

STUDIO DELLA POLARIZZAZIONE DELLA
LUCE BASATO SUI VETTORI DI STOKES E
SULLE MATRICI DI MUELLER

Hoang Duy Trinh

*A coloro che mi hanno sostenuto in questo
percorso di studi, ai miei genitori
ai miei amici e ad Elena.*

Indice

Abstract	1
Introduzione	3
1 La polarizzazione della luce	7
1.1 L'ellisse di polarizzazione	7
1.2 Parametri dell'ellisse di polarizzazione	11
2 I vettori di Stokes	15
2.1 Derivazione dei parametri di Stokes	16
2.2 Il vettore di Stokes	19
2.3 Significato dei parametri di Stokes	21
2.4 Luce non polarizzata o parzialmente polarizzata	24
2.5 Matrice di Jones e matrice di correlazione di Wolf	26
3 Le matrici di Mueller	29
3.1 Matrice di Mueller per polarizzatori	31
3.2 Matrice di Mueller per lamine di ritardo	34
3.3 Matrice di Mueller per elementi ottici ruotati	36
4 Misurazione dei parametri di Stokes	41
4.1 Metodo con lamina a quarto d'onda	41
4.2 Metodo con polarizzatore circolare	46
4.3 Metodo di annullamento dell'intensità	50
4.4 Metodo di Fourier	53

iv

Indice

5 Conclusioni

57

Ringraziamenti

59

Bibliografia e sitografia

61

Abstract

In questa tesi è stato analizzato un metodo matematico per lo studio dello stato di polarizzazione della luce, evidenziandone gli aspetti più importanti che la rendono il punto fondamentale per numerose applicazioni. In particolare la trattazione teorica affronta il formalismo dei vettori di Stokes, delle matrici di Mueller e del calcolo di Jones.

Il lavoro presenta in modo approfondito l'analisi di una metodologia per l'osservazione e la descrizione delle grandezze che riguardano la luce polarizzata e vuole proporre un metodo efficace e realizzabile in laboratorio per ottenere risultati che esprimano in modo preciso lo stato di polarizzazione di una sorgente di luce.

Questo studio è stato stimolato dall'interesse personale per l'attività didattica di Elementi di ottica e dalla successiva visita nel laboratorio CNR-IFN Luxor di Padova, dove è stata riscontrata l'effettiva varietà di realizzazioni pratiche basate sui fenomeni e sulla proprietà intrinseche della luce, che vengono descritte e studiate nella metodologia esposta in questa opera.

Introduzione

Lo studio della luce polarizzata parte innanzitutto da un'approfondita indagine sulle cause che la generano e porta quindi a studiare le proprietà del campo elettromagnetico, in modo tale da ottenerne una caratterizzazione precisa per l'analisi fisico-matematica. Il controllo della polarizzazione della luce è oggetto di grande interesse in diversi ambiti: la natura e le proprietà che possiede la luce polarizzata sono importanti e vengono sfruttate in numerose discipline e campi che spaziano in tutte le diverse scienze, dall'ottica alla chimica, passando per la biologia e le telecomunicazioni.^[1]

Per esempio è interessante citare il fenomeno della birifrangenza, che sfrutta il differente grado di assorbimento che un materiale possiede se sottoposto a differenti stati di polarizzazione della luce: questa proprietà viene ampiamente utilizzata soprattutto nell'ambiente delle tecnologie dei materiali; nello specifico esso è alla base nel funzionamento del processo di fotoelasticità, un metodo sperimentale per determinare la distribuzione delle tensioni su un materiale.

Il metodo è usato principalmente nei casi in cui i metodi matematici diventano inefficaci: diversamente dai metodi analitici, la fotoelasticità dá un'immagine ragionevolmente esatta della distribuzione delle tensioni anche nel caso di geometrie irregolari ed è importante per la determinazione dei punti critici di tensione in un materiale.^[2]

La polarizzazione della radiazione elettromagnetica è alla base del funzionamento di numerosi sistemi di comunicazione: il tipo di polarizzazione è determinato



Figura 1: Esempio di applicazione di fotoelasticità su un oggetto

dalla funzionalità che si vuole ottenere e dalla specifica applicazione a cui è indirizzato il sistema; attualmente nelle trasmissioni che coinvolgono l'utilizzo di antenne e che si basano sulla propagazione di radiofrequenze la polarizzazione è di fondamentale importanza per l'efficienza e l'efficacia per la trasmissione dei dati. Per esempio, un elevato numero di antenne utilizzate per le trasmissioni terrestri sfrutta la polarizzazione lineare, orizzontale o verticale, come nel caso delle antenne Yagi^[4], spesso usate per la ricezione del segnale televisivo ma anche per la trasmissione-ricezione di VHF (very-high frequency) e UHF (ultra-high frequency): è indispensabile che la direzione di queste antenne sia orientata seguendo l'esatto tipo di polarizzazione (verticale o lineare) per la fedele interpretazione del segnale acquisito.

Per le comunicazioni satellitari invece, si preferisce utilizzare la polarizzazione circolare: quest'ultima presenta interessanti proprietà che verranno discusse nei capitoli successivi, e viene sfruttata a causa dei fenomeni di scattering e di riflessione che si realizzano durante la propagazione nell'atmosfera e che portano effetti indesiderati che variano lo stato di polarizzazione del segnale; il degrado che subisce un'onda polarizzata circolarmente è minore rispetto ad altri tipi di polarizzazione, seppure esse debba essere realizzata con maggior sforzo. Tipici esempi che sfruttano tale caratteristica sono i satelliti DBS (digital broadcast).^[3]

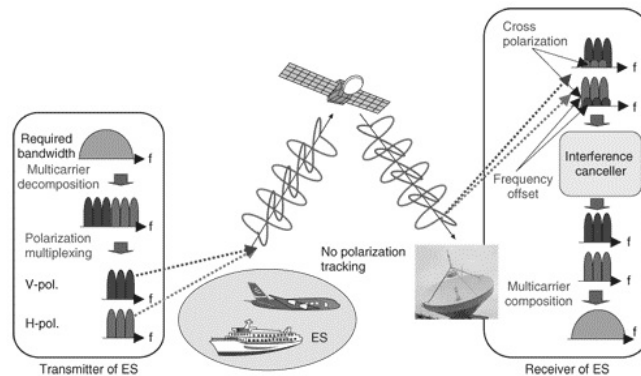


Figura 2: Schema di funzionamento di comunicazioni satellitari

Sempre nell'ambito delle telecomunicazioni, la crescita esponenziale della richiesta di velocità nella trasmissione dei dati, ha indotto l'utilizzo di sistemi di comunicazione come le fibre ottiche, che permettono di soddisfare elevate capacità di richiesta in termini di qualità del servizio offerte dalla rete. In alternativa alle classiche tipologie di multiplexing come la TDM (time-division multiplexing) o la FDM (frequency-division multiplexing), che si occupano della modulazione e della trasmissione dei dati in un canale per un sistema di telecomunicazioni, si è sviluppata la PDM (polarization-division multiplexing)^[4]: a differenza delle prime due, essa non sfrutta la divisione temporale in slot per l'accesso al canale, o la divisione in più bande di frequenza dello stesso canale, ma permette il multiplexing del segnale sfruttando il tipo di polarizzazione delle onde elettromagnetiche che lo trasportano; l'interpretazione dei dati ricevuti è consentita grazie all'ortogonalità dei segnali trasmessi, che viene ottenuta dallo stato di polarizzazione che li caratterizza.

Il multiplexing basato sulla divisione per polarizzazione viene utilizzato in coppia alla divisione per fase del segnale PSK (phase-shift keying), e consente di ottenere elevate velocità che variano dall'ordine dei gigabit per secondo, fino a giungere ai terabit per secondo.^[6]

La generazione di luce polarizzata è attualmente ottenuta grazie a particolari strumenti detti PSG (polarization-state generator): questi strumenti permettono di mo-

dificare le proprietà e le caratteristiche che descrivono lo stato di polarizzazione della luce, secondo i parametri e i criteri esposti nei capitoli successivi; il loro impiego consente di generare le speciali forme di polarizzazione lineare, circolare, ellittica e possono lavorare in diverse condizioni, con differenti range nello spettro della luce, dal visibile all'infrarosso. I PSG rappresentano la parte più commercializzata dei generatori di luce polarizzata, mentre differenti metodi e strumenti possono essere utilizzati per generare i diversi gradi di polarizzazione della luce, a seconda delle esigenze e dell'applicazione nella quale la luce è coinvolta.^[7]

Capitolo 1

La polarizzazione della luce

In questo capitolo vengono derivate le equazioni che descrivono esattamente il comportamento del campo elettromagnetico, alla quale sono attribuiti i differenti stati di polarizzazione della luce.

