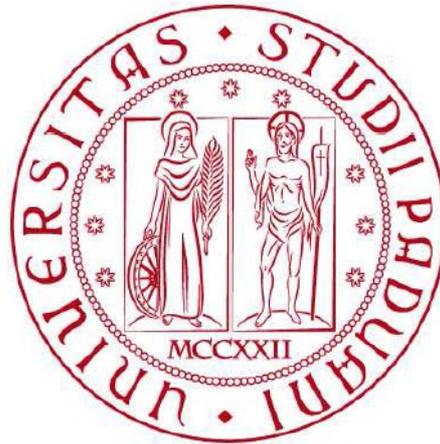


Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia

“Galileo Galilei”



Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi

**ANALISI DI UN METODO DI RIVELAZIONE DI ASSIONI COSMOLOGICI  
BASATO SULL'INTERAZIONE ELETTRONE-ASSIONE**

Relatore interno:

**Prof. Jean-Pierre Zendri**

Correlatore:

**Dott. Antonello Ortolan**

Laureando:

**Giulio Romanelli**

15 Settembre 2015

# Indice

**1 – Introduzione**

**2 – Proprietà degli Assioni**

**3 – Equazioni di Bloch**

**4 – Introduzione a QUAX**

**5 – Prototipo di QUAX**

**5.1 – Longitudinal Detection**

**5.2 – Produzione del campo  $B_p$  attraverso una cavità risonante**

**5.3 – Introduzione di una guida d'onda aperta**

**6 – Analisi del rumore**

**6.1 – Rumore causato dal campo  $B_p$**

**6.2 – Rumore causato da fotoni termici**

**6.3 – Rumore nella magnetizzazione causato dal circuito oscillante**

**6.4 – Rumore del rivelatore SQUID**

**7- Conclusioni**

## Introduzione

Nel corso dell'ultimo secolo la nostra comprensione dell'Universo è cresciuta esponenzialmente grazie all'enorme quantità di dati osservativi resi disponibili da tecnologie sempre più sofisticate, che permettono di osservare l'Universo su molte scale. Le osservazioni hanno portato alla luce alcuni fenomeni che la fisica del tempo non era in grado di spiegare: Radiazione Cosmica di Fondo e accelerazione nell'espansione dell'Universo ne sono solo alcuni esempi.

Una maggior comprensione dell'Universo è testimoniata dalla comparsa di diverse teorie cosmologiche, che cercano di descrivere le nuove osservazioni. Tra queste emerge la cosiddetta  $\Lambda$ -CDM ( $\Lambda$ -Cold Dark Matter, dove  $\Lambda$  rappresenta la costante cosmologica inserita nelle Equazioni di Einstein) [1].

Il successo del modello  $\Lambda$ -CDM sta nella precisione con cui è in grado di riprodurre i dati sperimentali: la teoria  $\Lambda$ -CDM, ad esempio, predice lo spettro delle fluttuazioni attorno al valor medio della radiazione cosmica di fondo (si tratta di variazioni dell'ordine di  $10^{-6}$  rispetto al valor medio).

Tra i risultati previsti da queste nuove teorie vi è anche la presenza di una grandissima quantità di massa invisibile, che viene chiamata **materia oscura**. In particolare, la  $\Lambda$ -CDM prevede che l'energia dell'Universo sarebbe costituita [1]:

- Per il 70% di energia oscura: una particolare forma di energia non rilevabile direttamente legata alla costante  $\Lambda$
- Per il 23% di materia oscura
- Per il 7% di barioni, fotoni e neutrini (principalmente idrogeno ed elio, che costituiscono le stelle nelle galassie)

La materia oscura costituirebbe quindi quasi il 90% della massa presente nell'Universo, e la massa barionica non rappresenterebbe nemmeno il 5% della densità di energia totale. Questa tesi è incentrata su un metodo proposto per la rivelazione della materia oscura, ci limitiamo quindi a fornire un quadro generale degli altri risultati previsti dalla  $\Lambda$ -CDM.

La necessità di introdurre la materia oscura nei modelli che descrivono l'Universo nasce dall'osservazione del moto delle stelle e delle nubi di gas all'interno e all'esterno della Galassia. Dato che le orbite delle stelle attorno al centro della Galassia sono in prima approssimazione circolari, ci si aspetta che lungo queste curve forza gravitazionale e centrifuga siano uguali in media. Tale affermazione si basa sulla Prima Legge della Dinamica, e si esprime in questo modo:

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (1.1)$$

dove  $G$  rappresenta la Costante di Gravitazione Universale e  $m$  la massa un corpo che orbita alla velocità  $v$  e alla distanza  $r$  da un corpo di massa  $M$ .

E' possibile allora esplicitare la velocità del corpo in orbita attorno al Centro Galattico:

$$v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (1.2)$$

dove  $M(r)$  rappresenta ora la massa totale compresa all'interno dell'orbita di raggio  $r$  della stella in questione. Chiaramente il valore di  $M(r)$  dipende dal raggio dell'orbita, ma è possibile darne un'espressione analitica supponendo che la densità di materia  $\rho$  all'interno della Galassia possa essere considerata costante:

$$M(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (1.3)$$

e quindi, mentre all'interno della Galassia la velocità di un corpo in orbita è descritta dall'equazione (è sufficiente esplicitare  $M(r)$  nella formula per la velocità):

$$v(r) = r \sqrt{\frac{4}{3} \pi \rho G} \quad (1.4)$$

all'**esterno** della via Lattea ci si aspetta, come scritto sopra, che la velocità scali come l'inverso della radice di  $r$ . Quello che si osserva invece è che la dipendenza lineare da  $r$  continua ad essere osservata anche a grandi distanze dalla Galassia (anche se la costante di proporzionalità cambia) [1].

In breve, il sistema si comporta come se fosse presente una grande massa (anche se poco densa) molto più estesa di quella osservata. A questa massa "mancante" si dà il nome di **materia oscura**. Lo stesso effetto si verifica attorno a tutte le altre galassie.

Sono state avanzate diverse teorie per dare una spiegazione a questo fenomeno. Ne vengono brevemente riassunte qui le tre più importanti.

Un primo tentativo di spiegare il comportamento anomalo della velocità dei corpi esterni alla Galassia è identificabile nelle **teorie MOND** (Modified Newton Dynamics). Tali modelli ipotizzano una correzione dell'equazione di Newton, in modo da prevedere un'accelerazione piccola ma non nulla anche in assenza di forze esterne. Tale variazione è sufficiente a spiegare l'anomalia nel moto dei corpi all'esterno della Galassia, ma non è mai stata rivelata in laboratorio. Si tratterebbe infatti di un effetto apprezzabile solo su scale molto più grandi di quelle sondabili in un esperimento. Le teorie MOND non prevedono quindi la presenza di una forma di materia invisibile per giustificare il fenomeno.

Una seconda possibilità di spiegare la materia oscura è rappresentata dalle **WIMPs** (Weakly Interactive Massive Particles). Si tratta di particelle previste da alcune teorie che estendono il Modello Standard della fisica delle particelle elementari e che

potrebbero spiegare la massa mancante nella Galassia. Le WIMPs sono particelle molto poco reattive, dato che interagiscono solo tramite le interazioni deboli e gravitazionali. La presenza di un gran numero di WIMPs nella Galassia potrebbe però costituire la materia oscura, motivo per cui sono all'attivo diversi esperimenti atti a rivelarle. Storicamente, tali particelle sono stati i candidati più popolari per spiegare la materia oscura. La teoria ha però un punto debole: tali particelle non sono previste dall'attuale Modello Standard (che descrive la fisica delle particelle elementari), e bisognerebbe estenderlo appositamente per incorporarle, ad esempio con Teorie di Grande Unificazione (GUT) o Teorie Supersimmetriche (SUSY).

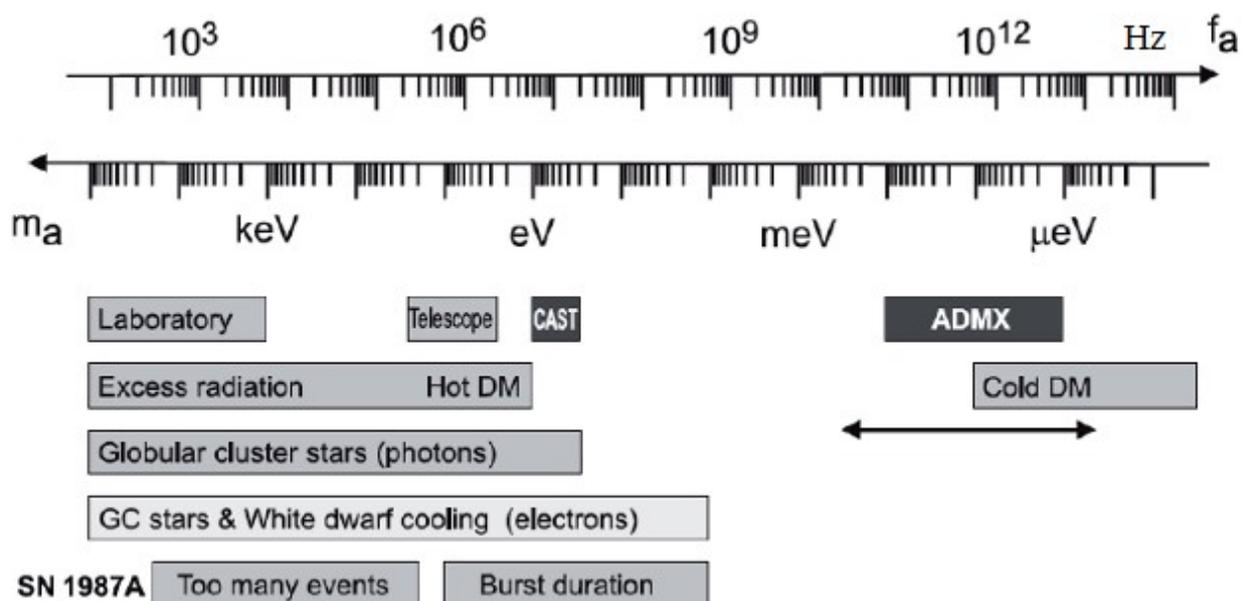
Un'altra possibile spiegazione per la materia oscura è l'ipotesi che essa sia costituita dagli **assioni**. Tali particelle sono l'argomento centrale di questa tesi, e per ora è sufficiente darne una breve descrizione.

L'idea di fondo è la stessa delle WIMPs, ma con due importanti differenze. Innanzitutto gli assioni non interagiscono tramite l'interazione debole, ma tramite quella gravitazionale ed elettromagnetica (anche se molto debolmente). Inoltre, e questo è il motivo per cui si preferiscono queste particelle rispetto alle WIMPs, gli assioni sono previsti anche da un'estensione del Modello Standard che è stata proposta per risolvere il problema di CP nelle interazioni nucleari forti. In breve, l'esistenza degli assioni potrebbe spiegare perché si osserva un'asimmetria tra materia e antimateria non attesa nel Modello Standard. Inoltre, secondo la teoria  $\Lambda$ -CDM, che attualmente meglio descrive l'Universo su larga scala, una grande quantità di assioni sarebbe stata prodotta nei primi istanti di vita dell'Universo. Questi avrebbero formato dei vasti ammassi di materia (che non collassa gravitazionalmente a causa della piccolissima sezione d'urto dello scattering assione-assione), all'interno dei quali sarebbe poi collassata la materia barionica fino a formare le galassie.

### **Riassunto della storia della ricerca degli assioni cosmologici**

Gli assioni fecero la loro prima comparsa nella fisica delle particelle nel 1977, all'interno della Teoria di Peccei-Quinn, che spiegava come questi permettessero di risolvere il problema di CP nelle interazioni forti. Da quel momento furono condotti esperimenti con l'obiettivo di rivelarli (PVLAS, ALPS-I, ALPS-II, CAST,...), ma nessuno di essi ebbe esito positivo. Si riuscì comunque a porre dei limiti sulla massa di queste particelle.

I primi tentativi di rivelare assioni cosmologici (quindi i costituenti della materia oscura) risalgono invece al 1983, quando Sikivie propose due possibili modalità di rilevamento basate sull'effetto Primakoff [2]. Lo stato attuale della ricerca è riassunto nella tabella seguente. Si noti che vengono indagate contemporaneamente regioni di massa e di frequenza associate agli assioni dato che queste due caratteristiche sono dipendenti l'una dall'altra.



I limiti imposti sulla massa degli assioni sono suddivisibili in 3 categorie: limiti sperimentali, astrofisici e cosmologici [2].

Sperimentalmente si è in grado di escludere che gli assioni abbiano massa dell'ordine dei KeV, o maggiore. Tale limite è molto più debole di quelli forniti dall'astrofisica e dalla cosmologia; tuttavia sono all'attivo due esperimenti, CAST e ADMX, che indagano valori di massa non ancora esclusi.

I limiti cosmologici sono invece costituiti dalla densità di energia della materia oscura, che scala come  $m_a^{-7/6}$  [2]. Affinché questo valore sia dello stesso ordine di quello osservato, è necessario che gli assioni abbiano massa maggiore di  $6 \mu\text{eV}$  e contemporaneamente inferiore all'ordine degli eV.

Infine, i limiti imposti dall'astrofisica riguardano il raffreddamento o il collasso di alcune strutture, come nane bianche o ammassi globulari. Ciò è dovuto al fatto che tali strutture potrebbero perdere energia non solo emettendo fotoni, ma anche assioni. Se il valore della massa degli assioni fosse troppo elevato, le suddette strutture emetterebbero più energia di quella prevista attualmente. Di conseguenza si osserverebbero raffreddamenti di nane bianche o collassi di ammassi più rapidi di quelli studiati finora.

