



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

**Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”**

**CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA**

**TESI DI LAUREA**

**Invarianza di gauge  $U(1) \times SU(2)$  in Meccanica**

**Quantistica ed effetti Aharonov-Bohm-Casher**

**Relatore**

Prof. Pieralberto MARCHETTI

**Laureando**

Luigi ANGELINI

**Anno Accademico 2017/2018**



# Indice

<b>Premessa</b>	<b>v</b>
<b>1 Introduzione agli effetti</b>	<b>1</b>
1.1 Effetto Aharonov-Bohm . . . . .	1
1.1.1 Potenziale uniforme . . . . .	1
1.1.2 Interferenza per potenziale scalare . . . . .	3
1.1.3 Generalizzazione covariante . . . . .	5
1.1.4 Interferenza per potenziale vettore . . . . .	7
1.1.5 Sulla variante dell'effetto Aharonov-Bohm . . . . .	11
1.2 Effetto Aharonov-Casher . . . . .	13
1.2.1 Derivazione della lagrangiana . . . . .	13
1.2.2 Deduzione dell'effetto . . . . .	16
<b>2 La simmetria di gauge <math>U(1) \times SU(2)</math></b>	<b>19</b>
2.1 Equazione di Pauli generalizzata . . . . .	19
2.1.1 Precessione di spin . . . . .	19
2.1.2 Dinamica completa . . . . .	22
2.1.3 Quantizzazione . . . . .	23
2.1.4 Natura del risultato . . . . .	25
2.2 Simmetria $U(1) \times SU(2)$ dell'equazione . . . . .	26
2.2.1 Forma gauge-invariante dell'equazione . . . . .	26
2.2.2 Trasformazioni di gauge . . . . .	28
2.3 Conseguenze delle simmetrie . . . . .	30
2.3.1 Effetto Aharonov-Bohm . . . . .	31
2.3.2 Effetto Aharonov-Casher . . . . .	32
2.4 Sulla dualità degli effetti . . . . .	35
2.4.1 Dualità delle fasi . . . . .	35
2.4.2 Il sottogruppo $SU(2)_\perp$ . . . . .	37
<b>3 Una verifica sperimentale</b>	<b>41</b>
3.1 Struttura dell'esperimento . . . . .	41
3.2 Risultati . . . . .	44
<b>Conclusione</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>49</b>



# Premessa

Il presente lavoro di tesi è volto ad approfondire le fondamenta teoriche su cui poggiano gli effetti Aharonov-Bohm ed Aharonov-Casher, due fenomeni peculiari della Meccanica Quantistica non-relativistica, ed a mettere in evidenza la loro profonda connessione con l'invarianza di gauge sotto  $U(1) \times SU(2)$  di cui gode la teoria che li descrive.

Per farlo, si è scelto di presentare, in prima istanza, una revisione classica della loro esistenza, recuperando gli articoli originali [3] e [7] in cui furono messi in evidenza per la prima volta come *effetti topologici*.

Si prosegue, poi, astraendosi temporaneamente dalla costruzione di modelli *ad hoc* per derivare il contesto teorico e formale più generale in cui gli effetti sono descrivibili.

Si giunge, così, ad una *visione dall'alto* degli effetti, nel nuovo formalismo, in grado di spiegare esaustivamente il legame di dualità li che accomuna e di individuare il *leitmotif* sottostante alla loro natura topologica.

Si discute, infine, una verifica sperimentale dell'effetto Aharonov-Casher del 1989, la prima mai pubblicata sull'effetto.

**Notazione e convenzioni** Ove non specificato, si sottintenderà adottata la convenzione di Einstein.

Gli indici greci ( $\mu, \nu, \rho \dots$ ) si intenderanno correre da 0 a 3, mentre gli indici latini ( $i, j, h \dots$ ) si intenderanno correre da 1 a 3.

La segnatura di Minkowski adottata è  $(+, -, -, -)$ .

I vettori tridimensionali si indicheranno **in grassetto**.

Al fine di evitare confusione tra metrica euclidea tridimensionale e metrica di Minkowski, i vettori tridimensionali verranno sempre indicati con indici controvarianti. La convenzione di Einstein per la contrazione si intenderà realizzata, in tal caso, tra indici alti.

*Ringrazio vivamente il professor Pieralberto Marchetti per il tempo e l'appassionato acume dedicatimi approfondendo ed interrogandoci insieme sugli argomenti qui trattati.*



# Capitolo 1

## Introduzione agli effetti

In questo capitolo deriveremo teoricamente l'esistenza degli effetti Aharonov-Bohm ed Aharonov-Casher in Meccanica Quantistica non-relativistica, sfruttando strumenti matematici classici e facendo uso di naturali generalizzazioni, secondo uno stile analogo a quello degli articoli di riferimento, rispettivamente, [3] e [7].

L'intento è di fornire una prospettiva più classica circa le modalità in cui tali effetti possano emergere dal formalismo canonico hamiltoniano e lagrangiano, prima di darne una revisione più moderna in §2.3.

### 1.1 Effetto Aharonov-Bohm

Consideriamo una sequenza di esperimenti mentali.

#### 1.1.1 Potenziale uniforme

Sia data una particella di carica  $q$  contenuta all'interno di una gabbia di Faraday, e tale gabbia sia collegata ad un generatore di potenziale esterno in grado, una volta acceso, di modificarne il potenziale elettrico secondo una certa funzione del tempo, lentamente variabile,  $\varphi(t)$ . È chiaro che, alle scale di lunghezza cui siamo interessati, il potenziale all'interno della gabbia di Faraday sarà una funzione soltanto del tempo, ed in regime non-relativistico sarà proprio  $\varphi(t)$ .

Detto, allora,  $H_0$  l'operatore hamiltoniano associato alla particella a generatore spento, l'hamiltoniano del sistema a generatore acceso risulta in generale differente da  $H_0$  per l'aggiunta di un termine additivo di potenziale  $V(t, \mathbf{x})$ , cioè

$$H(t, \mathbf{x}) = H_0 + V(t, \mathbf{x}). \quad (1.1)$$

Tale operatore di potenziale  $V(t, \mathbf{x})$ , per quanto detto sopra, risulterà funzione solo del tempo  $t$  all'interno della gabbia di Faraday, ove si trova la particella:

per questa ragione non indugeremo nell'indicarlo

$$V(t) = q \varphi(t), \quad (1.2)$$

con leggero abuso di notazione, in quanto esso è la diretta trasposizione in termini operatoriali del potenziale prodotto dal generatore.

Otteniamo, così, l'hamiltoniano per il sistema a generatore acceso

$$H(t) = H_0 + V(t), \quad (1.3)$$

dipendente dal tempo.

Studiamo come è modificata la dinamica del sistema dall'accensione del generatore.

Detta  $\psi_0(t, \mathbf{x})$  la funzione d'onda della particella a generatore spento, i.e. la soluzione dell'equazione di Schrödinger per  $H_0$

$$H_0 \psi_0 = i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t}, \quad (1.4)$$

è immediato verificare che una soluzione  $\psi$  dell'equazione di Schrödinger per  $H$  sia

$$\psi(t, \mathbf{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar} S(t)} \psi_0(t, \mathbf{x}), \quad (1.5)$$

ove si è introdotto l'operatore di azione caratteristica del sistema

$$S(t) := \int_{t_0}^t V(\tau) d\tau = q \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau, \quad (1.6)$$

con  $t_0$  istante arbitrario precedente all'accensione del generatore.

Si ha, infatti, (omettendo le dipendenze per agilità di scrittura)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= i\hbar \frac{\partial \left( e^{-\frac{i}{\hbar} S} \psi_0 \right)}{\partial t} \\ &= i\hbar e^{-\frac{i}{\hbar} S} \left[ -\frac{i}{\hbar} \frac{dS}{dt} \psi_0 + \frac{\partial \psi_0}{\partial t} \right] \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} S} \left[ V \psi_0 + i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} \right] \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} S} [V + H_0] \psi_0 \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} S} H \psi_0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

e, dato che  $H$  è operatore di derivazione parziale nelle sole coordinate spaziali, vale

$$[H, S] = 0, \quad (1.8)$$

cosicché si trova

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H(e^{-\frac{i}{\hbar} S} \psi_0) = H\psi, \quad (1.9)$$



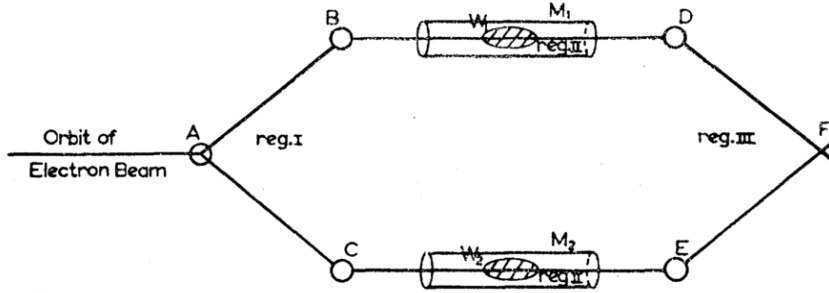


Figura 1.1: Schema per l'esperimento di diffrazione di elettroni dovuta a potenziale elettrico (§1.1.2). Illustrazione originale tratta da [3].

cioè  $\psi = e^{-\frac{i}{\hbar}S}\psi_0$  è soluzione per  $H$ , come anticipato.

Abbiamo così mostrato che l'effetto netto di una variazione uniforme del potenziale elettrico nella regione spaziale efficace per la dinamica della particella (i.e. cui è costretta ponendo a zero la funzione d'onda all'esterno della gabbia) è un semplice spostamento di fase della funzione d'onda di un angolo variabile  $S(t)/\hbar$  (interpretato in termini funzionali, non operatoriali): per il primo postulato della Meccanica Quantistica un tale cambiamento di fase risulta ininfluente sullo stato del sistema descritto, e ciò ci permette di concludere che la dinamica del sistema all'accensione del generatore rimane immutata.

Questo primo risultato è del tutto intuitivo: già ora notiamo che è, infatti, diretta conseguenza dell'invarianza di gauge dell'Elettromagnetismo classico sotto traslazioni del potenziale elettrico, che permane sotto quantizzazione canonica.

### 1.1.2 Interferenza per potenziale scalare

Consideriamo, ora, un fascio di particelle cariche (elettroni, ad esempio) diviso in pacchetti d'onda di lunghezza  $l$ .

Riferendoci alla figura 1.1, il fascio è fatto dividere nel punto A in due fasci separati 1 e 2, che attraversano due conduttori cilindrici cavi  $M_1$  ed  $M_2$ , di lunghezza  $L$  e posti a potenziale elettrico variabile  $\varphi_1(t)$  e  $\varphi_2(t)$  rispettivamente. Una volta oltrepassati i conduttori, i due fasci sono ricongiunti nel punto F.

Tale allestimento è suddiviso naturalmente in tre regioni orizzontali: la regione I, in prossimità del punto di separazione A, la regione II, corrispondente alla zona centrale dei cilindri  $M_1$  ed  $M_2$ , e la regione III, in prossimità del punto di ricongiungimento F.

Possiamo, dunque, pensare da subito ciascun pacchetto d'onda del fascio elettronico come costituito dalla sovrapposizione semplice di due pacchetti d'onda di centri  $W_1(t)$  e  $W_2(t)$  che attraversano rispettivamente  $M_1$  ed  $M_2$ .

Scelta, allora, per fini che appariranno chiari tra breve, la lunghezza dei pacchetti  $l$  tale che

$$\lambda_{\text{dB}} \ll l \ll L, \quad (1.10)$$

ove  $\lambda_{\text{dB}}$  è la lunghezza d'onda di de Broglie delle particelle del fascio, procediamo nello specificare l'andamento delle funzioni  $\varphi_{1,2}(t)$ : esse siano tali che

$$\begin{cases} \varphi_2(t) = \varphi_1(t) = 0 & \text{se } W_{1,2}(t) \in \text{reg. I} \vee \text{reg. III} \\ \varphi_2(t) - \varphi_1(t) \neq 0 & \text{se } W_{1,2}(t) \in \text{reg. II} \end{cases}. \quad (1.11)$$

La scelta delle due condizioni (1.10) e (1.11) è stata compiuta *ad hoc* affinché i pacchetti d'onda si trovino sempre in regioni spaziali *prive di campo elettrico*: infatti

- (a) se  $W_{1,2}(t) \in \text{reg. I} \vee \text{reg. III}$ , la prima delle (1.11) dice che a tale istante l'intero sistema è neutro;
- (b) se  $W_{1,2}(t) \in \text{reg. II}$ , malgrado ci sia un campo elettrico tra i due conduttori  $M_1$  ed  $M_2$  per via della seconda delle (1.11), la (1.10) assicura che i conduttori cilindrici possano essere considerate come gabbie di Faraday per i pacchetti d'onda al loro interno.

Le cariche del fascio, pertanto, non sono mai sottoposte durante l'esperimento a forze esterne dovute a  $M_1$  o  $M_2$ .

Studiamo ora l'evoluzione temporale del fascio a seguito della separazione in A: partiamo formalizzando una assunzione introdotta poc'anzi con la seguente

**Ipotesi** A generatori di potenziali spenti, la funzione d'onda del singolo pacchetto d'onda  $\psi_0(t, \mathbf{x})$  sia esprimibile come sovrapposizione coerente di funzioni d'onda *non-entangled*  $\psi_0^{(1,2)}(t, \mathbf{x})$ :

$$\psi_0(t, \mathbf{x}) = \psi_0^{(1)}(t, \mathbf{x}) + \psi_0^{(2)}(t, \mathbf{x}), \quad (1.12)$$

ove  $\psi_0^{(1,2)}(t, \mathbf{x})$  descrivono lo stato del pacchetto d'onda passante per  $M_{1,2}$  rispettivamente.

Apparirà ora evidente che, grazie alle assunzioni fatte, all'accensione dei generatori il problema dell'evoluzione temporale dello stato  $\psi$  del generico pacchetto è ricondotto a quello degli stati  $\psi^{(1,2)}$  separatamente.

Come osservato, d'altro canto, ciascuno di essi è come se si trovasse in una gabbia di Faraday a potenziale  $\varphi_{1,2}(t)$  variabile, e per quanto mostrato nel paragrafo precedente 1.1.1 si ha che le corrette evoluzioni temporali delle funzioni d'onda dei singoli pacchetti 1 e 2 a generatori accesi sono

$$\psi^{(1,2)}(t, \mathbf{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar} S_{1,2}(t)} \psi_0^{(1,2)}(t, \mathbf{x}) \quad (1.13)$$

ove

$$S_{1,2}(t) := q \int_{t_0}^t \varphi_{1,2}(\tau) d\tau. \quad (1.14)$$

Otteniamo, pertanto, che la funzione d'onda del pacchetto diffuso in F ha evoluzione temporale, a generatori accesi, data da

$$\psi(t, \mathbf{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar} S_1(t)} \psi_0^{(1)}(t, \mathbf{x}) + e^{-\frac{i}{\hbar} S_2(t)} \psi_0^{(2)}(t, \mathbf{x}), \quad (1.15)$$

per tempi  $t$  tali che  $W_{1,2}(t)$  abbiano già superato F.

Appare subito evidente che in F i due pacchetti d'onda 1 e 2, ora, daranno luogo ad un fenomeno di diffrazione non banale, dovuto ai differenti spostamenti di fase  $S_{1,2}(t)/\hbar$  subìti nei tratti separati di traiettoria: la distribuzione statistica di interferenza, scelta la normalizzazione di  $\psi_0^{(1,2)}$  affinché  $\|\psi\| = 1$ , sarà data da

$$\begin{aligned} w(t, \mathbf{x}) &= |\psi(t, \mathbf{x})|^2 = \left| \psi_0^{(1)}(t, \mathbf{x}) \right|^2 + \left| \psi_0^{(2)}(t, \mathbf{x}) \right|^2 + \\ &+ e^{-i \frac{\Delta S(t)}{\hbar}} \overline{\psi_0^{(2)}(t, \mathbf{x})} \psi_0^{(1)}(t, \mathbf{x}) + \\ &+ e^{+i \frac{\Delta S(t)}{\hbar}} \overline{\psi_0^{(1)}(t, \mathbf{x})} \psi_0^{(2)}(t, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1.16)$$

ove

$$\Delta S(t) := S_1(t) - S_2(t), \quad (1.17)$$

pertanto un eventuale *pattern* di diffrazione rilevato a destra di F sarebbe direttamente dipendente dalla differenza caratteristica di fase di questa situazione fisica  $\Delta S(t)/\hbar$ .