Si ottiene quindi una caratterizzazione della luce, basata sulla figura dell'ellisse di polarizzazione e se ne esaltano gli attributi e i parametri più importanti che consentono la descrizione analitica del fenomeno.

1.1 L'ellisse di polarizzazione

La luce viene descritta come fenomeno dovuto alle oscillazioni di un campo elettromagnetico nello spazio. Sia (x, y, z) un sistema di coordinate cartesiane, dove z viene assunto, per convenienza, la direzione di propagazione della luce, mentre x ed y sono le componenti trasversali del fenomeno oscillatorio. Le equazioni che descrivono l'oscillazione del campo elettromagnetico devono soddisfare l'equazione delle onde di d'Alembert:

$$\nabla^2 u_i(r, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u_i(r, t)}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

Risolvendo l'equazione (1.1), considerando come soluzioni onde armoniche isofrequenziali, le componenti lungo le direzioni x ed y del campo elettrico possono

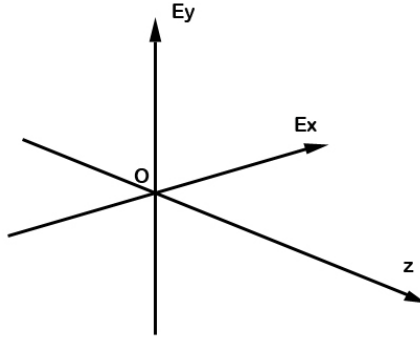


Figura 1.1: Componenti trasversali del campo elettromagnetico

essere descritte dalle relazioni

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(\tau + \delta_x) \quad (1.2)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\tau + \delta_y) \quad (1.3)$$

dove E_{0x} e E_{0y} sono le ampiezze massime del campo elettromagnetico oscillante e δ_x , δ_y sono le fasi.

Dalle equazioni (1.2) e (1.3) possiamo ottenere il luogo dei punti descritto dal vettore risultante dalle 2 componenti $E_x(z, t)$ e $E_y(z, t)$, riscrivendole in questo modo

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos \tau \cos \delta_x - \sin \tau \sin \delta_x \quad (1.4)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos \tau \cos \delta_y - \sin \tau \sin \delta_y \quad (1.5)$$

ottenute con semplici relazioni trigonometriche. Quindi:

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \sin \delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \sin \delta_x = \cos \tau \sin(\delta_y - \delta_x) \quad (1.6)$$

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \cos \delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta_x = \sin \tau \sin(\delta_y - \delta_x) \quad (1.7)$$

elevando al quadrato la (1.6) e la (1.7) e sommandole si ottiene

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos\delta = \sin^2\delta \quad (1.8)$$

dove si definisce la differenza di fase fra le componenti

$$\delta = \delta_y - \delta_x \quad (1.9)$$

da cui si riconosce l'equazione di un'ellisse e si giunge al seguente risultato: in ogni istante il campo elettromagnetico si propaga descrivendo un luogo di punti la cui forma è un ellisse, chiamato appunto *ellisse di polarizzazione*.

Dall'equazione (1.8), osserviamo che il terzo termine sta ad indicare che generalmente l'ellisse di polarizzazione è ruotata, come mostrato in figura 1.2, di un angolo ψ . Inoltre si può ricavare l'area sottesa dall'ellisse con la seguente formula:

$$A = \pi E_{0x} E_{0y} \sin\delta \quad (1.10)$$

La (1.8) descrive in modo generale tutti gli stati di polarizzazione della luce; a

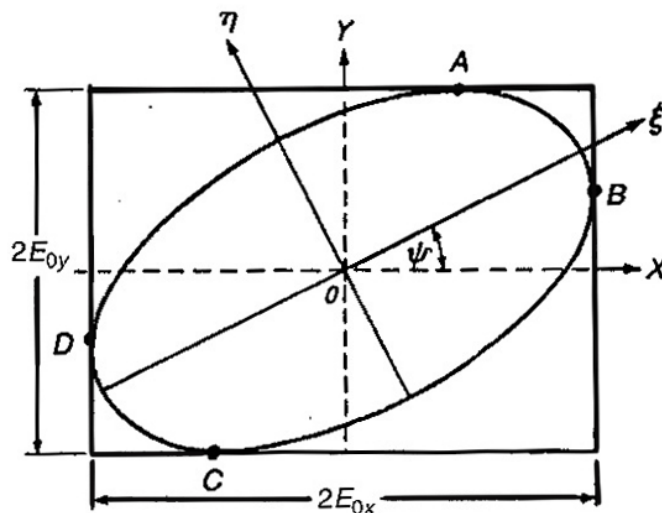


Figura 1.2: Ellisse di polarizzazione

seconda dei diversi valori dei termini E_{0x} , E_{0y} e δ si possono ottenere forme par-

ticolari dell'ellisse di polarizzazione, che hanno grande importanza nel descrivere specifiche proprietà della luce:

1. Se E_{0x} o E_{0y} sono uguali a 0, otteniamo dalla (1.2) e dalla (1.3):

$$E_{0x} = 0 \quad E_x(z, t) = E_{0x} \cos(\tau + \delta_x) \quad E_y(z, t) = 0 \quad (1.11)$$

oppure

$$E_{0y} = 0 \quad E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\tau + \delta_y) \quad E_x(z, t) = 0 \quad (1.12)$$

In questo caso l'oscillazione del campo avviene lungo solo una direzione x (oppure y) e la luce viene detta *polarizzata linearmente* (nella direzione x o y).

2. Se $\delta = 0$ o $\delta = \pi$ allora dalla (1.8) si ha:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} \pm 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} = 0 \quad (1.13)$$

che si può scrivere anche come quadrato di binomio

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}} \pm \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 = 0 \quad (1.14)$$

da cui si ottiene l'equazione

$$E_y = \pm \left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right) E_x \quad (1.15)$$

che è l'equazione di una retta di pendenza $\pm \left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right)$: la luce si dice in questo *polarizzata linearmente con inclinazione di $\pm \left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right)$.*

3. Se $\delta = \pi/2$ o $\delta = 3\pi/2$ l'equazione dell'ellisse di polarizzazione si riduce a:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1 \quad (1.16)$$

che è l'equazione di un'ellisse con gli assi coincidenti con il piano (x, y) di riferimento.

4. Se $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ e $\delta = \pi/2$ o $\delta = 3\pi/2$ allora si ha

$$\frac{E_x^2}{E_0^2} + \frac{E_y^2}{E_0^2} = 1 \quad (1.17)$$

L'equazione (1.17) descrive un cerchio: si parla in questo caso di *polarizzazione circolare* destra ($\delta = \pi/2$) o sinistra ($\delta = 3\pi/2$).

I 4 casi esaminati rappresentano forme particolari dell'ellisse di polarizzazione e sono particolarmente importanti nello studio della polarizzazione della luce.

1.2 Parametri dell'ellisse di polarizzazione

Riprendendo l'equazione (1.8), si nota che generalmente l'ellisse di polarizzazione presenta, in generale, una rotazione di un angolo ψ rispetto all'asse x , come riportato in figura 1.3 Siano a e b i semiassi rispettivamente maggiore e minore dell'ellisse, applicando le proprietà trigonometriche e attraverso alcune operazioni algebriche si riesce ad ottenere un'equazione che descrive il comportamento dell'angolo ψ in funzione di E_{0x} , E_{0y} e δ :

$$\tan 2\psi = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos \delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \quad (1.18)$$

che può variare nell'intervallo compreso tra 0 e π .

