertura	2638	1	0

Tabella 3.8: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset HON



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.15: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset HON, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

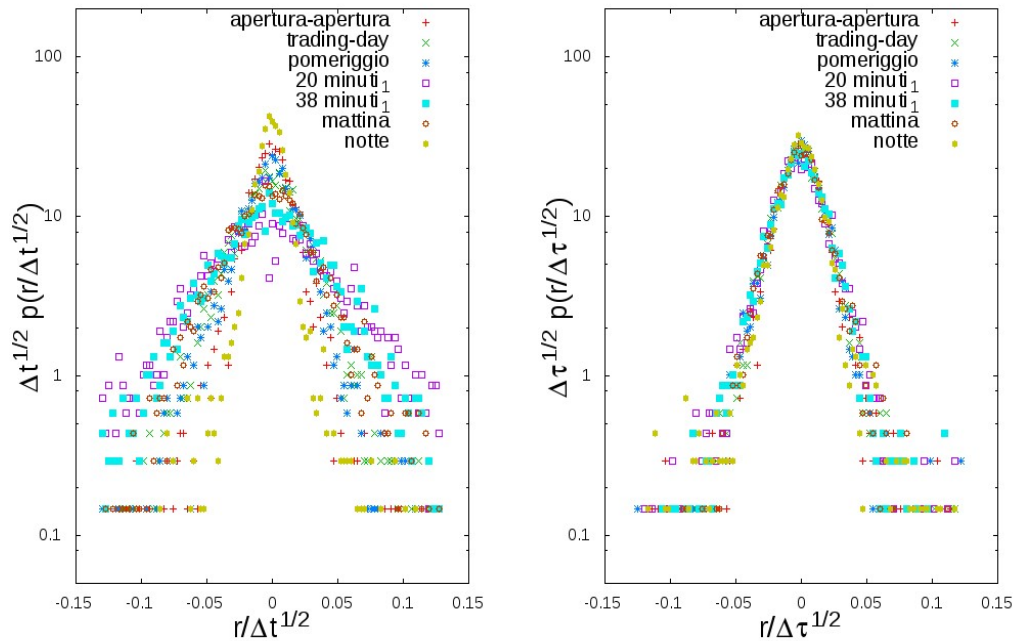
Figura 3.16: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset HON.

La volatilità presenta un solo minimo ed alcune fluttuazioni nel pomeriggio. Questo andamento si riflette nel FST che rallenta in corrispondenza del minimo e in corrispondenza delle fluttuazioni ha un leggero “gradino”.

HPQ E' il valore azionario della Hewlett-Packard (nota anche con la sola sigla hp) , registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 2 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2640$ giorni.

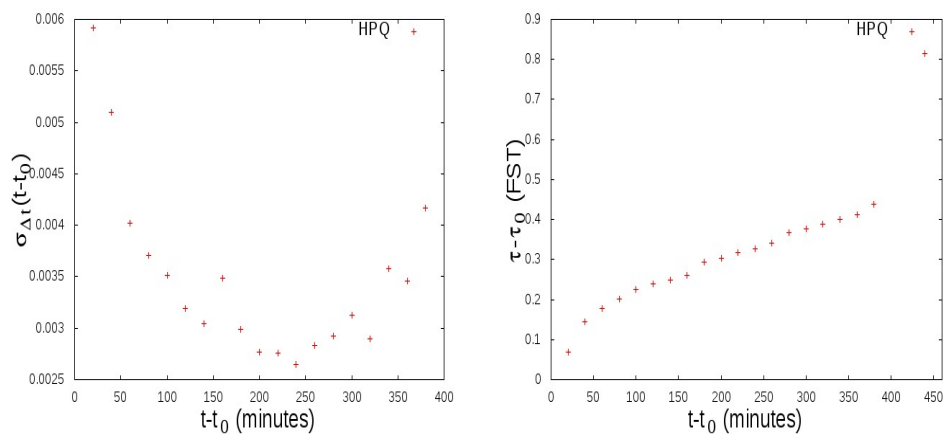
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2640	0.352	0.570
pomeriggio	2640	0.250	0.461
notte	2639	0.378	0.812
trading-day	2640	0.593	0.555
20 minuti	2640	0.023	2.264
38 minuti	2640	0.044	1.639
apertura-apertura	2639	1	0

Tabella 3.9: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset HPQ



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.17: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset HPQ, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

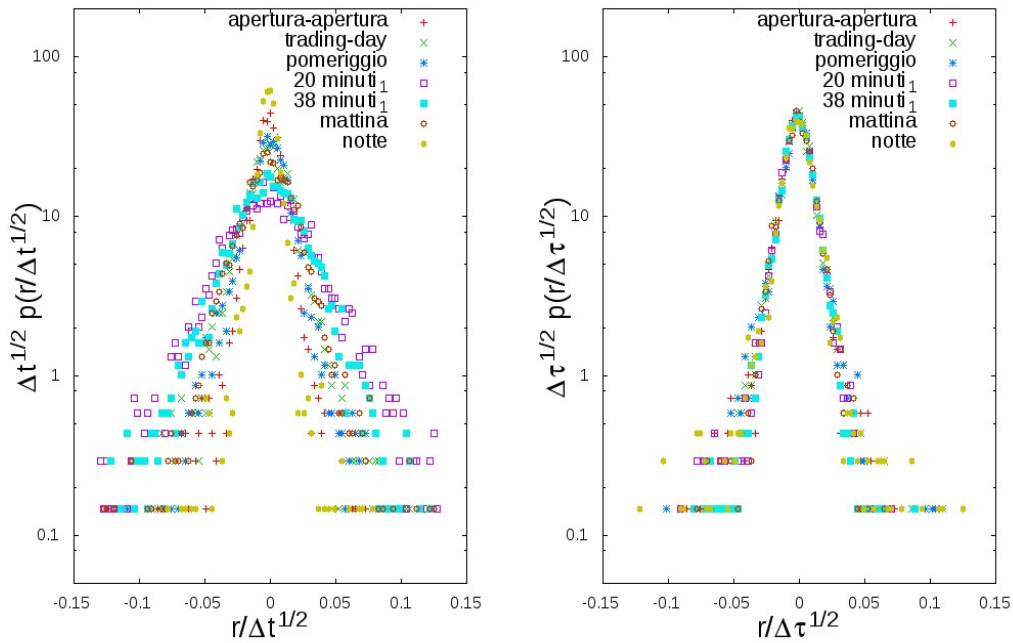
Figura 3.18: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset HPQ.

La volatilità, nonostante la forma ad U con un minimo, presenta delle importanti fluttuazioni. In corrispondenza del minimo di volatilità si osserva il rallentamento del FST con conseguente flesso. Osserviamo poi i diversi “gradini” del FST in corrispondenza delle fluttuazioni di volatilità.

IBM E' il valore azionario della International Business Machines Corporation, registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 2 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2640$ giorni.

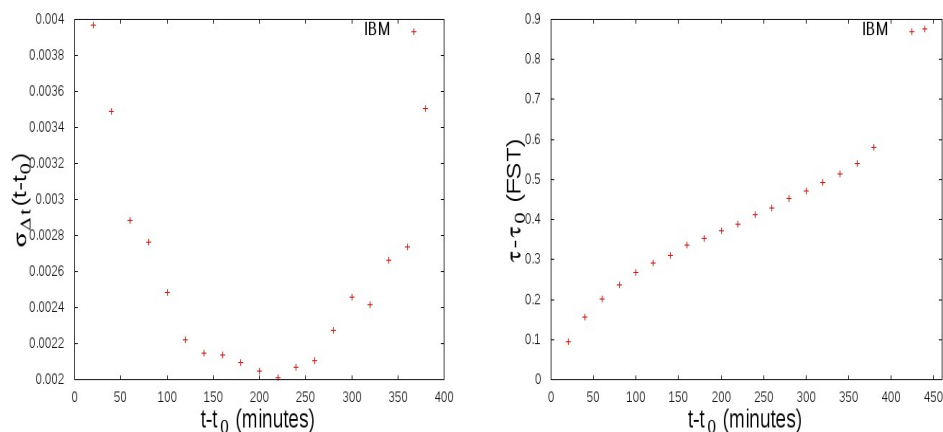
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2640	0.360	0.516
pomeriggio	2640	0.303	0.449
notte	2639	0.296	0.385
trading-day	2640	0.662	0.474
20 minuti	2640	0.030	0.867
38 minuti	2640	0.061	0.710
apertura-apertura	2639	1	0

Tabella 3.10: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset IBM



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.19: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset IBM, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

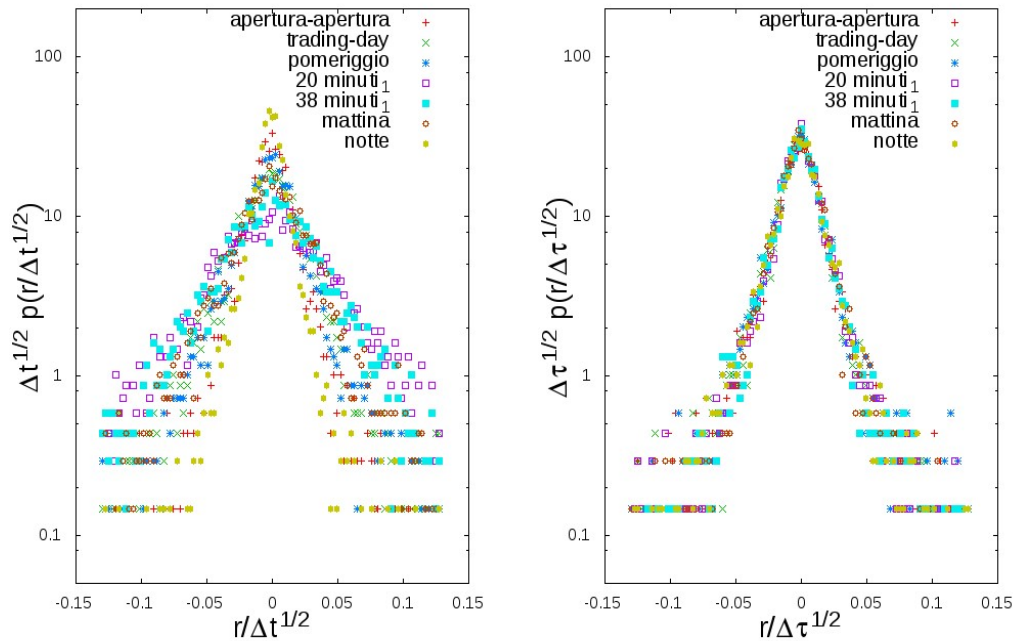
Figura 3.20: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset IBM.