**Considerazione** Pur avendo avuto cura di costruire l'intero allestimento sperimentale al fine di escludere le cariche dalle regioni con campo elettrico, abbiamo ottenuto un fenomeno di interferenza dei fasci, fisicamente rilevabile, apparentemente dovuto unicamente alla presenza di potenziali elettrici scalari variabili nel tempo  $\varphi_{1,2}(t)$ .

Tale valenza fisica del potenziale elettrico che ora appare, indipendente dai campi, può certamente risultare sorprendente: non esistono fenomeni analoghi in Elettrodinamica classica. Va sottolineato, comunque, che malgrado ciò la quantità dipendente dai potenziali  $\Delta S(t)/\hbar$  risulta ancora gauge-invariante: fisicamente la gauge continua a non essere rilevante, come atteso.

È naturale, per questa ragione, il fatto che un tale fenomeno sia strettamente legato all'interferenza di funzioni d'onda: esso ha, cioè, carattere puramente quantistico.

In quest'ottica, il fenomeno appena descritto risulta, dunque, prodotto diretto del formalismo hamiltoniano, cui la Meccanica Quantistica è canonicamente legata.

### 1.1.3 Generalizzazione covariante

Intendiamo indurre una generalizzazione del risultato ottenuto nel paragrafo precedente, astraendoci dall'allestimento sperimentale descritto, e giungere così all'effetto Aharonov-Bohm.

Partiamo con una riscrittura del termine di fase  $\Delta S(t)/\hbar$ : si ha

$$\begin{aligned}\frac{\Delta S(t)}{\hbar} &= \frac{q}{\hbar} \int_{t_0}^t (\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)) \, d\tau \\ &= \frac{q}{\hbar} \left( \int_{t_0}^t \varphi_1(\tau) \, d\tau + \int_t^{t_0} \varphi_2(\tau) \, d\tau \right).\end{aligned}\tag{1.18}$$

È importante notare che, in realtà, tale quantità è *indipendente* da  $t$ : detti  $t_A$  e  $t_F$  gli istanti tali che  $W_{1,2}(t_A) = A$  e  $W_{1,2}(t_F) = F$ , per costruzione  $t_0 < t_A$  e  $t > t_F$ , pertanto

$$\Delta S(t) = \Delta S(t_F) \quad \forall t,\tag{1.19}$$

grazie alla prima richiesta delle (1.11), cioè al fatto che i potenziali sono uguali quando le particelle sono nella regione III.

In virtù di quanto appena mostrato, ometteremo la dipendenza da  $t$  di  $\Delta S(t)$  da qui in poi.

Definiamo, ora, un potenziale elettrico totale

$$\varphi(\tau, \mathbf{x}) := \begin{cases} \varphi_1(\tau) & \text{se } \mathbf{x} = W_1(\tau) \\ \varphi_2(\tau) & \text{se } \mathbf{x} = W_2(\tau) \end{cases},\tag{1.20}$$

in modo da potere riscrivere, posto  $x = (c\tau, \mathbf{x})$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta S}{\hbar} &= \frac{q}{\hbar} \left( \int_{t_A}^{t_F} \varphi(\tau, W_1(\tau)) \, d\tau + \int_{t_F}^{t_A} \varphi(\tau, W_2(\tau)) \, d\tau \right) \\ &= \frac{q}{\hbar c} \oint_{\Xi} (\varphi(\tau, \mathbf{x}), \mathbf{0}) \cdot d^4x,\end{aligned}\tag{1.21}$$

ove l'ultima uguaglianza coinvolge la circuitazione del campo vettoriale

$$(\varphi(\tau, \mathbf{x}), \mathbf{0})$$

sullo spaziotempo  $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$  lungo un circuito  $\Xi \subset M$  di forma come in figura 1.2.

**Considerazione** Notiamo che, agli effetti pratici,  $\Xi$  è una qualsiasi curva dello spaziotempo  $\mathbb{M}$  tale da racchiudere la regione tra i conduttori cilindrici cavi nell'intervallo di tempo tra  $t_A$  e  $t_F$ : questo è possibile avendo osservato che nulla cambia nella fisica della configurazione in figura 1.1 se i raggi di  $M_1$  ed  $M_2$  sono mandati all'infinito, mantenendo la distanza reciproca  $d$  costante.

In questo modo le particelle del fascio, una volta divise, avranno a disposizione tutto un semispazio del tipo  $\mathbb{R}^3 \cap \{z \lesseqgtr \mp d\}$ , semplicemente connesso, mantenuto a potenziale scalare omogeneo.

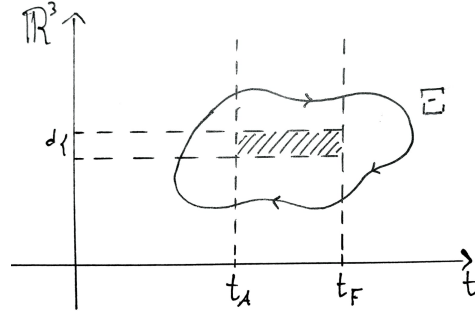


Figura 1.2: Esempio di circuito nello spaziotempo per l'effetto di interferenza per potenziale scalare. Qui  $d$  è la distanza tra i conduttori cilindrici  $M_1$  ed  $M_2$ ,  $t_A$  e  $t_F$ , rispettivamente, gli istanti di separazione e ricongiungimento del fascio.

Questa riscrittura di  $\Delta S$  permette ora di individuarne facilmente la naturale estensione covariante: introdotto il 4-potenziale elettromagnetico  $A^\mu(x) = (\varphi(x), \mathbf{A}(x))$ , essa sarà data da

$$\frac{\Delta S}{\hbar} = \frac{q}{\hbar c} \oint_{\Gamma} A_\mu(x) dx^\mu = \frac{q}{\hbar} \oint_{\Gamma} \left( \varphi(x) d\tau - \frac{\mathbf{A}(x)}{c} \cdot d\mathbf{x} \right), \quad (1.22)$$

cioè l'integrale di linea, nella metrica di Minkowski, del 4-potenziale  $A^\mu$  lungo un qualche circuito chiuso  $\Gamma \subset \mathbb{M}$ , la cui scelta dipende a priori dal sistema descritto.

L'effetto di interferenza tra elettroni per via di potenziale elettrico del §1.1.2 si ottiene, così, considerando un

$$A^\mu(x) = (\varphi(\tau), \mathbf{0}).$$

#### 1.1.4 Interferenza per potenziale vettore

La descrizione covariante appena ottenuta ci permette di considerare la situazione fisica duale rispetto a quella descritta al §1.1.2: scegliamo un 4-potenziale stazionario

$$A^\mu(x) = (0, \mathbf{A}(\mathbf{x})),$$

cioè prendiamo in esame il caso in cui sia presente solo campo magnetico costante nel tempo nel sistema. A che configurazione fisica corrisponde tale scelta di  $A^\mu$ ?

È semplice convincersi che questo caso può corrispondere, nella forma più semplice, alla diffusione su un solenoide ideale infinito  $\mathcal{S}$ , percorso da corrente costante, di un fascio di particelle di carica  $q$ , come mostrato in figura 1.3.

In questa configurazione, infatti, il fascio, senza alcuna necessità di divisione in pacchetti, può essere fatto incidere sul solenoide, completamente

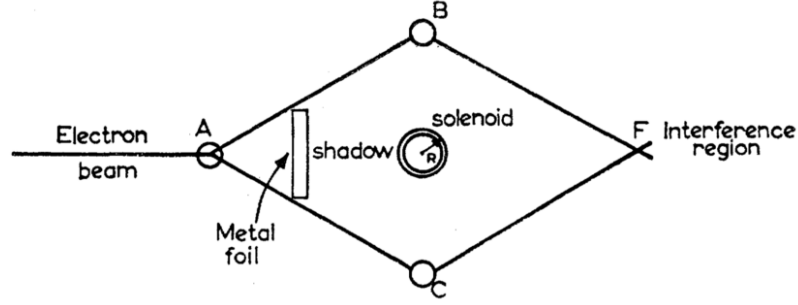


Figura 1.3: *Diffusione di cariche su un solenoide ideale – sezione orizzontale. Illustrazione originale tratta da [3].*

schermato, dividendosi in A e ricongiungendosi dal lato opposto senza subire alcuna forza, ma esibendo una figura di interferenza non banale in F.

Inoltre, dato che all'esterno del solenoide  $\mathcal{S}$  si ha campo magnetico  $\mathbf{B}$  nullo, l'interferenza dipenderà dalla fase

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S}{\hbar} &= -\frac{q}{\hbar c} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{q}{\hbar c} \int_{\Sigma_{\Gamma}} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \\ &= \begin{cases} -\frac{q}{\hbar c} \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbf{B}) & \text{se } \Gamma \text{ racchiude } \mathcal{S} \\ 0 & \text{se } \Gamma \text{ non racchiude } \mathcal{S} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.23)$$

ove si è sfruttata la relazione  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , conseguenza delle equazioni di Maxwell, ed il Teorema di Stokes, intendendo con  $\Sigma_{\Gamma}$  una superficie di bordo  $\Gamma$ .

Circa la scelta di  $\Gamma$ , in questo caso specifico risulta naturale sceglierla come circuito di componenti unicamente spaziali, analogamente al 4-potenziale.

L'unica scelta, inoltre, che possa dare fase di interferenza non-nulla è evidentemente quella che prevede  $\Gamma$  come circuito che racchiude il solenoide  $\mathcal{S}$ : è naturalmente la situazione qui considerata, corrispondente alla divisione dei fasci da parte del solenoide, passanti sopra e sotto di esso.

Scegliere  $\Gamma$  non racchiudente il solenoide  $\mathcal{S}$  corrisponderebbe, dunque, a considerare un sistema privo del solenoide: il fascio procede indisturbato senza alcuna interferenza.

Abbiamo appena ottenuto la descrizione dell'effetto Aharonov-Bohm: il fascio di particelle cariche diffuse sul solenoide esibisce un'interferenza in F con spostamento di fase

$$\frac{\Delta S}{\hbar} = \frac{q}{\hbar c} \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbf{B}), \quad (1.24)$$

ove  $\Phi_{\mathcal{S}}(\mathbf{B})$  è il flusso magnetico attraverso il solenoide  $\mathcal{S}$ . Il segno di tale quantità qui dipende dalla scelta della segnatura utilizzata nella metrica: è fisicamente irrilevante.

**Considerazione** Evidenziamo qui che l'esistenza di due possibili scelte per  $\Gamma$ , relative a due situazioni fisiche differenti, corrisponde direttamente al fatto che lo spazio cui è costretta la dinamica delle particelle del fascio, i.e.  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$  poiché il solenoide è schermato, non è semplicemente connesso, ma ha infinite classi di omotopia.

È importante notare, inoltre, che le equazioni di Maxwell evidentemente implicano contemporaneamente sia la *irrotazionalità* all'esterno di  $\mathcal{S}$  del potenziale vettore  $\mathbf{A}$ , dato che implicano  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , sia la sua *non conservatività*, in quanto sfruttando il teorema di Stokes si trova che  $\mathbf{A}$  non ha circuitazione nulla su ogni circuito in  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$ , e quest'ultima condizione impedisce ad  $\mathbf{A}$  di potere essere annullato via gauge ovunque all'esterno di  $\mathcal{S}$ .

Sulla scorta di queste due osservazioni, l'effetto Aharonov-Bohm appare originare, in ultima analisi, dalla esistenza di uno spazio efficace per la dinamica delle particelle *moltepiamente connesso* e dotato di *potenziali elettromagnetici non-nulli*, ma di *campo elettromagnetico nullo*.

Volendo, dunque, conservare il principio di località della teoria, sembra necessario attribuire, anche qui, ai potenziali elettromagnetici una valenza fisica indipendente da quella dei campi, permettendo loro di avere una interazione locale diretta con la particella, in grado di dar luogo a  $\Delta S$ , pur mantenendo la teoria gauge-invariante.

In conclusione allo studio di questo effetto, intendiamo dare una descrizione diretta del sistema in figura 1.3 e ottenere nuovamente lo spostamento di fase (1.24) al fine di avere una più chiara comprensione del fenomeno.

L'hamiltoniano che descrive una singola particella del fascio, di carica  $q$  e massa  $m$ , incidente su  $\mathcal{S}$  è

$$H = \frac{(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2}{2m}, \quad (1.25)$$

ove

$$\mathbf{P} := -i\hbar \nabla \quad (1.26)$$

è l'operatore momento, ed  $\mathbf{A}$  è l'operatore associato al potenziale vettore  $\mathbf{A}$  (leggero abuso di notazione).

Sia  $\psi_0(t, \mathbf{x})$  la funzione d'onda per la particella quando  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ , cioè tale che

$$H_0\psi_0 = i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t}, \quad (1.27)$$

ove

$$H_0 := \frac{\mathbf{P}^2}{2m} \quad (1.28)$$

In regioni semplicemente connesse  $D \subset \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$ , allora, l'irrotazionalità di  $\mathbf{A}$  implica che esso ammette potenziale, ed è dunque ben definita la funzione

$$S(\mathbf{x}) := -\frac{q}{c} \int_{*}^{\mathbf{x}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.29)$$

ove  $* \in D$ .

Mostriamo, ora, che

$$\psi(t, \mathbf{x}) := e^{-\frac{i}{\hbar} S(\mathbf{x})} \psi_0(t, \mathbf{x}) \quad (1.30)$$

è soluzione dell'equazione di Schrödinger per  $H$ .

Anzitutto, si ha esplicitamente

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{P}^2 + \frac{q^2}{c^2} \mathbf{A}^2 - \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \right), \quad (1.31)$$

ma notiamo che, data  $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^3)$ , vale

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \varphi &= -i\hbar \partial_i (A^i \varphi) \\ &= -i\hbar ((\partial_i A^i) \varphi + A^i \partial_i \varphi) \\ &= -i\hbar \partial_i A^i \varphi + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \varphi \end{aligned} \quad (1.32)$$

e scelta la gauge di Gauss

$$\partial_i A^i \stackrel{!}{=} 0, \quad (1.33)$$

si trova che

$$[\mathbf{P}, \mathbf{A}] = 0, \quad (1.34)$$

pertanto, in definitiva,

$$H = H_0 - \frac{q}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} + \frac{q^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2. \quad (1.35)$$

Con semplici conti, ricordando la gauge di Gauss e che

$$\nabla S(\mathbf{x}) = -\frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad (1.36)$$

si trova che

$$H_0 \psi = H_0 \left( e^{-\frac{i}{\hbar} S} \psi_0 \right) = e^{-\frac{i}{\hbar} S} H^+ \psi_0, \quad (1.37)$$

ove

$$H^+ := \frac{(\mathbf{P} + \frac{q}{c} \mathbf{A})^2}{2m}. \quad (1.38)$$

D'altro canto si trova che

$$\left( -\frac{q}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} + \frac{q^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 \right) \psi = e^{-\frac{i}{\hbar} S} (H_0 - H^+) \psi_0, \quad (1.39)$$

cosicché, come voluto,

$$\begin{aligned} H\psi &= e^{-\frac{i}{\hbar} S} H^+ \psi_0 + e^{-\frac{i}{\hbar} S} (H_0 - H^+) \psi_0 \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} S} H_0 \psi_0 = i\hbar e^{-\frac{i}{\hbar} S} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} \\ &= i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

ove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che  $S$  è indipendente dal tempo.



Passando, ora, a considerare la dinamica del fascio di cariche in uno spazio molteplicemente connesso, chiaramente la funzione  $S$ , definita in (1.29), risulta essere polidroma ad infiniti rami  $S_n$  (assume valori diversi ad ogni giro completo attorno al solenoide) e ciò renderebbe problematica l'interpretazione fisica di una funzione d'onda  $\psi$  definita come in 1.11, in quanto anch'essa risulterebbe polidroma.