È utile introdurre un parametro ausiliario α per l'ellisse di polarizzazione, che descrive l'angolo tra E_{0x} ed E_{0y} e che può variare tra i valori di 0 e $\pi/2$

$$\tan \alpha = \frac{E_{0x}}{E_{0y}} \quad (1.19)$$

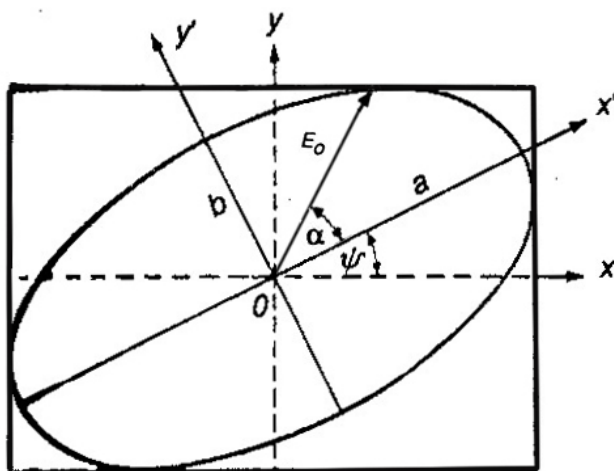


Figura 1.3: Ellisse di polarizzazione ruotato

cosicchè è possibile relazionare l'angolo ψ dell'equazione (1.18) ad α con la relazione

$$\tan 2\psi = (\tan 2\alpha) \cos \delta \quad (1.20)$$

Un ulteriore parametro importante per la descrizione della polarizzazione della luce attraverso un'ellisse è l'*ellitticità* χ , descritta dal rapporto dei semiassi a e b

$$\tan \chi = \frac{\pm b}{a} \quad (1.21)$$

Essa può variare da $-\pi/4$ a $\pi/4$. Si noti che per la polarizzazione lineare il valore di b è nullo e quindi $\chi = 0$, mentre per la polarizzazione circolare $b = \pm a$ perciò $\chi = \pm\pi/4$.

Combinando le equazioni dei diversi parametri descritti in questo paragrafo, la relazione che esiste tra χ e gli angoli δ e α è la seguente:

$$\sin 2\chi = \frac{2E_{0x}E_{0y} \sin \delta}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} = (\sin 2\alpha) \sin \delta \quad (1.22)$$

Le descrizioni ottenute finora permettono di evidenziare che la polarizzazione della luce definita attraverso un'ellisse può essere espressa in modo analogo sia in

termini dei valori α e δ , oppure con i parametri ψ e χ .

Capitolo 2

I vettori di Stokes

La descrizione della luce polarizzata attraverso l'ellisse di polarizzazione è molto utile in quanto riesce ad esprimere lo stato della luce attraverso semplici e poche equazioni, ma risulta inadeguata in termini di osservazione e misurazione. Durante la sua propagazione infatti, la luce traccia l'ellisse, o una sua particolare forma (lineare o circolare), in un intervallo di tempo dell'ordine di 10^{-15} secondi, un periodo ovviamente troppo breve per permetterne l'osservazione. Inoltre la descrizione è possibile solo nel caso in cui la luce presenti un completo grado di polarizzazione.

Queste limitazioni sulla natura della luce impongono alla teoria di impiegare quantità che possono essere realmente osservabili e misurabili, suggerendo quindi di utilizzare valori e grandezze medie, che possono essere valutate quantitativamente.

Per queste ragioni vengono introdotti quattro parametri misurabili, conosciuti come vettori di Stokes, che permettono la descrizione completa di tutti gli stati della luce polarizzata, parzialmente polarizzata e non polarizzata, partendo da misure di intensità.

2.1 Derivazione dei parametri di Stokes

Per derivare le equazioni che descrivono i parametri di Stokes si considerino le due seguenti equazioni delle oscillazioni del campo elettromagnetico, dove senza perdita di generalità è stata considerata la direzione $z = 0$

$$E_x(t) = E_{0x} \cos[\omega t + \delta_x] \quad (2.1)$$

$$E_y(t) = E_{0y} \cos[\omega t + \delta_y] \quad (2.2)$$

dove E_{0x} ed E_{0y} rappresentano l'ampiezza, ω la pulsazione angolare e δ_x e δ_y le fasi dell'oscillazione.

Rimuovendo il termine ωt dalla (2.1) e dalla (2.2) e considerando costanti le ampiezze E_{0x} ed E_{0y} , ci si riporta all'equazione già osservata dell'ellisse di polarizzazione:

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x(t)}{E_{0x}} \frac{E_y(t)}{E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2.3)$$

con

$$\delta = \delta_y - \delta_x \quad (2.4)$$

Per ottenere una rappresentazione osservabile e quindi misurabile del campo elettromagnetico, come già anticipato bisogna ricorrere alle medie temporali dei valori di $E_x(t)$ e $E_y(t)$; sfruttando la periodicità delle oscillazioni, si può considerare la media di un solo periodo ed ottenere dalla (2.3) il seguente risultato

$$\frac{\langle E_x^2(t) \rangle}{E_{0x}^2} + \frac{\langle E_y^2(t) \rangle}{E_{0y}^2} - \frac{2 \langle E_x(t) E_y(t) \rangle}{E_{0x} E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2.5)$$

dove il simbolo $\langle \cdot \rangle$ indica la media temporale definita come

$$\langle E_i(t) E_j(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_i(t) E_j(t) dt \quad (2.6)$$

Dalla (2.1) e dalla (2.2) si ottiene quindi che le medie temporali nella (2.5) risul-

tano

$$\langle E_x^2(t) \rangle = \frac{1}{2} E_{0x}^2 \quad (2.7)$$

$$\langle E_y^2(t) \rangle = \frac{1}{2} E_{0y}^2 \quad (2.8)$$

$$\langle E_x(t) E_y(t) \rangle = \frac{1}{2} E_{0x} E_{0y} \cos \delta \quad (2.9)$$

Infine, moltiplicando la (2.5) per $4E_{0x}^2 E_{0y}^2$ e sostituendo i valori medi appena trovati si ricava

$$2E_{0x}^2 E_{0y}^2 + 2E_{0x}^2 E_{0y}^2 - (2E_{0x} E_{0y} \cos \delta)^2 = (2E_{0x} E_{0y} \sin \delta)^2 \quad (2.10)$$

Per ottenere un'equazione che descriva il risultato finale in termini di intensità, si sommi e si sottragga la quantità $E_{0x}^4 + E_{0y}^4$ nella parte sinistra dell'equazione (2.10), cosicchè si ottegnano tutti termini elevati al quadrato:

$$(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^2 - (E_{0x}^2 - E_{0y}^2)^2 - (2E_{0x} E_{0y} \cos \delta)^2 = (2E_{0x} E_{0y} \sin \delta)^2 \quad (2.11)$$

Le quantità all'interno delle parentesi tonde nell'equazione (2.11) rappresentano i quattro parametri di Stokes

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \quad (2.12)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \quad (2.13)$$

$$S_2 = 2E_{0x} E_{0y} \cos \delta \quad (2.14)$$

$$S_3 = 2E_{0x} E_{0y} \sin \delta \quad (2.15)$$

Riscrivendo la (2.11) si ottiene

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (2.16)$$

I quattro parametri di Stokes appena derivati sono quantità reali e possono descrivere in modo univoco l'ellisse di polarizzazione della luce e quindi il campo elettromagnetico che la genera.

Ulteriori considerazioni si possono effettuare sui parametri dell'ellisse di polarizzazione ricavati nel capitolo 1. È possibile ricondurre la descrizione degli angoli di rotazione e di ellitticità ψ e χ ai quattro parametri di Stokes: dalla (1.18)

$$\tan 2\psi = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos \delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} = \frac{S_2}{S_1}$$

mentre dalla (1.22) si osserva che

$$\sin 2\chi = \frac{2E_{0x}E_{0y} \sin \delta}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} = (\sin 2\alpha) \sin \delta = \frac{S_3}{S_0}$$

La derivazione dei parametri di Stokes si è ottenuta attraverso un ragionamento sulle medie temporali delle ampiezze delle oscillazioni del campo elettromagnetico. Un'alternativa a questo procedimento è osservare che le equazioni (2.1) e (2.2) sono esprimibili attraverso le seguenti equazioni appartenenti al campo dei complessi:

$$E_x(t) = \Re\{E_{0x} \exp[i(\omega t + \delta_x)]\} = \Re[E_x \exp(i\omega t)] \quad (2.17)$$

$$E_y(t) = \Re\{E_{0y} \exp[i(\omega t + \delta_y)]\} = \Re[E_y \exp(i\omega t)] \quad (2.18)$$

dove E_x ed E_y valgono

$$E_x = E_{0x} \exp(i\delta_x) \quad (2.19)$$

$$E_y = E_{0y} \exp(i\delta_y) \quad (2.20)$$

Con riferimento alle operazioni tra numeri complessi, i parametri di Stokes si

ottengono con le seguenti formule:

$$S_0 = E_x E_x^* + E_y E_y^* \quad (2.21)$$

$$S_1 = E_x E_x^* - E_y E_y^* \quad (2.22)$$

$$S_2 = E_x E_y^* + E_y E_x^* \quad (2.23)$$

$$S_3 = i(E_x E_y^* - E_y E_x^*) \quad (2.24)$$

che identificano una rappresentazione complessa dei parametri di Stokes. Sostituendo le relazioni (2.23) e (2.24) nelle precedenti, si riottengono le equazioni dei parametri ottenuta dall'ellisse di polarizzazione già ricavate nella parte iniziale di questo capitolo.