La volatilità, dalla caratteristica forma ad U, presenta un minimo ben pronunciato, in corrispondenza del quale si ha il rallentamento del FST. Si distingue molto bene un flesso nel flusso del financial scaling time, corrispondente ai cambi di velocità del flusso tra la mattina e il pomeriggio e tra il pomeriggio e la chiusura del mercato.

JPM È il valore azionario della JP Morgan Chase & Co., registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 3 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2639$ giorni.

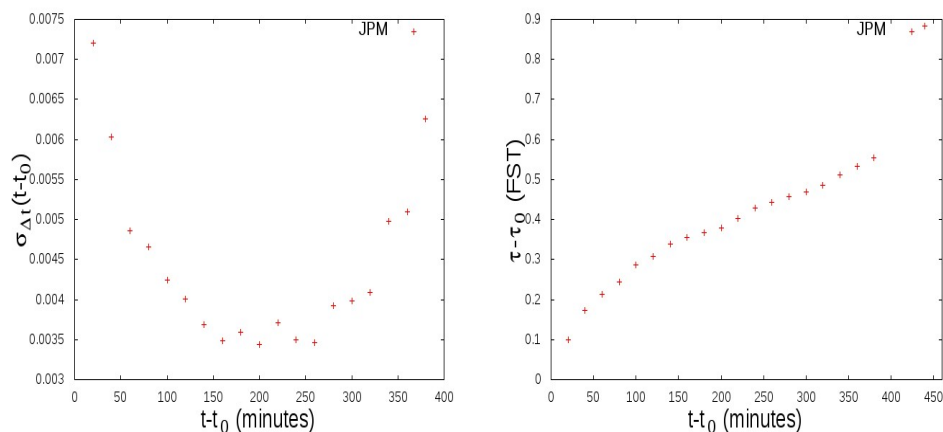
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2639	0.378	0.654
pomeriggio	2639	0.279	0.618
notte	2638	0.328	0.523
trading-day	2639	0.701	0.416
20 minuti	2639	0.029	1.623
38 minuti	2639	0.057	1.202
apertura-apertura	2638	1	0

Tabella 3.11: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset JPM



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.21: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset JPM, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

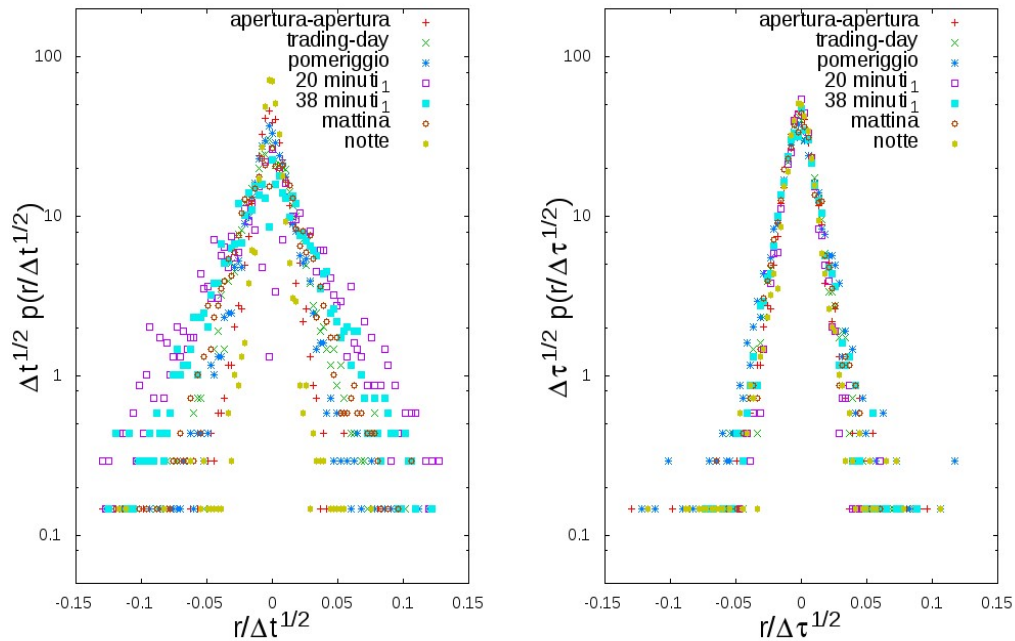
Figura 3.22: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset JPM.

A meno di fluttuazioni la volatilità presenta un solo minimo, che si riflette nel rallentamento del FST verso l'ora di pranzo. Si distingue poi un flesso nell'andamento del financial scaling time, relativo ai cambi di velocità. In corrispondenza delle fluttuazioni di volatilità si possono vedere delle leggere irregolarità nel flusso del FST che presenta dei “gradini”.

MDLZ E' il valore azionario della Mondelēz International, Inc., registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 2 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2640$ giorni.

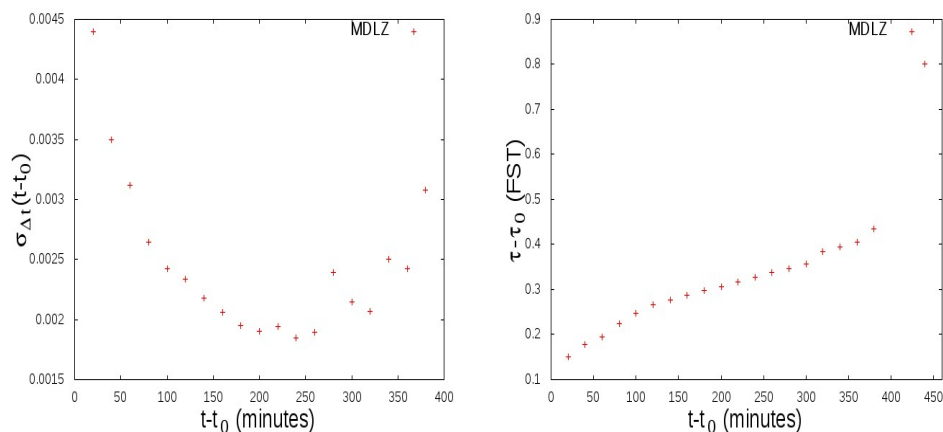
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2640	0.360	0.942
pomeriggio	2640	0.159	2.085
notte	2639	0.365	1.115
trading-day	2640	0.606	0.998
20 minuti	2640	0.023	4.964
38 minuti	2640	0.043	3.587
apertura-apertura	2639	1	0

Tabella 3.12: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset MDLZ



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.23: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset MDLZ, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

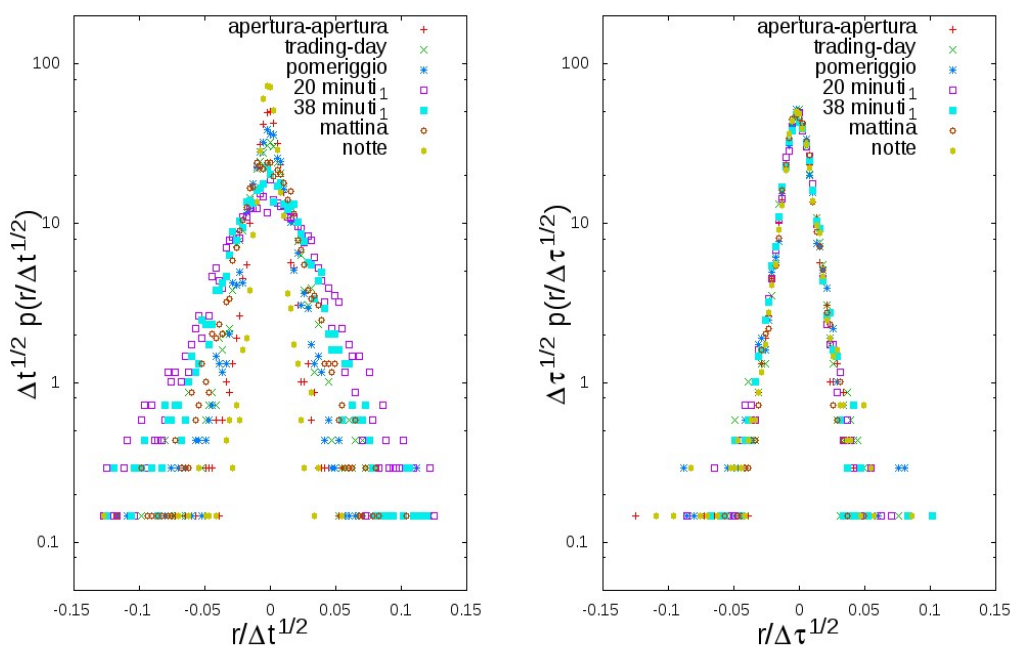
Figura 3.24: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset MDLZ.

La volatilità presenta la caratteristica forma ad U con un solo minimo attorno alla pausa pranzo. In corrispondenza del minimo possiamo riscontrare un flesso nell'andamento del FST, relativo ai cambi di velocità del flusso. La volatilità ha poi alcune fluttuazioni nella seconda metà della giornata che si riflettono in un andamento più "brusco" del FST.

PEP E' il valore azionario della PepsiCo, Incorporated, registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 2 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2640$ giorni.