Per aggirare questo problema, si introduce la stessa ipotesi sfruttata al §1.1.2 di sovrapposizione *non-entangled* dei fasci:

$$\psi_0 = \psi_0^{(1)} + \psi_0^{(2)}, \quad (1.41)$$

ed ora, dato che ciascun fascio si muove in una regione semplicemente connessa di spazio (la regione sopra o sotto il solenoide), l'evoluzione temporale di ciascun fascio in presenza di potenziale vettore sarà data da

$$\psi^{(1,2)} = e^{-\frac{i}{\hbar} S_{\pm}} \psi_0^{(1,2)}, \quad (1.42)$$

ove  $S_{\pm}$  indicano i due rami di  $S$  cui corrispondono le traiettorie considerate.

Otteniamo così la funzione d'onda del fascio ricongiunto in F

$$\psi = e^{-\frac{i}{\hbar} S_+} \psi_0^{(1)} + e^{-\frac{i}{\hbar} S_-} \psi_0^{(2)}, \quad (1.43)$$

ed evidentemente essa esibirà l'interferenza Aharonov-Bohm con uno spostamento di fase pari alla differenza di due rami adiacenti:

$$\frac{\Delta S}{\hbar} = \frac{S_+ - S_-}{\hbar} = \frac{q}{\hbar c} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \frac{q}{\hbar c} \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbf{B}), \quad (1.44)$$

con  $\Gamma$  che racchiude  $\mathcal{S}$ .

### 1.1.5 Sulla variante dell'effetto Aharonov-Bohm

Prima di passare alla discussione dell'effetto Aharonov-Casher, soffermiamoci su quali differenze e quali analogie sussistano tra l'effetto Aharonov-Bohm (§1.1.4) e la sua *variante elettrica*, illustrata al §1.1.2 e sfruttata per giungere gradualmente alla descrizione dell'effetto stesso.

Iniziamo notando che, malgrado la costruzione meno elegante della configurazione fisica necessaria all'effetto (e.g. la divisione in pacchetti d'onda del fascio, la sincronizzazione dei generatori), la variante elettrica risulta essere un effetto topologico esattamente come l'effetto Aharonov-Bohm: ciò è stato esplicitato chiaramente nella sezione 1.1.3, indicando l'arbitrarietà della curva  $\Xi$  in figura 1.2.

Questa è la sostanziale, e palese, analogia che lega i due effetti.

Meno palese è che ciò che li discrimina radicalmente, d'altra parte, sia la *conservazione dell'energia*, come ora mostriamo.

Nella variante elettrica dell'effetto Aharonov-Bohm si è da subito introdotto una situazione non stazionaria: due generatori di potenziale elettrico variabile esterni al sistema, uno per ciascun cilindro di Faraday  $M_1$  ed  $M_2$ .

In questo modo l'hamiltoniana di ciascuna particella di carica  $q$  del fascio prende forma

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = H_0(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + q\varphi(t), \quad (1.45)$$

ove  $H_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  è l'hamiltoniana della particella a generatori spenti e  $\varphi(t)$  è il potenziale elettrico variabile nel tempo del cilindro  $M_i$  attraversato.

È evidente che l'energia della singola particella non risulti conservata, con tasso di dissipazione lungo i moti

$$W(t) = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t}(t) = q \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t), \quad (1.46)$$

ed in particolare, una volta quantizzata, gli autostati di  $H$  saranno funzioni del tempo.

Ciononostante, il fatto che il potenziale elettrico  $\varphi(t)$  sia spazialmente uniforme in  $M_i$  assicura che la dinamica classica della particella non sia toccata:

$$\dot{\mathbf{p}}^i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^i} = -\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{x}^i}. \quad (1.47)$$

Passando, così, alla descrizione quantistica, la presenza di un termine additivo variabile nel tempo in  $H$  introduce nei suoi autostati, come visto, una fase dipendente dalla azione

$$S(t) = q \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau, \quad (1.48)$$

ed essa è responsabile del fenomeno di interferenza quantistica osservato, priva di analogo classico e dovuta ad interazioni locali tra particella e potenziale scalare.

Considerando, invece, l'effetto Aharonov-Bohm standard, la situazione è stata modellizzata fin da subito come stazionaria: non vi è necessità di avere un potenziale vettore  $\mathbf{A}$  dipendente dal tempo, in quanto esso costituisce la parte spaziale del 4-potenziale  $A^\mu$ , che pertanto in  $\Delta S$  è integrata solo sulla parte spaziale del circuito  $\Gamma$ :

$$\frac{\Delta S}{\hbar} = \frac{q}{\hbar} \oint_{\Gamma} \left( \varphi(x) d\tau - \frac{\mathbf{A}(x)}{c} \cdot d\mathbf{x} \right). \quad (1.49)$$

Questo dovrebbe mostrare con chiarezza, dunque, che la differenza intrinseca tra l'effetto Aharonov-Bohm e la sua variante elettrica stia nel fatto che, benché entrambi producano un effetto di interferenza non banale imputabile ad interazioni locali tra particelle e potenziali elettromagnetici, per la variante elettrica è indispensabile che l'energia non si conservi, mentre l'effetto

Aharonov-Bohm è in grado di riprodurre gli stessi risultati *conservando l'energia*.

Appare naturale, così, privilegiare nell'esposizione la configurazione magnetica, i.e. l'effetto Aharonov-Bohm, su quella elettrica, in quanto la prima esibisce fenomeni non-banali di interferenza in assenza di qualsiasi modifica classica alla dinamica ed all'energia.

## 1.2 Effetto Aharonov-Casher

L'effetto Aharonov-Bohm descritto nella sezione precedente ammette, in più di un senso, un fenomeno *duale*: l'effetto Aharonov-Casher. Qui daremo una prima giustificazione di questa dualità in Elettrodinamica, mentre nella sezione 2.3 ne sarà data una seconda.

### 1.2.1 Derivazione della lagrangiana

Riconsideriamo la tipica manifestazione dell'effetto Aharonov-Bohm: la diffusione di particelle di carica  $q$  e massa  $m_q$  su un solenoide ideale infinito  $\mathcal{S}$ .

La lagrangiana della carica incidente su  $\mathcal{S}$  è, detto  $\mathbf{A}$  il potenziale vettore,

$$L_q(\mathbf{r}_q, \mathbf{v}_q) = \frac{1}{2} m_q \mathbf{v}_q^2 + \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_q) \cdot \mathbf{v}_q, \quad (1.50)$$

come noto.

Intendiamo, tuttavia, estendere la descrizione della dinamica del sistema anche al solenoide  $\mathcal{S}$ , detta  $m_\mu$  la sua massa.

Per farlo, notiamo anzitutto che l'estensione infinita di  $\mathcal{S}$  rende il sistema topologicamente equivalente alla sua sezione bidimensionale in figura 1.3: per semplicità, dunque, tratteremo questo sistema indicando con  $\mathbf{r}_\mu$  e  $\mathbf{v}_\mu$  posizione e velocità del solenoide nel piano, intendendo che il raggio  $R$  di  $\mathcal{S}$  sia trascurabile rispetto alle scale di lunghezza considerate.

Ora, una prima proposta per la lagrangiana del sistema costituito da particella carica e solenoide potrebbe essere

$$L(\mathbf{r}_q, \mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_q, \mathbf{v}_\mu) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} m_q \mathbf{v}_q^2 + \frac{1}{2} m_\mu \mathbf{v}_\mu^2 + \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_\mu) \cdot \mathbf{v}_q, \quad (1.51)$$

ma è immediato verificare che le equazioni di Lagrange darebbero così luogo ad una forza sulla particella

$$m_q \dot{\mathbf{v}}_q = \frac{q}{c} \mathbf{v}_q \times \mathbf{B} + \frac{q}{c} \mathbf{v}_\mu^j \partial_j \mathbf{A}, \quad (1.52)$$

che è non-nulla all'esterno del solenoide (ove  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ) e non è neanche gauge-invariante, il che è assurdo.

È semplice rendersi conto, d'altro canto, che la giusta modifica alla lagrangiana (1.51) sia

$$L(\mathbf{r}_q, \mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_q, \mathbf{v}_\mu) = \frac{1}{2} m_q \mathbf{v}_q^2 + \frac{1}{2} m_\mu \mathbf{v}_\mu^2 + \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_\mu) \cdot (\mathbf{v}_q - \mathbf{v}_\mu), \quad (1.53)$$

in quanto essa ora genera una forza sulla particella

$$m_q \dot{\mathbf{v}}_q = \frac{q}{c} (\mathbf{v}_q - \mathbf{v}_\mu) \times \mathbf{B}, \quad (1.54)$$

che è sia gauge-invariante sia nulla all'esterno del solenoide  $\mathcal{S}$ : è ragionevole pensare che la lagrangiana (1.53) descriva correttamente il sistema  $\mathcal{S} \oplus q$ .

Per dare solidità a tale derivazione euristica, mostriamo che questa lagrangiana discende direttamente dall'Elettrodinamica classica, in approssimazione non-relativistica, e descrive correttamente l'interazione tra una particella carica e una sorgente di campo magnetico di dipolo.

Consideriamo nel sistema di riferimento  $\mathcal{R}$  del laboratorio un momento magnetico di dipolo  $\boldsymbol{\mu}$  che si muove con velocità  $\mathbf{v}_\mu$  in un campo elettrico stazionario esterno  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  di potenziale elettrico  $\varphi(\mathbf{x})$ .

In  $\mathcal{R}'$ , sistema di riferimento di quiete istantanea di  $\boldsymbol{\mu}$ , definita la densità spaziale di momento di dipolo magnetico

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}') := \boldsymbol{\mu} \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{r}_\mu'), \quad (1.55)$$

$\boldsymbol{\mu}$  può essere visto come generato dalla densità di corrente

$$\mathbf{j}' := \nabla \times \mathcal{M}, \quad (1.56)$$

parte spaziale della quadricorrente  $j'^\mu = (0, \mathbf{j}')$ .

Ora, in  $\mathcal{R}$  si ha, quindi, la quadricorrente

$$\begin{aligned} j^\mu &= \left( \gamma \frac{\mathbf{v}_\mu \cdot \mathbf{j}'}{c}, \mathbf{j}' + \frac{\gamma - 1}{v_\mu^2} (\mathbf{v}_\mu \cdot \mathbf{j}') \mathbf{v}_\mu \right) \\ &\sim_{\text{n.r.}} \left( \frac{\mathbf{v}_\mu \cdot \mathbf{j}'}{c}, \mathbf{j}' \right) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{v_\mu}{c} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (1.57)$$

al primo ordine in  $v_\mu/c$ : in particolare,  $\boldsymbol{\mu}$  continua ad essere generato da  $\mathbf{j}'$  in  $\mathcal{R}$  ed il campo magnetico prodotto non cambia, mentre si osserva la comparsa al primo ordine di una densità di carica elettrica

$$\rho = \frac{\mathbf{v}_\mu \cdot \mathbf{j}'}{c} = \frac{\mathbf{v}_\mu}{c} \cdot \nabla \times \mathcal{M}, \quad (1.58)$$

che, dunque, interagisce con il campo elettrico in  $\mathcal{R}$ .

Il potenziale di  $\boldsymbol{\mu}$  in  $\mathcal{R}$  è, pertanto, (posto  $c = 1$  per il calcolo)

$$\begin{aligned}
W_\mu(\mathbf{r}_\mu) &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) d^3x = \mathbf{v}_\mu \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x}) (\nabla \times \mathcal{M})(\mathbf{x}) d^3x \\
&= \epsilon^{ijk} \mathbf{v}_\mu^i \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x}) (\partial_j \mathcal{M}^k)(\mathbf{x}) d^3x \\
&= \epsilon^{ijk} \mathbf{v}_\mu^i \left( \underbrace{\int_{\partial\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x}) \mathcal{M}^k(\mathbf{x}) d\sigma^j}_0 - \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_j \varphi)(\mathbf{x}) \mathcal{M}^k(\mathbf{x}) d^3x \right) \\
&= \epsilon^{ijk} \mathbf{v}_\mu^i \int_{\mathbb{R}^3} E^j(\mathbf{x}) \mathcal{M}^k(\mathbf{x}) d^3x \\
&= \mathbf{v}_\mu \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \times \boldsymbol{\mu} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_\mu) d^3x = \mathbf{v}_\mu \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_\mu) \times \boldsymbol{\mu},
\end{aligned} \tag{1.59}$$

ove si è usata l'ipotesi fisica di annullamento delle osservabili all'infinito spaziale.

D'altro canto, nel caso in cui il campo elettrico sia generato da una carica puntiforme in  $\mathbf{r}_q$  vale

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}_\mu) \times \boldsymbol{\mu} &= \frac{q}{4\pi} \frac{(\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_q) \times \boldsymbol{\mu}}{\|\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_q\|^3} = \frac{q}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times (\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_\mu)}{\|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_\mu\|^3} \\
&= q\mathbf{A}(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_\mu),
\end{aligned} \tag{1.60}$$

ove  $\mathbf{A}$  è il potenziale vettore generato da  $\boldsymbol{\mu}$  in  $\mathcal{R}'$ .

La lagrangiana che descrive la dinamica del solenoide (schematizzabile come un momento magnetico di dipolo  $\boldsymbol{\mu}$  per il principio di equivalenza di Ampère) nel campo elettrico generato da una carica puntiforme in  $\mathbf{r}_q$  è, pertanto, ( $c$  è ripristinata)

$$L_\mu = \frac{1}{2} m_\mu \mathbf{v}_\mu^2 + W_\mu(\mathbf{r}_\mu) = \frac{1}{2} m_\mu \mathbf{v}_\mu^2 - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_\mu) \cdot \mathbf{v}_\mu, \tag{1.61}$$

e sommandovi la lagrangiana per la carica elettrica puntiforme otteniamo

$$L = L_\mu + L_q = \frac{1}{2} m_q \mathbf{v}_q^2 + \frac{1}{2} m_\mu \mathbf{v}_\mu^2 + \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_\mu) \cdot (\mathbf{v}_q - \mathbf{v}_\mu), \tag{1.62}$$

che è proprio quanto ottenuto euristicamente.

Possiamo concludere notando che il momento coniugato  $\mathbf{p}_\mu$  del solenoide in tale lagrangiana è, se  $c = 1$ ,

$$\mathbf{p}_\mu = m_\mu \mathbf{v}_\mu - \mathbf{E} \times \boldsymbol{\mu}, \tag{1.63}$$

ove riconosciamo  $\mathbf{E} \times \boldsymbol{\mu} \propto \mathbf{S}$  vettore di Poynting all'interno di  $\mathcal{S}$ : la correzione fatta alla prima lagrangiana proposta (1.51), pertanto, ha lo scopo di tenere conto anche della quantità di moto del campo elettromagnetico contenuto nel solenoide.

### 1.2.2 Deduzione dell'effetto

Appare subito evidente dalla forma della lagrangiana per l'effetto Aharonov-Bohm che essa potrebbe godere di una particolare *proprietà di dualità* tra coordinate elettriche e magnetiche.

Sotto scambio di  $(\mathbf{r}_q, \mathbf{v}_q)$  e  $(\mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_\mu)$ , infatti,  $L$  in (1.53) risulta invariante se e solo se

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_\mu) = -\mathbf{A}(\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_q), \quad (1.64)$$

ma ciò è assicurato dalle proprietà di trasformazione sotto parità di  $\mathbf{B}$ , che è uno pseudo-vettore.

Pertanto, effettivamente, tale lagrangiana risulta invariante nell'*inversione dei ruoli* di momento di dipolo magnetico  $\boldsymbol{\mu}$  e carica elettrica  $q$

$$\begin{cases} \mathbf{r}_q \longleftrightarrow \mathbf{r}_\mu \\ \mathbf{v}_q \longleftrightarrow \mathbf{v}_\mu \end{cases}, \quad (1.65)$$

che, tuttavia, non va confusa con la dualità che manda cariche elettriche in monopoli magnetici: approfondiremo il tema al §2.4.

Ciò implica che la situazione fisica duale di diffusione di un fascio di particelle dotate di momento magnetico  $\boldsymbol{\mu}$  su un filo conduttore elettricamente carico produca lo stesso fenomeno di spostamento di fase ed interferenza osservato nell'effetto Aharonov-Bohm.

Questo fenomeno, in effetti, esiste ed è l'effetto Aharonov-Casher.