2.2 Il vettore di Stokes

Riarrangiando in una colonna i quattro parametri di Stokes appena derivati si ottiene il vettore di Stokes:

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Dalle descrizioni già svolte e dalle equazioni (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15) si osserva che il vettore di Stokes per la luce polarizzata in modo ellittico è

$$S = \begin{pmatrix} E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \\ E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \\ 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta \\ 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Vengono ora analizzati e derivati i vettori di Stokes per le particolari forme di polarizzazione lineare e circolare.

1. Polarizzazione lineare orizzontale o verticale:

Si ottiene imponendo $E_{0x} = 0$ o $E_{0y} = 0$ e quindi il vettore di Stokes risulta essere rispettivamente

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

oppure

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

dove $I_0 = E_{0x}^2$ (oppure $I_0 = E_{0y}^2$) indica l'intensità totale.

2. Polarizzazione lineare a $\pm 45^\circ$:

In questo caso $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ e $\delta = 0$ ($+45^\circ$) o $\delta = 180^\circ$ (-45°). Si ottengono i seguenti vettori:

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

con $I_0 = 2E_0^2$.

3. Polarizzazione circolare destra o sinistra:

Le ampiezze sono uguali $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ e la fase assume i valori di $\delta =$

$\pm 90^\circ$. I vettori risultanti sono quindi

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

con $I_0 = 2E_0^2$.

2.3 Significato dei parametri di Stokes

Come precedentemente anticipato, l'utilità fondamentale dei parametri di Stokes consiste nell'essere direttamente misurabili poichè essi descrivono il comportamento della luce dal punto di vista dell'intensità del campo elettromagnetico, ottenuta come media temporale della sua ampiezza elevata al quadrato. Per ottenere quindi dei risultati che quantificano la descrizione della luce polarizzata si effettuano delle misure che coinvolgono l'utilizzo di elementi ottici quali lamine di ritardo ed polarizzatori: il primo crea una differenza di fase tra le componenti del campo elettromagnetico, il secondo permette di trasmettere solo una particolare direzione del campo.

Ricorrendo alla rappresentazione nel campo dei complessi, le componenti trasversali del campo elettromagnetico risultanti dal passaggio attraverso la lamina di ritardo sono:

$$E'_x = E_x e^{i\phi/2} \quad (2.33)$$

$$E'_y = E_y e^{-i\phi/2} \quad (2.34)$$

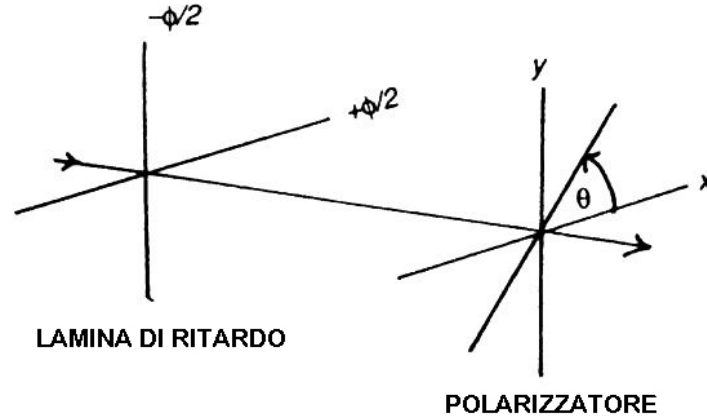


Figura 2.1: Schema per la misurazione dei parametri di Stokes

che evidenziano come la fase della componente x sia stata portata avanti di $\phi/2$ mentre la componente y sia stata ritardata di $\phi/2$.

L'elemento successivo che il raggio di luce incontra lungo il suo cammino è il polarizzatore, il quale determina il passaggio del campo elettromagnetico solo lungo la direzione corrispondente ad un angolo θ rispetto all'asse x , e si ottiene quindi come risultato finale:

$$E = E_x e^{i\phi/2} \cos \theta + E_y e^{-i\phi/2} \sin \theta \quad (2.35)$$

L'intensità del raggio emergente dal sistema è data da

$$I = E * E^* \quad (2.36)$$

e riformulando l'equazione (2.42) mediante semplificazioni trigonometriche si ottiene la seguente

$$I(\theta, \phi) = \frac{1}{2} [(E_x E_x^* + E_y E_y^*) + (E_x E_x^* - E_y E_y^*) \cos 2\theta + (E_x E_x^* + E_y E_y^*) \cos \phi \sin 2\theta + i(E_x E_x^* - E_y E_y^*) \sin \phi \sin 2\theta] \quad (2.37)$$

nella quale si riconoscono i parametri di Stokes derivati precedentemente. Sostituendo si ottiene la forma esplicita

$$I(\theta, \phi) = \frac{1}{2} [S_0 + S_1 \cos 2\theta + S_2 \cos \phi \sin 2\theta + S_3 \sin \phi \sin 2\theta] \quad (2.38)$$

che viene denominata come formula dell'intensità di Stokes per la misurazione dei quattro parametri.

I primi tre parametri vengono misurati annullando l'azione della lamina di ritardo, ovvero ponendo $\phi = 0$ e ruotando l'asse di trasmissione del polarizzatore rispettivamente di un angolo di 0° per S_0 , $+45^\circ$ per S_1 e $+90^\circ$ per S_2 . L'ultimo parametro S_3 viene misurato con la cosiddetta lamina a quarto d'onda, ovvero ponendo il primo elemento ottico ad un angolo $\phi = 90^\circ$, e portando l'asse di trasmissione del polarizzatore a 45° . I parametri di Stokes ottenuti dalla formula dell'intensità di Stokes sono quindi i seguenti:

$$S_0 = I(0^\circ, 0^\circ) + I(90^\circ, 0^\circ) \quad (2.39)$$

$$S_1 = I(0^\circ, 0^\circ) - I(90^\circ, 0^\circ) \quad (2.40)$$

$$S_2 = 2I(45^\circ, 0^\circ) - I(0^\circ, 0^\circ) - I(90^\circ, 0^\circ) \quad (2.41)$$

$$S_3 = 2I(45^\circ, 90^\circ) - I(0^\circ, 0^\circ) - I(90^\circ, 0^\circ) \quad (2.42)$$

Il significato dei parametri di Stokes può essere dedotto dalle equazioni appena ottenute e dalle definizioni date per ognuno di essi; con riferimento alla figura (2.2), si nota che:

- S_0 è la somma di E_{0x} ed E_{0y} , quindi indica l'intensità totale;
- S_1 è la differenza delle due intensità trasversali e può essere considerato un indice di quanto la luce sia polarizzata lungo la direzione orizzontale o verticale;
- S_2 indica la quantità di componente polarizzata a 45° e a 135° della luce;

- S_3 descrive la quantità di componente polarizzata circolare destra e sinistra della luce.

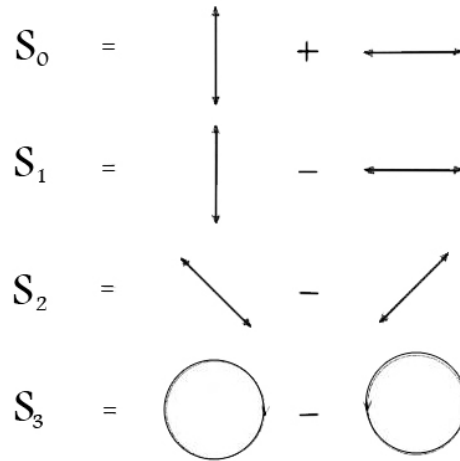


Figura 2.2: Rappresentazione del significato dei parametri di Stokes

Vale la pena sottolineare la diretta accessibilità e misurabilità dei parametri appena descritti ed è interessante conoscere che al tempo della loro formulazione (a metà del diciannovesimo secolo), le equazioni appena ricavate non potevano nè essere dimostrate, nè utilizzate in pratica, poichè l'unico strumento in grado di rilevare l'intensità della luce era l'occhio umano. La loro importanza è stata riconosciuta quasi un secolo dopo la loro enunciazione.

2.4 Luce non polarizzata o parzialmente polarizzata

Come motivato in precedenza, la risoluzione delle equazioni sull'intensità in grado di permettere di ricavare i parametri per la luce polarizzata non era perseguibile per motivi di natura tecnica al tempo della loro formulazione.