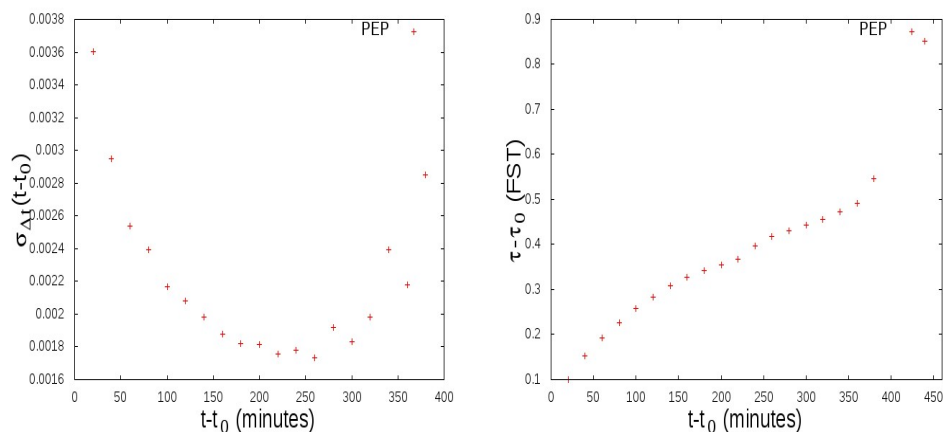
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2640	0.464	0.502
pomeriggio	2640	0.281	0.419
notte	2639	0.306	0.564
trading-day	2640	0.683	0.438
20 minuti	2640	0.029	1.764
38 minuti	2640	0.060	1.262
apertura-apertura	2639	1	0

Tabella 3.13: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset PEP



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.25: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset PEP, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

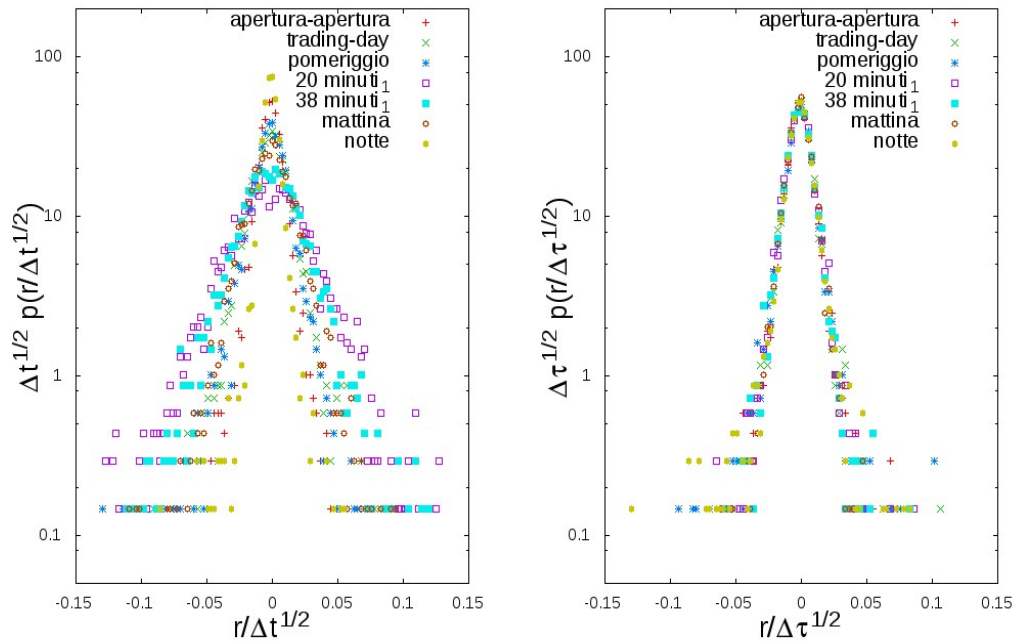
Figura 3.26: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset PEP.

La volatilità, caratterizzata dalla presenza di fluttuazioni nella seconda metà della giornata, presenta un solo minimo. A questo minimo corrispondente un rallentamento del FST e la conseguente presenza di un flesso dovuto ai cambi di velocità. In corrispondenza delle fluttuazioni si osserva invece un “gradino” nel flusso del FST.

PG E' il valore azionario della Procter & Gamble, registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 3 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2639$ giorni.

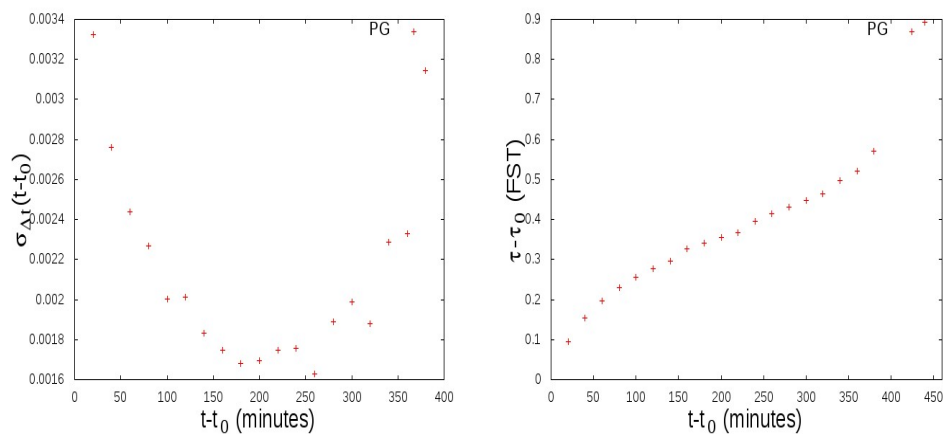
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2639	0.411	0.480
pomeriggio	2639	0.294	0.723
notte	2638	0.321	0.399
trading-day	2639	0.690	0.362
20 minuti	2639	0.030	1.889
38 minuti	2639	0.063	1.277
apertura-apertura	2638	1	0

Tabella 3.14: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset PG



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.27: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset PG, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

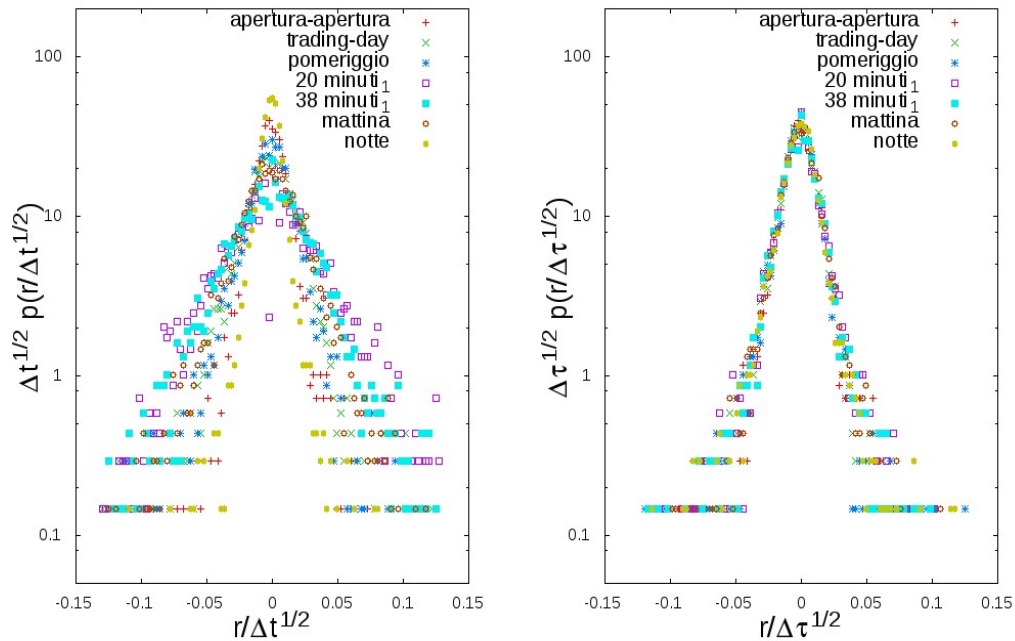
Figura 3.28: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset PG.

Nonostante le fluttuazioni la volatilità presenta un solo minimo, in corrispondenza del quale il FST rallenta. Si distingue chiaramente un flesso nello scorrere del FST legato ai cambi di velocità tra la mattina e il pomeriggio e il pomeriggio e la sera. In corrispondenza delle fluttuazioni il FST è caratterizzato da “gradino”.

T È il valore azionario della AT&T Inc. (abbreviazione di American Telephone and Telegraph Incorporated), registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 3 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2639$ giorni.

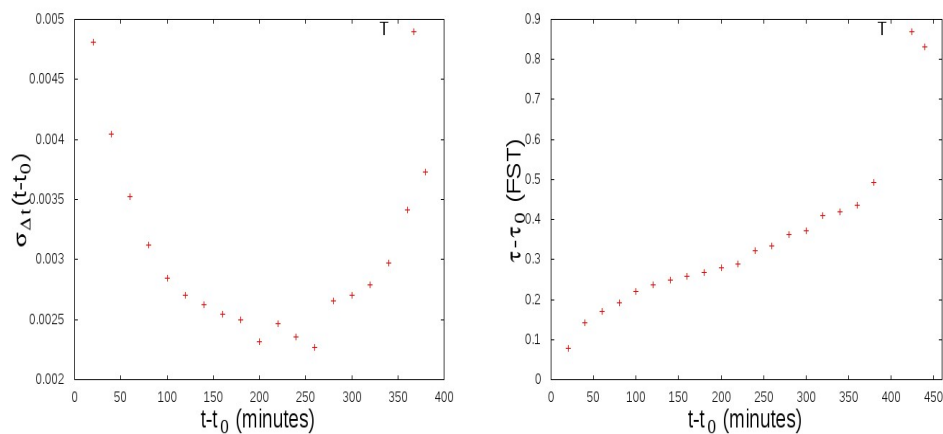
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2639	0.365	0.915
pomeriggio	2639	0.296	0.750
notte	2638	0.338	1.060
trading-day	2639	0.606	0.640
20 minuti	2639	0.026	2.870
38 minuti	2639	0.048	2.210
apertura-apertura	2638	1	0

Tabella 3.15: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset T



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.29: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset T, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

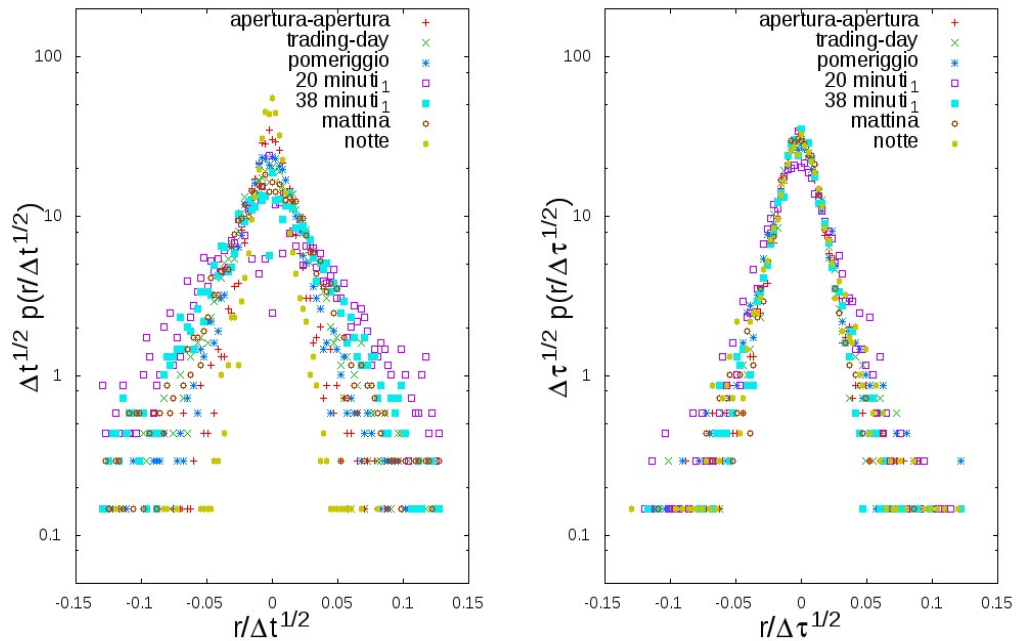
Figura 3.30: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset T.