Gli esperimenti attualmente attivi, CAST e ADMX, sfruttano l'effetto Primakoff inverso, che prevede la trasformazione di un assione in un fotone [2]. In particolare, CAST tenta di rivelare assioni prodotti nel Sole e ADMX cerca assioni cosmologici utilizzando cavità risonanti a temperature criogeniche, che determinano la massa da indagare. Lo spettro indagato da ADMX comprende le frequenze minori dell'unità del GHz. Il prototipo discusso in questa tesi si propone invece di indagare frequenze fino a qualche decina di GHz. Tali risultati andranno quindi a inserirsi nella zona (non ancora indagata) compresa tra i valori sondati da ADMX e i limiti astrofisici.

La tesi che segue comincerà con l'elencare alcune proprietà degli assioni e col calcolare esplicitamente le modalità di interazione tra questi ultimi e le particelle di spin semintero. Da ciò emergerà che l'effetto di un campo assionico su un sistema di spin è equivalente a quello generato da un campo magnetico a radiofrequenze. Sarà quindi naturale progettare un rivelatore basato sul rilevamento di questo campo.

Il paragrafo seguente sarà pertanto incentrato sulle equazioni di Bloch, che descrivono l'evoluzione della magnetizzazione di un materiale sottoposto a un campo magnetico esterno. Si terrà conto di tutti i fenomeni dissipativi che incorrerebbero in un rivelatore di questo tipo.

Successivamente si studierà nel dettaglio il prototipo QUAX, che si propone di rivelare assioni cosmologici, e in particolare verranno analizzate alcune possibilità di ridurre i fenomeni dissipativi.

Infine verranno discusse dettagliatamente le principali fonti di rumore dell'apparato.

## Proprietà degli Assioni

In linea del tutto generale, si predice che l'assione abbia proprietà molto simili a quelle del  $\pi^0$ , fatta eccezione per la massa  $m_a$ , che dovrebbe essere dell'ordine del  $\mu\text{eV}$  (o al più del  $\text{meV}$ ), e delle costanti di accoppiamento con i fotoni e con gli elettroni.

Altra caratteristica importante riguarda l'effetto Primakoff, che prevede che assioni e fotoni possano trasformarsi gli uni negli altri in presenza di campi elettromagnetici sufficientemente intensi (tale effetto è sfruttato da alcuni esperimenti, ad esempio ADMX, ma non da QUAX) [3].

È possibile immaginare la Galassia immersa in una sfera di assioni cosmologici. Questi ultimi si muovono con velocità casuali, ma mediamente ben descritte da una distribuzione di Lorentz (come sarà trattato più avanti). La conseguenza di questa disposizione è che un riferimento solidale alla terra percepisce un **vento assionico**, che lo investe a causa del moto orbitale del Sistema Solare attorno al centro Galattico. Tali assioni sono quelli che il prototipo QUAX cercherà di rivelare, e quindi quelli su cui si concentrerà la seguente analisi matematica.

Le osservazioni permettono inoltre di stimare la densità di energia del vento assionico, sulla base della forza gravitazionale che la sfera di assioni esercita sui corpi al suo interno. In particolare si ricava un valore  $\rho \approx 300 \text{ MeV}/\text{cm}^3$ . Tale densità è particolarmente elevata se si considera che il valore previsto per la massa degli assioni è compreso tra  $1 \mu\text{eV}$  e  $1 \text{ meV}$ . La massa prevista è infatti particolarmente piccola, se confrontata con quella di altre particelle. (basti pensare che la massa del neutrino, notoriamente molto limitata, è dell'ordine del  $\text{meV}$ )

Grazie alla loro interazione con particelle di spin  $1/2$ , come gli elettroni, è possibile progettare un apparato finalizzato a rivelare gli assioni cosmologici che si trovano nell'alone della Galassia. Il sistema che ci si propone di indagare è quindi descritto dalla Lagrangiana di interazione tra un fermione  $\Psi(x)$  e il campo assionico [3]:

$$L = \bar{\Psi}(x)(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi(x) - a(x)\bar{\Psi}(x)(g_s + i g_p \gamma_5)\Psi(x) \quad (2.1)$$

Dove:

- $\psi(x)$  è uno spinore che descrive un fermione relativistico con massa  $m$
- $a(x)$  è il campo assionico, e ha le dimensioni di un momento
- $\gamma^\mu$  sono le 4 matrici di Dirac ( $\mu = 0,1,2,3$ ) e  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$
- $g_s$  e  $g_p$  sono le costanti di accoppiamento (scalare e pseudo-scalare rispettivamente) tra gli assioni e le particelle di spin  $1/2$

Applicando quindi il Principio di Minima Azione si ricavano le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi(x) - a(x)(g_s + i g_p \gamma_5)\Psi(x) = 0 \quad (2.2)$$

che possono esplicitate sotto forma di matrice:

$$\begin{pmatrix} i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}-mc & i\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla \\ -i\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla & -i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}-mc \end{pmatrix}\psi(x)=a(x)\begin{pmatrix} g_s & ig_p \\ ig_p & g_s \end{pmatrix}\psi(x) \quad (2.3)$$

dove  $\psi(x)=\begin{pmatrix} \Phi(x) \\ \xi(x) \end{pmatrix}$  è la soluzione dell'equazione di Dirac per l'elettrone, con autostati a energia positiva  $\Phi(x)$  e a energia negativa  $\xi(x)$ .

A questo punto è sufficiente esplicitare l'espressione per arrivare alle due equazioni per  $\Phi(x)$  e  $\xi(x)$ :

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{c\partial t}=g_s a\Phi+(-i\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla+ig_p a)\xi \quad (2.4)$$

$$i\hbar\frac{\partial\xi}{c\partial t}=(-i\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla+ig_p a)\Phi-(2mc+g_s a)\xi \quad (2.5)$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}$  rappresenta il vettore costituito dalle matrici di Pauli di spin:  $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

Nel limite non relativistico è possibile combinare le due equazioni in modo da eliminare gli autostati a energia negativa (antiparticelle). L'evoluzione temporale di una particella di spin  $\frac{1}{2}$  è quindi correttamente descritta dall'equazione di Schroedinger:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{c\partial t}=\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2+g_s ca-\frac{g_p\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla a\right]\Phi \quad (2.6)$$

all'interno della quale compare il termine di interazione:

$$\frac{-g_p\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla a\equiv-2\frac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\frac{g_p}{2e}\right)\nabla a \quad (2.7)$$

Si tratta di un risultato interessante, perché ha la forma dell'interazione tra il momento magnetico di spin di un fermione ( $-2\frac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}=-\mu_B\boldsymbol{\sigma}$ ) e un campo magnetico

$$\mathbf{B}_a\equiv\left(\frac{g_p}{2e}\right)\nabla a \quad (2.8)$$

Pertanto il vento assionico interagisce con gli elettroni come un campo magnetico  $\mathbf{B}_a$ . Si nota inoltre che  $\mathbf{B}_a$  si comporta come un campo pseudo-scalare:  $\nabla a$  è un pseudo-vettore (come il campo magnetico), mentre  $\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla a$  è un termine d'interazione scalare.

Oltre a quelle già menzionate, le osservazioni sperimentali permettono di ricavare altre proprietà degli assioni [3]. È possibile, ad esempio, porre dei limiti alla loro massa:

$$10^{-6} eV < m_a < 10^{-2} eV \quad (2.9)$$

Inoltre, dato che si conosce una stima della densità e del volume della materia oscura, è possibile ricavare la densità (per centimetro cubo) di assioni cosmologici nella materia oscura:  $n_a \approx 3 \times 10^{12} \frac{\text{assioni}}{\text{cm}^3}$  (assumendo che  $m_a$  sia di  $10^{-4}$  eV).

Altra caratteristica predicibile è la loro velocità media. Si suppone infatti che le velocità  $v$  degli assioni siano distribuite secondo la distribuzione di Maxwell, ottenuta

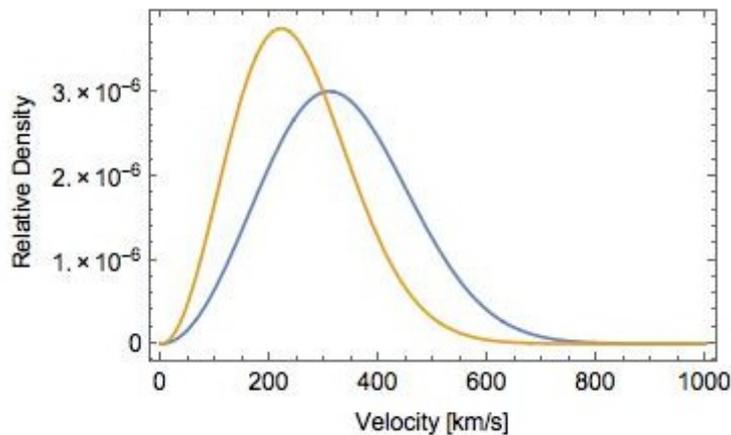
come limite non relativistico della distribuzione di Bose-Einstein:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\beta v^2} \quad (2.10)$$

dove  $\beta = \frac{3}{2\sigma_v^2}$  e  $v \approx 270 \text{ Km/s}$  è la dispersione di velocità degli assioni nella Galassia.

Occorre anche precisare che la velocità dei singoli assioni nel riferimento della Terra è composta da 4 termini:

$v_E = v - v_S - v_T - v_R$  dove  $v_E$  è la velocità misurata nel riferimento della Terra,  $v$  è la velocità degli assioni nel riferimento del centro della Galassia,  $v_S$  è la velocità orbitale del Sistema Solare,  $v_T$  è la velocità della Terra attorno al Sole e  $v_R$  è la velocità rotazionale della Terra. Occorre pertanto inserire questo termine nella distribuzione di Maxwell per le velocità. Il risultato finale è rappresentato nel grafico seguente:



*Distribuzione di velocità degli assioni. In giallo il riferimento della Galassia e in Blu quello della Terra*

È possibile quindi ricavare una stima dell'energia cinetica degli assioni. In particolare, ci si aspetta che il rapporto tra quest'ultima e la loro energia a riposo sia distribuito attorno al valore  $7 \times 10^{-7} \text{ eV}$ , con una dispersione di  $5.2 \times 10^{-7} \text{ eV}$ .

Infine, si può ricavare la lunghezza d'onda di De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{m_a v_a} \quad (2.11)$$

che risulterà essere molto più grande delle altre lunghezze d'onda con cui lavora QUAX. Sarà pertanto lecito trascurare effetti di natura quantistica.

Si può scrivere il vento assionico nella forma più esplicita:

$$a(x) = a_0 e^{\frac{i(p^0 ct - p_E \cdot x)}{\hbar}} \quad (2.12)$$

dove  $p_E = m_a v_E$  rappresenta la quantità di moto media degli assioni e

$p^0 = \sqrt{m_a^2 c^4 + |\mathbf{p}_E|^2 c^2} \approx m_a c^2 + \frac{|\mathbf{p}_E|^2}{2m_a}$  è la componente temporale del loro quadrimpulso.

L'ampiezza del campo assionico può essere ricavata partendo dalla seguente equazione:

$$a_0^2 p^0 p_E^i = n_a p_E^i \quad (2.13)$$

che rappresenta l'uguaglianza tra la quantità di moto per unità di volume trasportata dal vento e il momento medio del singolo assione moltiplicato per la densità di assioni. Si ottiene così l'ampiezza:

$$a_0 = \sqrt{\frac{n_a \hbar^3}{m_a c}} \quad (2.14)$$

Infine, per calcolare il valore effettivo del campo, si esplicita il gradiente di  $a(\mathbf{x})$  nella formula 2.8 e si considera solamente la parte reale:

$$\mathbf{B}_a = \frac{g_p}{2m\gamma} \sqrt{\frac{n_a \hbar}{m_a c}} \mathbf{p}_E \sin\left(\frac{p^0 ct - \mathbf{p}_E \cdot \mathbf{x}}{\hbar}\right) \quad (2.15)$$

dove  $\gamma = \frac{g_L e}{2m_e}$  è il fattore giromagnetico,  $g_L=2$  è il fattore di Landé e

$g_p \approx 2.8 \times 10^{-11} \frac{m_a}{1 \text{ eV}}$  è una costante derivata dal modello DFSZ [12].

Per  $\mathbf{x}=0$ , il campo effettivo – parallelo al vento assionico – assume il valore:

$$B_a = 9.2 \times 10^{-23} \left( \frac{m_a}{10^{-4} \text{ eV}} \right) T \quad (2.16)$$

con una frequenza centrale

$$\frac{\omega_a}{2\pi} = 24 \left( \frac{m_a}{10^{-4} \text{ eV}} \right) \text{GHz} \quad (2.17)$$

(che è dell'ordine del GHz dal momento che ci si aspetta una massa dell'assione dell'ordine del meV) e una larghezza relativa di:

$$\frac{\Delta\omega_a}{\omega_a} \approx 5,2 \times 10^{-7} \quad (2.18)$$

L'interazione tra tale campo e un materiale magnetizzato causerà delle variazioni nella magnetizzazione, la cui evoluzione è ben descritta dalle **Equazioni di Bloch**, che saranno discusse nel capitolo seguente.

