

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
"GALILEO GALILEI"

CORSO DI LAUREA IN FISICA

TESI DI LAUREA

**DINAMICA DI DISCHI DI
ACCRESIMENTO ECCENTRICI E
LEGAME CON I FENOMENI DI
'SUPERHUMP'**

Relatore:
PROF. Francesco MARZARI

Laureando:
Marco PALLA

Anno Accademico 2015/2016

Indice

Introduzione	3
1 Concetti di base	4
1.1 Definizione delle Variabili Cataclismiche	4
1.2 Classificazione delle Variabili Cataclismiche	4
1.3 Novae Nane	5
1.3.1 SU Ursae Majoris	5
2 Fenomeni di ‘superhump’: legame con l’eccentricità del disco	6
2.1 Modelli per spiegare i ‘superhump’	6
2.1.1 Primi modelli	6
2.1.2 Whitehurst e successivi: ‘superhump’ come fenomeno mareale dei dischi di accrescimento	7
2.2 Problemi aperti	8
3 L’equazione di eccentricità per un disco in 2D	10
3.1 Derivazione dell’equazione di eccentricità	10
3.2 Il potenziale mareale	13
3.3 Generazione dell’eccentricità	15
3.4 Smorzamento dell’eccentricità	15
3.5 Autovalori equazione finale - rate di precessione e rate di crescita	17
4 Soluzioni per le equazioni di eccentricità	19
4.1 Comportamento dell’eccentricità in un anello sottile	19
4.2 Soluzioni dell’equazione dell’eccentricità completa	23
4.2.1 Rate di precessione	25
4.2.2 Rate di crescita	30
5 Conclusioni	32

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi sarà discutere della dinamica dei dischi di accrescimento presenti nei sistemi binari SU Ursae Majoris e del loro legame con i fenomeni di 'superhump'. Questi particolari eventi, i quali non sono altro che una modulazione rilevante della curva luminosa del citato sottogruppo delle stelle variabili cataclismiche, si vedranno essere legati all'evoluzione dell'eccentricità del disco.

In particolare, si elaborerà e si guarderà ai risultati di un modello bidimensionale che descriva l'eccentricità del disco nei suoi vari aspetti, tenendo conto degli effetti su di essa dovuti al potenziale della stella compagna, alla presenza di una risonanza di Lindblad 3:1 ed alla viscosità.

Dopo un richiamo dei concetti fondamentali per comprendere il fenomeno (parte 1), l'elaborato si protrarrà parlando dell'evoluzione della teoria riguardo ai fenomeni di 'superhump' e delle lacune che rimangono allo stato attuale (parte 2). Da questo punto si svilupperà la derivazione dell'equazione che descrive il disco di accrescimento (parte 3) e l'esposizione dei risultati delle simulazioni compiute a partire da essa (parte 4), per concludere poi con alcune considerazioni sui risultati ottenuti ed i limiti del metodo, che potrebbero essere ridotti utilizzando un modello in 3D (parte 5).

1 Concetti di base

1.1 Definizione delle Variabili Cataclismiche

Le Variabili Cataclismiche (CVs) sono un sottoinsieme di quello che è il gruppo delle stelle variabili binarie, caratterizzato dal fatto di avere un periodo orbitale di meno di mezza giornata (da una a dieci ore tipicamente). Questi sistemi sono da tempo oggetto di studio in astrofisica visto la moltitudine di fenomeni prodotti, in primis il cosiddetto ‘outburst’: letteralmente un’improvvisa eruzione/emissione di energia da parte del sistema.

Andando più nello specifico, le CVs sono delle binarie costituite da una stella primaria, una nana bianca, e una secondaria, generalmente una nana rossa. Questi sono sistemi ‘semi-detached’, cioè nei quali una delle due stelle riempie totalmente il suo lobo di Roche¹: questa stella è la nana rossa, che dunque fa passare un flusso di materiale accrescente attraverso il punto lagrangiano L_1 verso l’altro corpo. Questo materiale però non cade direttamente sulla superficie della nana bianca che, al contrario della stella compagna, è molto piccola rispetto al raggio del suo lobo, ma per conservazione di momento angolare entra in orbita attorno alla primaria. Le collisioni delle particelle di gas nelle orbite successive all’entrata portano poi alla dissipazione di energia ma soprattutto alla formazione di un disco attorno alla nana bianca.

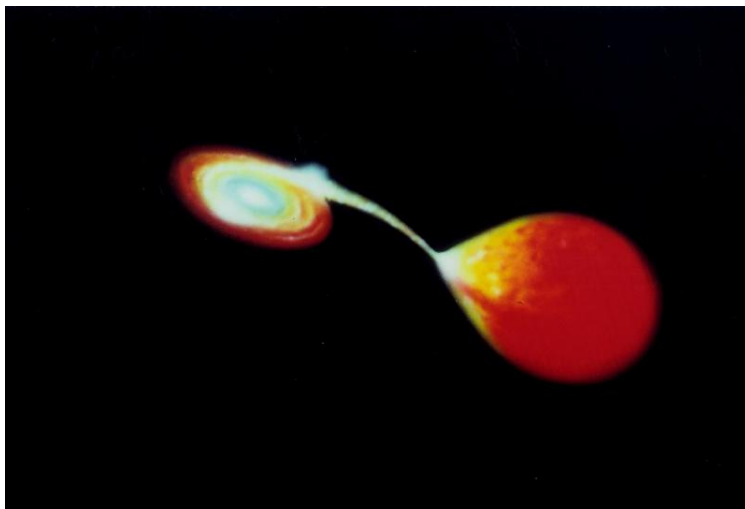


Figura 1: ricostruzione pittorica di una Variabile Cataclismica (per gentile concessione di Newsletter of the Fresno State College of Science and Mathematics <http://archive.constantcontact.com/fs073/1102704765894/archive/1108081650766.html>)

Va comunque detto che tutto ciò accade soltanto se la nana bianca non ha un campo magnetico importante; se questo invece è presente il materiale accrescente è forzato a seguire le linee di campo e va a scontrarsi con la superficie della primaria in corrispondenza dei poli magnetici di quest’ultima. Ovviamente tra questi due comportamenti estremi si troveranno anche delle situazioni intermedie.

1.2 Classificazione delle Variabili Cataclismiche

Le Variabili Cataclismiche si dividono in 4 (o 5, considerando le nova-like) categorie, a loro volta suddivise in sottocategorie: elencandole abbiamo

¹è la superficie (a forma di goccia) del potenziale di Roche, il quale è il potenziale totale nel sistema di riferimento rotante con velocità angolare orbitale delle stelle

- Novae Classiche (CNs)
- Novae Ricorrenti (RNs)
- Novae Nane (DNs), suddivise in Z Camelopardalis (Z Cam), SU Ursae Majoris (SU UMa), U Geminorum (U Gem)
- Variabili Cataclismiche Magnetiche (MCVs), divise a loro volta in polari e polari intermedie
- Variabili Nova-like (NLs)

La descrizione di ciascuno delle CVs va però oltre lo scopo di questo elaborato (se si volesse approfondire l'argomento si consiglia la review di Warner, "Cataclysmic Variable Stars",[2]): l'attenzione sarà rivolta alle caratteristiche delle Novae Nane ed in particolare del sottogruppo delle SU Ursae Majoris, funzionalmente ai nostri intenti.

1.3 Novae Nane

Parlando in generale delle Novae Nane, questi sono sistemi che esibiscono 'outbursts' dove la luminosità della stella aumenta da 2 a 5 magnitudini² (mag), con alcuni oggetti che arrivano fino ad 8 mag. L'intervallo tra due eruzioni varia all'interno di questa classe dalla decina di giorni alle decine d'anni. Proprio la ripetitività delle eruzioni distingue le DNs dalle CNs, di cui si osserva soltanto un 'outburst' nella loro intera vita, mentre per quanto riguarda la distinzione tra DNs e RNs, si ricorre invece ad osservazioni spettroscopiche³. Pensando invece alla durata degli 'outbursts' nelle Novae Nane, questa varia tra i 2 e i 20 giorni ed è correlata con il tempo di attesa tra due eruzioni.

1.3.1 SU Ursae Majoris

Come già detto precedentemente, la nostra attenzione è rivolta verso il sottogruppo delle SU Ursae Majoris, l'unico tipo di Variabile Cataclismica che presenta 'superhumps'.

I suddetti sistemi, oltre a mostrare gli 'outbursts' che ci si aspetterebbe da una Nova Nana fanno vedere un ulteriore fenomeno, correlato ma al tempo stesso distinto: il 'superoutburst'. Queste eruzioni sono approssimativamente più luminose di circa 1 mag ed inoltre persistono solitamente per circa 5 volte la durata di un normale 'outburst'; non bisogna poi dimenticare come questo fenomeno, per quanto meno frequente delle normali eruzioni caratteristiche delle Novae nane, intervenga ad intervalli più regolari.

Non dilungandosi ad elencare tutti i dettagli (se si volesse approfondire si consiglia sempre il testo di Warner) due punti importanti sono sicuramente il periodo orbitale delle SU UMa, una delle prerogative assieme ai 'superoutbursts' che distingue questi sistemi dalle altre Novae Nane, e il rapporto tra le masse delle stelle compagne q , diretta conseguenza del periodo osservato⁴. Andando a vedere proprio i periodi orbitali di queste CVs, si può notare come questi siano i più brevi tra le Novae Nane e non vadano mai oltre le 3 ore: corrispondentemente il rapporto tra le masse previsto sarà minore di 0.25-0.3. Quest'ultima caratteristica in particolare è di grande importanza per lo sviluppo della teoria che si andrà a presentare.

²la magnitudine di una stella è una unità di misura logaritmica della sua luminosità. E' definita come $\text{mag} = -2.5 \log_{10} F + \text{cost}$, dove F è la densità del flusso misurato nella particolare banda d'onda considerata

³la differenza risiede nel fatto che, mentre nelle Novae Ricorrenti abbiamo un'emissione di una shell ad alte velocità, nelle Novae Nane non si verifica alcuna emissione di materiale durante un 'outburst'

⁴in realtà sarebbe il contrario, ma dal nostro punto di vista l'osservabile più "diretta" è il periodo orbitale e la situazione si capovolge

2 Fenomeni di ‘superhump’: legame con l’eccentricità del disco

I fenomeni di ‘superhump’ sono certamente la caratteristica più enigmatica dei ‘superoutbursts’ nelle SU Ursae Majoris. Ma cosa sono effettivamente?

Il ‘superhump’ è una modulazione periodica significativa (nell’ordine del 30%) della curva luminosa della stella SU UMa durante il ‘superoutburst’, con periodo molto simile a quello orbitale della binaria; generalmente è leggermente più lungo di quest’ultimo (tra il 3% ed il 7%): in questo caso si parla di ‘superhumps’ positivi o normali. Al contrario si usa il termine di ‘superhumps’ negativi se il periodo della modulazione è più piccolo di quello orbitale: per quanto meno frequenti, anche questi sono stati osservati.

Fino a poco tempo fa, i ‘superhumps’ sembravano essere prerogativa delle SU UMa durante i ‘superoutbursts’. Recentemente però sono stati trovati fenomeni di questo tipo anche in binarie a raggi X di massa piccola (LMXBs) ed in altri sistemi in cui il ‘superhump’ non è collegato alle eruzioni, ma è semplicemente la variazione della normale curva di luce del sistema binario: quest’ultimo caso è quello che viene definito un ‘permanent superhump system’.

Per il proseguio del nostro lavoro ci concentreremo comunque sui ‘superhumps’ classici.

2.1 Modelli per spiegare i ‘superhump’

La prima osservazione di fenomeni di ‘superhump’ è avvenuta attorno alla metà degli anni ’70 (Vogt, 1974; Warner, 1975). Da quel momento i sistemi SU UMa, di fatto gli unici, fino a poco tempo fa, dai quali venivano osservate queste particolari modulazioni della curva luminosa, acquisirono un grande interesse teorico.

Da qui partì la corsa per cercare un modello che potesse spiegare tutte le caratteristiche di questo gruppo di Novae Nane, ‘superhumps’ compresi.

2.1.1 Primi modelli

Elenchiamo di seguito brevemente i primi modelli che si susseguirono dalla metà degli anni ’70 alla metà degli ’80, con le loro incongruenze rispetto alle evidenze derivanti dalle osservazioni

- modello starspot (Vogt, 1974; Whitehurst, Bath & Charles, 1984):
vi è una regione luminosa sulla stella secondaria, che ruota su se stessa in maniera non sincronizzata rispetto alla sua orbita. Problema: ad eccezione del periodo del ‘superhump’, il modello non spiega nessun’altra caratteristica del fenomeno.
- modello ad orbita eccentrica (Papaloizou & Pringle, 1979):
La binaria ha un’orbita leggermente eccentrica, il che provvederebbe ad una modulazione del trasferimento di massa dalla compagna alla primaria: questo a sua volta spiegherebbe il ‘superhump’. Problema: non riesce a spiegare perchè i ‘superhumps’ avvengono soltanto in occasione di ‘superoutbursts’, il range dei periodi previsti è troppo poco ampio per soddisfare i dati osservativi.
- modello polare intermedia (Warner, 1985):
la nana bianca ha un campo magnetico sufficientemente forte da indirizzare il flusso di materiale verso uno dei poli magnetici, il quale illumina il materiale presente nel disco; l’interazione tra il periodo di spin della primaria e il periodo orbitale dà origine al fenomeno. Problema: è un modello fenomenologico (costruito a partire dai dati), non convince il lento spin della nana bianca, confrontandolo con quello delle MCVs.