La volatilità, nonostante la presenza di alcune fluttuazioni, presenta la caratteristica forma ad U ed un solo minimo. In corrispondenza delle fluttuazioni si osservano dei “gradini” nello scorrere del FST, il quale rallenta verso l'ora di pranzo, quando la volatilità raggiunge il suo minimo.

TWX E' il valore azionario della Time Warner, Inc., registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 3 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2639$ giorni.

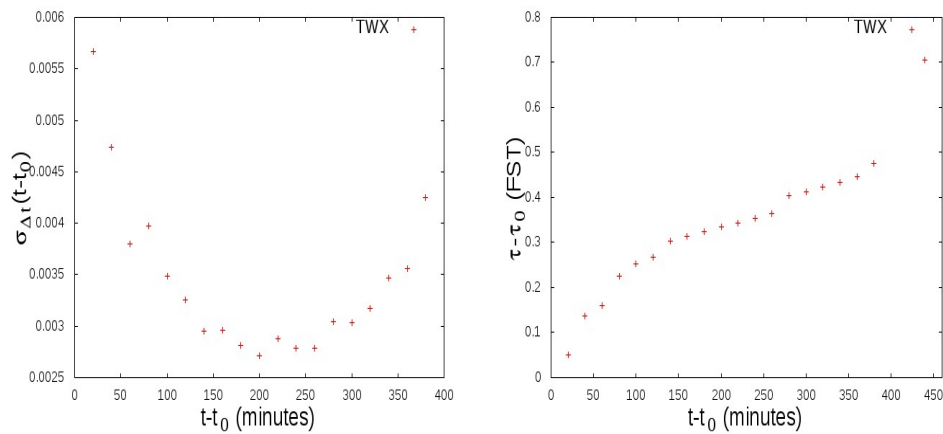
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2639	0.402	0.571
pomeriggio	2639	0.211	1.094
notte	2638	0.229	1.019
trading-day	2639	0.696	0.516
20 minuti	2639	0.025	3.320
38 minuti	2639	0.045	2.387
apertura-apertura	2638	1	0

Tabella 3.16: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset TWX



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.31: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset TWX, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

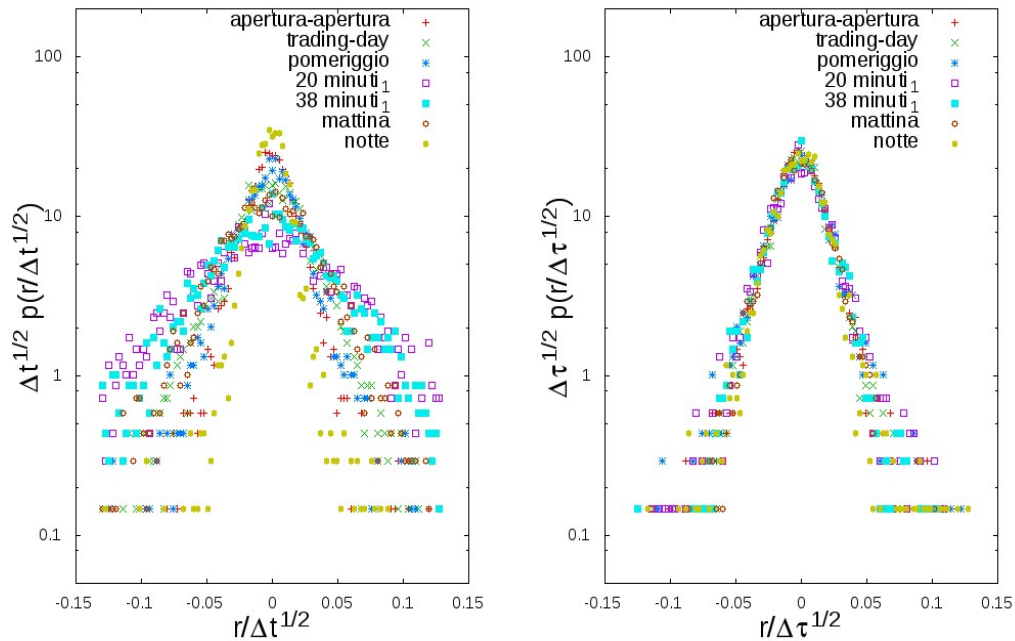
Figura 3.32: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset TWX.

La volatilità presenta diverse fluttuazioni che si riflettono nei “gradini” presenti nel FST. Si osserva un rallentamento dello scorrere del FST attorno alla pausa pranzo, quando la volatilità raggiunge il suo unico minimo.

TXN E' il valore azionario della Texas Instruments Incorporated, registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 2 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2640$ giorni.

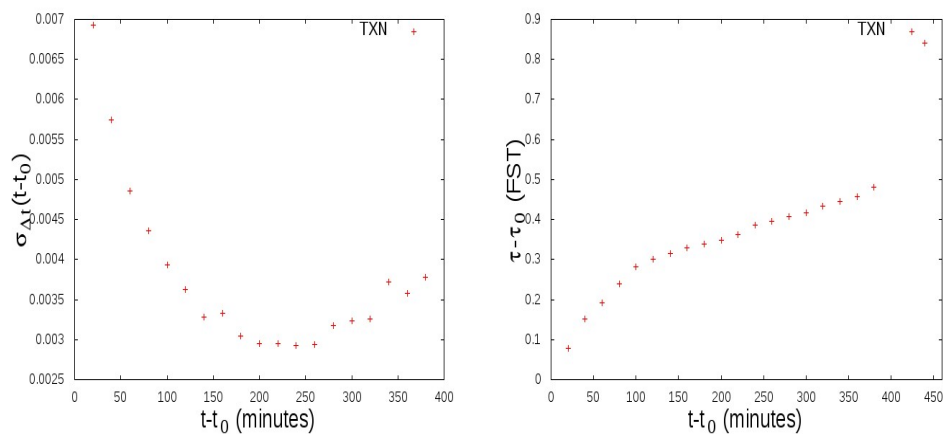
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2640	0.373	0.530
pomeriggio	2640	0.199	0.709
notte	2639	0.361	0.605
trading-day	2640	0.622	0.406
20 minuti	2640	0.025	2.046
38 minuti	2640	0.049	1.532
apertura-apertura	2639	1	0

Tabella 3.17: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset TXN



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.33: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset TXN, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

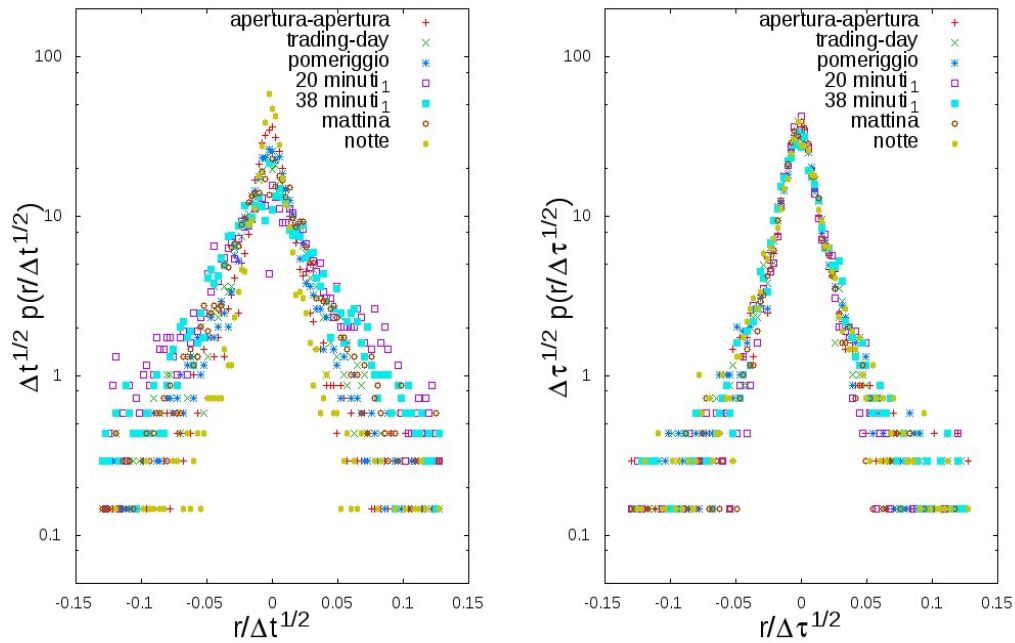
Figura 3.34: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset TXN.

La volatilità presenta la caratteristica forma ad U con un solo minimo, in corrispondenza de quale il FST rallenta. Si distingue il flesso del FST relativo ai cambi di velocità del flusso tra la mattina e il pomeriggio e il pomeriggio e fine giornata.

WFC E' il valore azionario della Wells Fargo & Co, registrato dal NYSE. Sono stati acquisiti dati dal 2 Gennaio 2003 al 28 Giugno 2013, per un totale di $L = 2640$ giorni.