Con il formalismo sviluppato, siamo in grado di calcolare esplicitamente lo spostamento di fase generato nella diffusione di momenti di dipolo magnetico su un filo elettricamente carico lungo l'asse  $z$ : in analogia all'effetto Aharonov-Bohm, esso sarà dato da

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S}{\hbar} &= -\frac{q}{\hbar c} \oint_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_\mu) \cdot d\mathbf{r}_\mu = -\frac{1}{\hbar c} \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}(\mathbf{r}_\mu) \times \boldsymbol{\mu}) \cdot d\mathbf{r}_\mu \\ &= \frac{1}{\hbar c} \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}(\mathbf{r}_\mu) \times d\mathbf{r}_\mu) \cdot \boldsymbol{\mu}, \end{aligned} \quad (1.66)$$

ove  $\Gamma$  è un circuito che racchiude il filo carico.

Considerata, quindi, la forma esplicita del campo elettrico generato dal filo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^2}, \quad (1.67)$$

ove  $\lambda$  è la densità lineare di carica del filo, e preso per semplicità  $\Gamma = \mathbb{S}_R^1$  (circonferenza centrata sul filo e ad esso ortogonale di raggio  $R$ ), si calcola

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{E}(\mathbf{r}_\mu) \times d\mathbf{r}_\mu) \cdot \boldsymbol{\mu} = \lambda \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\mu} = \lambda \mu_3, \quad (1.68)$$

e così si trova

$$\frac{\Delta S}{\hbar} = \frac{\mu_3}{\hbar c} \lambda, \quad (1.69)$$

ove  $\mu_3$  è la terza componente di  $\boldsymbol{\mu}$ , cioè la *proiezione lungo il filo carico* di  $\boldsymbol{\mu}$ .

**Considerazione** Evidenziamo il fatto che, malgrado l'effetto Aharonov-Casher sia chiamato a buon diritto *duale* dell'effetto Aharonov-Bohm, in esso è ben presente interazione locale tra momento di dipolo magnetico  $\mu$  in movimento e campo elettrico generato dal filo, in quanto esso non è nullo nella regione in cui  $\mu$  si muove.

Infatti, nel sistema di riferimento di quiete istantanea del momento magnetico è presente un campo magnetico che interagisce necessariamente con lo stesso, modificandone la dinamica: è la ben nota *interazione di spin-orbita*.

Si può sospettare, quindi, che debba esistere un'altra condizione, analoga a quella di *campo elettromagnetico nullo* nella regione efficace della dinamica per l'effetto Aharonov-Bohm, tale che, accoppiata con la molteplice connessione dello spazio, dia il fenomeno dello spostamento di fase.





## Capitolo 2

# La simmetria di gauge $U(1) \times SU(2)$

Obiettivo di questo capitolo, parzialmente basato su [9], è ottenere una descrizione formalmente unitaria della dinamica di una singola particella quantistica di carica  $q$  e spin  $s$  in regime non-relativistico ed in presenza di campi elettromagnetici lentamente variabili.

Si troverà una naturale descrizione gauge-invariante del sistema fisico.

Da questo risultato si potrà, poi, dedurre l'esistenza di una simmetria fondamentale alla quale soddisfa la Meccanica Quantistica non-relativistica, in chiave di cui saranno interpretabili gli effetti Aharonov-Bohm ed Aharonov-Casher.

### 2.1 Equazione di Pauli generalizzata

#### 2.1.1 Precessione di spin

Il nostro primo obiettivo è generalizzare le previsioni dell'equazione di Pauli, e dell'equazione di Dirac in regime non-relativistico, a particelle di carica  $q$ , massa  $m$  e di generico spin  $s$ , non necessariamente  $\frac{1}{2}$ .

Per farlo, partiamo dalla descrizione dell'evoluzione temporale relativistica dello spin classico di una particella di spin  $s$  in moto in un campo elettromagnetico  $F^{\mu\nu}$  lentamente variabile, ottenuta da Bargmann, Michel e Telegdi (*cfr.* [4]).

Considerando l'equazione della dinamica classica

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = g \frac{q}{2mc} \mathbf{S} \times \mathbf{B}, \quad (2.1)$$

valida nel sistema di riferimento di quiete istantanea della particella, essi hanno mostrato che, una volta introdotta l'estensione 4-vettoriale  $s^\mu = (s^0, \mathbf{s})$

del 3-vettore  $\mathbf{S}$ , la sua generalizzazione covariante è

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = g \frac{q}{2mc} \left[ F^{\mu\nu} s_\nu + \frac{1}{c^2} (F^{\rho\sigma} s_\rho u_\sigma) u^\mu \right] - \frac{1}{c^2} \left( s_\nu \frac{du^\nu}{d\tau} \right) u^\mu, \quad (2.2)$$

ove  $g$  è il rapporto giromagnetico della particella,  $F^{\mu\nu}$  il campo elettromagnetico,  $\tau$  il tempo proprio della particella e  $u^\mu = (\gamma, \gamma\mathbf{v})$  la 4-velocità della particella.

Nel caso in cui la particella sia sottoposta a sole forze elettromagnetiche, potremo sostituirvi l'equazione di Lorentz

$$\frac{du^\nu}{d\tau} = \frac{q}{mc} F^{\nu\sigma} u_\sigma, \quad (2.3)$$

ottenendo

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = \frac{q}{mc} \left[ \frac{g}{2} F^{\mu\nu} s_\nu + \frac{1}{c^2} \left( \frac{g}{2} - 1 \right) (F^{\nu\sigma} s_\nu u_\sigma) u^\mu \right], \quad (2.4)$$

che sarà il nostro punto di partenza.

Denotata con  $\mathbf{S}$  la parte spaziale di  $s^\mu$  in  $\mathcal{Q}$ , sistema di riferimento di quiete istantanea della particella, la sua equazione della dinamica in approssimazione non-relativistica è ciò che dobbiamo ottenere per potere poi quantizzare la nostra descrizione. Nei seguenti calcoli porremo  $c = 1$ .

Notiamo preliminarmente che, in  $\mathcal{Q}$ , si ha  $s^\mu = (0, \mathbf{S})$  e  $u^\mu = (1, \mathbf{0})$ , dunque varrà

$$s^\mu u_\mu = 0 \quad (2.5)$$

in ogni sistema di riferimento inerziale, cioè in generale

$$s^0 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.6)$$

Il legame, poi, tra  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{s}$  è dato dalle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{s} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} - \gamma \boldsymbol{\beta} s^0 = \mathbf{s} + \left( \frac{\gamma - 1}{\mathbf{v}^2} - \gamma \right) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \\ &= \mathbf{s} + \gamma \left( \frac{\gamma}{\gamma + 1} - 1 \right) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} = \mathbf{s} - \frac{\gamma}{1 + \gamma} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \\ &= \mathbf{s} - \frac{1}{1 + \gamma} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Procediamo ora a calcolare il limite non-relativistico di  $\frac{ds^i}{d\tau}$ , nella (2.4), al primo ordine in  $\frac{\mathbf{v}}{c}$ : vale

$$\frac{ds^i}{d\tau} = \frac{q}{m} \left[ \frac{g}{2} F^{i\nu} s_\nu + \left( \frac{g}{2} - 1 \right) (F^{\nu\sigma} s_\nu u_\sigma) u^i \right], \quad (2.8)$$

e, ricordando le relazioni  $F^{i0} = \mathbf{E}^i$  e  $F^{ij} = -\epsilon^{ijk} \mathbf{B}^k$ , si calcolano separatamente i due contributi, ottenendo

$$\begin{cases} F^{i\nu} s_\nu = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{E}^i + (\mathbf{s} \times \mathbf{B})^i \\ (F^{\mu\nu} s_\mu u_\nu) u^i = -(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) v^i + \mathcal{O}(v^2) \end{cases}, \quad (2.9)$$

e reinserendo i risultati nella (2.8) si trova

$$\frac{ds^i}{d\tau} = \frac{q}{m} \left[ \frac{g}{2} (\mathbf{s} \times \mathbf{B})^i - \frac{g}{2} (\mathbf{s} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{v}))^i + (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) v^i \right] + \mathcal{O}(v^2), \quad (2.10)$$

ove si è utilizzata l'identità vettoriale

$$(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))^i = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) b^i - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) c^i. \quad (2.11)$$

Passando, ora, alla descrizione in termini del tempo  $t$  del sistema di riferimento considerato, si ha

$$\frac{ds^i}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{ds^i}{d\tau} = \frac{ds^i}{d\tau} + \mathcal{O}(v^2), \quad (2.12)$$

dato che  $\gamma = 1 + \mathcal{O}(v^2)$ . Dunque in regime non-relativistico derivare rispetto a  $t$  o a  $\tau$  è indifferente, com'è ovvio.

Non ci resta che calcolare  $\frac{d\mathbf{S}^i}{dt}$  in termini di  $\frac{ds^i}{dt}$  sfruttando la relazione (2.7) e sostituirci la (2.10): si ha

$$\frac{d\mathbf{S}^i}{dt} = \frac{ds^i}{dt} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{1+\gamma} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) u^i \right], \quad (2.13)$$

e, sfruttando l'equazione di Lorentz tridimensionale

$$\frac{du^i}{dt} = \frac{q}{m} [\mathbf{E}^i + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})^i], \quad (2.14)$$

e le espansioni

$$\begin{cases} \frac{du^i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + \mathcal{O}(v^2) \\ \frac{d}{dt} \frac{1}{1+\gamma} = -\frac{q}{4m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \mathcal{O}(v^2) \end{cases}, \quad (2.15)$$

si giunge alla relazione

$$\frac{d\mathbf{S}^i}{dt} = \frac{ds^i}{dt} - \frac{q}{m} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) v^i + \frac{q}{2m} (\mathbf{s} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}))^i + \mathcal{O}(v^2). \quad (2.16)$$

Finalmente, sostituendovi la (2.10) si trova

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{s} \times \left[ \frac{g}{2} \mathbf{B} - \left( \frac{g}{2} - \frac{1}{2} \right) \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right] + \mathcal{O}(v^2), \quad (2.17)$$

e basta osservare dalla (2.7) che

$$\mathbf{S} = \mathbf{s} + \mathcal{O}(\mathbf{v}^2), \quad (2.18)$$

per ottenere l'equazione

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{S} \times \left[ \frac{g}{2} \mathbf{B} - \left( \frac{g}{2} - \frac{1}{2} \right) \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right] + \mathcal{O}(\mathbf{v}^2). \quad (2.19)$$

Abbiamo così derivato l'equazione che descrive correttamente la dinamica di precessione non-relativistica (al primo ordine) di un momento angolare di spin classico  $\mathbf{S}$  in un campo elettromagnetico lentamente variabile:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{q}{mc} \mathbf{S} \times \left[ \frac{g}{2} \mathbf{B} - \left( \frac{g}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right], \quad (2.20)$$

ove si è ripristinata  $c$ .

In particolare, in essa sono ravvisabili due termini, di natura fisica significativamente diversa:

- (i) il termine  $\propto \mathbf{S} \times \mathbf{B}$  è, con evidenza, dovuto all'effetto di *precessione di Larmor*;
- (ii) il termine  $\propto \mathbf{S} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E})$  è, invece, dovuto alla *precessione di Thomas*, causata dall'accelerazione del riferimento  $\mathcal{Q}$  di quiete istantanea della particella in campo elettrico; esso è diretta conseguenza della instabilità dell'insieme dei boost lorentziani sotto composizione.

Questo risultato fondativo ci permette, ora, di estrarne con facilità l'hamiltoniana classica  $H_{\text{spin}}^{(c)}$  che governa la dinamica di  $\mathbf{S}$ , cioè tale che

$$\frac{d\mathbf{S}^i}{dt} = \left\{ \mathbf{S}^i, H_{\text{spin}}^{(c)} \right\}. \quad (2.21)$$

Infatti  $\mathbf{S}$ , essendo un momento angolare classico, soddisfa all'algebra

$$\{ \mathbf{S}^i, \mathbf{S}^j \} = \epsilon^{ijk} \mathbf{S}^k, \quad (2.22)$$

grazie alla quale si verifica immediatamente che l'hamiltoniana cercata è

$$H_{\text{spin}}^{(c)} = -\frac{q}{mc} \mathbf{S} \cdot \left[ \frac{g}{2} \mathbf{B} - \left( \frac{g}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right]. \quad (2.23)$$

### 2.1.2 Dinamica completa

Per ottenere, ora, l'hamiltoniana classica  $H^{(c)}$  che governi la dinamica non-relativistica complessiva della particella in campo elettromagnetico basterà sommare alla  $H_{\text{spin}}^{(c)}$  ottenuta l'hamiltoniana  $H_{\text{spatial}}^{(c)}$  relativa ai gradi di libertà spaziali della particella.

Naturalmente, la forma dell'hamiltoniana spaziale è nota:

$$H_{\text{spatial}}^{(c)} = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + q\varphi, \quad (2.24)$$

ove  $\varphi$  è il potenziale elettrico e

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}, \quad (2.25)$$

ove  $\mathbf{A}$  è il potenziale vettore e  $\mathbf{p}$  il momento della particella.

L'hamiltoniana classica cercata è, pertanto,

$$\begin{aligned} H^{(c)} &= H_{\text{spatial}}^{(c)} + H_{\text{spin}}^{(c)} \\ &= \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + q\varphi - \frac{q}{mc} \mathbf{S} \cdot \left[ \frac{g}{2} \mathbf{B} - \left( \frac{g}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

### 2.1.3 Quantizzazione

L'ultimo passo che dobbiamo compiere per giungere alla formulazione dell'equazione di Pauli generalizzata è la quantizzazione opportuna di  $H^{(c)}$ . Detto  $H$  l'operatore ottenuto da  $H^{(c)}$ , infatti, l'equazione di Pauli generalizzata sarà data dall'equazione di Schrödinger per  $H$ .

Iniziamo con i passaggi canonici.

Introduciamo l'operatore di spin

$$\mathbf{S} := \frac{\hbar}{2} \mathbf{L}^{(s)}, \quad (2.27)$$

ove

$$\mathbf{L}^{(s)} = \left( L_1^{(s)}, L_2^{(s)}, L_3^{(s)} \right) \quad (2.28)$$

sono i generatori hermitiani dell'algebra di Lie  $\mathfrak{su}(2)$  nella rappresentazione di spin  $s$  normalizzata dimodoché

$$\mathbf{L}^{(1/2)} = \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.29)$$

ove  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  sono le matrici di Pauli.

Introduciamo, poi, l'operatore momento canonico in accoppiamento minimale

$$\boldsymbol{\Pi} := -i\hbar \boldsymbol{\nabla} - \frac{q}{c} \mathbf{A}, \quad (2.30)$$

e l'operatore di momento magnetico di spin

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} := g \frac{\mu}{\hbar} \mathbf{S}, \quad (2.31)$$

ove

$$\mu = \frac{q\hbar}{2mc}. \quad (2.32)$$

Identifichiamo, in ultimo, l'operatore velocità

$$\mathbf{v} \mapsto \frac{\mathbf{\Pi}}{m}. \quad (2.33)$$

Effettuando direttamente queste sostituzioni in  $H_{\text{spin}}^{(c)}$  si ottiene

$$H_{\text{spin}}^{(c)} \mapsto \tilde{H}_{\text{spin}} = -\boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} \cdot \mathbf{B} - \frac{\mathbf{\Pi}}{m} \cdot \left( \boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} - \frac{q}{2m} \mathbf{S} \right) \times \mathbf{E}, \quad (2.34)$$

ma l'operatore così ottenuto risulterebbe patologico: esso non è hermitiano. Infatti,

$$[\boldsymbol{\mu}_{\text{spin}}, \mathbf{B}] = 0, \quad [\mathbf{S}, \mathbf{E}] = 0, \quad (2.35)$$

ma

$$[\mathbf{E}, \mathbf{\Pi}] \neq 0, \quad (2.36)$$

cosicché l'aggiunto diviene

$$\tilde{H}_{\text{spin}}^\dagger = -\boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} \cdot \mathbf{B} - \left( \boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} - \frac{q}{2m} \mathbf{S} \right) \times \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{\Pi}}{m} \neq \tilde{H}_{\text{spin}}. \quad (2.37)$$

Esiste, tuttavia, un modo naturale di risolvere questa apparente patologia: ripristinare la forma simmetrica del prodotto scalare in  $H_{\text{spin}}^{(c)}$ , riscrivendo

$$H_{\text{spin}}^{(c)} = -\frac{q}{mc} \left[ \frac{g}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} - \left( \frac{g}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}}{2} \right]. \quad (2.38)$$

In questo modo la procedura di quantizzazione produce un operatore

$$H_{\text{spin}} = -\boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} \cdot \mathbf{B} - \frac{\mathbf{\Pi} \cdot \left( \boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} - \frac{q}{2m} \mathbf{S} \right) \times \mathbf{E} + \left( \boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} - \frac{q}{2m} \mathbf{S} \right) \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Pi}}{2mc} \quad (2.39)$$

che è hermitiano a vista e definisce, pertanto, una buona osservabile per il sistema: è la quantizzazione corretta di  $H_{\text{spin}}^{(c)}$ .