L'intento di Stokes era infatti quello di trovare un modello matematico che descrivesse il comportamento della luce non polarizzata: un suo grande contributo fu notare che a differenza della luce polarizzata, questa non variava la sua intensità al variare della rotazione dell'asse del polarizzatore o alla presenza di una lamina di ritardo.

Infatti risulta che l'intensità osservata per la luce non polarizzata è sempre

$$I(\theta, \phi) = \frac{1}{2} S_0 \quad \forall \theta, \phi \quad (2.43)$$

e quindi

$$S_1 = S_2 = S_3 = 0 \quad (2.44)$$

Alla luce di quanto esposto, si giunge alle seguenti considerazioni:

1. per la luce completamente polarizzata vale

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (2.45)$$

2. per la luce non polarizzata vale

$$S_0^2 \geq 0 \quad S_1 = S_2 = S_3 = 0 \quad (2.46)$$

3. Il caso per la parziale polarizzazione risulta

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (2.47)$$

Particolare importanza per la caratterizzazione del differente stato di polarizzazione è assunta dal parametro P che ne descrive il grado come rapporto tra intensità della quantità polarizzata e intensità totale della luce

$$P = \frac{I_{pol}}{I_{tot}} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} \quad 0 \leq P \leq 1 \quad (2.48)$$

con $P = 1$ per il caso di completa polarizzazione, $P = 0$ per la luce non polarizzata e $0 < P < 1$ per la parziale polarizzazione.

2.5 Matrici di Jones e matrice di correlazione di Wolf

In alternativa alle caratterizzazioni descritte finora, basate sui vettori di Stokes, sono stati sviluppati ulteriori modelli matematici in grado di definire lo stato di polarizzazione della luce, riconducibili comunque allo stesso tipo di descrizione esposto fin qui.

In particolare per la luce che presenta un grado completo di polarizzazione è utile far riferimento al formalismo di Jones: esso coinvolge l'utilizzo di un vettore di dimensione 2, detto vettore di Jones, definito come segue

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{0x}e^{i\delta_x} \\ E_{0y}e^{i\delta_y} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

dove E_{0x} e E_{0y} indicano l'ampiezza del campo elettromagnetico e δ la fase, e permette la descrizione delle proprietà di alcuni elementi ottici come polarizzatori e lamine di ritardo grazie alla costruzione di una matrice, detta appunto matrice di Jones: se per esempio il campo elettromagnetico in uscita da un sistema ottico risulta

$$E'_x = j_{xx}E_x + j_{xy}E_y \quad (2.50)$$

$$E'_y = j_{yx}E_x + j_{yy}E_y \quad (2.51)$$

la relativa matrice è data da

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{pmatrix}$$

e la relazione che descrive ingresso e uscita del sistema ottico è

$$\mathbf{E}' = \mathbf{J}\mathbf{E} \quad (2.52)$$

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Nel caso di luce parzialmente polarizzata la matrice di Jones non è adatta a descrivere lo stato in cui si presenta la radiazione elettromagnetica e per questo si fa ricorso alla matrice di correlazione di Wolf: in questa condizione infatti la natura del campo elettromagnetico diventa stocastica e solo un'informazione puramente statistica è riconducibile ad uno studio analitico; ancora una volta si giunge ad esaminare la media temporale dell'intensità del campo elettromagnetico, la matrice di Wolf viene quindi definita come segue

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{yx} & w_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

dove gli elementi della matrice rappresentano la media temporale dell'ampiezza del campo elettromagnetico al quadrato.

Per come è stata definita la matrice di Wolf è possibile ricondursi ai parametri di Stokes attraverso le seguenti relazioni

$$S_0 = w_{xx} + w_{yy} \quad (2.55)$$

$$S_1 = w_{xx} - w_{yy} \quad (2.56)$$

$$S_2 = w_{xy} + w_{yx} \quad (2.57)$$

$$S_3 = i(w_{xy} - w_{yx}) \quad (2.58)$$

È inoltre interessante osservare che un rapido calcolo del determinante della matrice di Wolf permette subito la valutazione dello stato di polarizzazione della radiazione luminosa in oggetto. Si ha infatti per luce completamente polarizzata

$$\det \mathbf{W} = 0 \quad (2.59)$$

mentre per luce parzialmente polarizzata

$$\det \mathbf{W} > 0 \quad (2.60)$$

Capitolo 3

Le matrici di Mueller

In questo capitolo viene studiato come lo stato di polarizzazione si modifica quando la luce interagisce con differenti elementi ottici. La trattazione è basata sui vettori di Stokes che rappresentano uno strumento adeguato per tale caratterizzazione ed assume di lavorare con elementi ottici che presentano un comportamento lineare.

Sia \mathbf{S} il vettore di Stokes che descrive lo stato di polarizzazione di un raggio incidente su un generico elemento ottico. L'interazione che la radiazione subisce col sistema produce in uscita un nuovo vettore \mathbf{S}' , esprimibile come combinazione lineare dei quattro parametri di Stokes in ingresso:

$$S'_0 = m_{00}S_0 + m_{01}S_1 + m_{02}S_2 + m_{03}S_3 \quad (3.1)$$

$$S'_1 = m_{10}S_0 + m_{11}S_1 + m_{12}S_2 + m_{13}S_3 \quad (3.2)$$

$$S'_2 = m_{20}S_0 + m_{21}S_1 + m_{22}S_2 + m_{23}S_3 \quad (3.3)$$

$$S'_3 = m_{30}S_0 + m_{31}S_1 + m_{32}S_2 + m_{33}S_3 \quad (3.4)$$

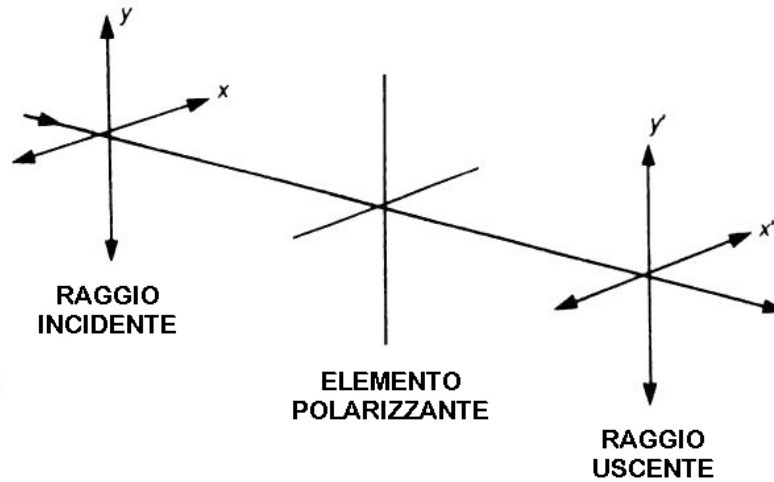


Figura 3.1: Interazione di un raggio incidente con un elemento polarizzante

Espresso in forma matriciale diventa

$$\begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{S}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{S} \quad (3.6)$$

dove \mathbf{S}' , \mathbf{M} , ed \mathbf{S} rappresentano la notazione vettoriale delle matrici in (3.5); la matrice \mathbf{M} ha dimensioni 4x4 ed è detta matrice di Mueller; essa descrive l'interazione e il cambiamento sullo stato della polarizzazione prodotto dal sistema ottico sul raggio incidente.

Se il sistema ottico è formato dalla combinazione di diversi elementi ottici, la matrice di Mueller che descrive l'intero sistema è determinata rapidamente: la notazione esposta finora, infatti, permette di ottenere la matrice di Mueller finale moltiplicando a sinistra la matrice che descrive l'elemento ottico per il vettore di Stokes che descrive lo stato di polarizzazione iniziale della luce.

La polarizzazione di una radiazione elettromagnetica può essere ottenuta e modificata variando i differenti parametri che compaiono nelle equazioni che descrivono l'oscillazione e la propagazione del campo elettromagnetico: per ottenere un cambiamento sullo stato di polarizzazione possono essere modificate le ampiezze delle componenti trasversali del campo elettromagnetico tramite un polarizzatore, o sfruttando la riflessione all'angolo di Brewster su un materiale dielettrico, oppure può essere introdotta una differenza di fase grazie ad una lamina di ritardo, o ancora le componenti possono essere ruotate di un angolo θ grazie ad un elemento rotatorio.

Nella parte successiva del capitolo vengono derivate le varie forme della matrice di Mueller dei principali componenti appena accennati.

3.1 Matrice di Mueller per polarizzatori

Un polarizzatore è un elemento ottico che attenua le componenti trasversali del campo elettromagnetico in maniera differente; infatti viene definito anche attenuatore anisotropico, ovvero che accentua la trasmissione di una componente rispetto ad un'altra.