- modello empirico di Vogt (Vogt, 1982):
il ‘superhump’ sarebbe generato dal variabile ammontare di energia cinetica rilasciata da una fonte luminosa formata dallo ‘shock front’ tra il flusso di materia ed un anello ellittico di materiale accrescente che si crea al di fuori del disco. Sia considerazioni teoriche che osservative smontano però completamente la proposta.
- modello empirico di Osaki (Osaki, 1985):
in questo caso il disco attorno alla primaria è eccentrico, il che porta ad un trasferimento di massa variabile dalla secondaria: questa modulazione sarebbe il principale responsabile del ‘superhump’. Al contrario delle altre, questa spiegazione riesce a soddisfare molte delle proprietà del fenomeno, ma rimane ancora non chiaro come possa essersi formata l’asimmetria e quale sia la relazione tra le fasi della modulazione del trasferimento di massa e del disco eccentrico.

Un fallimento comune tra tutti questi modelli è la loro mancanza di capacità di predizione dei dati. Manca inoltre una spiegazione del perché le SU UMa si comportino diversamente dalle altre Novae Nane.

2.1.2 Whitehurst e successivi: ‘superhump’ come fenomeno mareale dei dischi di accrescimento

Ad oggi la spiegazione più probabile per i ‘superhumps’ nei sistemi SU Ursae Majoris deriva dal modello proposto di Whitehurst [6] nel 1988.

Lavorando su simulazioni della stella Z Chamaeleontis (ZCha) durante ‘outbursts’, queste mostrarono che per binarie con rapporto di massa tra i due corpi estremo, cioè minore o uguale a 0.25 (come accade per le SU UMa), il disco è marealmente instabile per la presenza di una qualche risonanza nella parte più esterna del disco, cosicché possa diventare asimmetrico e iniziare a ruotare nel sistema di riferimento rotante della binaria, cioè a precedere. Gli stress mareali innalzati nel disco dalla stella compagna produrrebbero, secondo i calcoli numerici, picchi nella curva luminosa dell’ordine del 30% con un periodo di circa il 3.5% maggiore rispetto a quello orbitale, in maniera perfettamente coerente con le osservazioni.

Sfruttando anche il modello empirico di Osaki (vedi 2.1.1) nell’articolo venne anche proposta un’espressione analitica per il rate di precessione del disco, legato ovviamente a stretto filo al periodo del ‘superhump’; utilizzando un potenziale simmetrico ed aggiungendo la perturbazione della stella compagna (assumendo che quest’ultima agisca solo nella direzione radiale) si ottenne:

$$\frac{\omega_{dyn}}{\Omega} = \frac{3qr^{3/2}}{4(1+q)^{1/2}a^{3/2}} \quad (1)$$

dove ω_{dyn} è il rate di precessione medio calcolato, Ω è la frequenza orbitale della binaria, a la distanza tra le due stelle e q il rapporto tra le masse della primaria e della secondaria.

Successivamente Hirose & Osaki [4], lavorando ad ulteriori simulazioni a partire dalla proposta di Whitehurst, sono riusciti ad apportare ulteriori miglioramenti e giustificazioni alla teoria, dimostrando come quella risonanza che causa l’instabilità mareale è una risonanza parametrica 3 : 1 tra la frequenza angolare del disco e la frequenza angolare orbitale della binaria.

Nel loro lavoro, i due scienziati giapponesi svilupparono la (1), cioè l’espressione del rate di precessione del disco in funzione di q . Tenendo conto anche degli altri termini del potenziale mareale e non soltanto quello di ordine più basso, si ottenne (ponendo $a=1$):

$$\frac{\omega_{dyn}}{\Omega} = \frac{q}{(1+q)^{1/2}} \left[\frac{1}{2r^{1/2}} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dB_0}{dr} \right) \right] \quad (2)$$

dove

$$B_0 = b_{1/2}^{(0)}/2 = 1 + r^2/4 + 9r^4/64 \quad (3)$$

con $b_{1/2}^{(0)}$ coefficiente di Laplace in meccanica celeste⁵, mentre r corrisponde al raggio della risonanza 3:1.

Con lo stesso obbiettivo, Lubow [7], criticando l'algoritmo scelto da Hirose & Osaki per i loro calcoli, che considerava particelle non interagenti, migliorò ulteriormente lo stato della teoria: tra le (poche) risonanze presenti all'interno del disco l'unica interessante, per altro disponibile solo in sistemi con $q \leq 0.25$, è una risonanza di Lindblad eccentrica interna (eccentric inner Lindblad resonance), con rapporto 3 : 1 sempre tra frequenza angolare del disco e frequenza angolare orbitale della binaria. Della crescita dell'eccentricità del disco, dovuta all'instabilità causata dalla risonanza sopra citata, sempre Lubow derivò un'espressione analitica, che per ora ci limiteremo solo a presentare (la riprenderemo nella sezione 3.3):

$$\xi = 2.08C\Omega q^2 \frac{r_{res}}{r_{out} - r_{in}} \quad (4)$$

con C fattore di correzione dipendente dalla dimensione dell'anello, r_{res} raggio della risonanza, r_{out} raggio esterno, r_{in} raggio interno.

Al contrario dei primi modelli le osservazioni, dalle mappe delle eclissi delle Novae Nane agli ultimi studi spettroscopici, questa volta vanno a supportare quanto appena riportato.

2.2 Problemi aperti

Come abbiamo visto, fino a questo momento si è utilizzato per stimare il rate di precessione del disco eccentrico la (2), cioè frequenza di precessione di una particella dovuta alle forze mareali. Riscrivendola in termini dei coefficienti di Laplace ed il semiasse maggiore del disco a

$$\frac{\omega_{dyn}}{\Omega} = \frac{q}{(1+q)^{1/2}} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r}{a} \right)^{1/2} b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{r}{a} \right) \right] \quad (5)$$

Sfruttando la caratteristica delle SU UMa di avere un rapporto tra le masse piccolo, il rate di precessione può essere dunque visto come grosso modo proporzionale al rapporto tra masse q . Solitamente però nelle osservazioni si preferisce esprimere questo rate nei termini dell'eccesso di periodo del 'superhump', legato sempre alla frequenza e certamente più comodo da ricavare sperimentalmente, definito come

$$\varepsilon = \frac{P_{sh} - P_{orb}}{P_{orb}} = \frac{\omega_{prec}}{\Omega - \omega_{prec}} \quad (6)$$

dove P_{sh} periodo del 'superhump', P_{orb} periodo dell'orbita, ω_{prec} frequenza di precessione osservata.

Anche in questo caso si riscontra una relazione approssimativamente lineare, questa volta tra ε e q . Utilizzando i dati raccolti per 8 CVs eclissanti da Patterson [8] (Tabella 1) otteniamo infatti un fit lineare, che lascia la relazione

$$\varepsilon = (0.216 \pm 0.018) q$$

raffigurata dalla Figura 2 a pagina successiva.

⁵in generale $b_{s/2}^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(j\psi)}{[1+\alpha^2-2\alpha \cos \psi]^{s/2}} d\psi$

stella	ε	q
WZ Sge	0.0080 ± 0.0006	0.045 ± 0.020
OY Car	0.0203 ± 0.0015	0.10 ± 0.01
Z Cha	0.0364 ± 0.0009	0.145 ± 0.015
IY UMa	0.0260 ± 0.0010	0.13 ± 0.02
HT Cas	0.0330 ± 0.0030	0.15 ± 0.01
DV UMa	0.0343 ± 0.0010	0.155 ± 0.015
V2051 Oph	0.0310 ± 0.0010	0.19 ± 0.03
UU Aqr	0.0702 ± 0.0019	0.30 ± 0.07

Tabella 1: dati utilizzati per il fit lineare ε - q

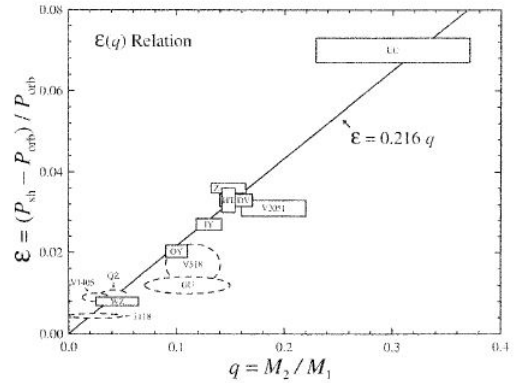


Figura 2: grafico relazione lineare ε - q

Fino a qui tutto bene, ma il problema sorge subito utilizzando ω_{dyn} come stima della frequenza di precessione del disco ω_{prec} . Sia Murray [9] che Patterson [8] notarono che utilizzando ω_{dyn} calcolato al raggio della risonanza responsabile dell'eccentricità del disco ($0.43a$ - $0.48a$, per il range delle q considerate) si ottenevano valori decisamente sballati per la relazione ε - q (Murray: $\varepsilon \approx 0.4q$, Patterson: $\varepsilon \approx 0.35q$). Proprio Murray e Patterson diedero due possibili diverse interpretazioni e soluzioni del problema, concordando però entrambi sul fatto che fosse necessario un trattamento fluidodinamico del disco, per ottenere un'espressione più accurata che lo descriva.

Il primo propose che fosse necessario introdurre un termine negativo dovuto alle forze di pressione nel disco ω_{pr} , il che porterebbe ad una buona concordanza con i dati.

Patterson dal canto suo, pur attribuendo agli effetti viscosi il rallentamento della precessione, ipotizzò che si potesse ottenere un valore realistico del coefficiente angolare del fit utilizzando sempre (5) come espressione del rate di precessione ma utilizzando un raggio interno alla risonanza, $r=0.37a$, supponendo che il termine viscoso scali allo stesso modo di quello dinamico. In aggiunta, basandosi su alcune evidenze osservative, lo stesso Patterson suggerì che il rate di precessione fosse determinato dall'effetto del potenziale mareale non solo al raggio di risonanza ma su di una corona circolare di un certo spessore: il fatto di utilizzare $\langle r \rangle = 0.37a$ potrebbe essere effetto proprio di questa media pesata sul raggio del disco che partecipa al fenomeno.

Rimangono dunque alcune lacune nella descrizione: l'equazione (5), pur riproducendo il comportamento corretto della precessione del disco, riserva come abbiamo appena visto alcuni problemi. Inoltre fino ad ora si sono sempre trattati separatamente precessione e crescita dell'eccentricità. Da qui dunque la necessità di costruire una descrizione più completa del comportamento dell'eccentricità E nel disco di accrescimento delle stelle SU Ursae Majoris, che possa contenere sia i termini legati al rate di precessione che quelli al rate di crescita dell'eccentricità e che riesca a risolvere altre lacune rimanenti. Saranno evitati modelli in 3D, pesanti da digerire sia dal punto di vista analitico che da quello degli algoritmi numerici, concentrandosi dunque su una teoria bidimensionale che tenga comunque conto di tutti i contributi all'eccentricità e che possa perciò spiegare al meglio tutti i fenomeni legati ad essa, come quelli di 'superhump'.

3 L'equazione di eccentricità per un disco in 2D

Per costruire l'equazione che descriva il comportamento dell'eccentricità E di un disco bidimensionale, si procederà per gradi.

Partendo dalle equazioni di Eulero per un disco, si perturberà linearmente il sistema per ottenere una prima equazione che descriva E . Quest'ultima non tiene conto però di tutti i fattori che influenzano il disco: potenziale mareale, risonanza, viscosità saranno aggiunti in seguito per comporre l'equazione finale. Solo considerando tutti questi termini infatti si riusciranno ad ottenere autovalori che tengano conto sia del rate di precessione del disco che del rate di crescita dell'eccentricità.

3.1 Derivazione dell'equazione di eccentricità

Per derivare l'equazione di eccentricità, si comincia considerando un modello di un disco non perturbato, in 2D, senza viscosità.

Per sviluppare quest'ultimo le equazioni della fluidodinamica che non considerano la viscosità (note come equazioni di Eulero) sono ciò su cui ci si baserà. Si guarderà dunque all'equazione di conservazione del momento ⁶

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}P - \rho \vec{\nabla}\phi \quad (7)$$

con ρ densità, \vec{v} vettore velocità in coordinate cartesiane, P pressione e ϕ potenziale gravitazionale, e all'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (8)$$

sfruttando poi la legge adiabatica

$$P\rho^{-\gamma} = cost \quad (9)$$

(con γ esponente adiabatico) per ottenere un'ulteriore forma dell'equazione di continuità, questa volta in funzione di P .