D'altro canto, la quantizzazione di  $H_{\text{spatial}}^{(c)}$  non presenta problemi: si ottiene

$$H_{\text{spatial}} = \frac{\mathbf{\Pi}^2}{2m} + q\varphi, \quad (2.40)$$

ove  $\varphi$  è l'operatore corrispondente al potenziale elettrico del sistema.

Sommando le due hamiltoniane, troviamo la quantizzazione di  $H^{(c)}$ :

$$H = H_{\text{spin}} + H_{\text{spatial}} = q\varphi - \boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} \cdot \mathbf{B} + \frac{\mathbf{\Pi}^2}{2m} + \frac{\mathbf{\Pi} \cdot \left( \boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} - \frac{q}{2m} \mathbf{S} \right) \times \mathbf{E} + \left( \boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} - \frac{q}{2m} \mathbf{S} \right) \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Pi}}{2mc}. \quad (2.41)$$

Abbiamo così raggiunto il nostro obiettivo: la generalizzazione dell'equazione di Pauli per una particella di carica  $q$ , massa  $m$  e spin  $s$  è data dall'equazione di Schrödinger per  $H$ , cioè

$$i\hbar \frac{\partial \psi^{(s)}}{\partial t} = q\varphi \psi^{(s)} - \boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} \cdot \mathbf{B} \psi^{(s)} + \frac{\boldsymbol{\Pi}^2}{2m} \psi^{(s)} + \frac{\boldsymbol{\Pi} \cdot (\boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} - \frac{q}{2m} \mathbf{S}) \times \mathbf{E} + (\boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} - \frac{q}{2m} \mathbf{S}) \times \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Pi}}{2mc} \psi^{(s)}, \quad (2.42)$$

ove  $\psi^{(s)}$  è uno spinore a  $(2s + 1)$  componenti complesse.

#### 2.1.4 Natura del risultato

Per convincerci che l'equazione (2.42) sia la naturale generalizzazione dell'equazione di Pauli nel caso di  $s = 1/2$ , dovremmo mostrare che esse forniscono descrizioni equivalenti della dinamica della particella.

In effetti, ricordando l'equazione di Pauli

$$i\hbar \frac{\partial \psi^{(1/2)}}{\partial t} = \left[ \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi})^2}{2m} + q\varphi \right] \psi^{(1/2)}, \quad (2.43)$$

sfruttando le identità

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{\Pi} = i\hbar \frac{q}{c} \mathbf{B} \end{cases} \quad (2.44)$$

è immediato trovare che essa prende forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi^{(1/2)}}{\partial t} = q\varphi \psi^{(1/2)} - \boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} \cdot \mathbf{B} \psi^{(1/2)} + \frac{\boldsymbol{\Pi}^2}{2m} \psi^{(1/2)} \quad (2.45)$$

ponendo

$$g = 2, \quad (2.46)$$

che è la celebre previsione della teoria di Dirac per il rapporto giromagnetico dell'elettrone.

Questo non è un caso: la forma (2.45) dell'equazione di Pauli mostra con evidenza che l'equazione (2.42) derivata sopra ne costituisce una estensione all'ordine successivo in  $1/m$ , e pertanto nel limite non-relativistico, in cui la scala  $\epsilon$  delle energie in gioco è tale che

$$\epsilon \ll mc^2, \quad (2.47)$$

ove  $m$  è la massa della particella, le due equazioni produrranno stesse soluzioni fisiche.

Non soltanto: consideriamo l'equazione di Dirac

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [c\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Pi} + \gamma^0 mc^2 - e\varphi] \Psi, \quad (2.48)$$

ove  $\gamma$  e  $\gamma^0$  sono le matrici di Dirac,  $m$  la massa dell'elettrone,  $-e$  la carica dell'elettrone,  $\Psi$  un 4-spinore e  $\mathbf{\Pi} = -i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}$ .

Espandendola secondo lo schema Foldy-Wouthuysen (*cf.* [2]), componendo

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix},$$

si ottiene il corretto sviluppo non-relativistico in ordini di  $1/m$  dell'equazione di Dirac per  $\psi$ :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = & mc^2 \psi - e\varphi \psi + \frac{e\hbar}{2mc} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} \psi + \frac{\mathbf{\Pi}^2}{2m} \psi + \\ & + \frac{e\hbar}{8m^2 c^2} [\mathbf{\Pi} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{E}) + (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{\Pi}] \psi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^3}\right) \psi. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Con semplici riscritture ci si rende conto che questa espansione dell'equazione di Dirac al secondo ordine in  $1/m$  coincide (a meno del termine costante  $mc^2$ , ininfluente) con la nostra (2.42) per  $s = 1/2$ , ponendo  $g = 2$ .

Sottolineiamo, infine, che il termine di secondo ordine in  $1/m$  introdotto nella equazione di Pauli generalizzata, e che ritroviamo nella espansione (2.49), altro non è che il termine di *interazione spin-orbita*: si ha, infatti, in formalismo classico

$$\mathbf{\Pi} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{E}) \propto \mathbf{S} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{\Pi}) \propto \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}, \quad (2.50)$$

che è la più familiare forma di tale termine energetico.

Abbiamo così contestualizzato completamente il risultato ottenuto nel paragrafo precedente: la generalizzazione proposta della equazione di Pauli non è altro che l'espansione non-relativistica al secondo ordine in  $1/m$  dell'equazione di Dirac, estesa al caso di particelle di generico spin  $s$ .

## 2.2 Simmetria $U(1) \times SU(2)$ dell'equazione

### 2.2.1 Forma gauge-invariante dell'equazione

Scopo di questa sezione è ricondurre l'equazione di Pauli generalizzata (2.42) ad una forma manifestamente gauge-invariante.

È cruciale notare, anzitutto, che, a meno di una modifica del terzo ordine in  $1/m$ , essa può essere riscritta *completando il quadrato*:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi^{(s)}}{\partial t} = & q\varphi \psi^{(s)} - \boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} \cdot \mathbf{B} \psi^{(s)} + \\ & + \frac{[\mathbf{\Pi} - \frac{1}{c} (\boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} - \frac{q}{2mc} \mathbf{S}) \times \mathbf{E}]^2}{2m} \psi^{(s)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^3}\right) \psi^{(s)} \end{aligned} \quad (2.51)$$



**Considerazione** Una tale riformulazione è evidentemente del tutto legittima in un contesto non-relativistico: cessa di valere solo al terzo ordine.

Ne consegue che le proprietà di simmetria che ne discenderanno saranno da considerare come *proprie* della teoria quantomeccanica non-relativistica.

Separiamo, a questo punto, l'equazione in due membri:

$$\left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\varphi + \boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} \cdot \mathbf{B} \right] \psi^{(s)} = \frac{[\boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{c} (\boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} - \frac{q}{2mc} \mathbf{S}) \times \mathbf{E}]^2}{2m} \psi^{(s)}, \quad (2.52)$$

e riscriviamoli esplicitamente in termini degli operatori fondamentali: essi sono, scritto  $x^0 = ct$ ,

$$\begin{cases} i\hbar c \left[ \frac{\partial}{\partial x^0} + i \frac{q}{\hbar c} \varphi - i \frac{g\boldsymbol{\mu}}{2\hbar c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}^{(s)} \right] \psi^{(s)} \\ - \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \boldsymbol{\nabla} - i \frac{q}{\hbar c} \mathbf{A} - i \left( \frac{g\boldsymbol{\mu}}{2\hbar c} - \frac{q}{4mc^2} \right) \mathbf{L}^{(s)} \times \mathbf{E} \right]^2 \psi^{(s)} \end{cases} \quad (2.53)$$

Notiamo, ora, che in entrambi i membri sono comparse delle derivazioni direzionali *corrette* da quantità dipendenti dai campi: traspare, cioè, dalla struttura dell'equazione l'azione su  $\psi^{(s)}$  di una qualche connessione  $\mathcal{D}_\mu$  su un fibrato principale (i.e. con fibra un gruppo) curvo, di cui vorremo indagare la struttura.

Concretiamo questa intuizione: passiamo ad un formalismo geometrico-differenziale definendo *ad hoc* una connessione

$$\mathcal{D}_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} + ia_\mu + \rho_\mu. \quad (2.54)$$

Si tratta solamente di definire opportunamente le funzioni  $a_\mu$  e  $\rho_\mu$  per riprodurre correttamente la (2.52): è semplice vedere che esse sono date da

$$\begin{cases} a_0(x) := \frac{q}{\hbar c} \varphi(x) \\ a_k(x) := -\frac{q}{\hbar c} \mathbf{A}_k(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho_\mu(x) := i\rho_\mu^j(x) L_j^{(s)} \\ \rho_0^j(x) := -\frac{g\boldsymbol{\mu}}{2\hbar c} \mathbf{B}^j(x) \\ \rho_k^j(x) := \left( -\frac{g\boldsymbol{\mu}}{2\hbar c} + \frac{q}{4mc^2} \right) \delta_k^r \epsilon^{rjl} \mathbf{E}^l(x) \end{cases} \quad (2.55)$$

Con l'ausilio di questa derivata covariante, l'equazione di Pauli generalizzata prende, così, forma

$$i\hbar c \mathcal{D}_0 \psi^{(s)}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \mathcal{D}^2 \psi^{(s)}(x), \quad (2.56)$$

ove si intende  $\mathcal{D}^2 := \sum_{k=1}^3 \mathcal{D}_k \mathcal{D}_k$ .

Questa, come sarà chiaro tra breve, è la forma ricercata, esplicitamente gauge-invariante, dell'equazione di Pauli generalizzata.

Vediamolo.

### 2.2.2 Trasformazioni di gauge

Approfondiamo, anzitutto, la natura della connessione  $\mathcal{D}_\mu$  introdotta nella (2.54).

La sua particolarità, rispetto alla ordinaria connessione elettromagnetica

$$\mathcal{D}_\mu^{\text{em}} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + i a_\mu, \quad a_\mu : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.57)$$

ove  $a_\mu$  è una funzione reale dello spaziotempo  $\mathbb{M}$ , è la comparsa di un termine aggiuntivo nei coefficienti della connessione, cioè la funzione

$$\rho_\mu : \mathbb{M} \longrightarrow \mathfrak{su}(2) \quad (2.58)$$

che è, per costruzione, a valori in

$$\mathfrak{su}(2) = \{\alpha \in M(2, \mathbb{C}) : \text{tr } \alpha = 0 \wedge \alpha^\dagger = -\alpha\},$$

ma, passando alla sua rappresentazione spin  $s$ , possiamo decomporla in componenti lungo i generatori  $L_j^{(s)}$ , cioè scrivere

$$\rho_\mu(x) = i \rho_\mu^j(x) L_j^{(s)}, \quad (2.59)$$

che è la forma in cui compare nell'equazione (2.56).

Ricordato, allora, che l'algebra di Lie di  $U(1)$  è

$$\mathfrak{u}(1) = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} = -z\} = i\mathbb{R},$$

è possibile vedere una struttura matematica simmetrica nei coefficienti della connessione notando che

$$i a_\mu : \mathbb{M} \longrightarrow \mathfrak{u}(1), \quad (2.60)$$

e così la scrittura in coordinate di  $\mathcal{D}_\mu$  rivela esplicitamente la sua natura di connessione definita su un fibrato principale  $\mathbb{E}$ , di varietà di base  $\mathbb{M}$  e con fibre in  $U(1) \times SU(2)$ .

Non dovrebbe stupire, a questo punto, che, così come la comparsa della parte elettromagnetica della connessione  $a_\mu$  implica l'esistenza delle trasformazioni di gauge dei potenziali elettromagnetici  $A^\mu$  (*cfr.* [1]), strettamente legate alla conservazione della carica elettrica, allo stesso modo il coefficiente  $\rho_\mu$  della connessione porti con sé una nuova invarianza di gauge nella teoria.

Questo è, in effetti, proprio ciò che avviene: se da una parte il gruppo di Lie  $U(1)$ , cui  $a_\mu$  è legato tramite la sua algebra, parametrizza le trasformazioni di gauge elettromagnetiche, il gruppo di Lie  $SU(2)$ , evidentemente legato alla parte di connessione  $\rho_\mu$  tramite la sua algebra, parametrizzerà delle trasformazioni di gauge di spin.

Ora, le trasformazioni di gauge sotto cui l'equazione (2.56) risulta invariante sono le seguenti:

$$U(1) : \begin{cases} a_\mu(x) \mapsto {}^\chi a_\mu(x) := a_\mu(x) + (\partial_\mu \chi)(x) \\ \psi^{(s)}(x) \mapsto {}^\chi \psi^{(s)}(x) := e^{-i\chi(x)} \psi^{(s)}(x) \end{cases} \quad (2.61)$$

$$SU(2) : \begin{cases} \rho_\mu(x) \mapsto {}^g \rho_\mu(x) := g(x) \rho_\mu(x) g^{-1}(x) + g(x) (\partial_\mu g^{-1})(x) \\ \psi^{(s)}(x) \mapsto {}^g \psi^{(s)}(x) := g(x) \psi^{(s)}(x) \end{cases} \quad (2.62)$$

ove  $\chi(x)$  è una funzione reale arbitraria e  $g$  è la rappresentazione di spin  $s$  di una arbitraria funzione a valori in  $SU(2)$ .

Prima di verificare l'invarianza effettiva della (2.56) sotto tali trasformazioni, notiamo che esse hanno la stessa struttura algebrica: basta osservare che

$$i {}^\chi a_\mu(x) = e^{-i\chi(x)} i a_\mu(x) e^{i\chi(x)} + e^{-i\chi(x)} (\partial_\mu e^{i\chi})(x), \quad (2.63)$$

analoga alla (2.62).

L'unica differenza formale tra le due trasformazioni di gauge è, pertanto, dovuta al carattere non abeliano del gruppo di gauge  $SU(2)$ , mentre il carattere abeliano di  $U(1)$  permette alle trasformazioni di gauge dei potenziali (2.61) di essere parametrizzate da funzioni reali e non a valori in  $U(1)$ .

Basterà, pertanto, mostrare che l'equazione di Pauli generalizzata è invariante sotto una delle due: vediamo per le (2.62).

Definita la derivata covariante trasformata

$${}^g \mathcal{D}_\mu(x) := \mathcal{D}_\mu(x) + g(x) (\partial_\mu g^{-1})(x), \quad (2.64)$$

si trova che

$${}^g \mathcal{D}_\mu {}^g \psi^{(s)}(x) = g(x) \mathcal{D}_\mu \psi^{(s)}(x), \quad (2.65)$$

pertanto, assumendo che valga la (2.56), si ha

$$\begin{aligned} i\hbar c {}^g \mathcal{D}_0 {}^g \psi^{(s)}(x) &= g(x) i\hbar c \mathcal{D}_0 \psi^{(s)}(x) = g(x) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \mathcal{D}^2 \psi^{(s)}(x) \right] \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{k=1}^3 {}^g \mathcal{D}_k (g \mathcal{D}_k \psi^{(s)}(x)) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{k=1}^3 {}^g \mathcal{D}_k {}^g \mathcal{D}_k {}^g \psi^{(s)}(x) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} {}^g \mathcal{D}^2 {}^g \psi^{(s)}(x), \end{aligned} \quad (2.66)$$

cioè l'equazione rimane invariata, come voluto.

L'invarianza dell'equazione nel caso abeliano di  $U(1)$ , allora, vale *a fortiori*.

In virtù di queste proprietà della connessione  $\mathcal{D}_\mu$  introdotta, l'equazione di Pauli generalizzata nella forma (2.56) risulta effettivamente esplicitamente gauge-invariante, con gruppo di gauge totale  $U(1) \times SU(2)$ .