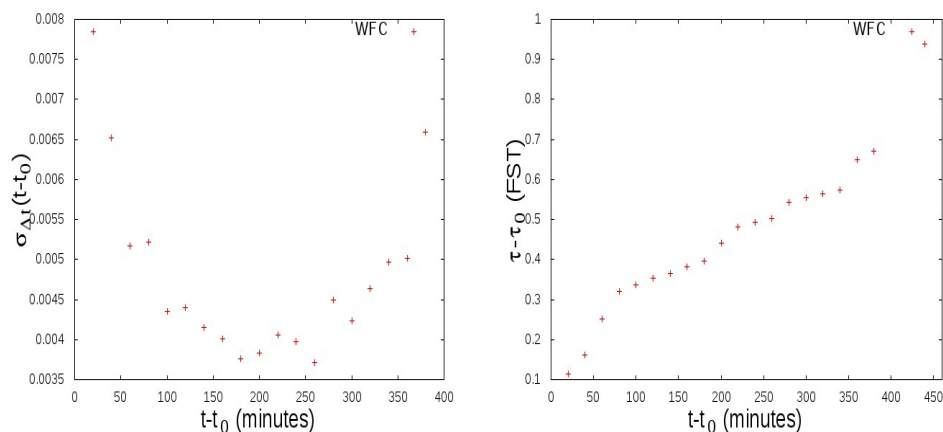
y	n_y	$\Delta\tau$ (FST)	$D_{x,y}$
mattina	2640	0.471	0.764
pomeriggio	2640	0.251	0.750
notte	2639	0.266	0.881
trading-day	2640	0.658	0.571
20 minuti	2640	0.035	2.539
38 minuti	2640	0.061	1.884
apertura-apertura	2639	1	0

Tabella 3.18: Campione y , numero di ritorni n_y , intervallo $\Delta\tau$, distanza $D_{x,y}$ per l'asset WFC



(a) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.2). (b) PDF empirica riscalata secondo Eq. (3.3).

Figura 3.35: Confronto delle PDFs empiriche dell'asset WFC, riscalate per il tempo fisico (a) e per il FST (b). Si può constatare che con la nuova definizione di tempo viene soddisfatta l'equazione di scaling, Eq. (3.3).



(a) Volatilità infragiornaliera calcolata secondo Eq. (1.7). $\Delta t = 20$ minuti.

(b) Confronto tra lo scorrere del FST e del tempo fisico, rispetto all'istante iniziale $t_0=9:40$ e il corrispondente τ_0 . L'intervallo notturno è stato ridotto per ragioni grafiche di scala.

Figura 3.36: Volatilità e confronto tra lo scorrere del FST e il tempo fisico per l'asset WFC.

Nonostante la forma ad U, la volatilità è molto “irregolare”, presenta molte importanti fluttuazioni che si riflettono nell'andamento discontinuo del FST, il quale presenta molti “gradini”.

La volatilità presenta due minimi a metà giornata che si riflettono nei corrispondenti flessi del FST.

Dall'analisi svolta, osservando le tabelle dei risultati ottenuti per i diversi campioni estratti dai diversi assets, possiamo constatare che, per la maggioranza di questi ultimi, solamente i campioni $y = 20, 38$ minuti presentano una distanza $D_{x,y}$ considerevolmente maggiore di uno, talvolta persino di due.

La distanza $D_{x,y}$ ci consente di valutare quanto siano simili le PDFs dei campioni una volta che sono state riscalate, è un indice di quanto le distribuzioni collasino bene le une sulle altre. L'intervallo $\Delta\tau$ è l'intervallo in FST per il quale la distanza $D_{x,y}$ viene minimizzata, esso verifica il collasso ottimale tra le due distribuzioni.

Attraverso i grafici delle figure (a), scalati nel tempo fisico secondo Eq. (3.2), e (b), scalati nel FST secondo Eq. (3.3) si riesce ad osservare la bontà dei collassi delle PDFs per i parametri riportati nelle tabelle. Come si può notare, quando valutati attraverso il financial scaling time, i ritorni di ogni campione mostrano una invarianza di scala, ottenuta tramite la legge di scaling, cosa che invece non avviene quando viene considerato il tempo fisico.

Oltre ad osservare l'effettivo collasso delle PDFs dei ritorni quando valutate nel financial scaling time, abbiamo cercato un legame tra l'andamento del FST e la volatilità intragiornaliera. Nonostante i FSTs dei diversi assets scorrono in modo differente, possiamo osservare dei comportamenti comuni quando li confrontiamo con le rispettive volatilità. In particolar modo abbiamo constatato che ai minimi di volatilità corrisponde un rallentamento del FST, ovvero la pendenza della curva relativa allo scorrere del financial scaling time diminuisce. Dal momento che la volatilità, nel tempo fisico, ha la caratteristica forma ad U con un solo minimo, il FST rallenta una sola volta (attorno alla pausa pranzo), per poi riaccelerare. Questi cambi di velocità determinano la presenza di un flesso, che corrisponde ai cambi di velocità del flusso del FST tra la mattina e il pomeriggio e tra il pomeriggio e la chiusura del mercato.

Vi sono dei casi però, come per l'asset BAC (si veda Figura 3.8) in cui la volatilità più di un minimo e come si può osservare il financial scaling time rallenta più di una volta con conseguente presenza di flessi.

La relazione tra minimo della volatilità e rallentamento del FST, con conseguenti flessi, viene però spesso sovrastata dalle forti fluttuazioni di volatilità. In questo caso la caratteristica forma ad U della volatilità presenta diverse oscillazioni che si riflettono nell'andamento FST come "gradini", che vanno a nascondere i flessi effettivi della curva. In altre parole non si riesce sempre a distinguere quali sono i flessi effettivi e quali sono quelli dovuti ad importanti fluttuazioni di volatilità.

Dai grafici delle analisi del singolo asset abbiamo potuto osservare come i diversi FSTs, pur seguendo lo stesso comportamento, non scorrono tutti alla stessa velocità. In particolar modo la velocità con cui scorre il FST a fine giornata è legata all'andamento della volatilità: se questa cresce molto (talvolta raggiungendo il valore che aveva ad inizio giornata) si può osservare che il FST scorre molto più veloce, altrimenti se cresce poco, il FST scorre leggermente più veloce rispetto al primo pomeriggio.

Dal momento che: i minimi della volatilità corrispondono ad un rallentamento del financial scaling time, le fluttuazioni di volatilità determina un "a gradino" nel FST e la crescita di volatilità a fine giornata determina un aumento più o meno rapido della velocità del FST, possiamo concludere quindi che l'andamento dei FSTs degli asset sia legato alla volatilità infragiornaliera di questi.

A causa delle statistiche poco accurate, dovute alla scarsità di giorni di

acquisizione, non sono però sempre facilmente identificabili i due flessi presenti nell'andamento del FST, poiché vengono spesso nascosti dalle “irregolarità” del financial scaling time dovute alle fluttuazioni della volatilità.

Vogliamo confrontare ora i diversi assets tra loro e il loro andamento nel tempo fisico.

Essendo il FST calcolato a partire dalla distribuzione dei ritorni, possiamo utilizzarlo per confrontare l'andamento dei ritorni dei diversi assets nel tempo. In altre parole vogliamo confrontare lo scorrere del FST, che è valutato a partire dal collasso delle PDFs dei ritorni, con lo scorrere del tempo fisico. Confrontiamo i 19 intervalli da 20 minuti, $\Delta t_i = 20$ minuti, $i \in \{1, \dots, 19\}$, aggiungendoci il Δt della notte, in tempo fisico, sui quali abbiamo calcolato i ritorni, con i corrispondenti intervalli $\Delta\tau$, in FST, che garantiscono il collasso ottimale delle PDFs dei ritorni.

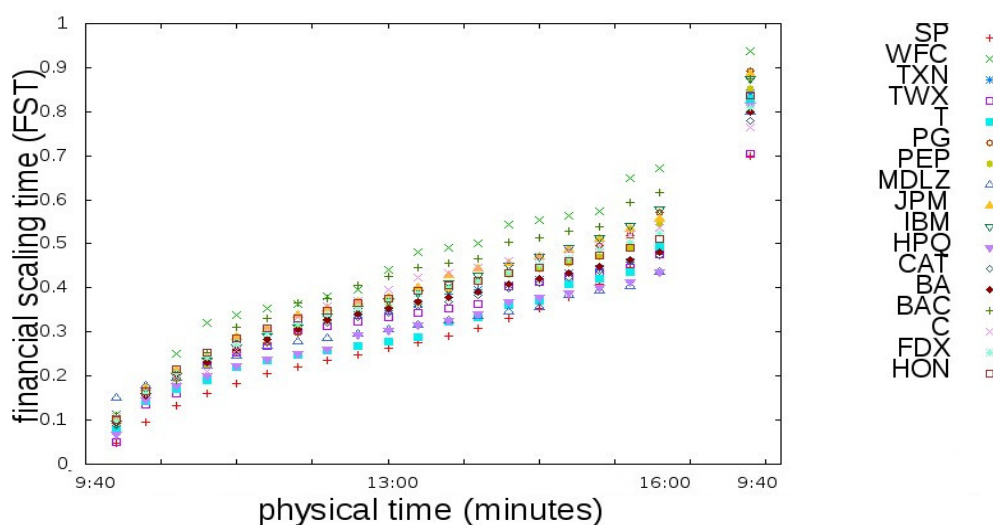


Figura 3.37: Confronto, per i diversi assets, tra lo scorrere del tempo fisico, valutato ogni 20 minuti, con aggiunto l'intervallo notturno, con il corrispondente tempo in FST, trovato usando la legge di scaling per le PDFs dei ritorni. L'intervallo notturno, in tempo fisico, è stato ridotto per ragioni grafiche scala.

In Figura 3.37 abbiamo ridotto l'intervallo, fisico, della notte, corrispondente a 1060 minuti, a 60 minuti, per ragioni grafiche di scala.

Osserviamo poi sempre dal grafico che nella nostra costruzione il FST non è perfettamente additivo. Si era richiesto che $1 \text{ fst} = 1$ giorno, invece osservando le ordinate del grafico, al completamento delle 24 ore della giornata (corrispondenti alle 9:40 del secondo giorno), si nota che queste non corrispondono tutte a 1 fst, ma sono comprese approssimativamente tra 0.7 e 1.0. Analizzeremo l'additività del FST in maniera più approfondita nella prossima Sezione.

Come già preannunciato, si può vedere dalla pendenza delle diverse curve che il financial scaling time scorre più rapido all'apertura dei mercati, rallentando poi nell'arco della giornata, verso l'ora di pranzo, per poi tornare a crescere velocemente nelle ore di chiusura dei mercati.