Vista la forma dell'oggetto che si sta studiando, risulta comunque più comodo esprimere queste equazioni in coordinate polari, escludendo la componente verticale z visto che stiamo lavorando in 2D. Esprimendo con (u, v) le componenti polari della velocità, partendo da (7), (8), (9) otteniamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = -\frac{\rho}{r} \left[\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = -\frac{\gamma \rho}{r} \left[\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \quad (13)$$

Queste 4 equazioni sono risolte trattando ciascuna quantità presente al loro interno come funzione di un parametro ϵ , il quale è un valore caratteristico del semispessore del disco H/r^7 che

⁶ $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ indica la derivata materiale di \vec{v} . In formule $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$
⁷ dove H è l'altezza di scala $H = c_s r / v$, con c_s velocità del suono

ovviamente assumiamo molto piccolo. Proprio per quest'ultimo motivo le quantità possono essere espresse in termini di ϵ come una serie di potenze del tipo $x = x_0 + x_2\epsilon^2 + \dots$

Risultano dunque, per lo stato di base, le espansioni

$$\begin{aligned} u &= \epsilon^2 u_2 + O(\epsilon^4) \\ v &= r\Omega_0 + \epsilon^2 \Omega_2 + O(\epsilon^4) \\ \rho &= \rho_0 + O(\epsilon^2) \\ P &= \epsilon^2 [P_0 + O(\epsilon^2)] \end{aligned} \tag{14}$$

dove al posto delle v abbiamo preferito utilizzare Ω velocità angolare, con $r\Omega_0 = (GM/r)^{1/2}$. Si può subito notare la presenza di un fattore ϵ^2 nell'espansione del termine di pressione: questo fatto è dovuto all'assunzione di avere equilibrio idrostatico nella direzione verticale (in un certo qual modo valido se consideriamo le quantità bidimensionali come quantità tridimensionali integrate verticalmente nel disco⁸), che porta ad uno scalamento tra pressione e densità del tipo $P(r) \sim \epsilon^2 \rho(r)$. Per lo stato di base del disco assumeremo inoltre che il disco sia stabile, assisimmetrico, non autogravitante e non abbia movimento radiale (dunque $u = 0$).

Semplificando perciò le equazioni (10)-(13) per questo stato di base, utilizzando le espansioni (14) si ottiene

$$r\Omega_0^2 = \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \tag{15}$$

all'ordine più basso, con ϕ_0 potenziale della primaria ($\phi_0 = -GM/r$) e

$$2r\Omega_0\Omega_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} \tag{16}$$

all'ordine successivo, con ϕ_2 correzione assi-simmetrica dovuta alla presenza della secondaria, presa come $O(\epsilon^2)$ visto la sua minore intensità rispetto al potenziale ϕ_0 .

Ora, consideriamo una perturbazione lineare e adiabatica $x'(r)e^{-i\varphi}$ per ciascuna quantità considerata nella (14). Con queste ultime andiamo a perturbare le equazioni del moto (10)-(13). Essendo la perturbazione lineare, si è costretti ad utilizzare, oltre alle nuove variabili, anche quelle dello stato di base: per queste si sfrutteranno le assunzioni già elencate per stato di base del disco. Ponendo inoltre $v = r\Omega$ e non considerando il potenziale ϕ (vedremo poi il perché) le perturbazioni soddisferanno le equazioni

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - i\Omega u' - 2\Omega v' = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial r} + \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial r} \tag{17}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} - i\Omega v' + \frac{u'}{r} \frac{\partial(r^2\Omega)}{\partial r} = \frac{iP'}{r\rho} \tag{18}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} - i\Omega \rho' + u' \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{\rho}{r} \left[\frac{\partial(ru')}{\partial r} - iv' \right] \tag{19}$$

$$\frac{\partial P'}{\partial t} - i\Omega P' + u' \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\gamma P}{r} \left[\frac{\partial(ru')}{\partial r} - iv' \right] \tag{20}$$

Procedendo come per lo stato di base, si possono espandere in serie rispetto a ϵ tutte le

⁸notiamo che per la densità stiamo sfruttando ρ , che indica quella di volume, e non Σ , cioè quella superficiale

quantità x' , cosa che riportiamo qui sotto

$$\begin{aligned}
u' &= u'_0 + \epsilon^2 u'_2 + O(\epsilon^4) \\
v' &= v'_0 + \epsilon^2 v'_2 + O(\epsilon^4) \\
\rho' &= \rho'_0 + O(\epsilon^2) \\
P' &= \epsilon^2 [P'_0 + O(\epsilon^2)]
\end{aligned}
\tag{21}$$

Possiamo inoltre introdurre la variabile τ , legata al tempo t dalla relazione $\tau = \epsilon^2 t$, visto l'interesse per l'evoluzione temporale del disco di accrescimento su tempi scala molto più lunghi rispetto a quello orbitale. Rimane da spiegare ora perché non è stato sviluppato ed utilizzato nelle equazioni perturbate il potenziale ϕ . Il motivo risiede nel fatto che per un sistema binario con orbita circolare il potenziale medio è comunque assi-simmetrico, su un periodo di tempo: un'espansione di ϕ risulterebbe dunque non necessaria.

Detto questo, quale è la forma dei termini di ordine più basso delle espansioni di u' e v' ?

Prendendo le equazioni (17) e (18) all'ordine più basso delle espansioni (21) abbiamo

$$-i\Omega_0 u'_0 - 2\Omega_0 v'_0 = 0 \tag{22}$$

$$-i\Omega_0 v'_0 + \frac{1}{2}\Omega_0 u'_0 = 0 \tag{23}$$

che lasciano dunque la relazione

$$v'_0 = -\frac{i}{2}u'_0 \tag{24}$$

dalla quale possiamo porre

$$u'_0 = ir\Omega_0 E(r, \tau) \tag{25}$$

$$v'_0 = \frac{1}{2}r\Omega_0 E(r, \tau) \tag{26}$$

con la funzione $E(r, \tau)$ che è l'eccentricità complessa $E = e_x + ie_y = e \exp(i\varpi)$ ⁹.

La soluzione che dunque emerge è dovuta al fatto che all'ordine più basso non entrano termini legati alla pressione ed agli effetti mareali: quello che risulta è la soluzione prevista per una particella libera sotto un potenziale Kepleriano.

Grazie alle espressioni trovate per u'_0 e v'_0 in funzione dell'eccentricità E , possiamo ora concentrarci sul ricavare una prima equazione proprio dell'eccentricità, obiettivo di questa sottosezione. Prendendo una combinazione lineare appropriata delle equazioni (17) e (18) a $O(\epsilon^2)$, u'_2 e v'_2 possono essere eliminate. Usando invece (19) e (20) all'ordine più basso, eliminiamo ρ'_0 e P'_0 , mentre per toglierci di mezzo Ω_2 in favore del potenziale mareale ϕ_2 sfruttiamo la (16). Procedendo come appena descritto otteniamo la PDE (equazione alle derivate parziali)

$$2r\Omega \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{iE}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right) + \frac{iE}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{i}{r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\gamma P r^3 \frac{\partial E}{\partial r} \right) \tag{27}$$

che descrive il comportamento dell'eccentricità E .

Poichè non abbiamo ancora determinato la forma del potenziale ϕ_2 , per ora ci si limiterà a rimuoverlo dell'equazione appena ottenuta, lasciando dunque

⁹dove e è il modulo dell'eccentricità, ϖ la longitudine del pericentro

$$2r\Omega \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{iE}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{i}{r^2\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\gamma P r^3 \frac{\partial E}{\partial r} \right) \quad (28)$$

Nonostante questo, osservando la (28) già si riesce in qualche modo a far luce sulla natura delle varie soluzioni che incontreremo in seguito. Se infatti analizziamo in Fourier nella variabile tempo, ponendo $E(r, t) = E(r) \exp(i\omega t)$, la (28) diventa

$$2r\Omega\omega E = \frac{E}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\gamma P r^3 \frac{\partial E}{\partial r} \right) \quad (29)$$

la quale è chiaramente un'equazione differenziale lineare di secondo ordine, detta di Sturm-Liouville. Scegliendo in maniera appropriata le condizioni al contorno, risolvendo il problema di Sturm-Liouville¹⁰ troviamo una serie di modi normali nel disco, ciascuno dei quali è una distribuzione radiale dell'eccentricità che precede ad una frequenza data dal suo autovalore.

Sottolineiamo il fatto che comunque le soluzioni che ricaviamo da questa equazione sono di interesse relativo, visto che non stiamo considerando tutti gli effetti che influenzano l'evoluzione dell'eccentricità. Per questo motivo ci siamo limitati soltanto a descrivere il comportamento generale dei risultati, che saranno analizzati approfonditamente dalla sezione 3.5 in poi, dopo aver ottenuto l'equazione dell'eccentricità completa.

3.2 Il potenziale mareale

Come già detto, l'equazione (28) (e quindi anche la (29)) non tiene conto dei vari fattori che influenzano il comportamento del disco e dunque l'evoluzione dell'eccentricità. Il primo passo sta dunque nell'aggiungere il termine del potenziale mareale dovuto alla stella compagna, il quale compariva già nella (27) nella forma $\frac{-iE}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right)$.

Il punto ora sta nell'individuare la forma di ϕ_2 , per poter inserire il fattore sopra citato nell'equazione dell'eccentricità.

Innanzitutto, siccome ciò a cui siamo interessati è l'evoluzione su tempi scala molto più lunghi rispetto a quelli orbitali, possiamo utilizzare il cosiddetto 'Gauss-averaging method'¹¹. Grazie anche a questo artificio la secondaria può essere trattata come un anello di materiale spalmato sulla sua stessa orbita, con densità proporzionale al tempo impiegato ad attraversare l'elemento. In questo modo il potenziale mareale agente sul disco può essere scritto come

$$\phi_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_b \exp(-im(\varphi - \varphi_b)) d\varphi_b \quad (30)$$

dove φ_b è la coordinata angolare della compagna, mentre ϕ_b è il potenziale gravitazionale della compagna stessa, la cui espressione si trova sfruttando il teorema del coseno (vedi Figura 3)

$$\phi_b = -GM_2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{a^3} \right) \simeq -\frac{GM_2}{[a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi_b)]^{1/2}} \quad (31)$$

¹⁰problema di trovare gli autovalori per cui esiste una soluzione non banale dell'equazione di Sturm-Liouville soddisfacente le condizioni al contorno

¹¹si tratta di fare una media dell'oggetto che si sta trattando (il potenziale in questo caso) su di un periodo orbitale

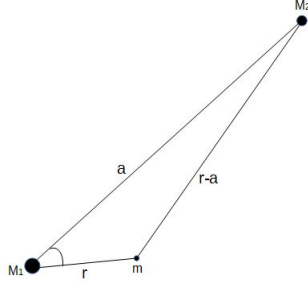


Figura 3: disposizione geometrica di un elemento del disco (m) rispetto alla primaria (M_1) ed alla secondaria (M_2) ad un certo tempo t . L'angolo raffigurato è $\varphi - \varphi_b$, distanza angolare tra m e M_2

dove r , come si evince dalla figura, è la distanza di una particella del disco con la primaria, mentre a è la distanza tra le due stelle.

In questo modo il potenziale mareale risulta

$$\phi_2 = -\frac{GM_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-im(\varphi - \varphi_b))}{[a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi_b)]^{1/2}} d\varphi_b \quad (32)$$

che prendendo la parte reale diventa

$$\phi_2 = -\frac{GM_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(m(\varphi - \varphi_b))}{[a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi_b)]^{1/2}} d\varphi_b \quad (33)$$

ma siccome per i sistemi SU Ursae Majoris l'orbita della compagna è circolare, il coseno al numeratore diventa una costante uguale a 1. Rimane dunque

$$\phi_2 = -\frac{GM_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{[a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi_b)]^{1/2}} d\varphi_b \quad (34)$$

che può essere scritta in forma più compatta utilizzando i coefficienti di Laplace in meccanica celeste $b_{s/2}^{(j)}(\alpha)$ (vedi sottosezione 2.1.2)

$$\phi_2 = -\frac{GM_2}{2a} b_{1/2}^{(0)}\left(\frac{r}{a}\right) \quad (35)$$

La forma trovata per il potenziale ϕ_2 va poi inserita nell'equazione (27) e risulta, dopo aver sfruttato le identità per la derivata del coefficiente di Laplace

$$2r\Omega \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{iE}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{i}{r^2\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\gamma P r^3 \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{iq\Omega^2 r^3}{2a^2} \left[b_{3/2}^{(1)}\left(\frac{r}{a}\right) E \right] \quad (36)$$

dove $q = M_2/M_1$ è il rapporto tra le masse delle binarie.

Il nuovo termine modifica il problema di Sturm-Liouville precedente, cambiando l'autovalore relativo a ciascun modo assieme alla rispettiva autofunzione. Come accadeva nella sezione precedente comunque, non siamo più di tanto interessati alle soluzioni precise di questo problema agli autovalori, visto che mancano ancora da inglobare all'interno dell'equazione di eccentricità i termini di generazione e smorzamento di quest'ultima.

3.3 Generazione dell'eccentricità

L'equazione (36) descrive sì come un disco eccentrico evolve, ma non considera per cominciare come questa eccentricità viene prodotta.