**Considerazione** Teniamo a far notare che la struttura algebrica comune alle trasformazioni di gauge (2.61) e (2.62) discende direttamente dalla formula di cambiamento di riferimento locale per la matrice dei coefficienti della 1-forma di connessione  $\Omega$ .

Detti, infatti,  $\{e_i(x)\}$  e  $\{\tilde{e}_j(x)\}$  due riferimenti locali di  $\mathbb{E}$  su un aperto di  $\mathbb{M}$ , dette  $\Omega$  e  $\tilde{\Omega}$  le due matrici della 1-forma di connessione relative rispettivamente a  $\{e_i(x)\}$  e  $\{\tilde{e}_j(x)\}$  e detta  $A(x)$  la matrice di cambiamento di riferimento locale (i.e.  $e_i(x) = \tilde{e}_j(x)A_i^j(x)$ ), allora vale

$$\tilde{\Omega} = A\Omega A^{-1} + A \cdot d(A^{-1}). \quad (2.67)$$

Osserviamo, quindi, che nella formula di cambiamento di riferimento locale compare, sì, il termine usuale di cambiamento di base per la matrice di un'applicazione lineare  $A\Omega A^{-1}$ , ma la natura curva del fibrato  $\mathbb{E}$  fa sì che compaia anche un termine differenziale in più,  $A \cdot d(A^{-1})$ , responsabile delle trasformazioni di gauge non banali in ambito abeliano.

Per quanto riguarda il motivo per cui tale formula compare nelle trasformazioni di gauge, esso è facilmente reperibile: la Fisica non può essere dipendente dalla scelta del riferimento locale utilizzato sul fibrato per la descrizione dei fenomeni, e questa richiesta genera una ridondanza interna alla descrizione matematica, i.e. le trasformazioni di gauge.

Come detto, tale invarianza, benché sia, a rigore, approssimata in quanto ottenuta con una modifica del terzo ordine in  $1/m$  alla teoria, può essere considerata a buon diritto una simmetria fondamentale della Meccanica Quantistica non-relativistica.

Segnaliamo, infine, che l'equazione (2.56) può essere vista come equazione di Eulero-Lagrange

$$\mathcal{D}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{D}_\mu \psi^{(s)}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{(s)}} = 0 \quad (2.68)$$

per la densità di lagrangiana

$$\mathcal{L} = i\hbar c \overline{\psi^{(s)}}(x) \mathcal{D}_0 \psi^{(s)}(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{k=1}^3 \overline{\mathcal{D}_k \psi^{(s)}}(x) \mathcal{D}_k \psi^{(s)}(x), \quad (2.69)$$

evidentemente  $U(1) \times SU(2)$ -gauge-invariante.

## 2.3 Conseguenze delle simmetrie

Sulla scorta dell'apparato teorico costruito nelle precedenti sezioni, procediamo a rileggere in chiave di invarianza di gauge gli effetti Aharonov-Bohm ed Aharonov-Casher.

### 2.3.1 Effetto Aharonov-Bohm

Consideriamo un solenoide ideale  $\mathcal{S}$  di lunghezza infinita, percorso da corrente costante e completamente schermato. Sia  $\mathbf{A}$  il potenziale vettore generato.

Consideriamo, poi, una particella di carica  $q$  e massa  $m$  che si muove nella regione di spaziotempo molteplicemente connessa  $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S})$ .

All'esterno del solenoide, quindi, i potenziali di gauge sono

$$\begin{cases} a_0(x) = 0 \\ a_k(x) = -\frac{q}{\hbar c} \mathbf{A}_k(x) \end{cases}, \quad \rho_\mu(x) = 0, \quad (2.70)$$

dunque non si avranno effetti non-banali dovuti alla simmetria di spin.

La condizione cruciale per l'effetto è l'annullarsi all'esterno di  $\mathcal{S}$  del campo elettromagnetico: imponendolo si ha

$$F_{\mu\nu} = -\frac{\hbar c}{q} (\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu) \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.71)$$

cioè necessariamente il potenziale di gauge  $a_\mu$  è, in questa configurazione, irrotazionale all'esterno di  $\mathcal{S}$ . È un risultato che già abbiamo ottenuto nel capitolo 1.

Questo significa che, localmente (i.e. all'intorno di ogni punto di  $\mathbb{M}$ ),  $a_\mu$  ammetterà potenziale

$$\chi(\mathbf{x}) := -\frac{q}{\hbar c} \int_*^{\mathbf{x}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.72)$$

ove  $*$   $\in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}$ , tale che

$$a_\mu(x) = (\partial_\mu \chi)(x), \quad (2.73)$$

cioè potrà essere scritta come *pura gauge*, facendo riferimento alla trasformazione (2.61), ove  $\chi(\mathbf{x})$  è ora preso come campo di gauge.

Ne consegue che, facendo girare attorno ad  $\mathcal{S}$  la carica, essa accumula progressivamente nella funzione d'onda una fase non-integrabile di  $U(1)$ , specificata dalla relativa trasformazione di gauge e pari a  $e^{-i\chi(\mathbf{x})}$ .

Dunque, completato un giro attorno al solenoide essa avrà subito uno spostamento di fase pari a

$$\Delta\varphi_{AB} = -\left(-\frac{q}{\hbar c} \oint_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}\right) = \frac{q}{\hbar c} \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbf{B}), \quad (2.74)$$

ove  $\Gamma$  è una curva che racchiude  $\mathcal{S}$ . Poiché la particella è tornata nel punto di partenza, dopo aver effettuato il giro, con fase della funzione d'onda traslata, tale fase aggiuntiva dovrà essere fisicamente rilevabile.

Abbiamo così riottenuto la descrizione dell'effetto Aharonov-Bohm.

### 2.3.2 Effetto Aharonov-Casher

Consideriamo un filo carico  $\mathcal{W}$  infinitamente esteso lungo l'asse  $z$ .

Consideriamo, poi, una particella neutra ( $q = 0$ ) di massa  $m$  e spin  $s \neq 0$ , dunque con  $\boldsymbol{\mu}_{\text{spin}} \neq \mathbf{0}$ , che si muove nella regione di spaziotempo molteplicemente connessa  $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{W})$ . Per semplicità, sia costretta al piano  $(x, y)$  privato dell'origine, molteplicemente connesso.

I potenziali di gauge in  $\mathbb{M}$  si riducono, dunque, a

$$a_\mu = 0, \quad \begin{cases} \rho_0^j(x) = 0 \\ \rho_k^j(x) = -\frac{g\mu}{2\hbar c} \delta_k^r \epsilon^{rjl} \mathbf{E}^l \end{cases}, \quad (2.75)$$

pertanto non si avranno effetti non-banali dovuti alla simmetria di gauge elettromagnetica.

Consideriamo, ora, la curvatura della connessione  $\rho_\mu$  di  $SU(2)$ .

Per farlo, identifichiamo dapprima i simboli  $\Gamma_{\mu k}^h$  della connessione, cioè le funzioni complesse su  $\mathbb{M}$  tali che

$$\mathcal{D}_\mu^{\text{spin}}(\alpha) = \left( \frac{\partial \alpha_l^h}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu k}^h \alpha_l^k \right) \varepsilon_h^l, \quad (2.76)$$

ove  $\{\varepsilon_k^h(x)\}$  è un riferimento locale per  $\mathbb{E}$  (in rappresentazione di spin  $s$ ), fibrato su  $\mathbb{M}$  e con fibre in  $SU(2)$ , e  $\alpha(x) = \alpha_k^h(x) \varepsilon_h^k(x)$  è una sezione locale di  $\mathbb{E}$ .

Lavorando nella rappresentazione fondamentale di  $\mathfrak{su}(2)$ , di spin  $1/2$ , possiamo scrivere

$$L_j^{(1/2)} = (\sigma_j)_k^h \varepsilon_h^k, \quad (2.77)$$

cosicché, data  $\alpha$  sezione locale di  $\mathbb{E}$ , si ha

$$\mathcal{D}_\mu^{\text{spin}}(\alpha) = \frac{\partial \alpha_l^h}{\partial x^\mu} \varepsilon_h^l + i \rho_\mu^j L_j^{(1/2)} \cdot \alpha = \frac{\partial \alpha_l^h}{\partial x^\mu} \varepsilon_h^l + i \rho_\mu^j (\sigma_j)_k^h \alpha_l^k \varepsilon_h^l, \quad (2.78)$$

pertanto abbiamo trovato che

$$\Gamma_{\mu k}^h = i \rho_\mu^j (\sigma_j)_k^h. \quad (2.79)$$

La forma generale del tensore di curvatura è, d'altro canto,

$$R_{\mu\nu k}^h = \partial_\mu \Gamma_{\nu k}^h - \partial_\nu \Gamma_{\mu k}^h + \Gamma_{\nu k}^l \Gamma_{\mu l}^h - \Gamma_{\mu k}^l \Gamma_{\nu l}^h, \quad (2.80)$$

e, nel caso di  $SU(2)$ , una volta calcolato sarà sufficiente maneggiare il tensore ridotto di curvatura  $G_{\mu\nu}^l$ , tale che

$$R_{\mu\nu k}^h = i G_{\mu\nu}^l (\sigma_l)_k^h, \quad (2.81)$$

definito nella rappresentazione di  $\mathfrak{su}(2)$  di spin  $1/2$ .

Supposto, per semplicità, che i coefficienti  $(\sigma_i)_k^h$  siano costanti, si calcola facilmente

$$R_{\mu\nu k}^h = i(\partial_\mu \rho_\nu^l - \partial_\nu \rho_\mu^l)(\sigma_l)_k^h - [\sigma_a, \sigma_b] \rho_\mu^a \rho_\nu^b, \quad (2.82)$$

e sfruttando l'identità per il commutatore delle matrici di Pauli

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i \epsilon_{abc} \sigma_c, \quad (2.83)$$

si trova

$$R_{\mu\nu k}^h = i \left( \partial_\mu \rho_\nu^l - \partial_\nu \rho_\mu^l - 2 \epsilon_{abl} \rho_\mu^a \rho_\nu^b \right) (\sigma_l)_k^h, \quad (2.84)$$

ove si intendono contratti gli indici bassi ripetuti.

Pertanto la curvatura di una connessione  $\rho_\mu$  di SU(2) risulta genericamente

$$G_{\mu\nu}^l = \partial_\mu \rho_\nu^l - \partial_\nu \rho_\mu^l - 2 \epsilon_{abc} \delta^{cl} \rho_\mu^a \rho_\nu^b. \quad (2.85)$$

Nel nostro caso, concretamente, il campo elettrico generato dal filo carico  $\mathcal{W}$  ha forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{2\pi r^2} (x, y, 0), \quad (2.86)$$

ove  $\lambda$  è la carica per unità di lunghezza di  $\mathcal{W}$ ,  $\mathbf{x} = (x, y)$  e  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , cosicché si trova che le uniche componenti di  $\rho_\mu^k$  non-nulle sono  $\rho_3^k$  e  $\rho_k^3$  con  $k = 1, 2$ .

Di queste, tuttavia, solo le  $\rho_k^3$  saranno rilevanti per la dinamica del sistema, in quanto per costruzione esso è confinato nel piano  $(x, y)$ , senza dimensioni lungo il terzo asse: in definitiva, le uniche componenti significative della connessione di SU(2) si calcolano facilmente e sono

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) := (\rho_1^3(\mathbf{x}), \rho_2^3(\mathbf{x})) = \frac{g\mu\lambda}{4\pi\hbar c r^2} (y, -x). \quad (2.87)$$

Possiamo, così, calcolare la curvatura di SU(2) per il nostro sistema: ricordando che  $G_{\mu\nu}^l$  è antisimmetrico in  $(\mu\nu)$ , l'unica componente indipendente del tensore risulta  $G_{12}^3$ .

Si trova

$$G_{12}^3(\mathbf{x}) = -\frac{g\mu\lambda}{4\pi\hbar c} \nabla_{(x,y)} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r^2}, \quad (2.88)$$

e sfruttando l'identità distribuzionale\*

$$\nabla_{(x,y)} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r^2} = 2\pi \delta(\mathbf{x}), \quad (2.89)$$

---

\* *Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{x} = (x^1, x^2)$ . È immediato vedere che

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \frac{x^i}{r^2} = \frac{\delta^{ij}}{r^2} - 2 \frac{x^i x^j}{r^4} \quad (r \neq 0),$$

da cui  $\nabla \cdot \frac{\mathbf{x}}{r^2} = 0$  per  $r \neq 0$ . Ora, data  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ , indicando con  $B_\epsilon$  la palla di centro l'origine e raggio  $\epsilon$  e sfruttando il teorema del gradiente (conseguenza del teorema di

si ottiene

$$G_{12}^3(\mathbf{x}) = -\frac{g\mu\lambda}{2\hbar c} \delta(\mathbf{x}). \quad (2.90)$$

Pertanto la connessione  $\rho_\mu$  di  $SU(2)$  del sistema è *piatta* ovunque tranne che sul filo  $\mathcal{W}$ , ove è singolare.

Questo significa che il fibrato  $\mathbb{E}$  è localmente piatto e, dunque, la sua connessione può essere espressa all'intorno di ogni punto fuori da  $\mathcal{W}$  come *pura gauge*, cioè possiamo prendere

$$\rho_k = g(\partial_k g^{-1}), \quad k = 1, 2, \quad (2.91)$$

ma il fatto che la sua curvatura non sia nulla ovunque significa che non può essere mandata a zero (o scritta come pura gauge) globalmente.

Localmente, pertanto, la rappresentazione di spin  $1/2$  di un tale campo  $g$  a valori in  $SU(2)$  è ben definita ed ha forma necessariamente determinata dalla (2.91):

$$g(\mathbf{x}) := e^{-i \int_{\star}^{\mathbf{x}} \boldsymbol{\rho} \cdot d\mathbf{l}} \sigma_3, \quad (2.92)$$

ove  $\star \in \mathbb{R}_{(x,y)}^2 \setminus \mathcal{W}$ . È evidente come la definizione locale elimini il problema della ploidromia di questa funzione.

Siamo, così, approdati in un quadro formale completamente analogo a quello dell'effetto Aharonov-Bohm, grazie alla caratteristica del sistema di essere costretto al piano  $(x, y)$  senza modificarne le proprietà (a causa dell'estensione infinita di  $\mathcal{W}$ ): in tal modo, infatti, nell'argomento dell'esponenziale compare soltanto il generatore di  $\mathfrak{su}(2)$  (in rappresentazione di spin  $s$ ) ortogonale al piano cui è confinata la dinamica, e si evita che il carattere non-abeliano di  $SU(2)$  richieda l'introduzione di un esponenziale *path-ordered*.

Ne concludiamo che la connessione di  $SU(2)$   $\boldsymbol{\rho}$  dà luogo ad una fase di  $SU(2)$  non-integrabile.

Possiamo, in particolare, procedere in analogia con l'effetto Aharonov-Bohm: facendo effettuare alla particella dotata di momento di dipolo magnetico intrinseco un giro attorno al filo  $\mathcal{W}$ , essa accumula nella funzione d'onda

Gauss), si ha

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla \cdot \frac{\mathbf{x}}{r^2} \middle| \varphi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{x^j}{r^2} \right) \varphi(\mathbf{x}) d^2 x := - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x^j}{r^2} \frac{\partial}{\partial x^j} \varphi(\mathbf{x}) d^2 x \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\epsilon} \frac{x^j}{r^2} \frac{\partial}{\partial x^j} \varphi(\mathbf{x}) d^2 x \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\epsilon} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{x^j}{r^2} \varphi(\mathbf{x}) \right) d^2 x - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{x^j}{r^2} \right) \varphi(\mathbf{x}) d^2 x}_0 \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon} \frac{x^j}{\epsilon^2} \varphi(\mathbf{x}) d\sigma^j = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{x^j}{\epsilon^2} \varphi(\epsilon \cos(\theta), \epsilon \sin(\theta)) \frac{x^j}{\epsilon} \epsilon d\theta \\ &= 2\pi \varphi(\mathbf{0}) = \langle 2\pi \delta(\mathbf{x}) | \varphi \rangle. \quad \square \end{aligned}$$



uno spostamento di fase pari a

$$\Delta\varphi_{AC} \sigma_3 = - \oint_{\Gamma} \boldsymbol{\rho} \cdot d\mathbf{l} \sigma_3 = \frac{\lambda}{\hbar c} g \frac{\mu}{\hbar} \mathbf{S}_3 = \frac{\lambda}{\hbar c} \boldsymbol{\mu}_3, \quad (2.93)$$

cioè

$$\Delta\varphi_{AC} = \frac{\mu_3}{\hbar c} \lambda, \quad (2.94)$$

che è quanto si era già derivato nel capitolo 1.