## Equazioni di Bloch

Le equazioni di Bloch descrivono l'evoluzione temporale del vettore di magnetizzazione di un materiale magnetico magnetizzato soggetto a un campo magnetico esterno. Nella loro forma più semplice, le equazioni di Bloch sono scritte in questo modo [4]:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}_0 \quad \text{Con} \quad \gamma = g_L \frac{e}{2m_e} \quad (3.1)$$

Da questa forma si può immediatamente ricavare un risultato interessante. Basta moltiplicare scalarmente entrambi i membri per  $\mathbf{M}$ , e si ottiene:

$$\frac{dM^2}{dt} = 0 \quad (3.2)$$

ovvero il modulo del vettore di magnetizzazione rimane costante nel tempo dopo l'applicazione di un qualunque campo magnetico. Tale approssimazione vale ovviamente nell'ipotesi che il campione conservi la sua magnetizzazione anche dopo aver "spento" il campo  $\mathbf{B}_0$ . Ciò significa che, in assenza di fenomeni dissipativi, solamente la direzione della magnetizzazione risente della presenza di un campo esterno. Immaginando di fissare un estremo del vettore di polarizzazione in un punto, è corretto pensare che l'altro estremo di tale vettore si muova su una sfera centrata nel punto fisso. Tale moto è detto precessione, e se l'estremo libero del vettore si muove lungo una circonferenza prende il nome di **precessione di Larmor**.

È quindi possibile immaginare un campione posto in un campo magnetico  $\mathbf{B}_0$ , costante e diretto lungo l'asse  $z$ , ad esempio verticale. Gli spin degli elettroni (paralleli al loro momento magnetico) tenderanno a disporsi parallelamente al campo  $\mathbf{B}_0$  per minimizzare l'energia del sistema. D'altra parte è necessario tener conto del moto di agitazione termica, che tende a disordinare l'orientazione complessiva degli spin. In condizioni di equilibrio, questi due fenomeni produrranno una magnetizzazione nel materiale, il cui modulo è descritto dalla formula [4]:

$$M_0 = N_0 \mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B B_0}{k_B T_s}\right) \quad (3.3)$$

dove  $N_0$  rappresenta la densità di spin,  $k_B$  la costante di Boltzmann e  $T_s$  la temperatura di spin. Con temperatura di spin si intende la temperatura del sistema elettronico, e non dell'intero sistema. Lavorando a temperature molto ridotte infatti si osserva che reticolo ed elettroni possono avere simultaneamente temperature diverse (dopo un certo intervallo di tempo comunque le due tenderanno a stabilizzarsi).

In generale, la magnetizzazione dipende dalla temperatura e dalla direzione del campo magnetico che la induce. Nel corso di questo paragrafo si supporrà comunque che la magnetizzazione sia sempre al suo valore massimo  $M_0$ , corrispondente al caso in cui tutti i dipoli magnetici sono orientati nello stesso verso.

Per risolvere le equazioni di Bloch nel loro caso generale è conveniente esplicitare le

singole componenti dei vettori:

$$\begin{aligned}\frac{dM_x(t)}{dt} &= \gamma M_y(t) B_0 \\ \frac{dM_y(t)}{dt} &= -\gamma M_x(t) B_0 \\ \frac{dM_z(t)}{dt} &= 0\end{aligned}\quad (3.4)$$

Dove si è supposto che il campo magnetico esterno  $\mathbf{B}_0$  sia orientato lungo l'asse z.

Innanzitutto è possibile ottenere un'espressione per la frequenza della precessione di Larmor. Si procede in questo modo:

1. Si considera l'equazione di Bloch che esprime la componente x (o equivalentemente y) della magnetizzazione, e si calcola la derivata temporale di entrambi i membri:

$$\frac{d^2 M_x(t)}{dt^2} = \gamma \frac{dM_y(t)}{dt} B_0 \quad (3.5)$$

2. Si sostituisce alla derivata temporale a secondo membro il termine riportato nella seconda equazione di Bloch:

$$\frac{d^2 M_x(t)}{dt^2} = -\gamma^2 M_x(t) B_0^2 \quad (3.6)$$

3. Si ottiene l'espressione di un moto armonico di frequenza  $\omega_0$ :

$$\frac{d^2 M_x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{dM_x(t)}{dt} = 0 \quad \text{con} \quad \omega_0 = \gamma B_0 \quad (3.7)$$

Le equazioni di Bloch sono equazioni differenziali risolvibili analiticamente, le cui soluzioni sono così esplicitate [4]:

$$\begin{aligned}M_x(t) &= M_i \cos(\omega_0 t + \phi) \\ M_y(t) &= M_i \sin(\omega_0 t + \phi) \\ M_z(t) &\approx M_0\end{aligned}\quad (3.8)$$

dove  $M_0$  rappresenta il valore della magnetizzazione all'equilibrio termico e  $M_i$  il modulo della proiezione di  $M_0$  sul piano xy.

Tali equazioni descrivono una semplice precessione di Larmor (la cui frequenza è qui indicata con  $\omega_0$ ). Questa condizione rappresenterà il punto di partenza per la progettazione di un rivelatore di assioni.

Tuttavia, le equazioni di Bloch in questa forma sono incomplete: non tengono conto degli inevitabili scambi di energia tra i dipoli magnetici e l'ambiente esterno. Questo fenomeno porterà il sistema di dipoli magnetici a perdere energia, e quindi ad annullare la magnetizzazione. Microscopicamente, quello che avviene è che gli elettroni, inizialmente con spin polarizzati dal campo magnetico esterno, tendono a "rilassarsi" e ad orientare gli spin in direzioni casuali non appena si spegne il campo esterno. Tale effetto è chiamato **rilassamento** ed è quantificato dalle due grandezze  $T_1$  e  $T_2$ , detti rispettivamente **tempo di rilassamento longitudinale** (o rilassamento spin-reticolo) e **tempo di rilassamento trasversale** (o rilassamento spin-spin). I due

tempi sono proprietà intrinseche del materiale, e possono essere inseriti nelle equazioni di Bloch per far sì che esse descrivano anche il rilassamento [5]. In tale forma si scrivono così:

$$\begin{aligned}\frac{dM_x(t)}{dt} &= \gamma M_y(t) B_0 - \frac{M_x(t)}{T_2} \\ \frac{dM_y(t)}{dt} &= -\gamma M_x(t) B_0 - \frac{M_y(t)}{T_2} \\ \frac{dM_z(t)}{dt} &= -\frac{M_z(t) - M_0}{T_1}\end{aligned} \quad (3.9)$$

dove si è supposto che il campo  $\mathbf{B}_0$  sia orientato lungo l'asse z.

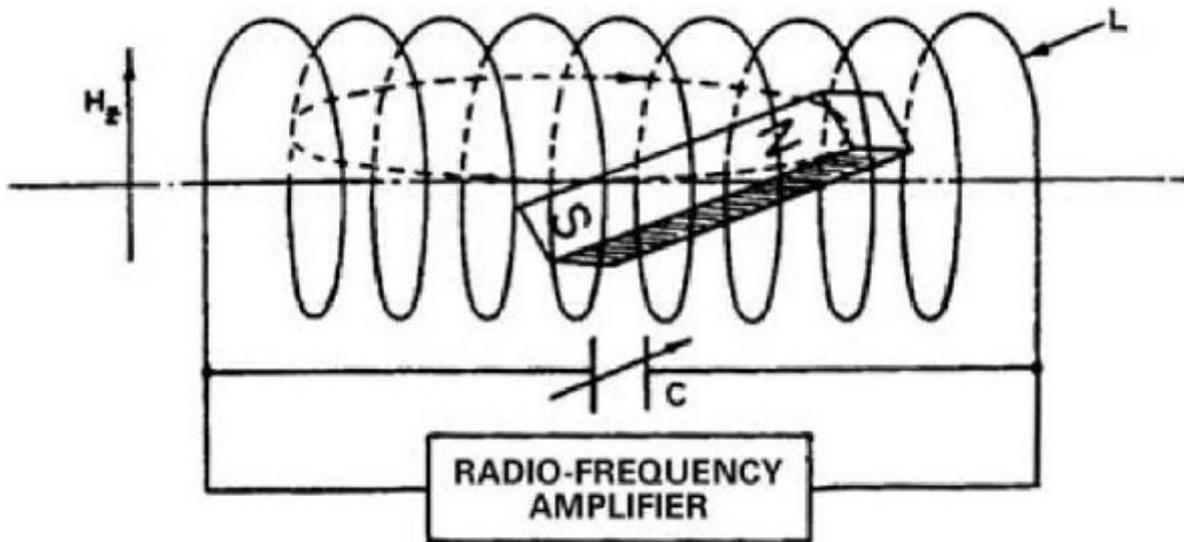
L'asimmetria tra le prime due equazioni e la terza è legata al fatto che  $\mathbf{B}_0$  è parallelo all'asse z, di conseguenza la magnetizzazione sarà prevalentemente diretta lungo lo stesso asse. Si noti inoltre che i tempi di rilassamento della magnetizzazione lungo l'asse x e l'asse y sono diversi da quello lungo l'asse z. Ciò è dovuto al fatto che, a causa di  $\mathbf{B}_0$ , il sistema perde la simmetria sferica e acquista simmetria cilindrica. In generale ci si aspetta quindi che il tempo di rilassamento lungo l'asse di simmetria sia diverso da quello lungo gli altri due.

Oltre ad influenzare il valore della magnetizzazione,  $\mathbf{B}_0$  determina anche la frequenza di Larmor degli spin degli elettroni, secondo le relazioni descritte in precedenza. In particolare si è dimostrato che la frequenza di Larmor è prevista dalla formula:

$$\omega_0 = \gamma B \quad (3.10)$$

Ad ogni modo, le equazioni presentate finora tengono conto solamente dei tempi di rilassamento longitudinale e trasversale, e non dello smorzamento della radiazione (**radiation damping**). Tale fenomeno è legato a due effetti:

- i dipoli magnetici irradiano onde elettromagnetiche come conseguenza della loro precessione.
- Il sistema dissipa energia a causa dell'accoppiamento tra la magnetizzazione del campione e il circuito che genera  $B_p$ . Le variazioni nella magnetizzazione del campione inducono infatti una corrente nel circuito di pompa, che dissipa per effetto Joule.



Quest'illustrazione rappresenta uno schema semplificato del sistema in questione. Un magnete ruota attorno all'asse  $z$  (verticale) all'interno di un solenoide. Oltre all'energia dissipata a causa della radiazione di dipolo magnetico, la variazione del campo magnetico da esso generato genererà una corrente all'interno del solenoide. Al radiation damping si associa un tempo caratteristico, che rappresenta il tempo medio impiegato dagli elettroni per irradiare una frazione fissa della loro energia (Energia/ $e$ , dove  $e$  è il Numero di Nepero).

Una possibilità è quella di inserire nella trattazione un secondo campo magnetico di pompa  $\mathbf{B}_P$ , che fornisca al sistema energia sufficiente a compensare gli effetti dissipativi. Tale campo sarà ortogonale a  $\mathbf{B}_0$ , e avrà un'intensità sinusoidale (a radiofrequenze).

I campi  $\mathbf{B}_0$  e  $\mathbf{B}_P$  forniscono costantemente energia agli elettroni, che quindi continuano a dissipare potenza e conseguentemente scaldano il campione. La conseguenza di ciò è un aumento del rumore nella magnetizzazione dovuto alla maggior agitazione dei singoli dipoli magnetici. Gli effetti di tale rumore e i tentativi di limitarlo saranno discussi in seguito. Tale effetto va dunque inserito nella trattazione analitica del prototipo.

Nella loro forma più generale, le equazioni di Bloch si scrivono in questo modo [6]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dM_x(t)}{dt} &= \gamma(\mathbf{M}(t) \times \mathbf{B}(t))_x - \frac{M_x(t)}{T_2} - \frac{M_x(t)M_z(t)}{M_0 T_r} \\
 \frac{dM_y(t)}{dt} &= \gamma(\mathbf{M}(t) \times \mathbf{B}(t))_y - \frac{M_y(t)}{T_2} - \frac{M_y(t)M_z(t)}{M_0 T_r} \\
 \frac{dM_z(t)}{dt} &= \gamma(\mathbf{M}(t) \times \mathbf{B}(t))_z - \frac{M_0 - M_z(t)}{T_1} - \frac{M_x^2(t) + M_y^2(t)}{M_0 T_r}
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

dove anche  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_P$  dipende dal tempo, dal momento che si tiene conto anche della presenza del campo a radiofrequenze  $\mathbf{B}_P$ .  $T_r$  rappresenta qui il tempo di smorzamento della radiazione dovuto all'emissione di onde elettromagnetiche da parte dei dipoli oscillanti. Le altre grandezze hanno lo stesso significato delle

precedenti forme delle equazioni di Bloch. È possibile stimare il valore di  $T_r$  [7]:

$$\frac{1}{T_r} = 2 \pi \xi \gamma \mu_0 M_0 Q \quad (3.12)$$

dove  $\xi$  e  $Q$ , detti rispettivamente fattore di riempimento e di qualità, sono costanti legati alle caratteristiche del sistema.

Tuttavia, nemmeno questa generalizzazione delle equazioni di Bloch tiene conto di tutti i fenomeni dissipativi che occorre considerare nell'analisi dei dati. È presente infatti il secondo fenomeno dissipativo legato all'energia irradiata dalla precessione di un dipolo magnetico: il dipolo magnetico oscillante infatti – oltre a irradiare energia – genera a sua volta un campo magnetico, in accordo con la Legge di Faraday. Questo campo ha direzione opposta a  $\mathbf{B}_p$ , pertanto è necessario fornire ulteriore energia al sistema per bilanciarne l'effetto. Ciò porta ad un ulteriore fenomeno di rilassamento, che viene quantificato dal tempo di rilassamento  $T_{r-e}$  (causato dall'emissione di radiazione). Analogamente al tempo  $T_r$ , è possibile calcolarne il valore attraverso la formula che descrive l'emissione di radiazione da parte di un dipolo magnetico in precessione [8]:

$$\frac{1}{T_{r-e}} = \frac{1}{4 \pi \frac{\omega_0^3}{c^3} \gamma \mu_0 M_0 V_s} \quad (3.13)$$

dove  $V_s$  rappresenta il volume del paramagnete.