Si supponga che un raggio incida su un polarizzatore; in uscita si ottiene

$$E'_x = p_x E_x \quad 0 \leq p_x \leq 1 \quad (3.7)$$

$$E'_y = p_y E_y \quad 0 \leq p_y \leq 1 \quad (3.8)$$

dove p_x e p_y sono i fattori di attenuazione delle ampiezze delle componenti trasversali rispetto all'asse del polarizzatore.

I rispettivi parametri di Stokes ottenuti in uscita dal polarizzatore sono

$$S'_0 = E'_x E'^*_x + E'_y E'^*_y \quad (3.9)$$

$$S'_1 = E'_x E'^*_x - E'_y E'^*_y \quad (3.10)$$

$$S'_2 = E'_x E'_y{}^* + E'_y E'_x{}^* \quad (3.11)$$

$$S'_3 = i(E'_x E'_y{}^* - E'_y E'_x{}^*) \quad (3.12)$$

Utilizzando la forma matriciale 3.5 e sostituendo con le equazioni 3.7 e 3.8 si ottiene

$$\begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_x^2 + p_y^2 & p_x^2 - p_y^2 & 0 & 0 \\ p_x^2 - p_y^2 & p_x^2 + p_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_x p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_x p_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

La matrice 4x4 è quindi la matrice di Mueller per un polarizzatore con coefficienti d'attenuazione p_x e p_y .

Casi di particolare importanza si verificano quando la trasmissione della radiazione elettromagnetica avviene solo lungo un particolare asse del polarizzatore (per esempio l'asse x) ed è nulla lungo l'asse ortogonale a esso: si parla allora di polarizzatore ideale, nella quale il coefficiente p_y è pari a 0 e la relativa matrice di Mueller ha la forma

$$\mathbf{M}_H = \frac{p_x^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

La precedente matrice è detta matrice di Mueller per la polarizzazione ideale orizzontale.

Analogamente, quando è il coefficiente p_x ad annullarsi, si ottiene la matrice di Mueller per la polarizzazione ideale verticale:

$$\mathbf{M}_V = \frac{p_y^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

L'utilizzo di questo formalismo permette di verificare con un semplice test se l'elemento polarizzante di un sistema ottico è in realtà un polarizzatore lineare. Seguendo la figura 3.2 si pone l'ipotetico polarizzatore lineare con l'asse di tra-

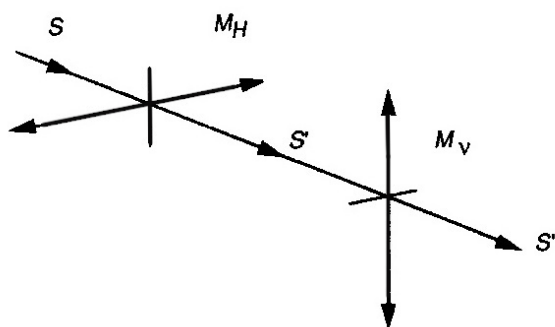


Figura 3.2: Schema per il test di un polarizzatore lineare

missione orizzontalmente. Sempre lungo la stessa direzione di propagazione si pone lo stesso elemento ottico, questa volta con l'asse di trasmissione lungo la direzione verticale: in questa maniera il raggio uscente dal primo elemento ottico risulta

$$\mathbf{S}' = \mathbf{M}_H \cdot \mathbf{S} \quad (3.16)$$

mentre quello finale che esce da tutto il sistema ha come prodotto

$$\mathbf{S}'' = \mathbf{M}_V \cdot \mathbf{S}' = \mathbf{M}_V \cdot \mathbf{M}_H \cdot \mathbf{S} \quad (3.17)$$

La matrice che descrive l'intero sistema risulta quindi

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Il risultato sta ad indicare che alla presenza di un sistema composto da due polarizzatori lineari incrociati, i cui assi di trasmissione sono ortogonali tra di loro, la matrice di Mueller risulta nulla, e conseguentemente l'intensità trasmessa è pari a

zero.

3.2 Matrice di Mueller per lamine di ritardo

A differenza del polarizzatore, la lamina di ritardo altera lo stato di polarizzazione della luce introducendo una differenza di fase ϕ tra le componenti trasversali del campo elettromagnetico. Questa situazione può essere interpretata come conseguenza di uno sfasamento di $+\phi/2$ per la componente x e $-\phi/2$ per la componente y , e viene descritta con le seguenti equazioni

$$E'_x = e^{+i\phi/2} E_x \quad (3.19)$$

$$E'_y = e^{-i\phi/2} E_y \quad (3.20)$$

Utilizzando la definizione dei vettori di Stokes si ottiene

$$S'_0 = S_0 \quad (3.21)$$

$$S'_1 = S_1 \quad (3.22)$$

$$S'_2 = S_2 \cos \phi + S_3 \sin \phi \quad (3.23)$$

$$S'_3 = -S_2 \sin \phi + S_3 \cos \phi \quad (3.24)$$

che in forma matriciale è

$$\begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{S}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{S} \quad (3.26)$$

La matrice \mathbf{M} risulta quindi essere la matrice di Mueller per una lamina di ritardo con sfasamento ϕ . I casi particolari sono due, ovvero quando il valore dell'angolo ϕ misura 90° o 180° : nel primo caso si parla di lamina a quarto d'onda, poichè la fase introdotta misura esattamente un quarto della lunghezza d'onda λ della radiazione; in questo caso \mathbf{M} diventa

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Nel secondo caso invece, con $\phi = 180^\circ$ lo sfasamento portato misura mezza lunghezza d'onda (lamina a mezz'onda) e la relativa matrice di Mueller assume i valori di

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Per esempio, sia \mathbf{S} il vettore di Stokes di una radiazione polarizzata linearmente a 45° , definito come nel capitolo 2

$$\mathbf{S} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

che va ad interagire con una lamina di ritardo a quarto d'onda. Applicando il calcolo con la relativa matrice di Mueller, si ottiene in uscita

$$\mathbf{S}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{S} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{S}' = I_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Nel caso di una lamina a mezz'onda anzichè di una a quarto d'onda, si otterrebbe il seguente risultato

$$\mathbf{S}' = I_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

I due esempi appena affrontati mostrano un'utile applicazione delle lamine di ritardo: nel primo caso, rifacendosi al capitolo 2, si riconosce che all'uscita si ottiene il vettore di Stokes di luce con polarizzazione circolare sinistra; l'interazione di luce polarizzata a 45° con una lamina a quarto d'onda che introduce una fase di 90° tra le componenti trasversali del campo elettromagnetico, genera quindi una polarizzazione circolare. Nel secondo caso invece, la lamina a mezz'onda provoca più semplicemente uno sfasamento di δ pari a 180° , portando quindi il campo elettromagnetico ad oscillare a -45° , come deducibile dalla particolare forma del vettore di Stokes.

3.3 Matrice di Mueller per elementi ottici ruotati

Un ulteriore possibilità che permette la variazione dello stato di polarizzazione della luce è la rotazione dell'elemento ottico rispetto al sistema di riferimento di un angolo θ .

Siano E_x ed E_y le ampiezze delle due componenti del campo elettromagnetico che generano la radiazione in ingresso al sistema ottico. All'uscita il raggio avrà subito una rotazione di un angolo θ e le relative equazioni che ne descrivono il cambiamento sono

$$E'_x = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta \quad (3.33)$$

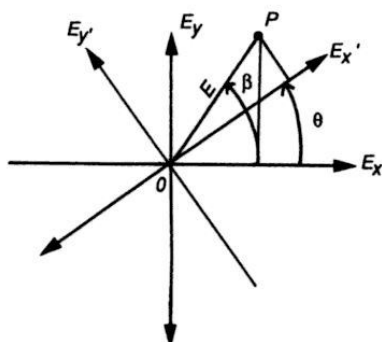


Figura 3.3: Rotazione delle componenti del campo elettromagnetico

$$E'_y = -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta \quad (3.34)$$

La relativa matrice di Mueller che descrive la rotazione delle componenti x ed y del campo elettromagnetico risulta essere

$$\mathbf{M}(2\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Si noti che il termine 2θ è dovuto al fatto che la rotazione di un angolo θ avviene per le ampiezze delle componenti del campo elettromagnetico, mentre per come è stata definita, la matrice di Mueller applica delle trasformazioni sui vettori di Stokes, proporzionali all'intensità della luce, ovvero al quadrato delle ampiezze del campo elettromagnetico, portando così all'apparente rotazione di 2θ anziché di θ .