Abbiamo già riferito nella sottosezione 2.1.2 che l'eccentricità del disco nei sistemi SU UMa si pensa essere dovuta ad una instabilità mareale alla risonanza di Lindblad eccentrica interna 3:1 (dove il rapporto è quello tra frequenza angolare del disco e frequenza angolare orbitale della binaria). Come spiegato da Lubow [7] perché questa eccentricità possa crescere c'è bisogno di una iniziale, per quanto piccola possa essere, fluttuazione eccentrica del disco; il campo mareale si accoppia dunque all'eccentricità iniziale producendo una reazione piuttosto vigorosa proprio alla risonanza sopra citata. In questo modo, quindi, si ha instabilità a quel raggio di risonanza e possono avvenire variazioni nell'eccentricità.

Sempre grazie a Lubow, abbiamo a disposizione un'espressione per il rate di crescita ideale dell'eccentricità alla risonanza di Lindblad 3:1, ξ , già espresso nella (4), che ora riproponiamo

$$\xi = 2.08C\Omega q^2 \frac{r_{res}}{r_{out} - r_{in}}$$

dove Ω è la velocità angolare della binaria, mentre C è un fattore di correzione che dipende dalla dimensione dell'anello, di forma

$$C = \frac{2\pi r_{res}(r_{out} - r_{in})\rho_0(r_{res})}{M} \frac{e(r_{res})}{\langle e \rangle} \quad (37)$$

con M massa dell'anello, $\langle e \rangle$ eccentricità massa-mediata.

Nell'inserire il rate di crescita ξ nell'equazione dell'eccentricità, considereremo in ogni caso $C=1$, come se avessimo un anello di spessore nullo ($r_{in} \rightarrow r_{out}$) e di conseguenza rimpiazzeremo il denominatore con una delta di Dirac al numeratore, lasciando in questo modo il rate di crescita nella forma

$$\xi = 2.08\Omega q^2 r_{res} \delta(r_{out} - r_{in}) \quad (38)$$

Resta da capire ora la forma del termine legato crescita di E , da inserire nella (36). L'eccentricità sarà vista come una delta al raggio di risonanza: in questo modo l'espressione descrive il rate alla quale l'eccentricità è creata dall'instabilità dovuta alla risonanza. Si ha dunque

$$2r\Omega \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{iE}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{i}{r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\gamma P r^3 \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{iq\Omega^2 r^3}{2a^2} \left[b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{r}{a} \right) E \right] + 2\xi r \Omega E \delta(r - r_{res}) \quad (39)$$

L'equazione dell'eccentricità riesce ora a inglobare la descrizione sia della creazione dell'eccentricità, sia della propagazione di questa nel disco.

Quest'ultimo 'upgrade' cambia il problema agli autovalori precedente, rendendolo simile ad un problema di Sturm-Liouville ma con autovalori complessi, la cui parte reale descrive (vedi sezione 3.1) la frequenza di precessione del disco, mentre quella immaginaria la crescita (o decadimento, quando introdurremo anche il termine di smorzamento) dell'eccentricità nel tempo.

3.4 Smorzamento dell'eccentricità

Per costruire un modello che tenga conto di tutti i fattori influenzanti l'eccentricità, c'è bisogno di un ultimo tassello. Come ben si sa, un disco di accrescimento è composto da particelle interagenti (vedi sottosezione 2.1.2) che generano perciò forze viscosive al suo interno, le quali causano un effetto di smorzamento dell'eccentricità, ostacolando il termine di crescita ξ . Solo quindi considerando anche la viscosità del disco possiamo dare una stima più realistica della

crescita di E .

Grazie a Ogilvie [10], abbiamo già a disposizione un'espressione del tensore di stress che mi descrive la viscosità, sia dinamica (di taglio) che di volume (di bulk), all'interno delle equazioni di Navier-Stokes del disco¹². Si ha dunque

$$\vec{T} = \mu [\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^T] + (\mu_b - \frac{2}{3}\mu) (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \mathbf{I} \quad (40)$$

dove μ è la viscosità di taglio efficace e μ_b la viscosità di volume efficace.

Sempre Ogilvie ha dimostrato però che se consideriamo nelle equazioni di Navier-Stokes la sola viscosità dinamica avremmo una situazione di 'overstability'¹³ in un disco bidimensionale. Ora, l'obiettivo di questa sezione è quello di descrivere al meglio il termine legato allo smorzamento dell'eccentricità: per evitare problemi, si lavorerà dunque con il solo di termine di volume μ_b , ponendo a 0 quelli con μ . Rimane così

$$T = \mu_b (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \frac{\mu_b}{r} \left[\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \quad (41)$$

dove a destra abbiamo espresso T in funzione delle coordinate polari.

Resta però la questione di comprendere di cosa sia funzione μ_b . La viscosità con cui lavoreremo viene descritta in questo caso dal parametro α di Shakura & Sunyaev, fulcro di quello che è il 'modello standard' per i dischi di accrescimento (modello 'steady- α '). α si basa su una particolare prescrizione ad hoc sulla viscosità, la cosiddetta prescrizione- α $\mu = \alpha c_s H$, che è semplicemente una parametrizzazione: siamo costretti a fare questo perché a tutt'oggi non siamo in grado di comprendere a fondo il meccanismo della viscosità nei dischi (se si volesse approfondire l'argomento si consiglia il libro "Accretion Power in Astrophysics"; Frank, King & Raine [12]). Lavorando su questa prescrizione, possiamo alla fine scrivere μ_b come

$$\mu_b = \alpha_b P \left(\frac{GM}{\lambda^3} \right)^{-1/2} \simeq \frac{\alpha_b P}{\Omega} \quad (42)$$

dove λ è il semi-lato retto $\lambda = r(1 + e \cos \theta)$ ed il secondo passaggio è esattamente corretto nel limite del disco circolare.

In questo modo il termine T atto a descrivere la viscosità di volume avrà forma

$$T = \frac{\alpha_b P}{r\Omega} \left[\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \quad (43)$$

che notiamo essere proporzionale alla pressione P e che dunque scalerà allo stesso modo ($O(\epsilon^2)$).

Inserendo ora il termine di viscosità nell'equazione (7), questa diventa

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P - \rho \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \quad (44)$$

che espressa in coordinate polari si sdoppia in

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (45)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\rho} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \quad (46)$$

¹²sono un'estensione delle equazioni di Eulero. Al contrario di queste ultime infatti, le equazioni di Navier-Stokes contengono al loro interno anche la descrizione viscosa del fenomeno

¹³condizione in cui l'oscillazione aumenta a causa di un'eccessiva risposta

Per il fatto che il termine della viscosità di volume scali come la pressione abbiamo che le equazioni di ordine più basso non sono influenzate dal termine T : questo porta a fare una analisi identica a quella svolta nella sezione 3.1 per arrivare a quella che è stata la prima equazione dell'eccentricità, la (27). Tutto ciò significa quindi che il comportamento del disco viene ancora descritto da un'equazione dell'eccentricità, solo che modificata: in particolare, l'unico effetto per l'introduzione del termine viscoso T è il cambiamento dell'indice adiabatico γ in

$$\gamma \rightarrow \gamma - i\alpha_b \quad (47)$$

dunque in un numero complesso.

Dopo aver ripetuto il procedimento di aggiunta dei termini del potenziale mareale e della risonanza (sezioni 3.2, 3.3), si arriva finalmente all'equazione completa, che include al suo interno dinamica, generazione e smorzamento dell'eccentricità nel disco

$$2r\Omega \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{iE}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{i}{r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\gamma - i\alpha_b) P r^3 \frac{\partial E}{\partial r} \right] + \frac{iq\Omega^2 r^3}{2a^2} \left[b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{r}{a} \right) E \right] + 2\xi r \Omega E \delta(r - r_{res}) \quad (48)$$

la quale descrive al meglio l'evoluzione appunto dell'eccentricità e dunque, collegata ad essa, anche il fenomeno dei 'superhumps'.

3.5 Autovalori equazione finale - rate di precessione e rate di crescita

Ottenuta l'equazione (48) vogliamo ora risolvere il problema agli autovalori di quest'ultima. Come già suggerito nella sezione 3.1 per risolvere il problema di Sturm-Liouville della (28), si andrà a svolgere un'analisi di Fourier per la variabile temporale, ponendo $E(r, t) = E(r) \exp(i\omega t)$, per ottenere il problema agli autovalori. Risolvendo quest'ultimo, si trovano anche in questo caso una serie di modi, ciascuno dei quali è caratterizzato dal numero di 'nodi'¹⁴.

Per trovare l'espressione dell'autovalore di un modo in un'espressione per così dire "comoda", moltiplicheremo prima di tutto l'equazione (48) per $r^2 \rho E^* = r^2 \rho E \exp(-i\omega t)$: insieme all'uso dell'identità $\frac{\partial E}{\partial t} = i\omega E$ risulterà

$$2\omega r^3 \rho \Omega |E|^2 = |E|^2 r^2 \frac{\partial P}{\partial r} + E^* \frac{\partial}{\partial r} \left[(\gamma - i\alpha_b) P r^3 \frac{\partial E}{\partial r} \right] + \frac{q\Omega^2 r^5 \rho}{2a^2} \left[b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{r}{a} \right) |E|^2 \right] - 2i\xi r^3 \rho \Omega |E|^2 \delta(r - r_{res}) \quad (49)$$

Fatto questo, integreremo quest'ultima equazione sull'estensione radiale del disco (dunque tra r_{in} e r_{out}), lasciando quindi la relazione

$$2\omega \int_{r_{in}}^{r_{out}} r^3 \rho \Omega |E|^2 dr = \int_{r_{in}}^{r_{out}} |E|^2 r^2 \frac{\partial P}{\partial r} dr - \int_{r_{in}}^{r_{out}} (\gamma - i\alpha_b) P r^3 \left| \frac{\partial E}{\partial r} \right|^2 dr + \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{q\Omega^2 r^5 \rho}{2a^2} \left[b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{r}{a} \right) |E|^2 \right] dr - 2i\xi r^3 \rho \Omega |E|^2 |_{r_{res}} \quad (50)$$

dove per il termine contenente il gradiente dell'eccentricità ($\frac{\partial E}{\partial r}$) si è proceduto con un'integrazione per parti, con il primo dei due termini nullo per la condizione al contorno utilizzata per il

¹⁴punti dove la fase dell'eccentricità passa improvvisamente per π

problema agli autovalori $P \frac{\partial E}{\partial r} = 0$. Dalla (50) si può ora facilmente ricavare l'autovalore ω

$$\omega = \frac{\int_{r_{in}}^{r_{out}} |E|^2 r^2 \frac{\partial P}{\partial r} dr - \int_{r_{in}}^{r_{out}} (\gamma - i\alpha_b) P r^3 \left| \frac{\partial E}{\partial r} \right|^2 dr}{2 \int_{r_{in}}^{r_{out}} r^3 \rho \Omega |E|^2 dr} + \frac{\int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{q\Omega^2 r^5 \rho b_{3/2}^{(1)}}{2a^2} |E|^2 dr - 2i\xi r^3 \rho \Omega |E|^2|_{r_{res}}}{2 \int_{r_{in}}^{r_{out}} r^3 \rho \Omega |E|^2 dr} \quad (51)$$

E' evidente come l'autovalore possenga una parte reale ed una immaginaria, come previsto ricordandosi di quanto detto nella sezione 3.3.

La prima delle due descrive il rate di precessione, che ora ripresentiamo in maniera più "pulita"

$$Re(\omega) = \frac{\int_{r_{in}}^{r_{out}} |E|^2 r^2 \frac{\partial P}{\partial r} dr - \int_{r_{in}}^{r_{out}} \gamma P r^3 \left| \frac{\partial E}{\partial r} \right|^2 dr + \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{q\Omega^2 r^5 \rho b_{3/2}^{(1)}}{2a^2} |E|^2 dr}{2 \int_{r_{in}}^{r_{out}} r^3 \rho \Omega |E|^2 dr} \quad (52)$$

e che notiamo presenta tre contributi. I primi due sono dovuti alla pressione e, se utilizziamo modelli come quello 'steady- α ', entrambi sono negativi (poiché il gradiente della pressione $\frac{\partial P}{\partial r}$ lo sarebbe) e dunque lascerebbero una precessione retrograda, al contrario di quanto farebbe il termine legato al potenziale, che è positivo e indurrebbe ad una precessione prograda. Sommandoli si dovrebbe dunque determinare di che tipo sia la precessione totale che ha il disco.

Per quanto riguarda la parte immaginaria, la quale espressione riportiamo qui sotto, questa descrive il il rate di crescita dell'eccentricità.

$$Im(\omega) = \frac{\int_{r_{in}}^{r_{out}} \alpha_b P r^3 \left| \frac{\partial E}{\partial r} \right|^2 dr - 2\xi r^3 \rho \Omega |E|^2|_{r_{res}}}{2 \int_{r_{in}}^{r_{out}} r^3 \rho \Omega |E|^2 dr} \quad (53)$$

Qui si hanno due termini, con il primo (positivo) che raffigura l'effetto della viscosità di volume, la quale tende a diminuire l'eccentricità ed il secondo (negativo) legato all'azione della risonanza, che tende invece ad aumentare E . Si deduce dunque il fatto che una parte immaginaria di ω negativa significherebbe una eccentricità in crescita.