È quindi possibile confrontare i due tempi di rilassamento  $T_r$  e  $T_{r-e}$ . In particolare, questi sono dello stesso ordine di grandezza se

$$\omega_0 = c \sqrt[3]{\frac{\xi Q}{V_s}} \equiv \hat{\omega} \quad (3.14)$$

Pertanto, se  $\omega_0 < \hat{\omega}$ , il fenomeno di smorzamento della radiazione sarà trascurabile rispetto all'emissione di onde elettromagnetiche da parte dei dipoli magnetici. Se invece  $\omega_0 > \hat{\omega}$  sarà lo smorzamento di radiazione ad essere l'effetto dominante.

In definitiva, è possibile ricavare le equazioni di Bloch che descrivono l'evoluzione della magnetizzazione tenendo conto anche del radiation damping [9]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma B_p} \frac{d u}{d t} + \frac{u}{\gamma B_p T_2} + \frac{\omega_0 - \omega_p}{\gamma B_p} v &= -\frac{k}{B_p} u M_z \\ \frac{1}{\gamma B_p} \frac{d v}{d t} + \frac{v}{\gamma B_p T_2} - \frac{\omega_0 - \omega_p}{\gamma B_p} u + M_z &= -\frac{k}{B_p} v M_z \\ \frac{1}{\gamma B_p} \frac{d M_z}{d t} + \frac{M_z}{\gamma B_p T_1} - v &= \frac{M_0}{\gamma B_p T_1} + \frac{k(u^2 + v^2)}{B_p} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dove

$$\begin{aligned} u &= M_x \cos(\omega_p t) - M_y \sin(\omega_p t) \\ v &= -M_x \sin(\omega_p t) - M_y \cos(\omega_p t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

e  $k$  è un fattore costante proporzionale al fattore di qualità del circuito che genera  $B_p$ . È possibile ricavare analiticamente le soluzioni stazionarie a queste equazioni in un

sistema rotante solidale al vettore di magnetizzazione, in cui si suppone che  $B_p$  sia polarizzato circolarmente. In particolare [9]:

$$u = \frac{\omega_0 - \omega_p}{\gamma B_p} \frac{M_z}{\left(\frac{\omega_0 - \omega_p}{\gamma B_p}\right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma B_p T_2} + \frac{k M_z}{B_p}\right)^2}$$

$$v = - \frac{M_z \left(\frac{1}{\gamma B_p T_2} + \frac{k M_z}{B_p}\right)}{\left(\frac{\omega_0 - \omega_p}{\gamma B_p}\right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma B_p T_2} + \frac{k M_z}{B_p}\right)^2}$$
(3.17)

Dove  $M_z$  è dato dalla radice reale di:

$$\left(\frac{k}{B_p}\right)^2 M_z^3 + \left(\frac{2k}{\gamma B_p^2 T_2} - \frac{M_0 k^2}{B_p^2}\right) M_z^2 + \left(\delta + \frac{T_1}{T_2} - \frac{2M_0 k}{\gamma B_p^2 T_2}\right) M_z = M_0 \delta \quad (3.18)$$

dove

$$\delta = \left(\frac{\omega_0 - \omega_p}{\gamma B_p}\right)^2 + \frac{1}{(\gamma B_p T_2)^2} \quad (3.19)$$

E' possibile ricavare una soluzione approssimata per  $M_z$  da questa cubica assumendo che  $\gamma^2 B_p^2 T_1 T_2 \ll 1$ . Tale approssimazione è equivalente al richiedere di essere lontani dalla condizione di saturazione di spin. In breve, ciò significa che il campo  $B_p$  non è abbastanza intenso per orientare tutti gli spin nella sua direzione. Questa condizione è certamente verificata se  $B_p$  ha un'ampiezza molto minore di  $B_0$ .

In tal caso, le soluzioni approssimate al second'ordine delle equazioni di Bloch scritte sopra assumono questa forma [3]:

$$M_x(t) = M_0 \frac{\delta \omega (T_2')^2}{1 + (\delta \omega T_2')^2} \gamma B_p \equiv \frac{\chi'(\omega) B_p}{\mu_0}$$

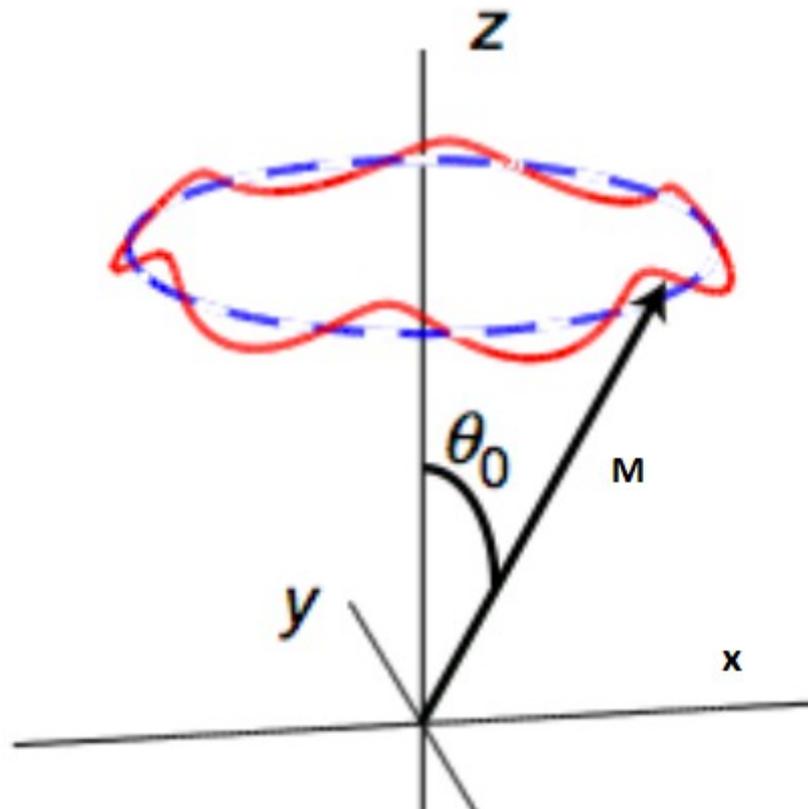
$$M_y(t) = M_0 \frac{T_2'}{1 + (\delta \omega T_2')^2} \gamma B_p \equiv \frac{\chi''(\omega) B_p}{\mu_0} \quad (3.20)$$

$$M_z(t) = M_0 \left[ 1 - \frac{T_2'}{T_2} \frac{\gamma^2 T_1 T_2'}{1 + (\delta \omega T_2')^2} B_p^2 \right]$$

dove i termini  $\chi'(\omega)$  e  $\chi''(\omega)$  quantificano rispettivamente la dissipazione e l'assorbimento dell'energia fornita da  $B_p$  da parte della magnetizzazione,  $\delta \omega = \omega_p - \omega_0$

e  $T_2' = \frac{1}{\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_D}}$ .

dove  $T_D = \max(T_r, T_{r-e})$  è il tempo di rilassamento dominante, a seconda della frequenza, di cui si è parlato sopra. Il termine  $\gamma B_p$  rappresenta la frequenza delle nutazioni, ed è noto in letteratura come **frequenza di Rabi**.

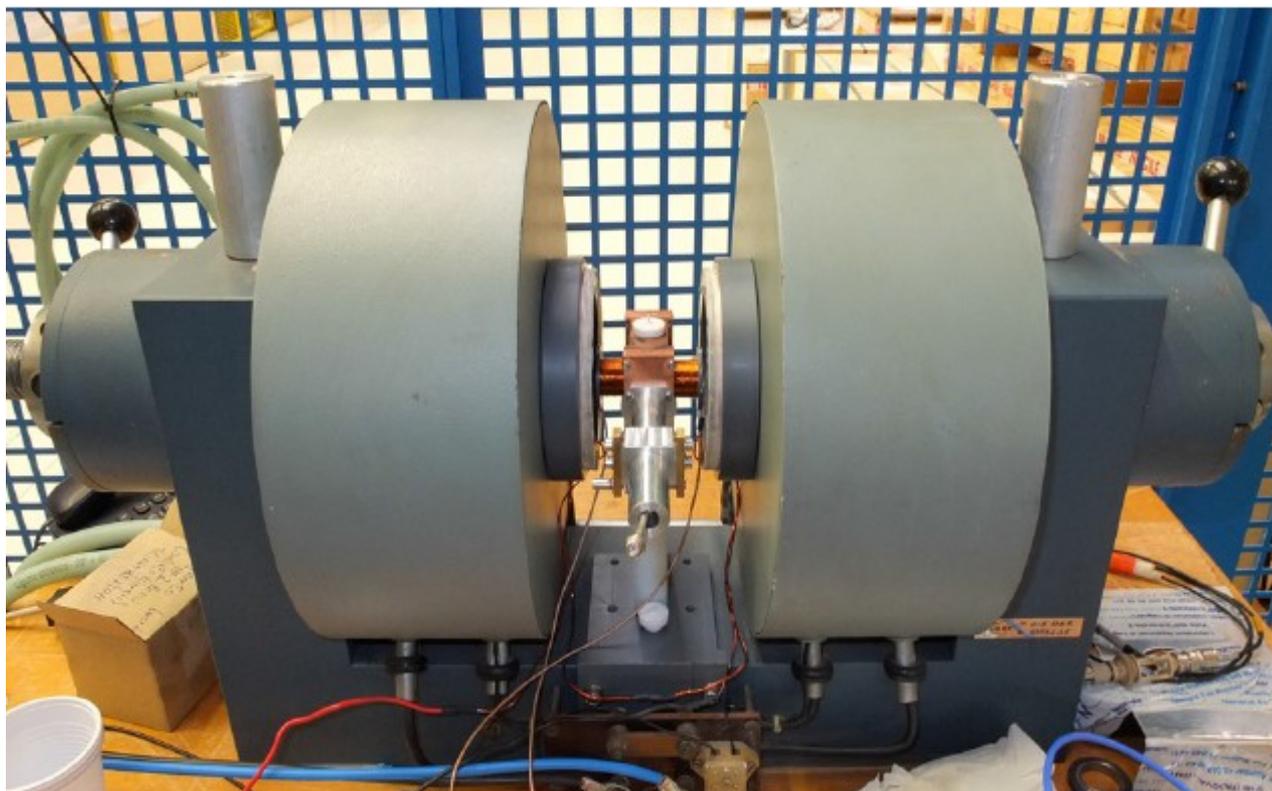


Le nutazioni sono rappresentate in rosso

Un'ultima considerazione sulle equazioni di Bloch riguarda il regime di validità di queste ultime. Si è già parlato del fatto che il comportamento dei paramagneti è legato alla polarizzazione magnetica intrinseca delle molecole che li compongono. In generale, quindi, i momenti magnetici di tali molecole si influenzeranno a vicenda. Le interazioni tra le molecole sono quindi innumerevoli: ogni molecola interagisce in prima approssimazione solo con quelle adiacenti ad essa, al second'ordine anche con quelle immediatamente più lontane, e così via. Questo effetto tuttavia non è incorporato nelle equazioni di Bloch, che si basano quindi sull'ipotesi che il campo magnetico generato dai singoli dipoli magnetici sia del tutto trascurabile rispetto al campo magnetico esterno. Le equazioni di Bloch sono adatte a descrivere “solamente” quei casi in cui il campo esterno sia molto più intenso di quello generato dalle singole molecole. È quindi possibile basarsi sulle equazioni di Bloch al prim'ordine per progettare un apparato sperimentale.

## Introduzione a QUAX

QUaerere AXion è il prototipo di un esperimento che si propone di rivelare gli assioni cosmologici sfruttando la loro interazione con gli spin degli elettroni discussa finora. I limiti di massa che QUAX si propone di indagare sono  $0.3 \text{ meV} < m_a < 3 \text{ meV}$ , corrispondenti a una frequenza compresa tra 5 e 50GHz [3]. Nel seguito vengono trattate nel dettaglio le modalità di misura e un'analisi del rumore di fondo.



*Il prototipo di QUAX*

Prima di discutere dell'apparato sperimentale è necessario descrivere anche la categoria di materiali a cui appartiene il cuore del rivelatore stesso: i **materiali paramagnetici**.

Si tratta di alcune sostanze accomunate dallo stesso comportamento in presenza di un campo magnetico. I paramagneti infatti tendono a magnetizzarsi in maniera concorde col campo magnetico in cui sono immersi. In altre parole, il vettore di polarizzazione di tali materiali avrà direzione e verso concordi con quelli del campo esterno  $\mathbf{B}$ . Tale comportamento è dovuto al fatto che le molecole dei paramagneti possiedono un momento di dipolo magnetico intrinseco. Tale caratteristica è condivisa anche da un'altra classe di materiali: i ferrimagneti. La proprietà che distingue i ferrimagneti dagli altri materiali magnetici è il loro sistema di spin, caratterizzato da coppie di spin atomici antiparalleli, ma diversi in modulo; in questo modo i ferrimagneti possono presentare una magnetizzazione intrinseca. Non a caso entrambi sia ferrimagneti che

paramagneti possono essere utilizzati – con opportune modifiche – come rivelatori. A differenza di quanto avviene per i ferrimagneti, però, i materiali paramagnetici non conservano la polarizzazione se viene meno il campo che l'ha generata [4].