Rileviamo, infine, che possiamo riscrivere quest'ultima espressione in forma più generica come

$$\Delta\varphi_{AC} = \frac{\mu_{\perp}}{\hbar c} \lambda, \quad (2.95)$$

ove  $\mu_{\perp}$  indica la componente di momento di dipolo magnetico ortogonale al piano cui è costretta la dinamica della particella.

**Considerazione** Lo studio in chiave di invarianza di gauge di questo secondo effetto, Aharonov-Casher, ci permette di capire che la condizione di campo elettromagnetico nullo fuori dal solenoide, cruciale per l'effetto Aharonov-Bohm, non è altro che la condizione di curvatura piatta della connessione elettromagnetica  $a_{\mu}$  di U(1) fuori dal solenoide.

In altre parole, in un fibrato in rette, quale è il fibrato principale di U(1) dato che  $u(1) = i\mathbb{R}$ , il campo elettromagnetico è la curvatura della connessione del fibrato.

Concludiamo osservando che questa rilettura degli effetti, che ha fatto uso di strumenti matematici più avanzati di quelli con cui sono stati introdotti nelle sezioni 1.1 e 1.2, ha permesso una seconda visione, maggiormente unitaria e soddisfacente, della *dualità* che lega i due: essi emergono dall'introduzione nel sistema di una connessione non piatta, che per l'effetto Aharonov-Bohm è la connessione elettromagnetica  $a_{\mu}$ , mentre per l'effetto Aharonov-Casher è la connessione di spin  $\rho_{\mu}$ .

## 2.4 Sulla dualità degli effetti

Ciò che rimane da fare è dare veste tangibile al legame di dualità esistente tra i due effetti, fin qui intuito: chiarire in che modo un effetto possa essere *rimappato* nell'altro e mostrare quale sia il rapporto tra le due manifestazioni di dualità esibite qui e nel capitolo 1.

Tale è lo scopo di questa sezione.

### 2.4.1 Dualità delle fasi

Le differenze di fase responsabili delle interferenze realizzate dagli effetti Aharonov-Bohm ed Aharonov-Casher sono date da

$$\begin{cases} \Delta\varphi_{AB} = \frac{q}{\hbar c} \Phi_S(\mathbf{B}) \\ \Delta\varphi_{AC} = \frac{\mu_{\perp}}{\hbar c} \lambda \end{cases}, \quad (2.96)$$

come derivato esplicitamente in §2.3.1 e §2.3.2.

Ribadiamo il significato dei simboli: nell'effetto Aharonov-Bohm,  $q$  rappresenta la carica delle particelle incidenti sul solenoide,  $\Phi_{\mathcal{S}}(\mathbf{B})$  il flusso di campo magnetico attraverso la sezione trasversale del solenoide  $\mathcal{S}$ ; nell'effetto Aharonov-Casher con filo carico lungo l'asse  $z$ ,  $\lambda$  indica la densità lineare di carica del filo, e  $\mu_{\perp}$  indica la componente ortogonale (al piano della dinamica) del momento magnetico di dipolo  $\boldsymbol{\mu}$  delle particelle, relativo all'operatore

$$\boldsymbol{\mu}_3 = g \frac{\mu}{\hbar} \mathbf{S}_3 = \frac{g\mu}{2} \sigma_3, \quad (2.97)$$

in rappresentazione di spin  $1/2$ , ove

$$\mu = \frac{q\hbar}{2mc} \quad (2.98)$$

per particelle di carica  $q \neq 0$ , pertanto

$$\mu_3 = \frac{g}{2} \mu. \quad (2.99)$$

Appare con evidenza in (2.96) l'esistenza di una simmetria nella dipendenza delle quantità caratteristiche dei due effetti: quale trasformazione degli enti fisici permette di passare da  $\Delta\varphi_{\text{AB}}$  a  $\Delta\varphi_{\text{AC}}$ ?

Ebbene, mostreremo ora che la trasformazione di dualità  $\mathcal{A}$  che lega l'effetto Aharonov-Bohm e l'effetto Aharonov-Casher è lo *scambio vicendevole di cariche elettriche con la componente ortogonale dei momenti di dipolo magnetico* (cioè l'unica in grado di partecipare alla dinamica delle particelle):

$$\mathcal{A} : \quad \begin{cases} q \mapsto \mu_{\perp} \\ \mu_{\perp} \mapsto q \end{cases} \quad (2.100)$$

Tale operazione, infatti, per potere mandare  $\Delta\varphi_{\text{AB}} \mapsto \Delta\varphi_{\text{AC}}$  dovrebbe necessariamente eseguire la trasformazione

$$\mathcal{A} : \quad q \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbf{B}) \mapsto \mu_{\perp} \lambda, \quad (2.101)$$

cioè, vista la forma di (2.100), basta verificare che  $\mathcal{A} : \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbf{B}) \mapsto \lambda$ .

In effetti, il solenoide ideale  $\mathcal{S}$  di lunghezza infinita nell'effetto Aharonov-Bohm, in virtù del carattere topologico dell'effetto, può essere ridotto di raggio fino ad essere modellizzabile come una successione infinita di momenti magnetici di dipolo  $\boldsymbol{\mu}$  lungo l'asse  $z$ , ortogonale al piano della dinamica delle particelle, disposti con una densità lineare numerica  $\lambda^{(n)}$ : il campo magnetico da esso generato sarà, dunque, dato da

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \boldsymbol{\mu} \lambda^{(n)} \delta^{(2)}(x, y). \quad (2.102)$$

È semplice ora vedere che

$$\mathcal{A} : \quad \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbf{B}) = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\mu} \lambda^{(n)} \delta^{(2)}(x, y) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \mapsto \int_{\Sigma_w} q \lambda^{(n)} \delta^{(2)}(x, y) d\sigma = \lambda, \quad (2.103)$$

ove  $\Sigma_w$  è una superficie il cui bordo racchiude il filo carico, e si è identificato

$$\lambda = q \lambda^{(n)}. \quad (2.104)$$

Questo mostra che la trasformazione  $\mathcal{A}$  in (2.100) è effettivamente la corretta dualità tra i due effetti.

**Considerazione** Quanto appena trovato non dovrebbe stupire: già introducendo l'effetto Aharonov-Casher nel paragrafo 1.2.1 si è giunti ad una sua descrizione notando l'invarianza della lagrangiana dell'effetto Aharonov-Bohm sotto il particolare scambio (1.65) di coordinate delle cariche elettriche e coordinate dei momenti di dipolo magnetico.

Questo non è, evidentemente, un caso: tale simmetria in ambito lagrangiano costituisce proprio il naturale manifestarsi dell'esistenza fisica di fenomeni duali sotto scambio di  $q$  e  $\mu_\perp$ : gli effetti Aharonov-Bohm-Casher.

Come già notato, peraltro, nella sezione 1.2.2, tale operazione di scambio è ben diversa dalla più nota inversione di cariche elettriche e monopoli magnetici.

### 2.4.2 Il sottogruppo $SU(2)_\perp$

Risulta interessante capire che tipo di legame sussista tra la dualità  $q - \mu$  dei due effetti, illustrata nel paragrafo precedente ed appartenente con evidenza all'ambito dell'Elettrodinamica classica, e la dualità  $a_\mu - \rho_\mu$  delle connessioni responsabili degli effetti, illustrata nel paragrafo 2.2.2: entrambe le forme di dualità descrivono la stessa analogia fisica tra effetti, pertanto è naturale attendersi che vi sia una correlazione.

Iniziamo notando che, nell'effetto Aharonov-Casher esposto in §2.3.2, la condizione di scrittura come pura gauge del potenziale  $\rho_\mu$ ,

$$\rho_\mu = g \partial_k (g^{-1}), \quad (2.105)$$

possibile grazie alla curvatura di  $SU(2)$   $G_{\mu\nu}^l$  nulla all'esterno del filo, restringe i possibili campi di gauge a valori in  $SU(2)$  responsabili per l'effetto a quelli di forma

$$g = e^{-i\alpha \sigma_\perp}, \quad (2.106)$$

in rappresentazione di spin 1/2, ove  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\sigma_\perp$  è la matrice di Pauli relativa alla direzione ortogonale al piano cui è costretta la dinamica delle particelle.

Da ciò segue che, in forza delle caratteristiche bidimensionali del sistema considerato (dovute all'estensione infinita del filo carico), l'effetto Aharonov-Casher non è dovuto all'invarianza dell'equazione di Pauli generalizzata (2.56) sotto tutto il gruppo  $SU(2)$ , ma soltanto sotto il suo sottogruppo moltiplicativo 1-dimensionale

$$SU(2)_\perp := \{e^{-i\alpha \sigma_\perp} \in SU(2) : \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad (2.107)$$

che emula con evidenza il comportamento algebrico di

$$U(1) = \{e^{-i\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}\}. \quad (2.108)$$

Più esplicitamente, i due gruppi di Lie sono manifestamente isomorfi:

$$SU(2)_\perp \simeq U(1), \quad (2.109)$$

e ciò significa che l'effetto Aharonov-Casher in quest'ottica è *dovuto ad una copia conforme di  $U(1)$  in  $SU(2)$* .

Ci chiediamo, ora, quale sia la relazione tra i campi di gauge che parametrizzano i due effetti: l'operatore che manda i potenziali di gauge degli effetti l'uno nell'altro, cioè

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \quad U(1) &\longrightarrow SU(2)_\perp \\ e^{-i\chi(\mathbf{x})} &\longmapsto e^{-i \int_*^{\mathbf{x}} \boldsymbol{\rho} \cdot d\mathbf{l} \sigma_\perp}, \end{aligned} \quad (2.110)$$

dovrà necessariamente associare le funzioni  $\chi(\mathbf{x})$  e  $\int_*^{\mathbf{x}} \boldsymbol{\rho} \cdot d\mathbf{l}$ , ma una semplice riscrittura delle quantità (ricordato che  $\mathbf{A}$  è generato dal momento di dipolo magnetico  $\boldsymbol{\mu}$ ) restituisce

$$\begin{cases} \chi(\mathbf{x}) = \frac{q}{\hbar c} \int_*^{\mathbf{x}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\hbar c} \int_*^{\mathbf{x}} \frac{\boldsymbol{\mu}_\perp \times \mathbf{l}}{r^3} \cdot d\mathbf{l} & \text{(AB)} \\ \int_*^{\mathbf{x}} \boldsymbol{\rho} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\hbar c} \int_*^{\mathbf{x}} \boldsymbol{\mu}_\perp \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} & \text{(AC)} \end{cases}, \quad (2.111)$$

e da questa riformulazione delle funzioni di gauge è semplice rendersi conto che l'operatore agente sui campi di gauge  $\mathcal{A}$  è indotto direttamente dal medesimo operatore di scambio tra cariche elettriche e momenti di dipolo magnetico  $\mathcal{A}$  introdotto in §2.4.1.

Infatti, è sufficiente riconoscere nella prima delle (2.111) il campo elettrico generato dalla singola particella incidente nel proprio sistema di riferimento di quiete istantanea

$$\mathbf{E}(\mathbf{l}) = \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{l}}{r^3}, \quad (2.112)$$

per trovare la completa analogia tra i potenziali di gauge.

**Considerazione** Facciamo un paio di osservazioni circa l'origine della connessione di spin  $\rho_\mu$  di  $SU(2)$ .

La peculiare commistione di coefficienti di carattere elettrico e di spin nella forma di  $\rho_\mu$  in (2.75) potrebbe inizialmente sorprendere: si è abituati a considerare termini di interazione spin-magnetica in ambito non-relativistico.

Evidenziamo, a questo proposito, che ciò è dovuto all'introduzione nell'equazione di Pauli generalizzata dell'effetto di *interazione spin-orbita*: essa, insieme alla precessione di Larmor per campo magnetico, vanno a costituire la connessione di spin  $\rho_\mu$ , rispettivamente nella parte spaziale e temporale. Ce ne si può facilmente rendere conto ripercorrendo i passaggi che hanno portato alla formulazione dell'equazione (2.56).

In questo contesto, in effetti, emergono chiaramente le novità introdotte dalla equazioni di Pauli generalizzata nelle previsioni sulla dinamica: l'interazione spin-orbita, effetto relativistico del primo ordine, è la responsabile primaria per l'effetto Aharonov-Casher, ed esso ne rappresenta probabilmente la manifestazione non-banale più semplice.

La costrizione del sistema, infatti, ad una configurazione bidimensionale restringe i generatori di  $\mathfrak{su}(2)$  rilevanti per la dinamica ad uno soltanto, i.e.  $\sigma_{\perp}$ , il che corrisponde a restringere l'azione del gruppo di gauge a solo  $SU(2)_{\perp}$  e fisicamente ad avere interazione spin-orbita soltanto nella direzione ortogonale al piano della dinamica.

Concludiamo, pertanto, che la dualità fondamentale che sussiste tra gli effetti Aharonov-Bohm ed Aharonov-Casher consiste nello *scambio di cariche elettriche con momenti di dipolo magnetico* (2.100): sarà essa ad indurre, poi, la dualità delle connessioni sul fibrato in  $U(1) \times SU(2)$ .



## Capitolo 3

# Una verifica sperimentale

Scopo di questo capitolo conclusivo è illustrare i tratti salienti ed i risultati del primo esperimento finalizzato a verificare l'esistenza dell'effetto Aharonov-Casher nella diffusione di neutroni su elettrodi carichi, descritto nell'articolo [8] e comparso nel 1989, cinque anni dopo l'articolo teorico di riferimento [7].

Già in [7], in effetti, Aharonov e Casher esibivano una stima per la densità lineare di carica necessaria al fine di produrre uno spostamento di fase osservabile (i.e.  $\Delta\varphi_{AC} \simeq \frac{\pi}{2}$ ), calcolando

$$\lambda \simeq e \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-1}. \quad (3.1)$$

L'intuizione strategica che ha permesso di effettuare l'esperimento è stata di sfruttare l'assenza di restrizioni sul diametro del filo carico per ottenere densità di carica di questo ordine di grandezza.

### 3.1 Struttura dell'esperimento

Descriviamo l'esperimento: un diagramma dell'apparato sperimentale è mostrato in figura 3.1.

Un fascio di neutroni termici non polarizzati di lunghezza d'onda  $\lambda = 1.477\text{\AA}$  è fatto incidere a  $22.5^\circ$  su un interferometro di neutroni Bonse-Hart a singolo cristallo\*. In esso è, inizialmente, separato in due fasci per diffrazione Bragg dinamica e successivamente ricombinato in uscita, al fine di rilevarne la figura di interferenza tramite i rivelatori  $C_2$  e  $C_3$ .

---

\*Apparato sperimentale inventato da U. Bonse e M. Hart nel 1965 (*cfr.* [5]), originariamente pensato come interferometro di raggi X. Consiste in un singolo cristallo di silicio intrinseco perfetto (i.e. senza imperfezioni reticolari) da cui sono ricavate tre lamelle equispaziate (i piani S, M e A in sezione in figura 3.1). L'assenza di imperfezioni nel cristallo e la medesima composizione delle lamelle permette una divisione coerente del fascio di raggi X/neutroni incidente (cioè senza introdurre differenze di fase) in componente trasmessa e componente rifratta nel piano S. Si ha poi riflessione coerente in M dei fasci e il ricongiungimento in A (con eventuale interferenza). Nel 1974 H. Rauch, W. Treimer e U. Bonse hanno mostrato che lo stesso apparato sperimentale è efficace anche come interferometro di neutroni (*cfr.* [6]): tale è la configurazione qui illustrata.