4 Soluzioni per le equazioni di eccentricità

Trovate dunque le equazioni che descrivono il comportamento dell'eccentricità per il disco e le espressioni generali per i rate di precessione e di crescita dell'eccentricità, si andrà a vedere cosa in pratica comporta quanto trovato nella parte 3.

Anche qui si procederà per gradi, analizzando per prima cosa un'equazione semplificata che descrive il comportamento dell'eccentricità su di un anello sottile. Solo in seguito si prenderanno in considerazione le espressioni trovate nelle sezioni precedenti: servendosi anche dei parametri del sistema OY Carinae, si andranno a studiare i risultati dei calcoli numerici atti alla comprensione del nostro oggetto, sia dal punto di vista della precessione che da quello della distribuzione e della crescita dell'eccentricità.

4.1 Comportamento dell'eccentricità in un anello sottile

L'espressione (48), che mi identifica l'equazione generale per l'eccentricità, può essere, come appena anticipato, semplificata notevolmente considerando un anello sottile centrato esattamente sulla risonanza di Lindblad eccentrica interna 3:1. In questo modo, la densità ρ e la pressione P possono essere considerate grosso modo costanti, mettendo fuori gioco il il fattore contenente $\frac{\partial P}{\partial r}$, mentre il termine dovuto all'effetto mareale della stella compagna può essere ignorato perché causa una precessione costante. Dell'equazione iniziale rimane dunque

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{i}{2r^3\Omega\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\gamma - i\alpha_b) P r^3 \frac{\partial E}{\partial r} \right] + \xi E \delta(r - r_{res}) \quad (54)$$

che, sviluppando la derivata del termine dopo l'uguale¹⁵, diventa

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{i}{2\Omega\rho} (\gamma - i\alpha_b) P \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \xi E \delta(x) \quad (55)$$

con $x = r - r_{res}$. Questa equazione ha una soluzione analitica, il che implica il poter esaminare direttamente il comportamento dell'eccentricità: variando l'indice di crescita ξ possiamo vedere l'effetto dovuto ad una variazione della forza risonante.

Risolviamo dunque questa espressione in un anello con $-a \leq x \leq b$, con condizione al contorno che $\frac{\partial E}{\partial x}$ sia nullo ai bordi. Da segnalare che i valori di E utilizzati in questa sezione non saranno quelli reali, ma verranno moltiplicati per una costante: come fattore di scala sarà utilizzata l'eccentricità al bordo interno ($-a$), che sarà posta a 1¹⁶. Così facendo troviamo per E le soluzioni

$$E(x) = \begin{cases} \cos(k(x+a)) & \text{se } -a \leq x < 0 \\ \frac{\cos(ka)}{\cos(kb)} \cos(k(x-b)) & \text{se } 0 < x \leq b \end{cases}$$

dove k è il numero d'onda. Questo è un numero complesso e soddisfa l'equazione

$$k(\tan(ka) + \tan(kb)) = \frac{2i\xi\rho\Omega}{P(\gamma - i\alpha_b)} = \frac{iW}{(a+b)(\gamma - i\alpha_b)} \quad (56)$$

dove nell'ultimo termine si è introdotto il parametro adimensionale $W = \frac{2\xi\rho\Omega(a+b)}{P}$ che caratterizza l'intensità della risonanza.

¹⁵si noti che nello sviluppo della derivata abbiamo trascurato il termine $\frac{3i}{2r\Omega\rho}(\gamma - i\alpha_b)P\frac{\partial E}{\partial r}$ per la presenza del termine r al denominatore

¹⁶è ovvio che E sarà minore, visto che per $E > 1$ vengono descritte orbite aperte

Non dobbiamo dimenticarci comunque che la (55) può essere vista come problema agli autovalori, per poterci ricavare rate di precessione e di crescita dell'eccentricità. Trattando, come fatto nella parte 3, l'eccentricità come $E(x, t) = E(x) \exp(i\omega t)$, dove ω è l'autovalore da scovare, la (55) diventa, al di fuori del raggio di risonanza ¹⁷

$$\omega E = \frac{(\gamma - i\alpha_b)P}{2\rho\Omega} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad (57)$$

ma sfruttando le possibili soluzioni di E , $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -k^2 E$. Si avrà quindi

$$\omega = -\frac{(\gamma - i\alpha_b)P}{2\rho\Omega} K^2 \quad (58)$$

sulla quale torneremo molto presto.

Si vuole dunque capire quale sia la distribuzione dell'eccentricità al variare della forza risonante. Le semplici onde sinusoidali che si avrebbero se non vi fosse risonanza lasciano spazio, al raggio di risonanza, ad una cuspidè, che dunque sviluppa una discontinuità nel gradiente di E . Per capire il comportamento di questa cuspidè, sfrutteremo l'equazione (56), che mette in relazione il numero d'onda con la forza risonante. Guardando alle espansioni per piccoli e grandi valori di W infatti, quest'ultima equazione può essere risolta analiticamente.

Iniziamo dai valori bassi. Per $W \ll 1$, sia k che le due tangenti dovranno essere piccole e perciò possiamo approssimare $\tan(ka) \approx ka$ e $\tan(kb) \approx kb$. Prendendo l'espansione all'ordine più basso della (56), si ricava il numero d'onda

$$k \simeq \sqrt{\frac{2i\xi\Omega\rho}{P(\gamma - i\alpha_b)(a + b)}} \quad (59)$$

Riprendendo la (58), risulterà dunque

$$\omega \simeq -\frac{-i\xi}{a + b} \quad (60)$$

Solo però prendendo in considerazione il termine successivo dell'espansione in serie riusciamo ad esprimere più accuratamente il rate di crescita

$$Im(\omega) = -\frac{\xi}{a + b} + \frac{2\xi^2\Omega\alpha_b\rho(a^3 + b^3)}{3P(\gamma^2 + \alpha_b^2)(a + b)^3} \quad (61)$$

e dare il rate di precessione

$$Re(\omega) = -\frac{2\xi^2\Omega\gamma\rho(a^3 + b^3)}{3P(\gamma^2 + \alpha_b^2)(a + b)^3} \quad (62)$$

che, a causa della non considerazione del potenziale mareale nella (55), è determinato dalla pressione e quindi retrogrado.

Per quanto invece riguarda i valori di $W \gg 1$, dunque ad una risonanza molto forte, la somma delle due tangenti $\tan(ka)$ e $\tan(kb)$ diventa la parte dominante del termine a sinistra dell'equazione (56): quest'ultimo tende all'infinito se ka o kb tendono a $(n + 1/2)\pi$.

¹⁷si noti che l'espressione che seguirà vale per $x \neq 0$, poichè non considera la δ

Assumendo $a > b$, la soluzione di ordine più basso per il numero d'onda risulta

$$k \simeq \frac{\pi}{2a} \quad (63)$$

Andando a porre questa k nelle soluzioni dell'eccentricità per l'equazione semplificata per l'anello sottile, salta subito all'occhio che per una W che tenda all'infinito si avrebbe un'eccentricità nulla al raggio di risonanza, poiché si otterrebbe $E = \cos(\pi/2) = 0$. Si capisce dunque come l'eccentricità al crescere di W venga via via maggiormente soppressa alla risonanza fino a tendere a 0, come mostriamo qua sotto

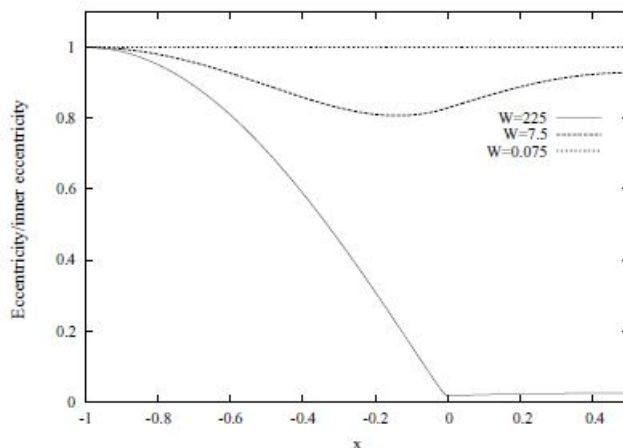


Figura 4: Distribuzione eccentricità per un disco sottile a tre differenti valori di W : 0.075, 7.5, 225. Dimensioni scelte per l'anello: $a = 1$, $b = 0.5$

Tornando all'esame dell'anello per grandi valori di W , inserendo il valore di k dato dall'espressione (63) nella (58), troviamo un autovalore

$$\omega \simeq -\frac{\gamma P \pi^2}{8\rho\Omega a^2} + i\left(\frac{\alpha_b P \pi^2}{8\Omega\rho a^2}\right) \quad (64)$$

dal quale intuiamo la frequenza di precessione ovviamente retrograda, come accadeva per $W \ll 1$, ma anche un decadimento di E nel tempo, guardando al valore positivo della sua parte immaginaria (vedi sezione 3.5).

Per quanto invece accade a valori intermedi della forza risonante, e dunque del suo parametro W , bisogna affidarsi ai soli calcoli numerici eseguiti sulla (56). Il loro svolgimento ha dato la possibilità di risolvere le questioni rimanenti sul comportamento dell'eccentricità di un anello sottile: andamento del numero d'onda k e dipendenze riguardo al decadimento/crescita di E ¹⁸. Innanzitutto si è andato a vedere il comportamento di k sul piano complesso al crescere della forza risonante. Osservando il grafico riportato a pagina seguente e concentrandosi sulla parte reale del numero d'onda, si può notare come questa evidenzi una crescita iniziale che va poi a scemare nella convergenza ad un valore fissato, coincidente con il limite di massima intensità della risonanza (cioè tendente all'infinito). Riportiamo dunque la figura raffigurante il piano complesso del numero d'onda

¹⁸nel prosieguo si utilizzerà anche il termine di stabilità/instabilità o modo stabile/instabile, per il fatto che il decadimento/crescita di E comporti un decadimento/crescita della perturbazione del disco nel tempo

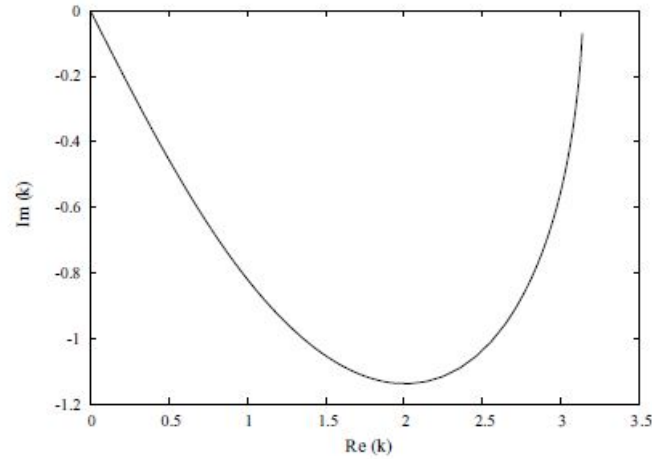


Figura 5: Piano complesso contenente i valori del numero d'onda k al crescere di W . Dimensioni scelte per l'anello: $a = 1$, $b = 0.5$

Andando poi a graficare il comportamento del rate di crescita dell'eccentricità (in realtà il suo rapporto con la frequenza orbitale della binaria) in funzione di W (o meglio, di $\log_{10}(W)$), si è invece ottenuto il seguente andamento

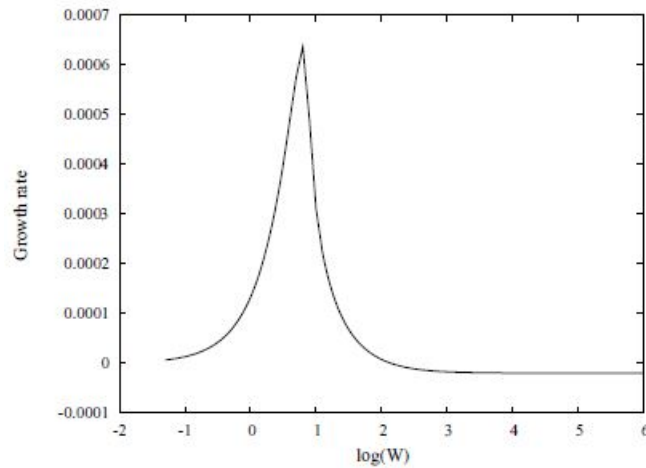


Figura 6: Dipendenza del rate di crescita di E dalla forza della risonanza W . Dimensioni scelte per l'anello: $a = 1$, $b = 0.5$. Parametro α scelto: $\alpha_b = 0.1$

Dalla figura notiamo che il picco nella crescita dell'eccentricità si trova all'incirca per un valore di $\log_{10}(W)$ uguale a 1, che corrisponde a $W=10$, picco che decade poi fino a raggiungere la soglia di stabilità del disco per $W=100$. Sorge spontanea però la domanda di come possa accadere che aumentando la forza della risonanza si abbia un modo stabile e non uno altamente instabile. Questo comportamento è perfettamente spiegato dall'andamento di E nella Figura 4, che evidenzia lo sprofondamento dell'eccentricità al raggio di risonanza al crescere di W . Vista la proporzionalità con E del termine di crescita della (55), un'eccentricità piccola premetterebbe non solo un rallentamento della crescita ma all'estremo addirittura la stabilità del modo, come già fatto vedere dalla figura 6.