Una terza classe di materiali magnetici è costituita dai ferromagneti, caratterizzati dall'intensa magnetizzazione che sviluppano in presenza di un campo magnetico e che preservano anche dopo il suo spegnimento. Questi ultimi non possono però essere utilizzati all'interno di un rivelatore a causa della loro struttura interna: le molecole dei ferromagneti si dispongono in ammassi chiamati domini di Weiss, in grado di muoversi leggermente sotto l'influenza di un campo magnetico esterno. Lo slittamento tra le barriere dei domini genera però un rumore di magnetizzazione tale da rendere impossibile la misura [4].

Altri possibili comportamenti in presenza di campi magnetici sono il diamagnetismo e l'antiferromagnetismo, caratterizzati invece da una polarizzazione antiparallela al campo che l'ha generata. La differenza tra questi ultimi due è legata ancora alla conservazione o meno della polarizzazione in seguito alla rimozione del campo esterno. Ci si limita comunque solo ad accennarli per completezza [4].

Posto allora che il rivelatore deve essere costruito a partire da un campione di materiale paramagnetico (o al più ferrimagnetico), si può procedere nella progettazione dell'apparato.

Poiché l'accoppiamento assione-elettrone è molto debole, è necessario configurare il sistema strumentale in modo da massimizzare la sezione d'urto e minimizzare ogni fonte di rumore.

L'apparato è costituito da un campione di materiale paramagnetico (DPPH) con  $M_0 \approx 0.02 \frac{A}{m}$  a temperatura criogenica. Dal momento che l'obiettivo è generare una magnetizzazione intensa all'interno di questo campione, è anche possibile utilizzare un materiale ferrimagnetico (YIG). Ci si limita ad accennare questa possibilità, sebbene non esistano differenze concettuali derivanti dall'uso di un ferrimagnete piuttosto che un paramagnete. Sono stati presi in considerazione materiali in grado di sviluppare una magnetizzazione intensa con tempi di rilassamento molto lunghi.

Ai fini dell'esperimento, la condizione ottimale si raggiunge quando il campione paramagnetico genera una magnetizzazione molto intensa e il più possibile uniforme. Quest'ultima proprietà si può ottenere utilizzando un campione sferico, che garantisce l'uniformità del campo magnetico al suo interno [4].

Il campione è posto all'interno di un campo magnetico statico  $\mathbf{B}_0$ , ortogonale al campo  $\mathbf{B}_a$ . Il valore di  $B_0$  è regolabile da 0.7 T a 7 T, a seconda della regione di massa da indagare. Supponendo infatti che l'energia totale degli assioni sia approssimabile alla loro energia a riposo (limite non relativistico), è possibile effettuare le seguenti sostituzioni:

$$B_0 = \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{E}{\gamma \hbar} = \frac{m_a c^2}{\gamma \hbar} = 0.85 \left( \frac{m_a}{10^{-4} eV} \right) T \quad (4.1)$$

Che esplicita la dipendenza tra il campo  $\mathbf{B}_0$  e il valore ricercato della massa degli assioni.

Ad ogni modo, ciò non è sufficiente a rivelare il vento assionico, proprio a causa della ridottissima sezione d'urto dell'interazione. È tuttavia possibile sfruttare la non-linearità delle equazioni di Bloch per amplificare il campo  $\mathbf{B}_a$  e renderlo misurabile dai rivelatori. Componente essenziale per ottenere quest'amplificazione è il terzo campo magnetico  $\mathbf{B}_p$ . A differenza di  $\mathbf{B}_0$ , questo campo non è statico, ma varia in intensità con una frequenza molto vicina a quella del campo  $\mathbf{B}_a$ . È quindi un campo a radiofrequenze, e sarà orientato perpendicolarmente a  $\mathbf{B}_0$  e parallelamente a  $\mathbf{B}_a$ . All'interno dell'apparato,  $\mathbf{B}_p$  è generato da una cavità risonante collegata a un generatore di tensione. Si spiegherà in seguito la necessità di introdurre una cavità risonante nell'apparato. In generale si supporrà che l'intensità di  $\mathbf{B}_p$  sia molto piccola, quindi i suoi effetti rientrano ampiamente nel regime di validità delle equazioni di Bloch. Il paramagnete sarà quindi sottoposto all'azione di 3 campi magnetici.

Si noti che è possibile non utilizzare il formalismo quantistico, poiché l'ampiezza dei campi a radiofrequenze è tale da poter causare la transizione di un gran numero di spin. Pertanto la descrizione classica delle Equazioni di Bloch è valida per descrivere la dinamica della magnetizzazione.

Tale trattazione non è estesa al caso in cui la magnetizzazione non sia uniforme all'interno del campione. La condizione di uniformità è tuttavia soddisfatta utilizzando un campione di forma sferica: questa conformazione garantisce che la magnetizzazione del paramagnete non dipenda dalle coordinate spaziali. Il rivelatore si trova quindi nel regime di validità delle equazioni di Bloch.

## Prototipo di QUAX

### Longitudinal Detection

Utilizzando la teoria sviluppata nel capitolo precedente è possibile calcolare la potenza assorbita dal paramagnete in ogni periodo di precessione [3]:

$$P_{ass} = -M \frac{dB_P}{dt} V_s = M_0 V_s \gamma \frac{2\omega T_2' B_P^2}{1+(\delta\omega T_2')^2} \quad (5.1)$$

Nel seguito si considereranno le seguenti ipotesi:

- il campo a radiofrequenze è polarizzato linearmente.
- il campo a radiofrequenze è dato dalla sovrapposizione dei campi  $\mathbf{B}_P$  e  $\mathbf{B}_a$ . Dove  $\mathbf{B}_P$  rappresenta il campo a radiofrequenze artificiale, utilizzato per amplificare gli effetti del campo  $\mathbf{B}_a$
- l'ampiezza di  $\mathbf{B}_P$  è molto maggiore di quella di  $\mathbf{B}_a$
- La direzione del vento assionico è la stessa di  $\mathbf{B}_P$
- $\omega_P - \omega_{Larmor} \ll \frac{1}{T_2'}$  dove  $\omega_P$  è la frequenza del campo  $\mathbf{B}_P$
- $\omega_a - \omega_{Larmor} \ll \frac{1}{T_2'}$

Il campo a radiofrequenze risultante sarà quindi:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_P \cos(\omega_P t) + \mathbf{B}_a \cos(\omega_a t) \quad (5.2)$$

A causa della non-linearità delle equazioni di Bloch, tale campo a radiofrequenze modulato in ampiezza produrrà una variazione periodica della componente z della magnetizzazione. Riprendendo l'equazione che descrive la componente verticale della magnetizzazione

$$M_z(t) = M_0 \left[ 1 - \frac{T_2'}{T_2} \frac{\gamma^2 T_1 T_2'}{1+(\delta\omega T_2')^2} B_1^2(t) \right] \quad (5.3)$$

ed esplicitando  $\mathbf{B}_1$  si ottiene che:

$$\Delta m_z(t) \propto B_P^2 = (B_a \cos(\omega_a t) + B_P \cos(\omega_P t))^2 \quad (5.4)$$

quindi

$$\Delta m_z(t) \propto B_a^2 \cos^2(\omega_a t) + B_P^2 \cos^2(\omega_P t) + B_a B_P \cos((\omega_a + \omega_P)t) + B_a B_P \cos((\omega_a - \omega_P)t) \quad (5.5)$$

Dato però che i primi 3 termini variano con frequenze non rivelabili da QUAX, l'unico termine efficace è l'ultimo. Esplicitando quindi la costante di proporzionalità si ottiene:

$$\Delta m_z(t) \equiv M_z(t) - M_0 \approx \frac{M_0 T_2'}{4} \frac{\gamma^2 T_1 T_2'}{T_2} B_P B_a \cos(\omega_D t) \quad (5.6)$$

dove  $\omega_D = \omega_P - \omega_a$ . Si assume inoltre che  $\omega_D < \min\left\{\frac{1}{T_1}; \frac{1}{T_2}\right\}$ .

Questa tecnica è nota in letteratura col nome di **Longitudinal Detection (LOD)**. Tali oscillazioni a bassa frequenza della magnetizzazione possono essere rivelate da un rivelatore sufficientemente sensibile. Nel caso di QUAX viene utilizzato un amplificatore SQUID, scelto per due ragioni:

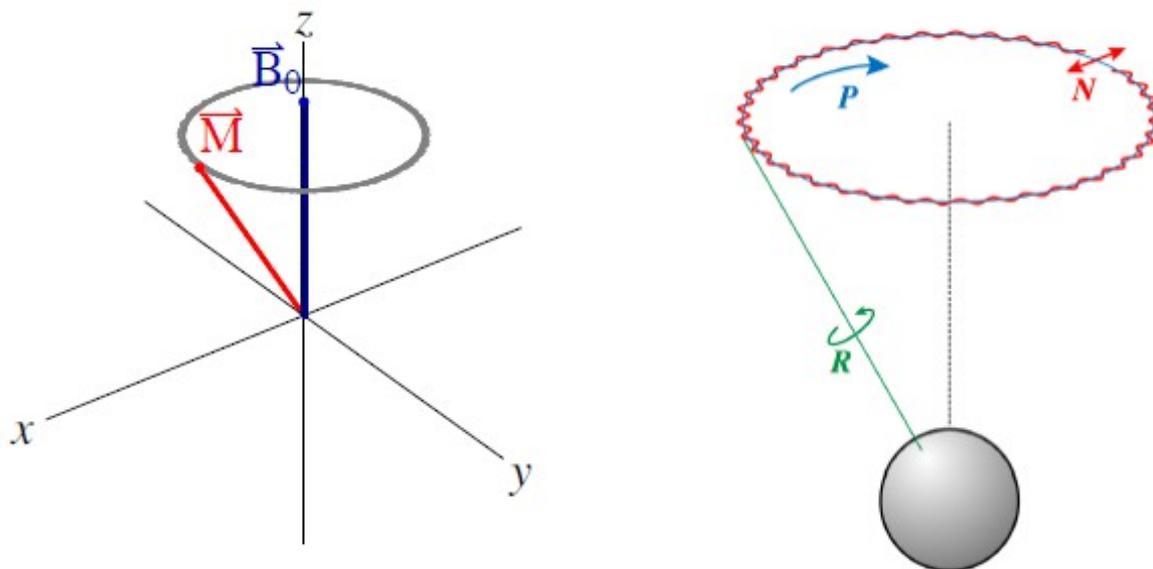
- Lavora vicino al limite quantistico di risoluzione.
- È il più sensibile a queste frequenze.

Riassumendo invece le ragioni per cui si introducono i campi  $\mathbf{B}_0$  e  $\mathbf{B}_P$ :  $\mathbf{B}_0$  ha due funzioni:

- polarizza gli spin degli elettroni del campione generando un vettore di magnetizzazione
- determina la frequenza di Larmor a cui si fanno precedere gli spin degli elettroni

Il campo  $\mathbf{B}_P$  ha invece queste finalità:

- amplifica l'effetto del campo assionico
- abbassa la frequenza del campo da rivelare



I vantaggi di questa procedura sono fondamentalmente 2:

1. Il campo da rivelare  $\mathbf{B}_a$  viene convertito in un campo a bassa frequenza (**downconversion**), il che permette di utilizzare amplificatori che non possono lavorare a frequenze più elevate. Questo fenomeno è una conseguenza dell'interferenza tra  $\mathbf{B}_P$  e  $\mathbf{B}_a$ : i due campi hanno frequenze molto vicine, e generano pertanto dei battimenti. Tale procedura è resa necessaria dal fatto che

il rivelatore SQUID utilizzato non fornisce una risoluzione sufficiente a rivelare il campo ad alte frequenze.

2. Gli effetti di  $\mathbf{B}_a$  sono amplificati di un fattore  $G_m$  (vedere formula 5.4):

$$G_m = \mu_0 \frac{M_0 T_2'}{4 T_2} \gamma^2 T_1 T_2' B_P \quad (5.7)$$

Ulteriori semplificazioni possono essere raggiunte formulando le seguenti ipotesi sui tempi di rilassamento:

1.  $T_1 \approx T_2$
2.  $T_D < T_2$

In questo modo, infatti, il guadagno dipenderà solamente dal tempo  $T_D$ :

$$G_m \approx \mu_0 M_0 T_D^2 \gamma^2 B_P \approx \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{\lambda_L^3}{V_s} \gamma T_D B_P \quad (5.8)$$

Dove  $\lambda_L \equiv \frac{2\pi c}{\omega_{Larmor}}$  rappresenta la lunghezza d'onda relativa alla frequenza di Larmor.

Tuttavia, per ottenere un guadagno maggiore di 1, è necessario che

$$V_s < \frac{1}{(8\pi)^2} \lambda_L^3 T_D \gamma B_P \quad (5.9)$$

ma al tempo stesso, affinché l'ampiezza di  $\mathbf{B}_P$  sia lontana dalla saturazione degli spin deve essere (vedere formula 3.26)

$$\gamma^2 B_P^2 T_D T_1 \ll 1 \quad (5.10)$$

ovvero

$$\gamma T_D B_P \ll 1 \quad (5.11)$$

Il che è concretamente impossibile da ottenere nello spazio vuoto a causa del fenomeno di radiation damping da emissione di dipolo magnetico.