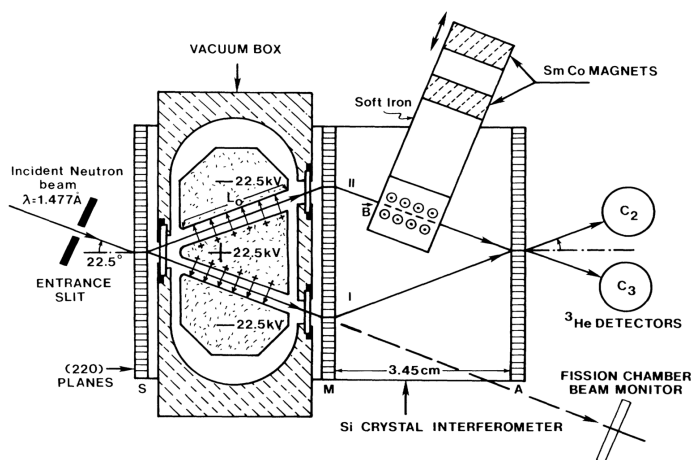


Figura 3.1: Diagramma dell'apparato interferometrico utilizzato per la misura dell'effetto; sono mostrate solo le traiettorie di neutroni rilevanti per l'esperimento. Illustrazione originale tratta da [8].

Note le specifiche della geometria dell'apparato e la differenza di potenziale tra gli elettrodi, mantenuta costante a  $45 \text{ kV}$ , si è calcolato uno spostamento di fase teorico per effetto Aharonov-Casher pari a

$$\left| \Delta\varphi_{AC}^{(th)} \right| = 1.5 \text{ mrad.} \quad (3.2)$$

Ora, detta  $\Delta\varphi$  la differenza di fase totale tra i neutroni sulle due diverse traiettorie I e II, si sono parametrizzati in modo naturale i tassi di rivelazione di neutroni in  $C_2$  e  $C_3$  con

$$\begin{cases} C_2 = a_2 - b_2 \cos \Delta\varphi \\ C_3 = a_3 + b_3 \cos \Delta\varphi \end{cases}, \quad (3.3)$$

ove  $a_{1,2}$  e  $b_{1,2}$  caratterizzano l'apparato interferometrico.

Dalla richiesta fisica che  $C_2 + C_3$  sia indipendente da  $\Delta\varphi$  si trova che, necessariamente,

$$b_1 = b_2 = b, \quad (3.4)$$

mentre le condizioni sperimentali determinavano il rapporto  $a_2/a_3 \simeq 3$ .

Peculiarità dell'esperimento è stata la tecnica utilizzata per massimizzare la sensibilità delle misure di differenze di conteggi, introducendo opportune fasi aggiuntive.

Precisiamo quanto affermato.

**Offset sperimentale** Utilizzando neutroni non polarizzati, l'apparato introduce tra i due fasci uno spostamento di fase sperimentale  $\Delta\varphi_0$ , indipendente dallo spin e di natura promiscua: al fine di annullarne



l'effetto, si introduce una ulteriore differenza di fase indipendente dallo spin, ma facilmente regolabile.

La fase spin-indipendente effettivamente introdotta è stata una fase  $\Delta\varphi_g$  gravitazionale: l'apparato sperimentale poteva ruotare attorno ad un asse nel piano dei fasci, in modo da portare a quote  $z(t)$  diverse i neutroni nel cammino I o II:

$$\Delta\varphi_g = \frac{mg}{\hbar} \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau, \quad \psi_g = e^{-i\Delta\varphi_g} \psi_0. \quad (3.5)$$

La differenza di fase spin-indipendente tra i fasci risulta, così,

$$\Delta\varphi^{(s.i.)} = \Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_g. \quad (3.6)$$

**Sensibilità massimizzata** Come si vedrà tra breve, è stato necessario introdurre una differenza di fase spin-dipendente ulteriore rispetto alla  $\Delta\varphi_{AC}$  al fine di rendere l'effetto di *shift* per Aharonov-Casher un effetto del primo ordine. Questa necessità è strettamente legata alla scelta fatta nella parametrizzazione (3.3).

La differenza di fase spin-dipendente effettivamente introdotta è stata una fase  $\Delta\varphi_m$  magnetica: facendo attraversare ai neutroni sul cammino II una regione di campo magnetico uniforme orientato lungo l'asse  $z$ , come gli elettrodi, ed uscente in figura 3.1, la fase dipende chiaramente dallo spin per via della precessione di Larmor, ed è facilmente regolabile.

Detto  $\sigma$  il segno della terza componente lungo l'asse  $z$  del momento magnetico del neutrone, la differenza di fase spin-dipendente tra i fasci risulta, dunque,

$$\Delta\varphi^{(s.d.)} = \sigma(|\Delta\varphi_m| \mp |\Delta\varphi_{AC}|), \quad (3.7)$$

a seconda che l'elettrodo centrale in figura 3.1 abbia polarità positiva o negativa, rispettivamente: infatti il campo magnetico avvertito dal neutrone attraversando la regione con campo elettrico è proporzionale a  $-\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ , ove  $\mathbf{v}$  è la velocità del neutrone.

Ne consegue che il tasso di conteggi, ad esempio, per il rivelatore  $C_3$  è dato da

$$\begin{cases} C_3^+(\pm) = \frac{a_3}{2} + \frac{b}{2} \cos[\Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_g + (|\Delta\varphi_m| \mp |\Delta\varphi_{AC}|)] & (\textit{spin up}) \\ C_3^-(\pm) = \frac{a_3}{2} + \frac{b}{2} \cos[\Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_g - (|\Delta\varphi_m| \mp |\Delta\varphi_{AC}|)] & (\textit{spin down}) \end{cases} \quad (3.8)$$

cosicché, per un fascio non polarizzato di neutroni si ottiene

$$\begin{aligned} C_3(\pm) &= C_3^+(\pm) + C_3^-(\pm) = \\ &= a_3 + b \cos(\Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_g) \cos(|\Delta\varphi_m| \mp |\Delta\varphi_{AC}|) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Analogamente si ha, per  $C_2$ ,

$$C_2(\pm) = a_2 - b \cos(\Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_g) \cos(|\Delta\varphi_m| \mp |\Delta\varphi_{AC}|). \quad (3.10)$$

È, ora, chiaro come sfruttare la fasi introdotte nell'esperimento per migliorarne la precisione:

**Spin-indipendente** Si ruoterà l'apparato in modo da ottenere

$$\Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_g = 0 \pmod{2\pi}. \quad (3.11)$$

**Spin-dipendente** Si modificherà l'intensità del campo magnetico in modo da ottenere

$$\Delta\varphi_m = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}. \quad (3.12)$$

Con questi accorgimenti, ricordato che  $\Delta\varphi_{AC}^{(th)} \simeq 0$ , si arriva alle relazioni

$$\begin{cases} C_3(\pm) = a_3 + b \sin(\pm|\Delta\varphi_{AC}|) \simeq a_3 \pm b|\Delta\varphi_{AC}| \\ C_2(\pm) = a_2 - b \sin(\pm|\Delta\varphi_{AC}|) \simeq a_2 \mp b|\Delta\varphi_{AC}| \end{cases}, \quad (3.13)$$

che mostrano evidentemente che, in tale configurazione sperimentale, si è riusciti a rendere l'effetto di spostamento di fase per Aharonov-Casher un effetto del primo ordine.

Rileviamo, inoltre, che eventuali variazioni indesiderate di  $\Delta\varphi_0$ , dovute ad instabilità dell'apparato sperimentale, rientrano nelle relazioni soltanto al secondo ordine, grazie alla scelta iniziale di parametrizzazione con  $\cos(\Delta\varphi)$ .

Data la previsione teorica di  $\Delta\varphi_{AC}$  estremamente piccola, ci si aspettava che la modifica dei tassi di conteggio dovuta all'effetto Aharonov-Casher dovesse essere dell'ordine di 1 parte per 1000: per questa ragione, è stato necessario raccogliere circa  $10^7$  eventi di rivelazione di neutroni, il che ha impiegato approssimativamente cinque mesi.

Al fine di ridurre al minimo l'influenza di alcuni eventuali errori sistematici, le prese dati sono state effettuate invertendo periodicamente la polarità degli elettrodi e aggiornando settimanalmente il punto di lavoro dell'apparato, inclusa l'intensità del campo magnetico e l'angolo di rotazione dell'interferometro.

## 3.2 Risultati

Al fine di determinare sperimentalmente le differenze di conteggi  $C_2$  e  $C_3$  nelle diverse polarità ed il valore del parametro  $b$ , si sono prese le misure di conteggi in  $C_2$  e  $C_3$  per diversi valori di intensità del campo magnetico esterno, una volta determinato il punto di lavoro ottimale per la fase gravitazionale: sono presentati in figura 3.2.

Si sono, quindi, misurate le differenze di conteggi in 4 diversi punti di lavoro per la fase magnetica (*cfr.* figura 3.2):

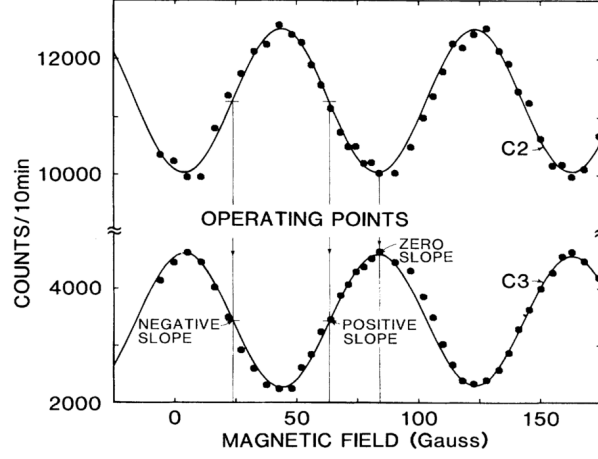


Figura 3.2: Presa dati per la determinazione dei punti di lavoro magnetici. Grafico originale tratto da [8].

Condizione sperimentale	$C_2(+)-C_2(-)$	$C_3(+)-C_3(-)$
Controllo	$-5136 \pm 6428$	$643 \pm 3469$
Pendenza positiva	$13462 \pm 6223$	$-8019 \pm 3494$
Pendenza negativa	$-9986 \pm 6097$	$8243 \pm 3413$
Pendenza nulla	$1718 \pm 6020$	$-3631 \pm 3979$

Tabella 3.1: Dati sperimentali: differenze di conteggi dei rivelatori sotto inversione di polarità degli elettrodi.

1. dati di controllo (campo magnetico spento):  $\Delta\varphi_m = 0$ ;
2. pendenza negativa:  $\Delta\varphi_m = \frac{\pi}{2}$ ;
3. pendenza positiva:  $\Delta\varphi_m = \frac{3\pi}{2}$ ;
4. pendenza nulla:  $\Delta\varphi_m = 2\pi$ .

I risultati sono riportati in tabella 3.1.

Segnaliamo che per ciascuna condizione sperimentale la presa dati è consistita di circa 1700 cicli di inversione di polarità degli elettrodi, corrispondenti approssimativamente a 35 giorni di presa dati.

Osserviamo, anzitutto, che le differenze di conteggi nell'esperimento di controllo e nella configurazione a pendenza nulla sono perfettamente compatibili con lo zero, come atteso.

Computando, poi, la media statistica ponderata delle differenze  $\Delta C_2$  e  $\Delta C_3$ , escludendo i dati di controllo, si trova

$$\langle \Delta C \rangle = \text{Media}\{\Delta C_2, \Delta C_3\} = 9010 \pm 2130, \quad (3.14)$$

mentre tramite un fit dei dati in figura 3.2 con le (3.3) si determina

$$b = 2057000 \pm 57000 \text{ conteggi/1700 cicli.} \quad (3.15)$$

Si calcola, così, lo spostamento di fase Aharonov-Casher sperimentale

$$\Delta\varphi_{AC}^{(\text{exp})} = \frac{\langle\Delta C\rangle}{2b} = 2.19 \pm 0.52 \text{ mrad.} \quad (3.16)$$

Confrontandolo con il valore teorico atteso, si ha

$$\frac{\Delta\varphi_{AC}^{(\text{exp})}}{\Delta\varphi_{AC}^{(\text{th})}} = 1.46 \pm 0.35, \quad (3.17)$$

cioè l'accordo tra teoria ed esperimento non è eccellente: è compreso tra  $1\sigma$  e  $2\sigma$ .

A tale proposito, va considerato il fatto che l'esperimento, il primo del suo tipo, soffre di pesanti patologie sistematiche quali l'enorme estensione temporale della presa dati, l'instabilità della strumentazione e l'intensità limitata del flusso di neutroni disponibile.

L'errore casuale presentato nella (3.17), peraltro, è di origine prettamente statistica: eventuali contributi sistematici sarebbero, quindi, da aggiungere in una analisi più approfondita.

Malgrado queste criticità, il risultato ottenuto e qui riportato rappresenta la prima conferma sperimentale dell'esistenza dell'effetto Aharonov-Casher, che è stata successivamente corroborata da ulteriori verifiche sperimentali (ad esempio, *cfr.* [10]).

# Conclusione

Ciò che si è illustrato in questo lavoro di tesi sono stati, inizialmente, la comune natura *topologica* degli effetti Aharonov-Bohm ed Aharonov-Casher ed un primo legame di dualità legato allo scambio di cariche elettriche e momenti di dipolo magnetico.

Si è, quindi, mostrato come la teoria che descrive questi due effetti, la Meccanica Quantistica non-relativistica in campi elettromagnetici lentamente variabili, goda di una intrinseca invarianza di gauge sotto  $U(1) \times SU(2)$  (approssimata al terzo ordine in  $1/m$ ,  $m$  massa della particella incidente). Questo ha suggerito l'adozione di un formalismo proprio della Geometria Differenziale nella trattazione.

È stato possibile spiegare, dunque, gli effetti Aharonov-Bohm-Casher come conseguenza della curvatura non-banale del fibrato principale associato ai sistemi fisici che esibiscono tali effetti. La stessa natura topologica degli effetti, precedentemente sottolineata, è stata ottenuta come conseguenza di tale descrizione.

Si è proposta, inoltre, una verifica sperimentale diretta del 1989 dell'effetto Aharonov-Casher tramite un esperimento di interferometria di neutroni, di cui si sono illustrate le caratteristiche essenziali ed i risultati ottenuti; questi ultimi, malgrado un accordo non particolarmente soddisfacente con le previsioni teoriche, hanno portato una prima evidenza sperimentale dell'effetto.

Concludiamo menzionando che il legame di dualità tra i due effetti Aharonov-Bohm ed Aharonov-Casher è stato qui completamente esplicitato evidenziando come essi siano ottenibili l'uno dall'altro sotto lo *scambio di cariche elettriche e momenti di dipolo magnetico* (tenuto conto del piano cui è naturalmente costretta la dinamica in ciascun sistema fisico associato agli effetti) in virtù dell'isomorfismo esistente tra i gruppi di gauge  $U(1)$  e  $SU(2)_\perp$  che li generano.



# Bibliografia

- [1] WEYL, H., *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, “Zeitschrift für Physik”, **46**, 1927, 1 - 46.
- [2] FOLDY, L. L., E S. A. WOUTHUYSEN, *On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit*, “Physical Review”, **78**, 1950, 29 - 36.
- [3] AHARONOV, Y., E D. BOHM, *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, “Physical Review”, **115**, 1959, 485 - 491.
- [4] BARGMANN, V., L. MICHEL, E V. L. TELEGDI, *Precession of the Polarization of Particles Moving in a Homogeneous Electromagnetic Field*, “Physical Review Letters”, **2**, 1959, 435 - 436.
- [5] BONSE, U., E M. HART., *An X-Ray Interferometer*, “Applied Physics Letters”, **6**, 1965, 155 - 156.
- [6] RAUCH, H., W. TREIMER, E U. BONSE, *Test of a single crystal neutron interferometer*, “Physics Letters”, **47A**, 1974, 369 - 371.
- [7] AHARONOV, Y., E A. CASHER, *Topological Quantum Effects for Neutral Particles*, “Physical Review Letters”, **53**, 1984, 319 - 321.
- [8] CIMMINO, A., G. I. OPAT, A. G. KLEIN, H. KAISER, S.A. WERNER, M. ARIF E R. CLOTHIER, *Observation of the Topological Aharonov-Casher Phase Shift by Neutron Interferometry*, “Physical Review Letters”, **63**, 1989, 380 - 383.
- [9] FRÖHLICH, J., E U. M. STUDER, *Gauge invariance and current algebra in nonrelativistic many-body theory*, “Review of Modern Physics”, **65**, 1993, 733 - 799.
- [10] BERGSTEN, T., T. KOBAYASHI, Y. SEKINE E J. NITTA, *Experimental demonstration of the time reversal Aharonov-Casher effect*, “Physical Review Letters”, **97**, 2006, n. 196803.