Figura 3.37 ci permette inoltre di poter confrontare tra di loro i diversi assets. Pur avendo tutti, con buona approssimazione, lo stesso andamento qualitativo, possiamo osservare come ve ne sono alcuni che scorrono più veloci di altri. In particolare lo S&P, scorre particolarmente lento. Va però osservato che, a differenza degli altri assets, è quello con il numero maggiore L di giorni, quindi in cui l'analisi

è stata più accurata, data la dimensione del campione. L'andamento del financial scaling time dello S&P, a livello grafico, è più continuo rispetto a quello degli altri assets, dove invece si possono osservare degli andamenti più bruschi, a gradino, che come abbiamo visto sono legati alle fluttuazioni della volatilità. Un esempio è l'asset BAC, che è quello che cresce più rapidamente, ma che cresce anche in modo più irregolare, come si può osservare in modo più dettagliato in Figura 3.38.

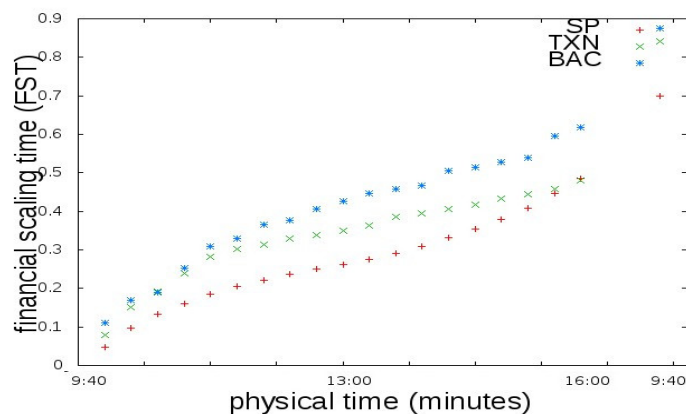


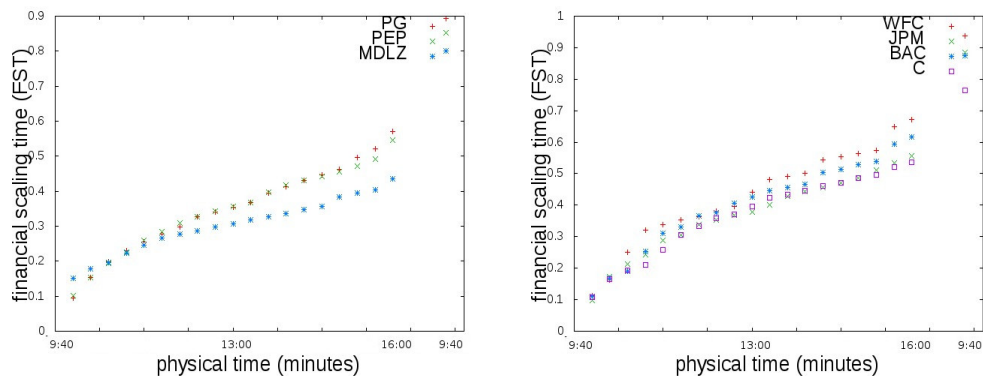
Figura 3.38: Confronto tra gli assets S&P, BAC e, a titolo esemplificativo, TXN, per mostrare i diversi andamenti e la continuità delle curve.

Possiamo constatare che se pur i prezzi di ogni asset siano differenti, i loro ritorni abbiano comportamenti simili, a riprova del fatto che in finanza si preferisce studiare i ritorni, piuttosto che i prezzi degli assets.

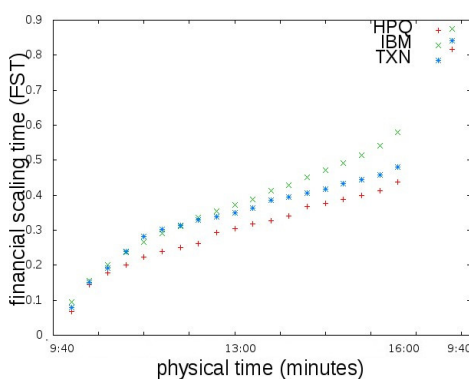
Vogliamo ora di vedere se il diverso andamento degli FSTs è legato alla categoria di appartenenza dei diversi assets (finanziari, alimentari, trasporti, ...). Dobbiamo quindi raggrupparli in diverse classi. Escludendo dal computo le categorie che hanno un solo asset, poiché su di esse non possiamo fare statistica, restano tre categorie: alimentare, finanziaria, informatica. Riportiamo per ognuna di esse il confronto tra gli FSTs degli assets che vi appartengono.

Da Figura 3.39 possiamo constatare che gli assets appartenenti ad una stessa categoria hanno comportamenti differenti tra loro, nonostante in alcuni casi, come nella categoria alimentare, o in quella finanziaria, si possa vedere che i FSTs relativi a due assets quasi coincidono, mentre gli altri si discostano dai primi due. Per quanto riguarda la categoria informatica non si riesce a distinguere un comportamento collettivo tra i gli assets che vi appartengono. Per poter approfondire lo studio, seguendo il fatto che per la categoria alimentare e finanziaria due FSTs quasi si sovrappongono, sarebbe necessario disporre di un campione maggiore di assets appartenenti alle categorie in esame.

Un aspetto che non abbiamo indagato, ma che altre analisi [3] mostrano, è il comportamento della volatilità. Ricordiamo che se analizzata in funzione del tempo fisico questa mostra la tipica forma ad U dei processi non stazionari. Analizzandola invece attraverso il financial scaling time possiamo vedere che dopo un transiente iniziale tende a stabilizzarsi, a meno di fluttuazioni. Questo comportamento è una prova della stazionarietà del processo.



(a) Confronto tra lo scorrere degli FSTs degli assets appartenenti alla categoria alimentare. (b) Confronto tra lo scorrere degli FSTs degli assets appartenenti alla categoria finanziaria.



(c) Confronto tra lo scorrere degli FSTs degli assets appartenenti alla categoria informatica.

Figura 3.39: Confronto tra i FSTs degli assets appartenenti a tre diverse categorie: alimentare (a), finanziaria (b) ed informatica (c).

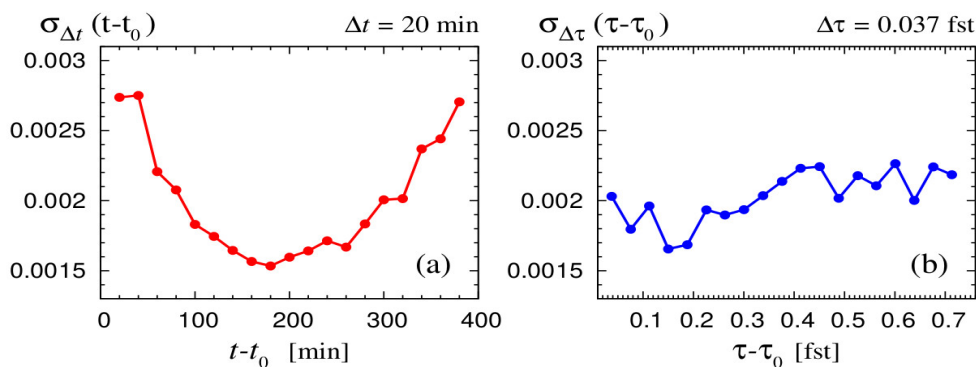


Figura 3.40: Volatilità infragiornaliera, calcolata secondo Eq. (1.7), per l'asset S&P. Ogni giorno di mercato è assunto essere una realizzazione indipendente dello stesso processo stocastico. In (a) è riportata la volatilità calcolata in funzione dell'intervallo di tempo fisico $\Delta t = 20$ minuti, mentre in (b) è riportata la volatilità in funzione del FST.

Osservando poi il comportamento dell'autocorrelazione di volatilità (Figura 3.41) che ricordiamo essere stagionale nel tempo fisico, si osserva che se viene calcolata tramite il FST perde il suo schema periodico.

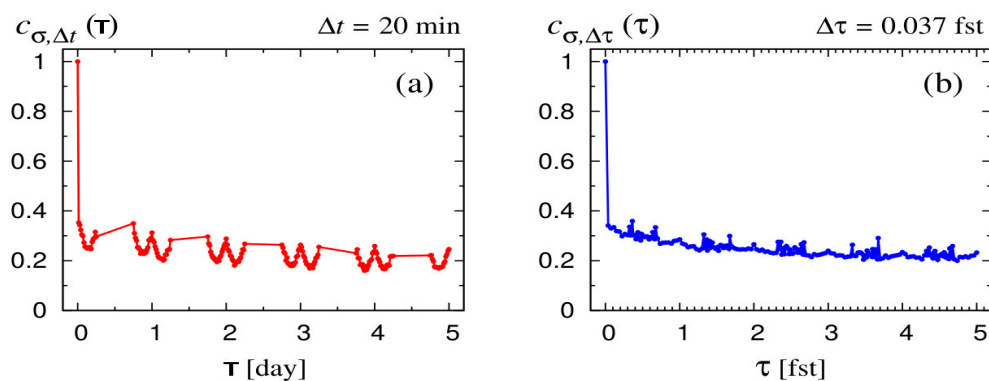


Figura 3.41: Autocorrelazione di volatilità, calcolata secondo Eq. (1.8) per l'asset S&P. Questa è stata calcolata in funzione del tempo fisico (a), in cui è stagionale, e in funzione del FST (b), in cui la periodicità viene soppressa.

Attraverso i financial scaling times, possiamo pertanto mostrare l'invarianza in scala di ritorni calcolati su diversi intervalli temporali. Questa nuova scala temporale, definita a partire dal processo dei ritorni, ci permette di renderlo stazionario. Essa è inoltre del tutto generale, poiché non si riconduce ad alcuna distribuzione analitica né a modelli parametrici. Ci consente inoltre di confrontare, in modo semplice, l'andamento dei diversi assets nell'arco della giornata. Infine, caratteristica estremamente importante, il modello fornisce una naturale quantificazione dei periodi di chiusura e dei relativi ritorni, non andando a influire negativamente sulla PDF dei ritorni e su eventuali statistiche costruite su di essa. L'unica limitazione è, che nonostante lo scaling valga su un'ampia scala temporale, ha un cut-off inferiore sulla durata degli intervalli, dovuto alla presenza di correlazione dei ritorni quando questi sono calcolati su intervalli inferiori ai 20 minuti.

3.7 L'additività del FST

Nella Sezione precedente, in Figura 3.37, abbiamo visto come gli intervalli $\Delta\tau$, in FST, calcolati per i ritorni relativi ai 19 intervalli da 20 minuti con aggiunto quello notturno, non siano perfettamente additivi.