Si cerca quindi di inserire opportunamente alcune modifiche nell'apparato, col fine di ottenere un maggior guadagno.

L'obiettivo di QUAX è dunque quello di rivelare piccole variazioni nella componente verticale della magnetizzazione del campione. Tale effetto è macroscopicamente spiegato dalle equazioni di Bloch ed è stato descritto nei paragrafi precedenti.

Microscopicamente invece è possibile interpretare il fenomeno attraverso l'effetto Zeeman. In assenza di campi magnetici esterni, i livelli energetici molecolari sono degeneri di ordine 2 a causa della sovrapposizione dei livelli relativi ai due possibili spin degli elettroni. L'effetto del campo  $\mathbf{B}_0$  è di eliminare questa degenerazione, e creare tra i due livelli una differenza di energia di

$$\delta E = \gamma \hbar B_0$$

dove  $\gamma$  rappresenta il fattore giromagnetico. Dal momento che si può variare il campo  $\mathbf{B}_0$ , è possibile variare la differenza di energia fino a trovare la transizione che viene causata dall'interazione tra un assione e un elettrone. Tale transizione farà passare l'elettrone in questione al livello energetico immediatamente superiore; ciò consiste nella variazione del suo spin da  $+\hbar/2$  a  $-\hbar/2$  (**spin flip**). Poiché il momento magnetico del singolo elettrone è parallelo al suo spin, queste transizioni porterebbero a una variazione nella magnetizzazione del campione. Lo scopo dell'apparato consiste proprio nell'amplificare e nel rivelare questa variazione.

### Produzione del campo $\mathbf{B}_P$ attraverso una cavità risonante

Il campo  $\mathbf{B}_P$  è limitato fondamentalmente da due fattori:

- la saturazione degli spin del materiale che, come visto, impone che  $\gamma^2 B_P^2 T_D T_1 \ll 1$
- la potenza dissipata nel materiale magnetizzato.

La limitazione maggiore è causata da questo secondo elemento. Si verifica che la potenza dissipata nel campione è descritta dalla formula [3]:

$$P_{diss} = \frac{\omega_P B_P^2 M_0 \gamma T_2 V_S}{2\mu_0} \quad (5.12)$$

Il problema consiste sostanzialmente nel fatto che la potenza dissipata non è sufficientemente compensata dalla potenza criogenica disponibile. Ciò ha come ovvia conseguenza un aumento della temperatura, e quindi dell'agitazione termica.

Con lo scopo di ridurre consistevolmente il fenomeno di radiation damping, che non permette di realizzare l'esperimento nello spazio vuoto, si inserisce il paramagnete in una cavità risonante. Analiticamente, questo è rappresentato dall'introduzione di una quarta equazione, da affiancare alle equazioni di Bloch [3]. Tale relazione esprimerà due nuovi effetti:

- il forte accoppiamento con la pompa a radiofrequenze (che genera il campo  $\mathbf{B}_P$ )
- il radiation damping indotto.

Queste quattro equazioni assumono la seguente forma per un campo a radiofrequenze polarizzato linearmente lungo l'asse x [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dM_x(t)}{dt} &= \gamma M_y(t) B_0 - \frac{M_x(t)}{T_2} \\ \frac{dM_y(t)}{dt} &= \gamma (M_z(t) K I(t) - M_x(t) B_0) - \frac{M_y(t)}{T_2} \\ \frac{dM_z(t)}{dt} &= -\gamma K' I(t) M_y(t) - \frac{M_0 - M_z(t)}{T_1} \\ L \frac{dI(t)}{dt} &= K \frac{dM_x(t)}{dt} - RI(t) - \frac{1}{C} \int^t I(t) dt + V_{rf} \end{aligned} \quad (5.13)$$

dove  $R$ ,  $L$  e  $C$  sono i parametri relativi al modo della cavità risonante di frequenza  $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  e  $I(t) = \frac{B_1(t)}{K}$  è la corrente generata dal campo  $\mathbf{B}_1$ .  $K$  e  $K'$  sono invece costanti legate alla geometria del sistema che descrivono l'accoppiamento tra la magnetizzazione del campione e la corrente che circola nel circuito che genera  $\mathbf{B}_p$  rispettivamente lungo l'asse  $x$  e lungo l'asse  $z$ .

Inoltre, questi due termini soddisfano la relazione  $KK' = 4\pi\xi L$ , dove

$$\xi = \frac{\int_{V_s} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_1 dV}{\int_{V_c} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_1 dV} \quad (5.14)$$

dove  $V_c$  rappresenta il volume della cavità risonante.

La soluzione stazionaria per il campo trasversale alla magnetizzazione è [3]:

$$M_x(t) + iM_y(t) = i \frac{\gamma M_0 T_2}{1 + i T_2 \delta \omega} K' I \equiv \chi K' I \quad (5.15)$$

dove  $\omega$  rappresenta la frequenza del campo a radiofrequenze,  $\chi = \chi' + i\chi''$  la suscettività magnetica (complessa) e

$$I = \frac{i\omega}{L \left( \omega^2 - \omega_c^2 - \frac{i\omega\omega_c}{Q} + 4\pi\chi\omega^2 \right)} \quad (5.16)$$

Per quanto riguarda la componente verticale della magnetizzazione, invece, è possibile calcolare questa soluzione approssimata [3]:

$$M_z(t) = M_0 \left( 1 - \frac{\gamma^2 B_1^2 T_1 T_2}{1 + (\delta\omega T_2)^2} \right) \quad (5.17)$$

L'approssimazione sta nel fatto che si assume che l'ampiezza di  $\mathbf{B}_1$  sia lontana dalla saturazione degli spin. Valgono quindi le stesse assunzioni fatte alla fine del paragrafo precedente.

Si nota che non compare il termine  $T_D$ , che quantifica il radiation damping. Ciò è dovuto al fatto che il generatore di  $\mathbf{B}_p$  fornisce ora abbastanza potenza da bilanciare esattamente lo smorzamento della radiazione. Ad ogni modo, il radiation damping continua ad influenzare le componenti trasversali della magnetizzazione.

Tuttavia, le fluttuazioni nel campo  $\mathbf{B}_p$  dovute al rumore termico sono ordini di grandezza maggiori del segnale che si suppone sia prodotto dagli spin. Ciò vale anche se si porta l'apparato a temperature criogeniche. Tale risultato è estrapolabile dal teorema di equipartizione dell'energia, che in questo caso assume la forma:

$$V_c \frac{B_t^2}{\mu_0} \approx k_B T \quad (5.18)$$

dove  $B_t$  rappresenta la deviazione standard delle fluttuazioni del campo  $\mathbf{B}_1$ . E quindi:

$$B_t \approx \sqrt{\frac{\mu_0 k_B T}{V_c}} \approx 10^{-15} T \quad (5.19)$$

Tale stima è stata raggiunta supponendo di utilizzare una cavità di volume  $10^{-4} \text{ m}^3$  a

una temperatura di 0.1K. Dal momento che il segnale atteso è dell'ordine di  $10^{-20}$  T, è evidente che quest'apparato non sarà in grado di rivelarlo.

### Introduzione di una guida d'onda

Riassumendo quanto visto finora, il problema principale nel rivelamento degli assioni nello spazio libero sta nel fenomeno del radiation damping, che smorza la variazione nella componente verticale della magnetizzazione. Tale problema viene risolto inserendo il paramagnete all'interno di una cavità risonante. Tuttavia, la cavità introduce un altro problema: il rumore termico, eccessivamente elevato per permettere il rivelamento degli assioni anche a temperature prossime allo zero assoluto.

Si cercano quindi altri metodi per ridurre il radiation damping, senza introdurre ulteriori fonti di rumore. A tal fine si è scelto di inserire il paramagnete in una guida d'onda con una frequenza di taglio  $\omega_c$  superiore alla frequenza di Larmor del campione. La più piccola frequenza di taglio per una guida d'onda a sezione rettangolare (lati a e b, con  $a > b$ ) è [3]:

$$\omega_c = \frac{1}{4 \pi a \sqrt{\epsilon \mu}} \quad (5.20)$$

In sostanza, in QUAX la guida d'onda è utilizzata come un filtro passa-alto. In questo modo, poiché il radiation damping consiste nell'emissione di onde elettromagnetiche alla frequenza di Larmor, queste non possono propagarsi all'interno della guida d'onda. Ciò che rimane dei campi esclusi dalla guida d'onda sono onde evanescenti, la cui intensità decresce esponenzialmente. Ci si aspetta quindi una significativa riduzione di tali campi.

Nella fattispecie ci si aspetta che l'intensità delle onde elettromagnetiche con frequenza  $\omega < \omega_c$ , che si propagano all'interno della guida d'onda, cali secondo la relazione:

$$I = I_0 e^{-l \frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c}} \quad (5.21)$$

dove l rappresenta la distanza percorsa all'interno della guida d'onda [13].

L'inserimento della guida d'onda ha quindi un duplice vantaggio:

- i tempi di rilassamento del sistema non sono più dominati dal radiation damping ma dai tempi di rilassamento longitudinale e trasversale intrinseci del campione.
- Il rumore termico è sensibilmente ridotto.

## Analisi del rumore

Dato che l'oggetto della misura sono le variazioni nella componente verticale della magnetizzazione, è opportuno considerare e quantificare gli effetti di tutti quei fattori che generano a loro volta variazioni nella magnetizzazione. Queste fonti di rumore saranno trattate singolarmente, e si proporrà un'analisi approfondita di ognuna di esse.

### Rumore causato dal campo $B_P$

Il campo pulsante è generato da un circuito alimentato da una corrente oscillante. Questo circuito produrrà un rumore intrinseco nel campo  $B_P$  sotto forma di piccole variazioni dal valore impostato. Supponendo di voler raggiungere una sensibilità di  $10^{-22}$  T (per rivelare un campo di intensità dell'ordine di  $10^{-20}$  T) utilizzando un campo  $B_P$  pari a  $10^{-8}$  T, si dovranno ridurre queste oscillazioni a  $10^{-14}$  T di scostamento dal valore impostato.

Trascurando la presenza del campo assionico, la formula che descrive la variazione nella componente z della magnetizzazione in presenza dei campi  $B_0$  e  $B_P$  si scrive come:

$$\Delta M_z \propto B_P^2 = B_x^2 (1 + a_n(t))^2 \sin^2(\omega_x t + \phi_n) \quad (6.1)$$

Ovvero – **nel caso reale** –  $B_P$  è caratterizzato da un'ampiezza  $B_x$ , soggetta alle fluttuazioni  $a_n B_x$ , e da una fase  $\omega_x t$ , che presenta una fluttuazione  $\Phi_n$ . Nella trattazione che segue si trascurerà la fluttuazione della fase, dal momento che si vuole confrontare solo l'ampiezza del campo  $B_a$  con quella di  $B_P$ .

Approssimando al prim'ordine per  $a_n$  la formula precedente si ottiene

$$\Delta M_z \propto B_x^2 (1 + 2a_n(t)) \sin^2(\omega_x t) = B_x^2 (1 + 2a_n(t)) \frac{1 - \cos(2\omega_x t)}{2} = \left[ \frac{B_x^2}{2} + B_x^2 a_n(t) \right] \frac{1 - \cos(2\omega_x t)}{2} \quad (6.2)$$

Ora,  $a_n(t)$  è un processo stocastico composto da varie componenti spettrali. Dato che l'obiettivo è misurare l'ampiezza di  $B_a$  alla frequenza di battimento  $\omega_B$  con  $B_P$ , si considererà solamente la componente della serie di Fourier per  $a_n$  che agisce sulla frequenza di battimento. In altri termini, si può sviluppare  $a_n$  in serie di Fourier:

$$a_n(t) = \sum_i a_i \sin(\omega_i t) \quad (6.3)$$

Di tale somma si considererà solo il coefficiente  $a_B$  del termine corrispondente alla frequenza di battimento. Le fluttuazioni nell'ampiezza di  $B_P$  saranno quindi

$$B_x^2 a_B$$

In letteratura [10][11] si trova il valore

$$\sqrt{S_{a_n}(\omega_B)} = 190 \frac{dB}{\sqrt{Hz}} \approx 3 \cdot 10^{-10} \frac{1}{\sqrt{Hz}} \quad (6.4)$$

che esprime il rapporto tra il valore delle fluttuazioni e  $B_P$  per  $\omega_B > 10^5$  KHz. Ciò permette di stimare  $\sigma_{aB}^2$  assumendo come tempo di integrazione  $10^{-4}$  s. In questo

modo si ha che  $\sigma_{a_B} = \sqrt{\frac{S_{a_B}}{T}} = 3 \cdot 10^{-10} \approx 10^{-8}$ .

Tuttavia, la condizione necessaria per poter effettuare la misura è che l'intensità del segnale sia superiore al rumore. Ciò significa che  $B_P B_a$  deve essere maggiore di  $B_P^2 a_B$ . Tale condizione è equivalente a richiedere che  $B_a > B_P a_B$ , ossia che  $10^{-20} T > 10^{-8} T \cdot \sigma_{a_B}$ . Pertanto, per poter effettuare la misura si deve avere che  $\sigma_{a_B} < 10^{-12}$ , 4 ordini di grandezza più piccolo di quello ottenuto.

Per ovviare a questo problema occorre modificare lo schema di misura. Una possibilità è calcolare la differenza tra dei segnali provenienti da due cavità identiche ortogonali e pompate dallo stesso generatore. Infatti in questo caso una delle due cavità avrà  $B_P // B_a$ .