Con riferimento alla figura 3.4, sia S il vettore di Stokes della radiazione all'ingresso del sistema ottico, costituito da un elemento polarizzante, per esempio un polarizzatore, ruotato di un angolo θ : per tener conto della rotazione del polarizzatore si ricava S' da S , con il prodotto per la relativa matrice di Mueller per la

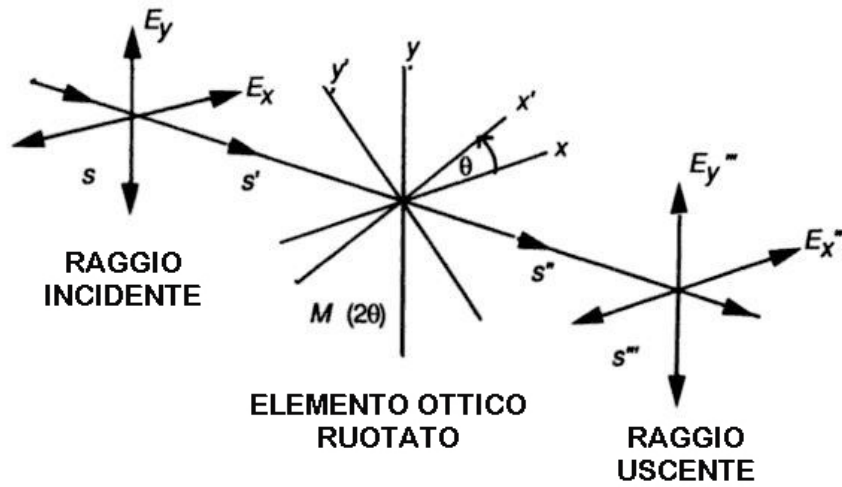


Figura 3.4: Componenti ottici ruotati

rotazione, cambiando quindi gli di riferimento da x e y a x' e y'

$$\mathbf{S}' = \mathbf{M}(2\theta) \cdot \mathbf{S} \quad (3.36)$$

L'interazione col sistema viene descritta dalla matrice di Mueller M e si ottiene quindi in uscita

$$\mathbf{S}'' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{S}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}(2\theta) \cdot \mathbf{S} \quad (3.37)$$

Per poter valutare correttamente la radiazione uscente occorre riportarsi al sistema di coordinate iniziali x e y , effettuando nuovamente una rotazione di -2θ , nel senso contrario di quella compiuta all'inizio per considerare la posizione ruotata dell'elemento ottico. Il vettore finale che descrive lo stato di polarizzazione della luce all'uscita del sistema è quindi

$$\mathbf{S}''' = \mathbf{M}(-2\theta) \cdot \mathbf{S}'' = \mathbf{M}(-2\theta) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}(2\theta) \cdot \mathbf{S} \quad (3.38)$$

Come esempio pratico è interessante osservare come il modello matematico finora descritto permetta la verifica di alcune delle leggi più importanti dell'ottica

come la legge di Malus: sia \mathbf{S} il vettore di Stokes di una radiazione polarizzata linearmente definita nel seguente modo

$$\mathbf{S} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

La radiazione interagisce con un polarizzatore lineare ruotato, la cui relativa matrice di Mueller è ottenuta con le regole della moltiplicazione fra matrici appena descritte; tenendo conto della rotazione assunta dall'elemento ottico si calcola la matrice di Mueller che descrive l'intero sistema

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(-2\theta) \cdot \mathbf{M}_H \cdot \mathbf{M}(2\theta) \quad (3.40)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

dove \mathbf{M}_H è la matrice di Mueller del polarizzatore lineare definita come in (3.14) mentre $\mathbf{M}(2\theta)$ e $\mathbf{M}(-2\theta)$ sono le matrici di rotazione. Il vettore risultante si ottiene dalla moltiplicazione della matrice \mathbf{M} per il vettore di Stokes iniziale

$$\mathbf{S}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{S} \quad (3.43)$$

ma per valutare l'intensità totale basta calcolare il valore di S'_0 , moltiplicando la prima riga della matrice \mathbf{M} per \mathbf{S} :

$$I(\theta) = S'_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \end{pmatrix} \cdot I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = I_0 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (3.44)$$

che è uguale a $I_0 \cos^2 \theta$, in accordo con la legge di Malus. Al medesimo risultato si poteva giungere anche considerando una polarizzazione lineare a 45° , ponendo però attenzione al significato dell'angolo θ .

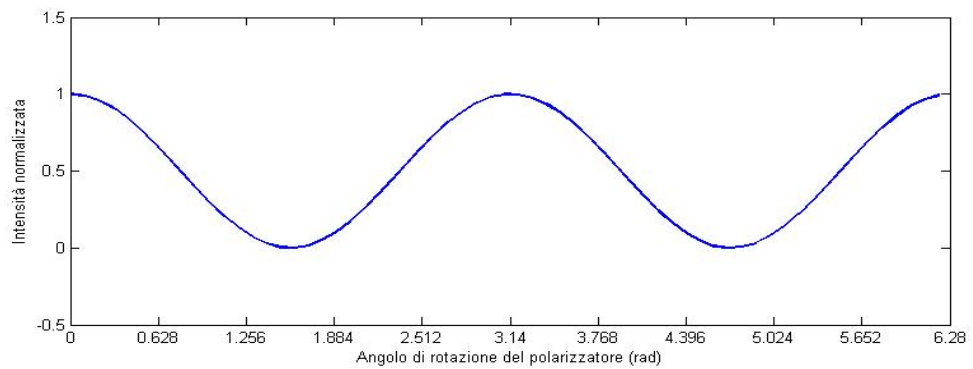


Figura 3.5: Intensità normalizzata al variare dell'angolo di rotazione del polarizzatore

Capitolo 4

Misurazione dei parametri di Stokes

In questo capitolo vengono esposti i principali metodi di misurazione dei vettori di Stokes; la trattazione e l'analisi basata sui vettori di Stokes e sulle matrici di Mueller per indagare sullo stato di polarizzazione della luce permette di trattare in maniera diretta ed accessibile il problema. I criteri qui discussi non sono gli unici, ma rimangono i più significativi per la misurazione dei parametri di Stokes, sia dal punto di vista storico per l'importanza acquisita nella letteratura dell'argomento, sia dal punto di vista della facilità con cui possono essere riprodotti e collaudati in laboratorio.

4.1 Metodo con lamina a quarto d'onda

Il metodo della lamina a quarto d'onda, già accennato nel paragrafo 2.3, è uno dei primi metodi per la determinazione dei parametri di Stokes. Alla lamina si affianca l'utilizzo di un polarizzatore lineare, costituendo un sistema in modo tale che la radiazione in ingresso prima subisca una sfasamento nelle componenti trasversali del campo elettromagnetico e poi interagisca col polarizzatore; in uscita è necessaria la presenza di un rilevatore ottico per esaminare i risultati.

Sia il raggio in ingresso caratterizzato da uno stato di polarizzazione a cui è

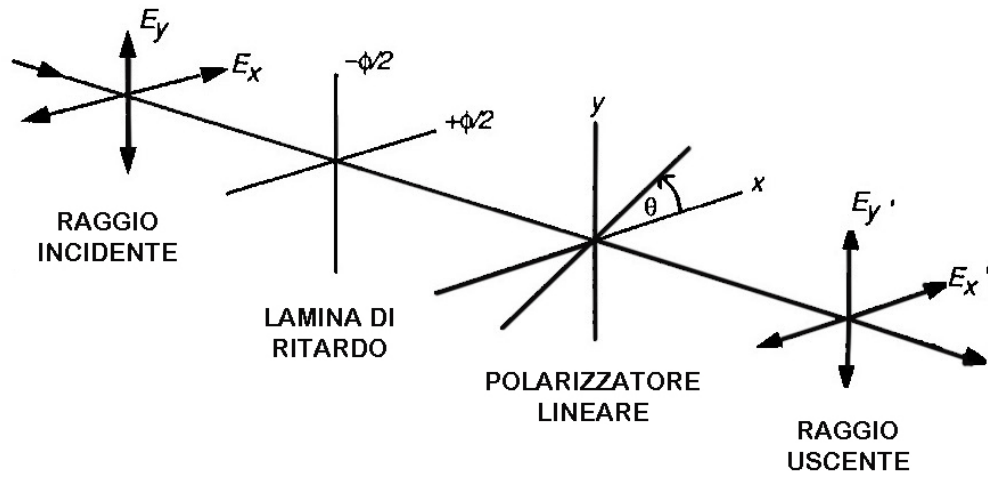


Figura 4.1: Misurazione con la lamina a quarto d'onda

associato il vettore di Stokes \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