Indaghiamo quindi l'additività del FST, valutando se la somma dei nostri intervalli in FST, in cui abbiamo diviso la giornata, soddisfa alla condizione 1 fst=1 giorno. Esamineremo quattro casi differenti:

- la somma dei 19 intervalli da venti minuti e di quello della notte, $\Delta\tau_{\Sigma 20,n}$;
- la somma dei 10 intervalli da 38 minuti e di quello notturno, $\Delta\tau_{\Sigma 38,n}$;
- la somma degli intervalli della mattina, del pomeriggio e della notte, $\Delta\tau_{\Sigma m,p,n}$;
- la somma degli intervalli del trading-day e della notte, $\Delta\tau_{\Sigma t,n}$;

ognuno dei quali costituisce una diversa suddivisione delle 24 ore. Valutiamo quindi le differenze percentuali (%), tra la somma considerate e 1 fst.

Da Tabella 3.19 possiamo constatare che nella maggior parte dei casi le somme degli intervalli non superano mai il valore 1, corrispondente alla durata, in FST, di 24 ore. Questo fatto è particolarmente evidente per le somme dei ritorni da venti minuti con aggiunto l'intervallo notturno.

asset	$\Delta\tau_{\Sigma 20,n}$	%	$\Delta\tau_{\Sigma 38,n}$	%	$\Delta\tau_{\Sigma m,p,n}$	%	$\Delta\tau_{\Sigma t,n}$	%
S&P	0.670	33	0.749	25	0.810	21	0.873	13
BA	0.800	20	0.826	17	0.896	10	0.901	10
BAC	0.874	13	0.836	16	0.965	3	1.005	0
C	0.765	23	0.826	17	0.917	8	1.067	7
CAT	0.780	22	0.819	18	0.871	13	0.895	10
FDX	0.810	19	0.833	17	0.918	8	0.946	5
HON	0.837	16	0.875	12	0.911	9	0.939	6
HPQ	0.815	18	0.823	18	0.980	2	0.971	3
IBM	0.875	12	0.906	9	0.959	4	0.958	4
JPM	0.884	12	0.898	10	0.985	1	1.029	3
MDLZ	0.800	20	1.165	16	0.884	12	0.971	3
PEP	0.852	15	0.905	9	1.051	5	0.989	1
PG	0.892	11	0.956	4	1.026	3	1.011	1
T	0.830	17	0.816	18	0.999	0	0.944	6
TWX	0.705	29	0.682	32	0.842	16	0.925	7
TXN	0.841	16	0.847	15	0.933	7	0.983	2
WFC	0.938	6	0.877	12	0.988	1	0.924	8

Tabella 3.19: Additività del FST valutata per le somma dei diversi intervalli, confrontata con la durata di 24 ore in fst, 24 h=1 fst.

Se la valutiamo l'additività del nostro FST per una partizione molto fitta della giornata, con intervalli (di uguale durata) inferiori all'ora, possiamo osservare che l'additività della financial scaling time vale con una differenza approssimativamente del 20%.

Andando invece a considerare una suddivisione della giornata in intervalli maggiori, non della stessa durata, come ad esempio $\Delta\tau_{\Sigma t,n} = \Delta\tau_{\text{trading-day}} + \Delta\tau_{\text{notte}}$, che è la somma degli intervalli del trading-day e della notte, o $\Delta\tau_{\Sigma m,p,n} = \Delta\tau_{\text{mattina}} + \Delta\tau_{\text{pomeriggio}} + \Delta\tau_{\text{notte}}$, che è la somma degli intervalli della mattina del pomeriggio e della sera, in FST, si osserva che il financial scaling time è con ottima approssimazione additivo. La somma degli intervalli si discosta da 1, cioè la durata di un giorno in fst, per meno del 10%.

Il FST risulta essere con ottima approssimazione additivo se si considerano intervalli, in tempo fisico, superiori ad un'ora.

Possiamo spiegare questo fatto andando considerare la distanza $D_{x,y}$, che abbiamo minimizzato per determinare i valori del FST che garantiscono il collasso delle PDFs dei ritorni. Come avevamo anticipato, nel test di Kolmogorov-Smirnov il valore di $D_{x,y}$ deve appartenere ad un intervallo di confidenza per essere accettato, in modo da poter stabilire se i due set di dati provengono dalla medesima distribuzione.

Nel nostro caso, non abbiamo posto alcun criterio per la reiezione dei valori di $D_{x,y}$

trovati in seguito alla procedura di minimizzazione, poiché li abbiamo utilizzati per determinare il valore $\Delta\tau$, in FST, che garantiva il collasso tra le PDFs dei campioni di ritorni considerati.

Andando ad osservare i valori $D_{x,y}$ per i campioni da 20 e 38 minuti, per i diversi assets, possiamo constatare che questi sono generalmente superiori a uno. Come già discusso in Sezione 3.4, questo risultato implica che le PDFs in analisi non sono completamente sovrapponibili. In questo modo l'intervallo $\Delta\tau$ (relativo alle durate di 20 e 38 minuti in tempo fisico) ricavato dalla minimizzazione di $D_{x,y}$, è soggetto ad una imprecisione della procedura, pur permettendo un buon collasso tra le PDFs dei diversi campioni, non risulta essere perfettamente additivo.

Capitolo 4

Conclusioni

In questo lavoro abbiamo proposto una soluzione ad una delle maggiori problematiche nell'analisi delle serie temporali finanziarie: quella di definire una opportuna scala temporale che renda il processo dei ritorni stazionario. Abbiamo visto come la stazionarietà sia una caratteristica fondamentale per poter studiare empiricamente un fenomeno dal punto di vista statistico e poterne determinare delle proprietà, che come tali devono conservarsi nel tempo.

Se definito nel tempo fisico il processo dei ritorni non è stazionario e presenta forti comportamenti stagionali, in particolare a livello infragiornaliero [7]. Non riusciamo ad analizzare il processo correttamente da un punto di vista statistico, poiché non siamo in grado di effettuare delle medie empiriche temporali, le quali hanno significato solo se la serie temporale è stazionaria.

Molte scale temporali utilizzate in finanza tendono ad eliminare dal computo i periodi di chiusura del mercato e i relativi ritorni [7, 9] o tendono ad assegnare ai periodi di chiusura una durata prestabilita, modificando quindi i relativi ritorni. Altre scale invece tendono a dilatare o contrarre il tempo in base all'andamento dell'attività finanziaria [7, 26]. In questo modo queste scale temporali vanno ad alterare la naturale PDF dei ritorni, privandola di alcuni ritorni o quantificando questi ultimi in maniera arbitraria [7, 9], rompendo la corrispondenza tra prezzi e ritorni [9]. Inoltre le scale che dilatano o contraggono il tempo non sono additive, a differenza di quelle che tagliano i periodi di chiusura, che invece lo sono.

Attraverso la definizione di una nuova scala temporale, chiamata financial scaling time (FST), siamo qui riusciti a rendere il processo stazionario, creando il presupposto per un coerente studio delle sue proprietà statistiche, così come riportate nei fatti stilizzati [11].

La nostra analisi è iniziata osservando il comportamento dell'autocorrelazione di volatilità, poiché questa presenta uno schema periodico che si ripete giornalmente. Tale comportamento ci ha suggerito di adottare la statistica d'ensemble di storie giornaliere tipica della meccanica statistica. Questa visuale ci consente di descrivere al meglio la serie temporale finanziaria, che altrimenti, considerata nel suo intero, presenta forti comportamenti non stazionari, che tolgono significato alle medie temporali empiriche calcolate su di essa.

Dopo aver adottato l'approccio tramite ensemble abbiamo osservato che il processo dei ritorni, se descritto a diverse risoluzioni temporali, presenta caratteristiche simili. In particolare quando sono state confrontate le PDFs dei ritorni valutati su intervalli intergiornalieri diversi si è osservata l'esistenza di una simmetria approssimata. Più precisamente le PDFs empiriche dei ritorni finanziari sono

state osservate essere, con buona approssimazione, invarianti in scala. Questa simmetria di scaling non è stata riscontrata però per le PDFs dei ritorni valutati su intervalli infragiornalieri. Questo fatto ci ha portato a definire una nuova scala temporale che soddisfi la richiesta di esistenza di una simmetria di scaling per le PDFs dei ritorni valutati su intervalli temporali infragiornalieri.

Il processo dei ritorni, valutato nel FST, soddisfa una simmetria di scaling semplice con esponente di Hurst $H = 1/2$. La scelta di uno scaling semplice, in contrapposizione al multiscaling, usato in altre analisi [3, 28], permette di definire una costruzione del tempo non vincolata al calcolo di determinati momenti della distribuzione dei ritorni. La nostra procedura si basa infatti sulle PDFs empiriche dei ritorni. La scelta dell'esponente $1/2$, oltre a essere dovuta ad una evidenza empirica sulle distribuzioni dei ritorni [6], garantisce l'additività della scala temporale [3]. L'additività ci permette di stabilire una biiezione tra una partizione dell'asse temporale fisico e una dell'asse del FST, in questo modo il financial scaling time è definito in modo univoco.

Stabilito il limite inferiore, in tempo fisico, di 20 minuti, di validità del nostro mapping fra tempo fisico e FST, abbiamo determinato, attraverso il test di Kolmogorov-Smirnov, il FST relativo ad ogni intervallo temporale su cui abbiamo registrato i ritorni. Questo intervallo è il parametro che ha minimizzato la distanza $D_{x,y}$ presente nel test, in modo da garantire il collasso ottimale della PDF dei ritorni considerati su quella di riferimento dei ritorni giornalieri. I ritorni non possono essere definiti, nella nostra costruzione, per intervalli inferiori a 20 minuti, a causa della presenza di correlazione lineare tra i ritorni.

Il nostro metodo di indagine ha valenza generale ed è stato impiegato per analizzare 17 assets finanziari presenti nel NYSE.

Dal confronto tra i FSTs calcolati per i diversi assets emerge che i FSTs scorrono allo stesso modo: più veloci all'apertura e alla chiusura della giornata di mercato, rallentando e uniformandosi invece attorno alla pausa pranzo. Questo andamento rispecchia l'andamento degli scambi durante la giornata di mercato, come già si era intuito essendo il FST costruito a partire dalle PDFs dei ritorni.

Si sono osservate però delle differenze tra i diversi assets: sebbene tutti gli FSTs abbiano qualitativamente lo stesso andamento, alcuni scorrono in modo più "continuo" di altri, altri invece hanno un andamento più brusco, caratterizzato da "gradini".