### Rumore causato da fotoni termici

Nel vuoto è sempre presente un campo magnetico “intrinseco” generato dai fotoni termici. La sua intensità è prevista dalla formula

$$B_{th} = \sqrt{\frac{\mu_0}{V_S} \frac{8 \pi^2 \hbar v^3}{c^3} \frac{\Delta \omega_a}{e^{\frac{\hbar \omega_{Larmor}}{k_B T}} - 1}} \quad (6.5)$$

dove  $\Delta \omega_a$  rappresenta la larghezza di banda del campo  $B_a$ .

Tale campo va sommato a  $B_1$  e costituisce pertanto una fonte di rumore. Si può raggiungere una stima dell'intensità di tale rumore inserendo alcuni valori caratteristici:

- $V_S \approx 10^{-4} \text{ m}^3$
- $v \approx 270 \text{ Km/s}$
- $\Delta \omega \approx 10^4 \text{ Hz}$
- $T \approx 0.1 \text{ K}$
- $\omega \approx 50 \text{ GHz}$

In tal caso  $B_{th} \approx 10^{-23} \text{ T}$ . Pertanto nello spazio vuoto il rumore dei fotoni termici non impedisce di effettuare la misura.

Nello spazio vuoto (in assenza di cavità risonante e guida d'onda) la radiazione termica segue una distribuzione di Planck, e causa le oscillazioni nel campo magnetico appena descritte. Lo spettro della radiazione termica cambia significativamente se si inserisce il campione in una cavità risonante. Se il fattore di qualità Q della cavità è sufficientemente elevato, lo spettro non è più descritto da una distribuzione di Planck ma dalla sovrapposizione delle Lorentziane corrispondenti alle frequenze dei vari modi della cavità, pertanto il rumore causato dai fotoni termici

non è più descritto dall'espressione precedente. Ad ogni modo, tale rumore risulta ancora troppo elevato per effettuare una misura di  $\mathbf{B}_a$  (vedere formula 5.17).

All'interno della guida d'onda, invece, i fotoni termici con frequenza minore della frequenza di taglio possono esistere solo sotto forma di onde evanescenti, la cui intensità cala esponenzialmente con la distanza percorsa. Di conseguenza il rumore da essi prodotto cala sensibilmente.

### Rumore nella magnetizzazione causato dal circuito oscillante

Nel regime di frequenze molto più basse di quella di Larmor, le fluttuazioni sono dominate dalla dissipazione causata dal solenoide che genera il campo a radiofrequenze (attraverso il radiation damping). Dal momento che tali fluttuazioni nel campo  $\mathbf{B}_p$  sono puramente casuali, è consentito modellarle con una gaussiana a media nulla (in questo caso la variabile casuale è rappresentata dalla differenza tra il valore atteso di  $\mathbf{B}_p$  e quello effettivo). Tali fluttuazioni perturbano la componente verticale della magnetizzazione del campione, che presenterà quindi a sua volta delle fluttuazioni attorno al valore atteso. Supponendo queste variazioni molto piccole rispetto al valore di  $M_z$ , è possibile studiare lo scostamento angolare tra  $M_z$  effettivo e atteso sfruttando l'equazione di Langevin [3]:

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{\tau_r} = \gamma B_p \quad (6.6)$$

dove  $\theta$  rappresenta lo scostamento angolare tra  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{B}_0$  (che a sua volta è parallelo all'asse verticale) e  $\tau_r$  è il tempo di rilassamento del sistema. Dato però che si sta analizzando l'entità di un errore strumentale è conveniente studiare lo scarto quadratico medio di  $\theta$  (si moltiplica la precedente espressione per  $\theta$  e se ne calcola il valor medio):

$$\left\langle \frac{d\theta^2}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{2\theta^2}{\tau_r} \right\rangle = 2\gamma \langle \theta B_p \rangle \quad (6.7)$$

Dove le parentesi  $\langle \rangle$  rappresentano la media statistica. Poiché allo stato stazionario assorbimento ed emissione di radiazione si bilanciano vicendevolmente, il loro apporto è mediamente nullo ed è quindi possibile ridurre l'equazione a:

$$\left\langle \frac{2\theta^2}{\tau_r} \right\rangle = 2\gamma \langle \theta B_p \rangle \quad (6.8)$$

Inoltre, per il teorema di equipartizione dell'energia valgono le seguenti uguaglianze (per il primo passaggio è sufficiente sviluppare al prim'ordine il coseno di  $\theta$  del prodotto scalare):

$$\langle \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \rangle - M_0 B_0 \approx \frac{1}{2} M_0 B_0 \langle \theta^2 \rangle = \frac{\hbar \omega_{Larmor}}{V_s} \coth \left( \frac{\hbar \omega_{Larmor}}{2 k_B T} \right) \quad (6.9)$$

Dove  $T_p$  è la temperatura di rumore del circuito di pompa.

Si fa notare che l'applicazione del teorema di equipartizione è consentita solo all'equilibrio termodinamico. In questo caso non si è in tali condizioni, ma l'energia fornita al sistema è piccola rispetto all'energia del sistema stesso, pertanto lo stato del

sistema è comunque approssimabile all'equilibrio termodinamico.

Inoltre, dalla soluzione stazionaria delle equazioni di Bloch, la varianza di  $\theta$  all'equilibrio può essere scritta come

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\langle M_{n,x}^2 \rangle + \langle M_{n,y}^2 \rangle}{M_0^2} = \gamma^2 \langle B_n^2 \rangle T_2'^2 \quad (6.10)$$

Da cui è possibile ricavare la varianza del campo  $B_p$  su una banda di frequenza pari alla frequenza di Larmor:

$$\langle B_n^2 \rangle = \frac{2 \hbar \omega_{Larmor}}{\gamma^2 M_0 B_0 V_s T_2'^2} \coth \left( \frac{\hbar \omega_{Larmor}}{2 k_B T} \right) \quad (6.11)$$

Se si considera il contributo della frazione di rumore che compete alla banda relativa agli assioni occorre dividere per  $Q_a$ .

$$\langle B_n^2 \rangle = \frac{2 \hbar \omega_{Larmor}}{\gamma^2 M_0 B_0 V_s T_2'^2 Q_a} \coth \left( \frac{\hbar \omega_{Larmor}}{2 k_B T} \right) \quad (6.12)$$

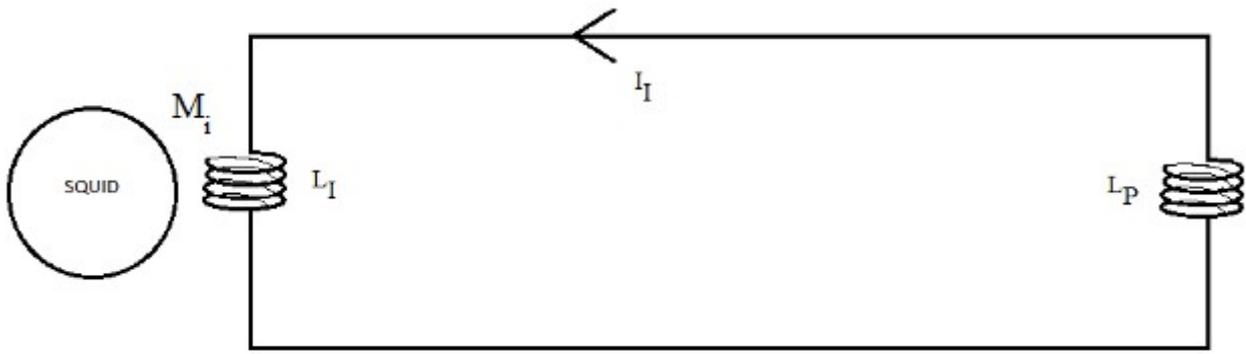
Inserendo le seguenti grandezze caratteristiche:

- $\omega_{Larmor} \approx 10^{10}$  Hz
- $M_0 \approx 0.02$  Am
- $B_0 \approx 1$  T
- $V_s \approx 10^{-4}$  m<sup>3</sup>
- $T_2' \approx 10^{-6}$  s
- $Q \approx Q_a \approx 10^5$

Si ottiene che  $\langle B_p \rangle \approx 10^{-18} T$ , pertanto tale rumore non consente di effettuare la misura. Tuttavia, è possibile utilizzare un materiale con una magnetizzazione molto più elevata, come lo YIG ( $M_0 \approx 0.2$  T  $\approx 1.6 \cdot 10^6$  Am). In questo caso  $\langle B_p \rangle \approx 10^{-22} T$ , quindi le fluttuazioni termodinamiche nella magnetizzazione consentirebbero la misura.

## Rumore del rivelatore SQUID

Lo SQUID è un rivelatore del flusso magnetico che attraversa la sua area. Pertanto viene utilizzato per misurare flussi di campi magnetici  $\delta\Phi_p$ . Lo schema tipico di una misura effettuata con uno SQUID è qui rappresentato:



Una variazione di flusso magnetico  $\delta\Phi_P$  viene raccolta dall'induttore  $L_P$ , e genera pertanto una corrente  $I_I$  secondo l'equazione:

$$\delta\Phi^{(P)} + (L_P + L_I)I_I = 0 \quad (6.13)$$

che esprime la Legge di Conservazione del Flusso, che vale se si assume che il circuito  $L_P$ - $L_I$  sia superconduttore.

Dal momento che il circuito  $L_P$ - $L_I$  e lo SQUID si trovano in condizione di mutua induzione, in seguito alla variazione del flusso esterno  $\delta\Phi_P$  lo SQUID rivela una variazione di flusso magnetico  $\delta\Phi$  (vedere formula 6.13):

$$\delta\Phi = M_i I_I = M_i \frac{\delta\Phi_P}{L_P + L_I} \quad (6.14)$$

Dove  $M_i$  rappresenta il coefficiente di mutua induzione tra il circuito  $L_P$ - $L_I$  e lo SQUID.

Per verificare la misurabilità di un flusso esterno  $\delta\Phi_P$ , il segnale  $\delta\Phi$  dev'essere confrontato col rumore additivo dello SQUID  $\delta\Phi_n$ . A tal fine si introduce il concetto di **rumore equivalente in ingresso**  $\delta\Phi_n^P$ , che è definito tramite la 6.14 in questo modo:

$$\delta\Phi_n^P = \frac{L_P + L_I}{M_i} \delta\Phi_n \quad (6.15)$$

In questo modo  $\delta\Phi_n^P$  può essere confrontato direttamente con un eventuale flusso in ingresso  $\delta\Phi^P$  per verificarne la misurabilità. Dalla 6.15 è possibile ricavare lo spettro di potenza del rumore equivalente:

$$S_{\Phi_n^P \Phi_n^P} = \left( \frac{L_P + L_I}{M_i} \right)^2 S_{\Phi_n \Phi_n} \quad (6.16)$$

che può essere scritta in questo modo:

$$S_{\Phi_n^P \Phi_n^P} = \frac{(L_P + L_I)^2}{2 L_I L_{SR} L_P \alpha^2} = \frac{(L_P + L_I)^2}{L_P L_I} \frac{\epsilon}{\alpha^2} \quad (6.17)$$

dove si è esplicitato  $M_i = \alpha \sqrt{L_I L_{SR}}$  e la sensibilità energetica per unità di banda dello SQUID:

$$\epsilon = \frac{S_{\Phi\Phi}}{2 L_{SR}} \quad (6.18)$$

L'espressione 6.14 è minimizzata per  $L_P = L_I$ . Pertanto il valore minimo di  $S_{\Phi_n^P \Phi_n^P}$  vale:

$$S_{\Phi_n^P \Phi_n^P} = 8 L_P \frac{\epsilon}{\alpha^2} \quad (6.19)$$

Un eventuale campo magnetico esterno  $B_{EXT}$  genererebbe in una bobina  $L_P$  composta da una spira di raggio  $r_P$  il flusso:

$$\Phi_P = \pi r_P^2 B_{EXT} \quad (6.20)$$

Pertanto il rumore equivalente del campo magnetico esterno  $B_{EXT-n}$  ha lo spettro di potenza:

$$S_{B_{EXT-n} B_{EXT-n}} = \frac{\sqrt{S_{\Phi}^{(P)}}}{\pi r_P^2} = \frac{2\sqrt{2} L_P \epsilon}{\alpha \pi r_P^2} \quad (6.21)$$

Supponendo di poter approssimare  $\alpha \approx 1$  (caso ideale) e  $\epsilon \approx \hbar$ , ovvero il minimo valore possibile in accordo con la meccanica quantistica, si ottiene:

$$\sqrt{S_{B_{EXT-n} B_{EXT-n}}} = 1.4 \cdot 10^{-16} T / \sqrt{Hz} \quad (6.22)$$

Questo valore equivale a una varianza

$$\sigma_B = \frac{1.4 \cdot 10^{-16}}{\sqrt{T}} \approx 10^{-14} T \quad (6.23)$$

che è molto più grande del campo da misurare.