Bisogna ancora dire comunque che quanto descritto in Figura 6 ha valore generale per quanto riguarda l'andamento del grafico, ma non per i singoli valori numerici. Il determinare come

l'eccentricità cresca o decada non è infatti prerogativa del solo parametro W , ma anche di α_b . Di seguito riportiamo il grafico della curva di stabilità nel piano W - α_b , con i valori al di sopra di questa che indicano stabilità per il disco e quindi decadimento di E .

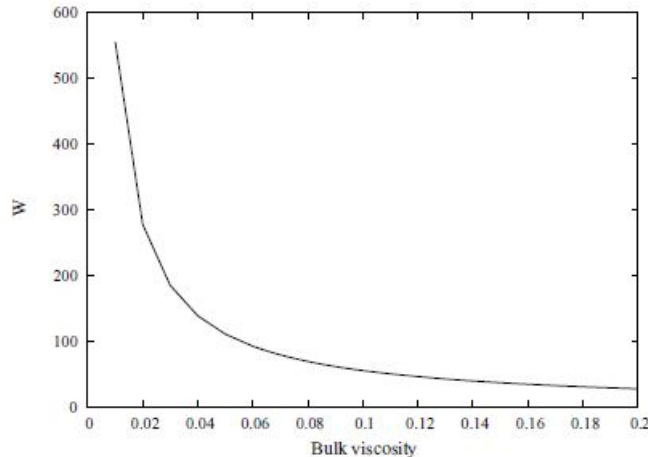


Figura 7: Curva di stabilità per un anello sottile. Dimensioni scelte per l'anello: $a = 1$, $b = 0.5$

Notiamo innanzitutto come il grafico sia in accordo con i dati ricavabili dalla Figura 6, ma soprattutto una forma della curva molto simile ad un'iperbole equilatera. Questa implica stabilità per quasi tutti i valori di α_b (ad eccezione dei più bassi) ad alti W , mentre a bassi W troviamo il disco instabile praticamente per tutti i valori di α_b .

4.2 Soluzioni dell'equazione dell'eccentricità completa

Abbiamo iniziato ad analizzare le possibili soluzioni con il caso semplificato dell'anello sottile. Lo step successivo sarà andare a vedere cosa accade considerando le equazioni che descrivono l'eccentricità del disco vero e proprio: per la risoluzione di queste sono stati utilizzati algoritmi di Runge-Kutta del quarto/quinto ordine, ottimizzati per il problema in questione.

Prima comunque di partire con la descrizione dei risultati, è bene andare a vedere, oltre che ovviamente le variabili utilizzate per analizzare il sistema completo, le distribuzioni scelte per queste. Nel nostro caso, corrispondono a quelle del modello 'steady- α ' per il disco di accrescimento con opacità¹⁹ di Kramers, che impone le condizioni

$$\mu = \alpha c_s H \quad (65)$$

$$\kappa_R = 5 \times 10^{24} \rho T_c^{-7/2} \text{cm}^2 \text{g}^{-1} \quad (66)$$

dove la (65) è la prescrizione α già vista nella sezione 3.4, mentre la (66) descrive l'opacità κ_R . C'è da dire che nel prendere per buona quest'ultima prescrizione bisognerebbe stare attenti, poiché l'opacità di Kramers è dominante solo in certe condizioni rispetto ad altre fonti di κ_R (ad esempio, lo scattering di elettroni): in questo caso si può comunque stare tranquilli, visto che nelle Variabili Cataclismiche l'opacità di Kramers domina in gran parte del disco (se si volessero ulteriori dettagli, si consiglia il libro "Accretion Power in Astrophysics"; Frank, King & Raine [12]).

¹⁹rapporto fra il coefficiente di assorbimento (pari al reciproco del libero cammino medio) della radiazione e la densità del materiale del disco

Concentriamoci ora sulla pressione e sulla densità: quali tipi di variabili sono state scelte all'interno del modello sopra citato per una descrizione del disco in 2D? In questo caso si sono utilizzate la pressione integrata sull'asse verticale P e la densità superficiale per un disco in 3D Σ , di forma

$$P = P_{sc} \left(\frac{r}{r_{sc}} \right)^{-3/2} f^4 g \cdot s^{-2} \quad (67)$$

$$\Sigma = \Sigma_{sc} \left(\frac{r}{r_{sc}} \right)^{-3/4} f^{14/5} g \cdot cm^{-2} \quad (68)$$

dove P_{sc} e Σ_{sc} sono i valori di pressione e densità ad un certo raggio r_{sc} chiamato raggio di scala, mentre $f = (1 - \sqrt{\frac{r_{in}}{r}})^{1/4}$, con r_{in} raggio della primaria. Per rispettare poi le condizioni al contorno che pressione e densità superficiale siano nulle al limite esterno del disco, è stata posta una funzione tanh da moltiplicare a (67) e (68), che diventano

$$P = P_{sc} \left(\frac{r}{r_{sc}} \right)^{-3/2} f^4 \tanh \left(\frac{r_{out} - r}{\nu r_{sc}} \right) g \cdot s^{-2} \quad (69)$$

$$\Sigma = \Sigma_{sc} \left(\frac{r}{r_{sc}} \right)^{-3/4} f^{14/5} \tanh \left(\frac{r_{out} - r}{\nu r_{sc}} \right) g \cdot cm^{-2} \quad (70)$$

con r_{out} raggio esterno del disco e ν parametro che regola la discesa a 0 di P e Σ .

Grazie a queste due variabili si ricava il valore del semispessore H/r , del quale ci serviremo per la descrizione delle proprietà del disco. L'altezza di scala soddisfa infatti la relazione

$$P = \Sigma \Omega^2 H^2 \rightarrow H = \left(\frac{P}{\Sigma} \right)^{1/2} \frac{1}{\Omega} \quad (71)$$

che diventa, moltiplicando per $1/r$ ed esplicitando P , Σ e Ω

$$\frac{H}{r} = \left(\frac{P_{sc}}{\Sigma_{sc}} \right)^{1/2} \frac{1}{r_{sc} \Omega_{sc}} f^{3/5} \left(\frac{r}{r_{in}} \right)^{1/8} \quad (72)$$

I primi due termini della parte destra della (72) possono essere riassunti in un unico valore $h = \left(\frac{P_{sc}}{\Sigma_{sc}} \right)^{1/2} \frac{1}{r_{sc} \Omega_{sc}}$ caratteristico, dipendente dal parametro α , dall'indice di massa trasferita nel disco \dot{M} , dalla massa della nana bianca M_1 e da r_{in} . Riscrivendo h in termini di questi valori, si ha

$$h = 1 \times 10^{-2} \alpha^{-1/10} \dot{M}_{16}^{3/20} m_1^{-3/8} \left(\frac{r_8}{8} \right)^{1/8} \quad (73)$$

dove $\dot{M}_{16} = \left(\frac{\dot{M}}{10^{16} g \cdot s^{-1}} \right)$, $m_1 = \left(\frac{M_1}{M_{\odot}} \right)$ con M_{\odot} massa solare²⁰, $r_8 = \left(\frac{r_{in}}{10^8} \right)$.

All'interno di questa trattazione si è utilizzato, come abbiamo visto, r_{out} , cioè il raggio esterno del disco. Sorge spontanea la domanda di quanto effettivamente valga questo r_{out} che, ricordiamo, deve contenere al suo interno il raggio della risonanza affinché tutto il processo di evoluzione dell'eccentricità ipotizzato si verifichi. Nel vedere dunque quale sia il raggio del disco in funzione di parametri che dovrebbero essere noti (distanza binaria a , rapporto tra le masse q), si farà uso della prescrizione nota come approssimazione di Eggleton, nella quale $r_{out} = 0.9 r_{Roche}$, con r_{Roche} raggio di Roche²¹ della primaria. Alla fine, con questa ipotesi, risulterà

$$r_{out} = \frac{0.45a}{0.6 + q^{2/3} \ln(1 + q^{-1/3})} \quad (74)$$

²⁰ $M_{\odot} = (1.98855 \pm 0.00025) \times 10^{30} Kg$

²¹ raggio del potenziale di Roche, il quale è il potenziale totale nel sistema di riferimento rotante con velocità angolare orbitale delle stelle

Parlando invece del raggio di risonanza r_{res} , l'espressione per una risonanza generica rispetto ai parametri caratteristici di un sistema binario sarà data da

$$r_{res,j,l} = \left(\frac{l}{j}\right)^{2/3} \frac{a}{(1+q)^{1/3}} \quad (75)$$

Nel nostro caso siamo interessati alla commensurabilità $j : l = 3 : 1$ tra frequenza angolare di una particella del disco e frequenza angolare orbitale della binaria. Guardando alla Figura 8, si può notare come i valori ottenuti dall'espressione di r_{res} per questa risonanza soddisfino la richiesta di restare all'interno di r_{out} per q compatibili con i sistemi SU UMa. Riscrivendo dunque l'espressione (75) per la specifica risonanza 3 : 1, ci risulta

$$r_{res_{3,1}} = \frac{1}{3^{2/3}} \frac{a}{(1+q)^{1/3}} \quad (76)$$

che resta appunto contenuto nel raggio esterno del disco per $q < 0.3$, come risulta dalla figura seguente

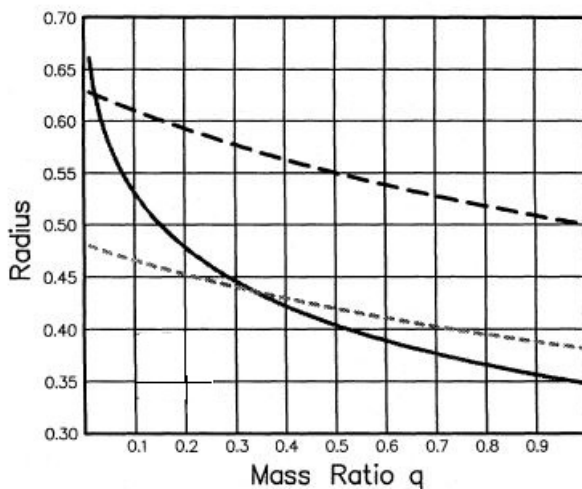


Figura 8: confronto tra r_{out} (linea continua), con $r_{res_{3,1}}$ (linea tratteggiata fine) e $r_{res_{2,1}}$ (linea tratteggiata spessa)

4.2.1 Rate di precessione

Descritti dunque i valori caratteristici che influiranno sulla nostra analisi, concentriamoci ora sulle soluzioni ottenute computazionalmente delle equazioni dell'eccentricità. Si parla al plurale poiché si analizzeranno tre differenti equazioni: la (28), che descrive l'eccentricità per un disco senza l'influenza della stella compagna, la (36), a cui viene aggiunto il potenziale legato alla presenza della secondaria, e la (48), che invece è l'equazione finale ottenuta nella parte 3, comprendente anche i termini legati alla generazione e allo smorzamento dell'eccentricità. Anticipiamo già qui che per i calcoli nelle ultime due equazioni sono stati anche utilizzati i parametri della Nova Nana OY Carinae, uno dei sistemi SU UMa meglio conosciuti.

Equazione disco isolato Per quanto riguarda le soluzioni ottenute per questa espressione, che riproponiamo qui sotto

$$2r\Omega \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{iE}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{i}{r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\gamma P r^3 \frac{\partial E}{\partial r} \right)$$

tutto procede come già preventivato nella parte 3: l'equazione produce una serie di modi normali nel disco, i quali non sono altro che una distribuzione radiale di eccentricità. Siccome sono presenti soltanto termini determinati dalla pressione, si avrà un autovalore reale e la frequenza di precessione (data proprio dall'autovalore ω) sarà puramente retrograda.

Equazione senza generazione e smorzamento eccentricità Andando ad aggiungere all'equazione al punto precedente il termine dovuto al potenziale mareale otteniamo, come visto nella sezione 3.2, la (36)

$$2r\Omega \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{iE}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{i}{r^2\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\gamma P r^3 \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{iq\Omega^2 r^3}{2a^2} \left[b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{r}{a} \right) E \right]$$

Per proseguire nell'analisi, d'ora in poi si utilizzeranno spesso i parametri di un sistema ben conosciuto, OY Carinae (OY Car), una Nova Nana eclissante²² della classe SU UMa di periodo orbitale di 1.51 ore. L'utilizzo di questi dati è necessario sia per assicurarci di avere dei valori numerici effettivamente consistenti, sia per poter fare in modo di avanzare ipotesi su altre quantità confrontandosi con le osservazioni del sistema (vedesi h al paragrafo successivo). Riportiamo per completezza i parametri che poi saranno utilizzati per trovare le soluzioni

Variabile	valore stimato
q	0.102 ± 0.003
inclinazione orbita	$83.3^\circ \pm 0.2^\circ$
M_1/M_\odot	0.685 ± 0.011
M_2/M_\odot	0.070 ± 0.002
r_{in}/r_\odot	0.0110 ± 0.0002
r_2/r_\odot	0.127 ± 0.002
a/r_\odot	0.608 ± 0.003
r_{L1}/a	0.716 ± 0.003

Tabella 2: parametri della binaria OY Car ricavati dagli studi di Hamada e Salpeter

Utilizzando alcuni dei parametri sopra elencati possiamo subito ricavaci i valori del raggio esterno del disco e del raggio di risonanza: guardando alla (74) e alla (76), abbiamo

$$r_{out} \sim 0.529a$$

$$r_{res_{3,1}} \sim 0.465a$$

Tornando alle soluzioni della (36), questa equazione produce, come quella descritta al punto precedente, autovalori ω reali che descriveranno il solo rate di precessione. Per la presenza dell'ultimo termine legato al potenziale gravitazionale della compagna, ci si aspetterebbe, al contrario di quanto accadeva considerando i soli termini dovuti alla pressione, una precessione prograda da parte del disco.