Questi diversi comportamenti del FST sono legati alla volatilità infragiornaliera (nel tempo fisico) dell'asset. Osservando la volatilità dei diversi assets, questa ha una tipica forma ad U dei processi infragiornalieri non stazionari, inoltre può presentare fluttuazioni più o meno importanti che si sovrappongono a questo andamento. Il comportamento della volatilità si riflette nell'andamento del FST: in corrispondenza del minimo di volatilità il FST presenta un flesso, dovuto al cambio di velocità del flusso tra la mattina e il pomeriggio e la chiusura. Inoltre in corrispondenza delle fluttuazioni più importanti, che rendono l'andamento della volatilità "meno regolare", si osserva un andamento più brusco nel financial scaling time, caratterizzato da un gradino.

Il fatto che il comportamento della volatilità si rifletta nell'andamento del financial scaling time è dovuto al fatto che il FST è costruito a partire dal processo dei ritorni e la volatilità è un parametro che stima la dispersione dei ritorni dal loro valor medio, quando questo è nullo. Pertanto delle variazioni di volatilità evidenziano una variazione nei ritorni, questa variazione incide nel calcolo del

FST. Dovendo il FST garantire al meglio il collasso di scaling tra le PDFs dei ritorni, se questi presentano, in un determinato intervallo, una volatilità elevata, il FST relativo a tale intervallo sarà abbastanza differente da quello dell'intervallo precedente, con volatilità minore. Si osserva quindi un "gradino" nell'andamento del FST.

Dall'analisi emerge che l'andamento del FST non dipende a prima vista dalla categoria di appartenenza dell'assets, ovvero assets appartenenti allo stesso tipo non hanno lo stesso andamento del FST. Abbiamo raggruppato gli assets in tre gruppi: alimentari, finanziari, informatici. Tuttavia non si dispone qui di un numero sufficiente di assets per poter affermare con certezza che non vi possa essere un comportamento medio comune per alcune categorie.

Per come è stato costruito, attraverso una legge di scaling semplice con esponente $H = 1/2$, il FST è additivo. Questa additività si riscontra meglio quando si vanno a valutare le somme di intervalli, in tempo fisico, superiori ad un'ora. Un comportamento piuttosto generale nella somma degli intervalli che costituiscono un giorno (24 ore) è che quasi nessuna somma supera il valore 1 FST, equivalente di un giorno fisico.

Si è poi riscontrato, andando a confrontare la somma degli intervalli che costituiscono 24 ore (1 fst), che per gli intervalli di 20 e 38 minuti, con aggiunta la notte, l'additività è rispettata con un margine del 20%. Considerando invece intervalli maggiori, della durata di qualche ora, come la mattina, il pomeriggio e la notte, si è osservata che l'additività è rispettata a meno del 10%.

Questa differenza è legata a due ragioni: la prima è l'annullarsi della correlazione lineare dei ritorni, che per quanto trascurabile, non è strettamente nulla per ritorni valutati su intervalli superiori ai 20 minuti; la seconda è legata ad una imprecisione del metodo di lavoro.

Osservando le distanze $D_{x,y}$, utilizzate per stimare gli intervalli $\Delta\tau$ dei ritorni relativi agli intervalli di 20 e 38 minuti, queste sono superiori a 1. Questo indica che nonostante il collasso ottenuto con il valore $\Delta\tau$ fosse il migliore possibile, le PDFs dei ritorni analizzati non erano completamente sovrapponibili, ovvero non collassavano completamente le une sulle altre, ma solo con buona approssimazione.

Per concludere: una volta determinata la scala di validità il FST soddisfa con buona approssimazione intervalli che vanno da alcuni minuti a diverse settimane.

La sua costruzione è semplice e generale, basata su una simmetria di scaling semplice, non è condizionata da alcun particolare momento statistico della distribuzione dei ritorni. Esso rende il processo dei ritorni stazionario e fornisce una naturale quantificazione dei periodi di chiusura del mercato.

Riuscendo a quantificare correttamente i periodi di chiusura del mercato, il FST "fa da ponte" tra i regimi intra e intergiornalieri, aprendo nuove prospettive di studio relativo al confronto dei mercati che presentano chiusure con quelli la cui attività non ha interruzioni, come ad esempio i mercati FX (foreign exchange) [7, 23]. Questi mercati sono globali e riguardano lo scambio di valute estere.

Il FST rispetta le caratteristiche delle PDFs dei ritorni, preservandone le proprietà, così come riportate nei fatti stilizzati. In questo modo essendo il processo dei ritorni stazionario, possiamo ad esempio sfruttare le medie empiriche e non solo quelle di ensemble per poter effettuare delle previsioni di mercato. Potremmo quindi utilizzare la PDF, le cui proprietà sono ora trattabili in modo efficiente da un punto di vista statistico, per formulare delle previsioni future di mercato, per esempio relative al rischio.

Dal momento poi che è costruito a partire dal processo dei ritorni e riflette il comportamento della volatilità infragiornaliera degli assets, il FST ci permette di confrontare in modo immediato l'andamento di diversi assets.

Dal confronto di alcune categorie di assets, emerge che alcuni FST scorrono in modo quasi identico. Questo potrebbe suggerire una eventuale ricerca futura su una possibile relazione tra gli assets il cui FST scorre in modo simile. Si potrebbe cercare inoltre di disporre di un maggior numero di assets per categoria per stabilire se vi sia un comportamento medio comune del FST di ogni gruppo.

Bibliografia

- [1] SETZU A., tesi di laurea, A Framework for Financial Markets, (2007), pp. 19-22;
- [2] ANE T., GEMAN H., Order flow, transaction clock, and normality asset returns, *The Journal Of Finance*, Vol. 55, No. 5, (2000), pp. 2259-2284;
- [3] CARAGLIO M., BALDOVIN F., STELLA A.L., How fast does the clock of Finance run?- A time-definition enforcing scale invariance and quantifying overnights, (2016), pp. 1-11;
- [4] BOUCHAUD J.P., POTTERS M., Theory of financial risk and derivative pricing, Cambridge University Press, Cambridge, (2003), pp. 85-93;
- [5] CAMANA F., STELLA A.L., BALDOVIN F., Modeling and simulating financial time series over different time scales: from Omori regimes to trading strategies, pp. 2-5;
- [6] GALLUCCIO S., CALDARELLI G., MARSILI M., ZHANG Y.C., Scaling in currency exchange, *Physica A*, Vol. 245, No 3-4, (1997), pp. 423-436;
- [7] ZUMBACH G., Considering time as the random variable: a new point of view for studying financial time series, (1997), pp. 74-88;
- [8] NORRIS J.R., Markov Chains, Cambridge series in statistical and probabilistic mathematics, Cambridge University Press, (1997);
- [9] MANTEGNA R.N., STANLEY H.E., An introduction to econophysics, Correlations and Complexity in Finance, Cambridge University Press, (2000);
- [10] WEISS S. M., Modification of the Kolmogorov-Smirnov statistic for use with correlated data, *Journal of the American Statistical Association*, 73, (1978), pp. 872-875;
- [11] CONT R., Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, *Quantitative Finance*, Vol. 1, (2001), pp. 223-236;
- [12] STELLA A.L., BALDOVIN F., Anomalous scaling due to correlations: Limit theorems and self-similar processes, *Journal of Statistical Mechanics*, (2013);
- [13] RYDBERG T.H., Realistic Statistical Modelling of Financial Data, *International statistic review*, Vol. 68, Issue 3, (2000), pp. 233-258;
- [14] ZAMPARO M., BALDOVIN F., CARAGLIO M., STELLA A.L., Scaling simmetry, renormalization, and time series modeling: The case of financial assets dynamics, *Phys. Rev. E*, Vol. 88, Issue 6, (2013), pp. 1-5;

- [15] FURIERI T., tesi di laurea, Test di Kolmogorov-Smirnov nel caso di Osservazioni Dipendenti, (2015-2016), pp. 1-3, 11;
- [16] MUSCIOTTO F., tesi di laurea, Modelization of high frequency financial data based on ensembles and scaling, (2013-2014), pp. 1-4;
- [17] JACOBSEN B., ZHANG C.Y., Are Monthly Seasonals Real? A Three Century Perspective, *Review of Finance*, Vol. 17, Issue 5, (2013), pp. 1743–1785;
- [18] MANDAPAKA P.V., LEWANDOWSKI P: EICHINGER W.E., KRAJEWSKI W.F., Multiscaling analysis of high resolution space-time lidar-rainfall, *Nonlin. Processes Geophys.*, Vol. 16, (2009), pp. 579-586;
- [19] VASCONCELOS G.L., A guided walk down Wall Street: an introduction to Econophysics, *Brazilian Journal of Physics*, Vol. 34, no 3B, (2004), pp. 1056-1057;
- [20] FRENCH K.R., Stock return and the weekend effect, *Journal of Financial Economics* 8, (1980), pp. 56-69;
- [21] BALDOVIN F., BOVINA D., CAMANA F., STELLA A.L., Modeling the non-markovian, non-stationary scaling dynamics of financial markets, *Econophysics of order-driven markets*, (2011), pp. 239-252;
- [22] PASCUCCI A., RUNGGALDIER W.J, *Finanza matematica. Teoria e problemi per modelli multiperiodali*, Springer, (2009);
- [23] JENSEN M.H., JOHANSEN A., PETRONI F., SIMONSEN I., Inverse statistics in the foreign exchange market, *Physica A*, Vol. 340, (2004), pp.678-684;
- [24] PENG C.K., BULDYREV S.V., HAVLIN S., SIMONS M., STANLEY H.E., GOLDBERGER A.L., Mosaic organization of DNA nucleotides, *Phys. Rev. E*, Vol. 49, Issue 2, (1994), pp. 1685-1687;
- [25] CORRAL A', Long-term clustering, scaling, and universality in the temporal occurrence of Earthquakes, *Phys Rev. Lett.*, Vol. 92, no 10, 108501, (2004);
- [26] DACOROGNA M.M., GAUREAU C.L., MUELLER U.A., OLSEN R.B., PICTET O.V., Changing time scale for short-term forecasting in financial markets, *Journal of Forecasting*, Vol. 15, (1996), pp. 203-227;
- [27] KANTELHARDT J.W., ZSCHIEGNER S.A., KOSCIENLY-BUNDE E., BUNDE A. HAVIN S., STANLEY H.E., Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series, *Physica A*, Vol. 316, 87, (2002);
- [28] DI MATTEO T., Multi-scaling in Finance, *Quantitative finance*, Vol. 7, no 1, (2007), pp.21-36;