Tornando all'equazione che esprime la conservazione del flusso di campo magnetico in un circuito superconduttore, è possibile esplicitare il valore della corrente generata da una variazione di flusso in questo modo:

$$\delta \Phi_P + (L_P + L_I) I_I = 0 \quad (6.24)$$

si esplicita ora  $\delta \Phi_P$  e si assume che  $L_P = L_I$ :

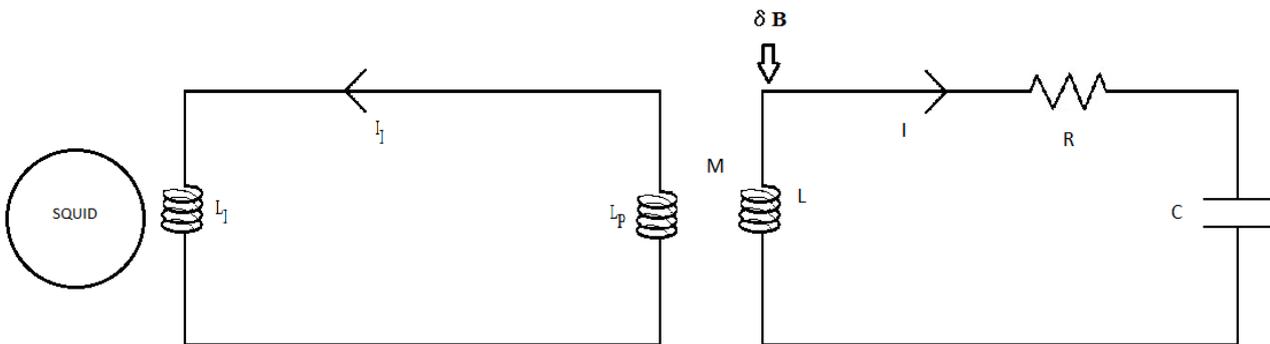
$$\delta B S n + 2 L_P I_I = 0 \quad (6.25)$$

dove S rappresenta la sezione di una spira di  $L_P$  e n il numero di spire in  $L_P$ .

Da quest'equazione si ottiene il valore di  $I_I$ :

$$I_I = -\frac{\delta B S n}{2 L_P} \quad (6.26)$$

E' possibile modificare il circuito per amplificare questa corrente. Una possibilità è la seguente:



Dove si suppone che il flusso del campo magnetico sia rivelato solo da  $L$ , anche se questa è sovrapposta a  $L_P$  con  $\alpha=1$ .

Prima di calcolare la sensibilità e l'amplificazione della corrente di questa configurazione è opportuno trovare un'espressione esplicita per  $I$ , che rappresenta il segnale da misurare direttamente. A tal fine si considerino le due equazioni:

$(L_1 + L_p)I_1 + M I = 0$  che esprime la conservazione del flusso (6.27)

$$\frac{Q}{C} + L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} = \frac{d\Phi_{EXT}}{dt} \quad \text{che esprime l'evoluzione della corrente (6.28)}$$

dove Q rappresenta la carica presente nel circuito e  $\Phi_{EXT}$  il flusso del campo magnetico esterno attraverso L (le altre grandezze sono rappresentate nell'immagine del circuito).

Dato però che dalla prima equazione si ricava

$$I_1 = -\frac{M I}{L_1 + L_p} \quad (6.29)$$

si sostituisce tale valore nella seconda uguaglianza per ottenere:

$$\frac{Q}{C} + L_{eff} \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} = \frac{d\Phi_{EXT}}{dt} \quad (6.30)$$

$$\text{dove è stato definito } L_{eff} \equiv L - \frac{M^2}{L_1 + L_p} \quad (6.31)$$

Si calcola quindi la trasformata di Fourier di tale espressione e si risolve:

$$Q(\omega) = \frac{i\omega \Phi_{EXT}(\omega)}{\frac{1}{C} - \omega^2 L_{eff} + iR} = \frac{i\omega \Phi_{EXT}}{L_{eff} \omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega \omega_0}{Q}} \quad (6.32)$$

dove sono stati introdotti la frequenza di risonanza del circuito  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  e il fattore

di qualità  $Q = \frac{\omega L_{eff}}{R}$ .

Infine, ci si pone in condizioni di risonanza ( $\omega = \omega_0$ ) e si moltiplicano entrambi i membri per  $i\omega$ :

$$I = \frac{i\omega}{L_{eff}} \frac{Q}{\omega_0^2} \Phi_{EXT} \quad i\omega = -Q \frac{\Phi_{EXT}}{L_{eff}} \quad (6.33)$$

dove si è posto  $I = i\omega Q$ .

Da questa corrente, che scorre nel circuito a destra, è possibile ricavare  $I_1$ , che scorre in quello a sinistra, in modo da poterla confrontare con quella calcolata precedentemente. Ciò è reso possibile dal fatto che i due circuiti generano una mutua induzione, pertanto per il circuito in cui scorre  $I_1$  deve valere che (esplicitando M e ponendo  $L_1 = L_p$  nella 5.29):

$$2L_p I_1 + \alpha \sqrt{LL_p} I = 0 \quad (6.34)$$

quindi, ponendo  $\alpha = 1$ , si ottiene

$$I = -\frac{2L_p I_1}{\sqrt{LL_p}} \quad (6.35)$$

che può essere sostituito nell'equazione 6.33, con opportuni passaggi algebrici, per ottenere l'espressione di  $I_1$  in questo secondo caso:

$$I_1 = \frac{(\delta B) S n Q}{\sqrt{LL_p}} \quad (6.36)$$

E' ora possibile calcolare il rapporto tra questa nuova corrente e quella ricavata nel

primo caso, che corrispondeva ad errori nel campo maggiori del valore da rilevare.

$$\frac{I_{I-2}}{I_{I-1}} = \frac{(\delta B) S n Q}{\sqrt{L L_P}} \frac{2 L_P}{(\delta B) s n} \quad (6.37)$$

prendendo ora  $s=S$  (ovvero i solenoidi di induttanza  $L$  e  $L_P$  hanno sezioni uguali) si ottiene:

$$\frac{I_{I-2}}{I_{I-1}} = \frac{2 L_P N Q}{\sqrt{L L_P} n} \quad (6.38)$$

ed esplicitando i valori delle induttanze dei solenoidi:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \quad (6.39)$$

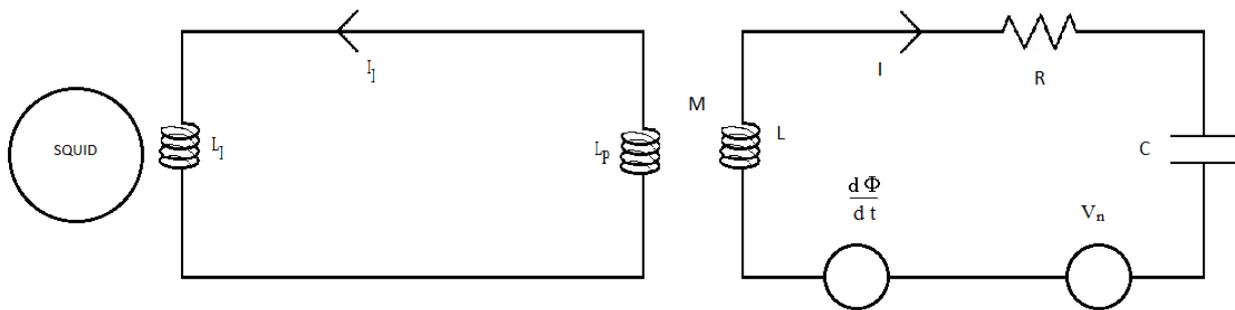
$$L_P = \frac{\mu_0 n^2 s}{l}$$

si ottiene che

$$\frac{I_{I-2}}{I_{I-1}} = \frac{2 L_P}{\sqrt{L L_P}} \sqrt{\frac{L}{L_P}} Q = 2 Q \quad (6.40)$$

La corrente risulta quindi amplificata di un fattore  $2Q \approx 10^5$ , il che fornisce una prima stima della validità di questo metodo: essendo infatti il segnale che arriva allo SQUID – a parità di flusso esterno – amplificato di un fattore  $2Q$ , il rumore in campo equivalente all'ingresso diventa  $\frac{\sqrt{S_{\Phi\Phi}(\text{primo caso})}}{2Q} \approx 10^{-22} \frac{T}{\sqrt{\text{Hz}}}$ . Oltre al rumore dello SQUID però va anche considerato il rumore termico associato alla resistenza di perdita dell'RLC. Per fare questo si procede in questo modo:

- Si introducono due generatori di tensione nel circuito, che rappresentano la tensione generata dalla variazione di flusso e il rumore di Nysquist associato ad  $R$  (ciò sarà chiarito più avanti). Il circuito da analizzare sarà quindi quello rappresentato di seguito:



Dove il generatore a sinistra rappresenta la differenza di potenziale generata dalla variazione di flusso, mentre quello a destra esercita una tensione  $V_n$ , che corrisponde al rumore termico.

- Si applica il **Teorema di Nysquist** (o Teorema di Fluttuazione-Dissipazione). Questo fornisce una stima dello spettro di potenza di  $V_n$ :

$$S_{V_n} = 4 k_B T R \quad (6.41)$$

dove  $k_B$  è la costante di Boltzmann,  $T$  la temperatura e  $R$  la resistenza. Il generatore di rumore  $V_n$  può essere descritto da un generatore di flusso di rumore equivalente  $\Phi_n$  mediante la relazione:

$$V_n = i \omega \Phi_n \quad (6.42)$$

o, passando agli spettri di potenza:

$$S_{\Phi_n \Phi_n} = \frac{S_{V_n V_n}}{\omega^2} = \frac{4 k_B T R}{\omega^2} \quad (6.43)$$

dove  $k_B$  è la costante di Boltzmann,  $T$  la temperatura e  $R$  la resistenza del circuito. Supponendo che la bobina di pick-up  $L$  abbia area  $A$  e  $n$  spire, il flusso di rumore  $\Phi_n$  può essere immaginato come se fosse generato dal campo magnetico di rumore  $\phi_n = A n B_n$ , dal quale è possibile ricavare il corrispondente spettro di potenza:

$$S_{B_n B_n} = \frac{S_{\Phi_n \Phi_n}}{A^2 n^2} = \frac{4 k_B T L}{Q A^2 n^2 \omega^2} \quad (6.44)$$

Inserendo in questa formula i seguenti valori caratteristici:

- Una frequenza di lavoro  $\omega = 2\pi 10^6 \text{ Hz}$
- Un'induttanza  $L = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ H}$
- Un solenoide composto da 100 spire con sezione  $10 \text{ mm}^2$
- $Q = 10^5$
- Il tutto alla temperatura di 10mK

Si ottiene  $S_B \approx 2.2 \cdot 10^{-40} \frac{T^2}{\sqrt{\text{Hz}}}$ , che permette di ricavare l'errore causato da questo rumore sul segnale da rivelare:

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{S_B}{2\tau}} < 10^{-18} T \quad (6.45)$$

Questo valore va confrontato con il campo magnetico efficace  $a_n B_a$  visto dallo SQUID. Il valore di  $a_n$ , quando ad esempio si mette in cavità un campione di YIG, è dell'ordine di 100. Questo significa che il campo assionico sarebbe rilevabile dallo squid con un rapporto segnale/rumore pari a 1. Un miglioramento di questo rapporto potrebbe essere ottenuto aumentando il volume del campione o la frequenza di battimento.

## Conclusioni

In questa tesi si è studiata la fattibilità di un rivelatore di assioni cosmologici. Il metodo di rivelazione si basa sull'effetto che un vento assionico dovrebbe avere su un sistema di elettroni, che dovrebbe essere equivalente all'applicazione di un campo magnetico a radiofrequenze. La frequenza tipica aspettata è dell'ordine delle decine di GHz. Per rendere queste alte frequenze misurabili si propone uno schema di down conversion del segnale.

L'analisi del rumore mette però in luce due criticità del sistema:

- Il rumore in ampiezza del segnale di pompa
- Il rumore dell'elettronica di amplificazione

Il primo potrebbe essere risolto modificando leggermente la topologia del sistema, mentre il secondo probabilmente richiederà l'utilizzo di campioni di volume e magnetizzazione maggiori al fine di aumentare il livello del segnale aspettato.

## Bibliografia

1. Steven Weinberg, *Cosmology*, 2008
2. Leanne D. Duffy & Karl Van Bibber, *Axions as dark matter particles*, New Journal of Physics 11: 20, 2009
3. INFN, *QUaerere AXion: a proposal to search for cosmological axions using magnetized media*, non pubblicato
4. INFN, *QUaerere AXion: a proposal to search for cosmological axions using magnetized media*, non pubblicato
5. A. Abragam, *The Principles of Nuclear Magnetism*, 1961
6. M.P. Augustine, *Transient properties of radiation damping*, Prog. Nucl. Mag. Res. Spect. 40: 111, 2002
7. N. Bloembergen & R. V. Pound, *Radiation Damping in Magnetic Resonance Experiments*, Phys. Rev. 95: 8, 1954
8. R. W. Sanders, D. Paquette & V. Jaccarino, *Radiation Damping in Magnetic Resonance*, Phys. Rev. B 10: 132, 1974
9. S. Bloom, *Effects of Radiation Damping on Spin Dynamics*, Journal of Applied Physics 28: 800, 1957
10. E. N. Ivanov, M. E. Tobar & R. A. Woode, *Microwave Interferometry: Application to Precision Measurements and Noise Reduction Techniques*, IEEE Transactions on ultrasonics ferroelectrics, and frequency control, vol 45, 1998
11. A. Hati, D. A. Howe & C. W. Nelson, *Comparison of AM noise in commercial amplifiers and oscillators at X-band*, Proc. of international frequency control, symposium IEEE International Miami, Florida, 2006
12. Dine, M., Fischler, W., Srednicki, M., *A simple solution to the strong CP problem with a harmless axion*, Phys. Lett. B104: 199, 1981
13. Wang, Gou, Shi, Qiu, *Evanescent Fields Inside a Cut-off Waveguide as Near Fields*, Optics and Photonics Journal: 192-196, Marzo 2013