La situazione prevista si verifica per i primi 2 modi, nei quali si ha dominanza del termine gravitazionale e dunque si trova una precessione prograda. Andando a vedere la distribuzione di E per il modo di ordine più basso, si nota come l'eccentricità cresca repentinamente verso il bordo esterno del disco dove raggiunge il suo valore massimo, come si evince dalla figura a pagina successiva

²²significa che le due stelle si eclissano a vicenda poiché il piano orbitale delle due componenti giace in prossimità della linea di vista dell'osservatore

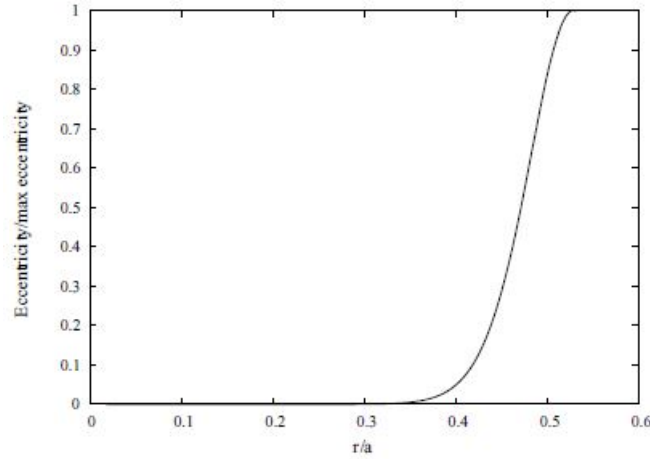


Figura 9: Modo di ordine più basso per la soluzione dell'equazione (36). Utilizzati parametri di OY Car, $h=0.003$, $\alpha_b=0.05$

La situazione che si aspetterebbe dalle soluzioni dell'equazione (36) non viene rispettata invece guardando ai modi di ordine superiore al secondo. Nei suddetti modi infatti, il crescere del numero di nodi fa sì che cresca il termine contenente $\frac{\partial E}{\partial r}$, proporzionale a P . In questo modo, risulta una precessione dominata dalla pressione e quindi retrograda.

Equazione completa Per ultima è stata studiata l'equazione dell'eccentricità (48), comprendente tutti i termini responsabili del comportamento complessivo del disco, inclusi generazione e smorzamento dell'eccentricità. Per chiarezza, riportiamo qui sotto l'espressione già vista alla sezione 3.4

$$2r\Omega \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{iE}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{i}{r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\gamma - i\alpha_b) P r^3 \frac{\partial E}{\partial r} \right] + \frac{iq\Omega^2 r^3}{2a^2} \left[b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{r}{a} \right) E \right] + 2\xi r \Omega E \delta(r - r_{res})$$

Come già ampiamente spiegato alla sezione 3.5, gli autovalori relativi ai modi di questa equazione sono complessi: la parte reale descrive il rate di precessione, mentre quella immaginaria il rate di crescita.

Prima di concentrarsi sulla sola precessione/crescita, vogliamo vedere innanzitutto quale sia la distribuzione dell'eccentricità nel disco. Per farlo, dobbiamo capire quale sia l'effettiva intensità della risonanza 3:1 che influisce sul disco: come fatto nella sezione 4.1, descriveremo la risonanza con il parametro adimensionale W , in questo caso di forma

$$W = \frac{2\xi\rho\Omega(r_{out} - r_{in})}{P} \Big|_{res} \quad (77)$$

Considerando in generale i sistemi SU UMa, che hanno all'incirca $0.05 < q < 0.30$, se prendiamo un valore fisicamente realistico del parametro h per il modello 'steady- α ' di circa 0.01, troviamo che W sarà compreso tra 20 e 650. Siccome però si utilizzeranno i dati di OY Carinae, il parametro del semispessore che si considererà sarà quello compatibile con i dati osservativi della binaria, significativamente minore: i vari calcoli saranno dunque eseguiti impostando $h = 0.003$ che, rispetto ad $h \simeq 0.01$, porterà a valori di W molto maggiori. Quest'ultima caratteristica è dovuta alla dipendenza di W da h : considerando che ²³ $W \propto \frac{\Sigma}{P}$ dalla (71) ricaviamo $W \propto \frac{1}{\Omega^2 H^2}$

²³ricordiamo che per la densità si sta utilizzando la densità superficiale in 3D, denominata Σ

e dunque sfruttando la (72) $W \propto \frac{1}{h^2}$.

Andando comunque a considerare i valori di W già nel caso in cui poniamo $h \simeq 0.01$ (e tanto più nel caso in cui $h = 0.003$), rifacendosi a quanto visto nella Figura 4 per l'anello sottile, si può ipotizzare di essere già in una situazione in cui la risonanza porta ad una significativa soppressione dell'eccentricità, nella forma di una cuspidè, al raggio di risonanza. Quanto appena detto viene confermato dai calcoli, effettuati con valori di h compatibili con OY Car, che portano ad una distribuzione dell'eccentricità di questo tipo

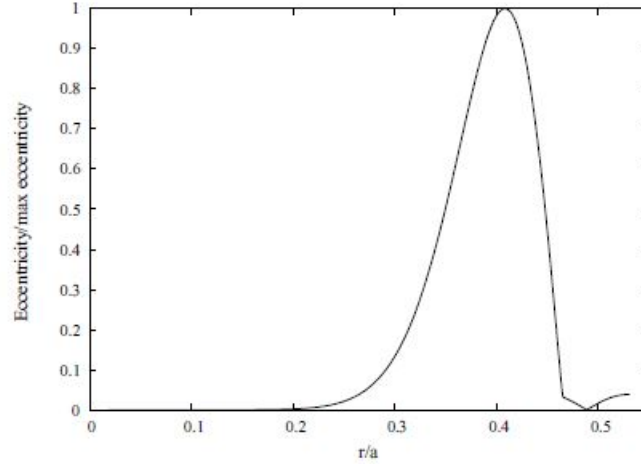


Figura 10: Modo di ordine più basso per la soluzione dell'equazione dell'eccentricità completa. Utilizzati parametri di OY Car, $h=0.003$, $\alpha_b=0.05$

dove notiamo che l'eccentricità picca all'interno della risonanza 3:1, ad un raggio di circa $0.37a$. La scelta di rappresentare il modo di ordine più basso è giustificata dal fatto che quest'ultimo dovrebbe essere il più significativo in quanto quello in cui E cresce più rapidamente²⁴.

Concentriamoci ora sul rate di precessione, descritto dalla parte reale dell'autovalore ω , già vista alla sezione 3.5 con la (52)

$$Re(\omega) = \frac{\int_{r_{in}}^{r_{out}} |E|^2 r^2 \frac{\partial P}{\partial r} dr - \int_{r_{in}}^{r_{out}} \gamma P r^3 \left| \frac{\partial E}{\partial r} \right|^2 dr + \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{q\Omega^2 r^5 \rho}{2a^2} b_{3/2}^{(1)} |E|^2 dr}{2 \int_{r_{in}}^{r_{out}} r^3 \rho \Omega |E|^2 dr}$$

Subito, guardando ai termini di questa espressione, si può intuire come la viscosità non abbia un effetto significativo sul rate di precessione, mancando termini contenenti α_b . Questo discorso non vale invece per il rapporto tra le masse q , presente direttamente nel termine indicante il potenziale gravitazionale, e per il semispessore H/r , legato alla pressione ed alla densità, che influisce sia sui termini di pressione che su quello gravitazionale. Andiamo dunque a vedere come possa cambiare questo rate al variare di questi ultimi due parametri.

Sempre utilizzando i parametri del sistema OY Carinae (vedi Tabella 2), si è andato a vedere l'effetto di una variazione di h sul rate di precessione del disco. Il risultato dei calcoli, riportato nella Figura 11, a pagina seguente

²⁴al crescere del numero del modo, cresce il contributo del gradiente dell'eccentricità $\frac{\partial E}{\partial r}$, che porta ad un sempre maggiore contributo del termine legato allo smorzamento

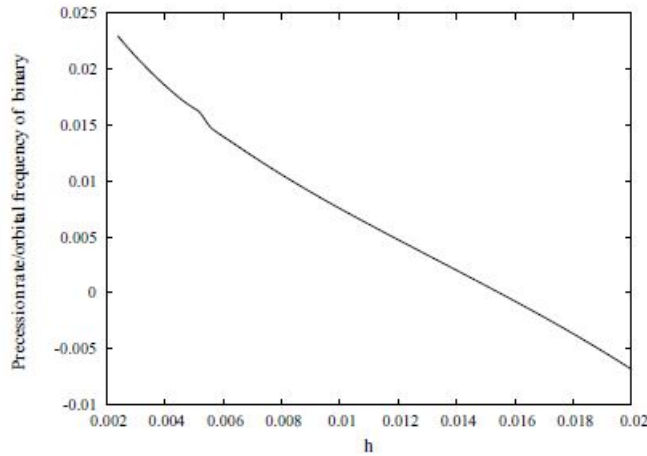


Figura 11: Relazione tra rate di precessione e parametro h del semispessore. Utilizzati parametri di OY Car

mostra una dipendenza pressapoco lineare tra le due quantità e che oltre un certo valore di h (0.015, per la precisione), la precessione diventa retrograda. Quest'ultima caratteristica è legata alla relazione di proporzionalità $H \propto \sqrt{P}$ (vedi (71)): il grafico rispecchia dunque il fatto già ipotizzato che al crescere della pressione la precessione si muova sempre più verso il retrogrado. Considerando poi l'attuale rate di precessione di OY Carinae, pari a 0.0198Ω , capiamo anche il perché della scelta nei calcoli di utilizzare $h = 0.003$: il valore che va a fittare meglio con i dati osservativi risulta infatti $h = 0.0035$.

Pensando invece alla dipendenza dal rapporto tra le masse delle due stelle, si è andato a calcolare la variazione del rate di precessione rispetto a q per diversi valori del parametro di semispessore h . Nel riportare ora l'immagine, inseriremo anche i dati raccolti da Patterson relativamente alla relazione tra l'eccesso di periodo del 'superhump' ε e q [8], già visti nella Tabella 1, espressi però questa volta nei termini del rate di precessione osservato e non di ε , per guardare l'accordo con i calcoli effettuati

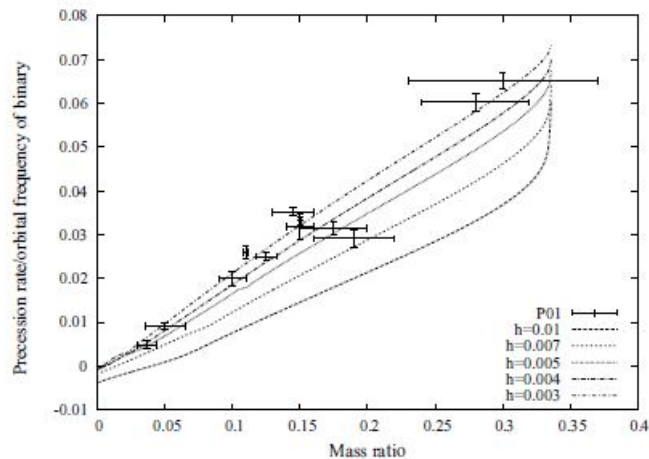


Figura 12: Relazione tra rate di precessione e rapporto tra le masse q per diversi valori di h . Con P01 vengono indicati i dati trovati da Patterson

Anche in questo caso si è trovata, come si evince nella figura precedente, una relazione

lineare, con però deviazioni significative a piccoli, ma soprattutto a grandi q . Queste ultime in particolare, sono facilmente spiegabili: l'uso delle condizioni al contorno $\Sigma = 0$ e $P = 0$ al bordo esterno influiscono notevolmente sul rate di precessione, facendolo impennare se la risonanza, come accade a q grandi, si trova vicino al limite esterno del disco. Si può inoltre notare come il valore di h che meglio concorda con i dati osservativi sia ancora 0.003 (la curva più in alto), anche se c'è da dire che alcuni di questi dati hanno barre di errore piuttosto significative. Andando appunto a vedere il fit che considera la sola parte lineare della curva per $h = 0.003$, questa lascia la relazione

$$\epsilon = (0.2076 \pm 0.0003)q - (4.1 \pm 0.6) \times 10^{-4} \quad (78)$$

dove con ϵ intendiamo il rate di precessione/frequenza orbitale della binaria. Quest'ultima espressione si accorda piuttosto bene con la relazione trovata fittando i dati di Patterson, ad eccezione della piccolissima intercetta: quest'ultima non dovrebbe esserci in quanto se $q = 0$ e dunque non ho la presenza della compagna, la viscosità smorzerebbe fino ad esaurire i modi retrogradi dell'eccentricità iniziale.

In ogni caso, guardando a questa relazione, con il nostro modello siamo riusciti a confermare le evidenze osservative riguardo al periodo dei 'superhumps'.

4.2.2 Rate di crescita

Se nella sezione precedente ci si era concentrati sul rate di precessione del disco, adesso è la volta del rate di crescita dell'eccentricità, descritto dalla parte immaginaria dell'autovalore ω . L'espressione di quest'ultima era già stata vista alla sezione 3.5 con la (53)

$$Im(\omega) = \frac{\int_{r_{in}}^{r_{out}} \alpha_b P r^3 \left| \frac{\partial E}{\partial r} \right|^2 dr - 2\xi r^3 \rho \Omega |E|^2|_{r_{res}}}{2 \int_{r_{in}}^{r_{out}} r^3 \rho \Omega |E|^2 dr}$$

Subito si nota la presenza al primo termine dopo l'uguale del parametro della viscosità di volume α_b , ma di questa dipendenza ne parleremo dopo.

Il secondo termine in particolare rivelerà invece una influenza su $Im(\omega)$ anche da parte di h , vista la relazione $W \propto \frac{1}{h^2}$. Utilizzando i parametri di OY Carinae della tabella 2 e fissando α_b a 0.1, si è calcolata la variazione del rate di crescita in funzione di h : il risultato è riassunto dalla Figura 13, che ora riportiamo

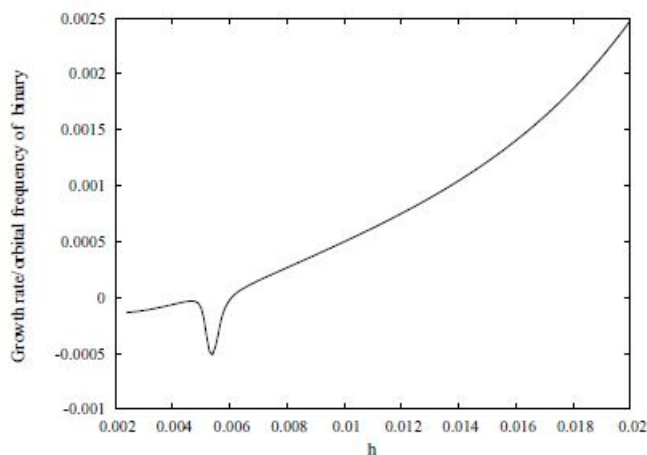


Figura 13: Rate di crescita in funzione del parametro h del semispessore. Utilizzati parametri di OY Car, $\alpha_b = 0.1$

Notiamo come a valori di h elevati si abbia una instabilità del modo, che cessa di esistere per valori più piccoli, cioè quelli consistenti con il semispessore che meglio si accordava al rate di precessione di OY Car ($h = 0.003$, vedi Figura 11).

La situazione è comunque piuttosto "fluida": variando il rapporto tra le masse q rispetto a quello di OY Car, il comportamento evidenziato in Figura 13 non rimarrà sempre lo stesso. Rimane in ogni caso il fatto che per un range di valori vicini al semispessore ipotizzato per OY Car, $0.003 \leq h \leq 0.01$, fissando $\alpha_b = 0.1$, si abbia stabilità per gran parte del range di valori di q di una SU UMa.

Come promesso, concludiamo parlando della dipendenza dal parametro α_b .

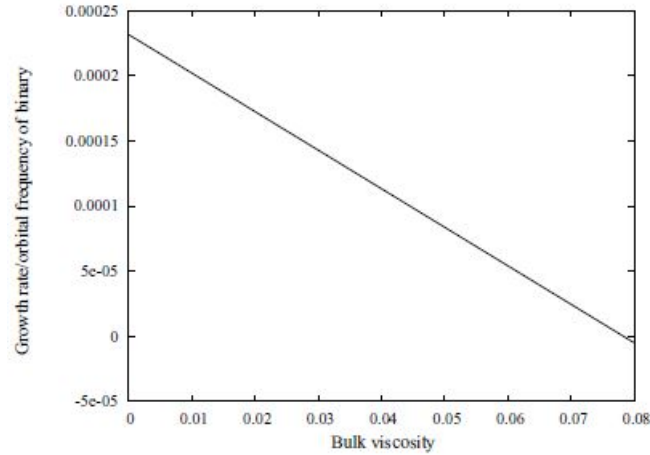


Figura 14: Rate di crescita in funzione del parametro α_b della viscosità di volume. Utilizzati parametri di OY Car, $h = 0.003$

Per il calcolo si sono anche in questo caso utilizzati i parametri di OY Car, con $h = 0.003$. Come si evince dal grafico, la dipendenza è approssimativamente lineare e si ottiene un modo stabile per $\alpha_b > 0.8$, il che è in accordo con la stabilità ottenuta per il valore di viscosità $\alpha_b = 0.1$ utilizzato nelle computazioni precedenti. Soffermandosi ancora sulla Figura 14, fa specie notare come anche se sopprimessimo totalmente il termine di smorzamento dell'eccentricità, rimanga un rate di crescita comunque molto basso: considerando un sistema SU UMa generico, di periodo orbitale di circa 2 ore, si troverebbe una crescita di E di un fattore 1.02 in un intervallo di tempo di un giorno. Il motivo di questa crescita lenta lo si può trovare alla Figura 10: la soppressione dell'eccentricità per i valori di W compatibili con i calcoli alla risonanza è sicuramente il motivo di questa caratteristica.

5 Conclusioni

Abbiamo dunque descritto la dinamica di dischi di accrescimento eccentrici in 2D, partendo da una sola equazione (la (48)) che riesce a contenere tutti i fattori che influiscono sull'evoluzione del sistema, inclusi i termini di generazione e smorzamento dell'eccentricità. L'espressione (48) dunque possiede tutte le informazioni sulla distribuzione dell'eccentricità del disco, la sua precessione e la sua crescita eccentrica.

Riassumiamo ora i principali traguardi raggiunti da questa descrizione

- l'inserimento nell'equazione dell'eccentricità del termine legato alla risonanza di Lindblad 3 : 1 porta ad una soppressione dell'eccentricità al raggio di risonanza nella forma di una cuspidate (Figura 4, Figura 10), che diventa sempre più importante al crescere dell'intensità di questa risonanza. Vista la forma dell'equazione dell'eccentricità, questa soppressione porta ad una diminuzione del rate di crescita, indicato da $Im(\omega)$ (equazione (53))
- il rate di precessione ricavato dall'equazione dell'eccentricità finale, $Re(\omega)$ (equazione (52)) ha un ottimo accordo con i dati osservativi dei 'superhumps' rispetto all'espressione della frequenza di precessione di una particella dovuta a forze mareali calcolata al raggio di risonanza (equazione (5)). La (52) può dunque tranquillamente sostituire la (5) come stima appunto del rate di precessione
- come si nota dalla Figura 10, la distribuzione di E per l'equazione dell'eccentricità completa picca a $r \simeq 0.37a$, raggio che Patterson [8] suggerì di utilizzare per fare in modo che l'espressione (5) per il rate di precessione andasse a coincidere con i dati osservativi (relativi, in quel caso, all'eccesso di periodo di 'superhump' ε). Questo picco dell'eccentricità E all'interno della risonanza sembra essere dunque la spiegazione per la quale i rate di precessione osservati siano nettamente minori rispetto a quelli previsti dalla precessione ω_{dyn} alla risonanza.

Nonostante i numerosi miglioramenti apportati al 'know-how' presente, questa trattazione riserva anche alcuni problemi

- nella Figura 11, il valore del parametro di semispessore h che meglio si accorda al rate di precessione rilevato per il sistema OY Carinae è $h = 0.003$, molto distante da quello previsto dal modello del disco 'steady- α ', del quale abbiamo utilizzato le prescrizioni (equazioni (65),(66)), pari a $h \simeq 0.01$. Questo si ripercuote su molti dei calcoli effettuati, visto che il valore scelto per h nelle computazioni è quello che meglio si accorda a OY Carinae
- collegato ad h sorge il problema legato al rate di crescita dell'eccentricità, che risulta più basso di quello che ci si aspetterebbe. Il collegamento è dovuto al parametro W dell'intensità della risonanza, con $W \propto \frac{1}{h^2}$. Un valore di h più basso porta ad un aumento dell'intensità della risonanza, il che porta ad una ancor più marcata soppressione dell'eccentricità alla risonanza. Per la proporzionalità del termine di crescita con E , si avrà un rate di crescita meno significativo di quanto ci si aspetterebbe.

Queste differenze tra i valori previsti inizialmente e quelli poi necessari a riprodurre i dati osservativi sono molto probabilmente dovute al fatto che si stia utilizzando un modello lineare in 2D.

Per poter descrivere in maniera ancor più completa e precisa la dinamica del disco necessiteremo di un modello non lineare, in 3D, che tenga conto anche della viscosità dinamica (non utilizzabile in questo modello perché produrrebbe una situazione di 'overstabilty').

Riferimenti bibliografici

- [1] R.C. Smith; Cataclysmic Variables, 2006, Contemporary Physics, 47, 363-386
- [2] B. Warner; Cataclysmic Variable Stars, 1995, Cambridge University Press, 27-28
- [3] J.R. Murray; Simulation of superhumps and superoutburst, 1998, MNRAS, 297, 323-333
- [4] M. Hirose and Y. Osaki; Hydrodynamics Simulations of Accretion Disks in Cataclysmic Variables: Superhump Phenomenon in SU UMa Stars, 1990, PASJ, 42, 135-163
- [5] S. Goodchild and G. Ogilvie; The dynamics of eccentric accretion discs in superhump systems, 2006, MNRAS, 368, 1123-1131
- [6] R. Withhurst; Numerical simulations of accretion discs-I. Superhumps: a tidal phenomenon of accretion discs, 1988, MNRAS, 232, 35-51
- [7] S.H. Lubow; A model for tidally driven eccentric instabilities in fluid disks, 1991, ApJ, 381, 259-267
- [8] J. Patterson; Accretion-Disk Precession and Substellar Secondaries in Cataclysmic Variables, 2001, PASP, 113, 736-747
- [9] J.R. Murray; The precession of eccentric discs in close binaries, 2000, MNRAS, 314, L1-L5
- [10] G.I. Ogilvie; Non-linear fluid dynamics of eccentric discs, 2001, MNRAS, 325, 231-248
- [11] F. Marzari; Dispense del corso Fisica dei Pianeti, A.A. 2015-2016
- [12] J. Frank, A. King, D. Raine; Accretion Power in Astrophysics, 2002, Cambridge University Press, 93-96
- [13] R. Whitehurst and A. King; Superhumps, resonances and accretion discs, 1991, MNRAS, 249, 25-35
- [14] J.H. Wood, K. Horne, G. Berriman and R.A. Wade; Eclipse studies of the dwarf nova OY Carinae in quiescence, 1989, ApJ, 341, 974-996

Ringraziamenti

Eh vabbè, siamo arrivati alla fine di questa laurea triennale e tocca fare i ringraziamenti, se no tutti si lamentano (si scherza, ovviamente).

Diamo uno strappo alla consuetudine (incredibilmente, visto il sottoscritto) e cominciamo da Chiara, la mia carissima (speriamo sia reciproco) sorellona: se non fosse per lei probabilmente farei altro (beh, chi vuol intendere intenda), perché senza quei "che brava la Chiara bla, bla, bla" gli stimoli non sarebbero stati gli stessi. Ovviamente c'è molto di più, ma lei lo sa già e penso le basti!

Chi mettere poi se non il dinamico duo Emiliangelo+Paola? Nonostante l'astio iniziale (soprattutto da una parte) il sostegno, e non intendo quello economico (che non si dimentica, ci mancherebbe), non è mai mancato. Spero col cuore che, almeno in parte, stia ripagando tutti gli sforzi e sacrifici fatti per sto disgraziato che perde i capelli.

Due parole anche per la tanto da me vituperata PD, che mi ha dato alloggio per ben 3 anni e che mi ha fatto conoscere tante belle (ma anche brutte, eh) persone: i miei compagni di fizika (ultime due file della LUF2, per intenderci), i butei del st John's, i muraldini, i matematicosi e altri ancora.

E poi gli amici più "datati". Tra tutti, menzione speciale per Mino e Giulia, i quali hanno sempre assistito e so(/u)pportato (oltre le mie fantastiche performance al karaoke) le mie lamentele in terra Padovana e non solo, e Gianmarco, che non vedo più spesso come un tempo ma rimane sempre... CIAMARCO!

Concludendo, un ringraziamento lo devo assolutamente anche al mio relatore, il Professor Marzari, per la sua disponibilità ad accettarmi come tesista e per la pazienza dimostrata tra mail pressanti e lettere di presentazione da compilare a mio beneficio.