La matrice di Mueller per la lamina di ritardo, derivata nel paragrafo 3.2, è la seguente

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Facendo il prodotto tra le due matrici appena riportate si ottiene il vettore di Stokes che rappresenta lo stato di polarizzazione del raggio dopo l'interazione con la

lamina, e prima dell'ingresso del polarizzatore

$$\mathbf{S}' = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \cos \phi + S_3 \sin \phi \\ -S_2 \sin \phi + S_3 \cos \phi \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Il secondo strumento ottico è costituito da un polarizzatore ideale perfetto con l'asse di trasmissione ruotato di un angolo θ ; l'aggettivo perfetto sta ad indicare che il valore del coefficiente di attenuazione p_x è unitario e quindi di fatto non si verifica nessuna attenuazione lungo uno dei due assi delle componenti trasversali del campo. Per ottenere l'esatta valutazione della matrice di Mueller di questo elemento è necessario tener presente della rotazione dell'asse del polarizzatore e quindi moltiplicare la matrice di Mueller del polarizzatore ideale con le matrici per la rotazione come osservato nel paragrafo 3.3

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}(-2\theta) \cdot \mathbf{M}_{\text{pol}} \cdot \mathbf{M}(2\theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

dove \mathbf{M}_{pol} vale

$$\mathbf{M}_{\text{pol}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Il vettore di Stokes finale \mathbf{S}'' si ottiene moltiplicando \mathbf{M}_2 per \mathbf{S}' ; tuttavia per valutare l'intensità totale della radiazione in uscita è sufficiente calcolare il valore del parametro S_0 , che si deriva moltiplicando la prima riga di \mathbf{S}' con la matrice \mathbf{M} . L'intensità totale in funzione dell'angolo ϕ , dovuto alla lamina di ritardo, e

all'angolo θ dovuto al polarizzatore, vale dunque

$$I(\theta, \phi) = \frac{1}{2}[S_0 + S_1 \cos 2\theta + S_2 \cos \phi \sin 2\theta + S_3 \sin \phi \sin 2\theta] \quad (4.6)$$

L'equazione 4.6 è la nota formula di intensità di Stokes per la relazione dei quattro parametri omonimi: alla stessa conclusione si è giunti in precedenza nel paragrafo 2.4, ragionando sulle ampiezze delle componenti trasversali del campo elettromagnetico. Vale la pena sottolineare la bontà e la facilità di applicazione della notazione con i vettori di Stokes e le matrici di Mueller che permettono una rapida valutazione dello stato di polarizzazione della luce, ottenuta mediante un semplice calcolo matriciale.

L'equazione precedente permette di ricavare quindi i valori dei parametri di Stokes; le equazioni che li descrivono sono le seguenti

$$S_0 = I(0^\circ, 0^\circ) + I(90^\circ, 0^\circ) \quad (4.7)$$

$$S_1 = I(0^\circ, 0^\circ) - I(90^\circ, 0^\circ) \quad (4.8)$$

$$S_2 = 2I(45^\circ, 0^\circ) - I(0^\circ, 0^\circ) - I(90^\circ, 0^\circ) \quad (4.9)$$

$$S_3 = 2I(45^\circ, 90^\circ) - I(0^\circ, 0^\circ) - I(90^\circ, 0^\circ) \quad (4.10)$$

Essendo il termine ϕ nullo, per calcolare i primi tre parametri, S_0 , S_1 ed S_2 , basta rimuovere la lamina di ritardo a quarto d'onda, cioè settata con l'angolo ϕ pari a 90° dal cammino ottico del raggio. Per ottenere S_3 invece la questione appare più complessa: la lamina a quarto d'onda viene reinserita prima del polarizzatore, che viene orientato con l'asse di trasmissione posto ad un angolo $\theta = 45^\circ$. Il problema, che si presenta nella misurazione pratica che non è stato considerato finora nella trattazione teorica, è che la lamina di ritardo introdotta produce come effetto indesiderato l'assorbimento parziale dell'energia della radiazione in ingresso al sistema. Questa perdita di energia può essere caratterizzata similmente a quanto fatto per l'attenuazione delle ampiezze delle componenti trasversali del campo elettromagnetico, dovuta ad un polarizzatore lineare: per questo motivo vengono aggiunti nelle equazioni che descrivono E_x ed E_y i coefficienti di assorbimento p_x

e p_y

$$E'_x = E_x e^{+\phi/2} p_x \quad (4.11)$$

$$E'_y = E_y e^{-\phi/2} p_y \quad (4.12)$$

dove la presenza del termine $\phi/2$ è dovuta allo sfasamento provocato dalla lamina di ritardo. Bisogna porre attenzione quindi al significato dei coefficienti introdotti e non confonderli con i fattori di attenuazione dovuto all'orientamento dell'asse di trasmissione del polarizzatore: le cause che provocano l'assorbimento di energia da parte della lamina sono derivanti dalla proprietà intrinseca del materiale con cui essa è costituita; in particolare se il materiale ammette un differente assorbimento lungo le due direzioni x ed y si ha che il valore di p_x è diverso da quello di p_y , e si parla in questo caso di materiale anisotropico. Nel caso particolare di $p_x = p_y$ la lamina di ritardo si dice isotropica e presenta lo stesso grado di assorbimento lungo entrambe le direzioni.

Avendo discusso dell'importante differenza che avviene per la misurazione del parametro S_3 rispetto agli altri parametri di Stokes, si giunge, con ragionamento analogo al caso ideale, alle seguenti equazioni per la determinazione del vettore totale

$$S_0 = I(0^\circ, 0^\circ) + I(90^\circ, 0^\circ) \quad (4.13)$$

$$S_1 = I(0^\circ, 0^\circ) - I(90^\circ, 0^\circ) \quad (4.14)$$

$$S_2 = 2I(45^\circ, 0^\circ) - I(0^\circ, 0^\circ) - I(90^\circ, 0^\circ) \quad (4.15)$$

$$S_3 = \frac{2}{p^2} I(45^\circ, 90^\circ) - I(0^\circ, 0^\circ) - I(90^\circ, 0^\circ) \quad (4.16)$$

dove p è definito come

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 \quad (4.17)$$

che tiene conto dell'assorbimento dovuto all'inserimento della lamina di ritardo nella misurazione del parametro S_3 . Il coefficiente p dipende dal materiale e risulta un parametro di costruzione della lamina di ritardo; si trova quindi come dato di costruzione. Tuttavia è possibile ottenere un valore approssimato ma significativo

con il seguente metodo: si posiziona un polarizzatore lineare tra una sorgente di luce e un rilevatore e se ne misura l'intensità, denominandola I_0 . Successivamente si effettuano due misure, interponendo la lamina di ritardo di cui si vuole misurare il coefficiente di assorbimento, tra il polarizzatore, posizionato prima orizzontalmente e poi verticalmente, e il rilevatore: dividendo entrambe le intensità appena misurate per I_0 , e sommando i rispettivi risultati si ottiene il valore di p^2 ricercato. Tramite il metodo con la lamina a quarto d'onda si riesce quindi ad ottenere una misurazione dei parametri di Stokes: S_0 , S_1 ed S_2 si ricavano più facilmente, mentre il valore di S_3 richiede uno sforzo maggiore per le difficoltà appena discusse.

4.2 Metodo con polarizzatore circolare

Nel paragrafo precedente l'utilizzo di due elementi ottici (lamina a quarto d'onda combinata ad un polarizzatore lineare), permetteva la misurazione del vettore di Stokes non senza includere ostacoli e quindi operazioni aggiuntive per evitarli, causati principalmente dall'assorbimento di energia della lamina di ritardo. Un metodo alternativo che elimina completamente il problema affrontato nel paragrafo 4.1 è costituito dall'utilizzo di un singolo elemento ottico, un polarizzatore circolare che può variare il suo angolo di rotazione, la cui azione può essere intesa come la combinazione tra un polarizzatore lineare con asse di trasmissione posto a 45° e una lamina a quarto d'onda, montati su unico dispositivo: i primi tre parametri sono misurati facendo interagire la radiazione luminosa in ingresso con il sistema appena descritto; il quarto parametro S_3 si ottiene capovolgendo il polarizzatore circolare, cioè facendo agire quindi prima la lamina di ritardo e poi il polarizzatore lineare.

La caratterizzazione con le matrici di Mueller per la prima combinazione lamina-

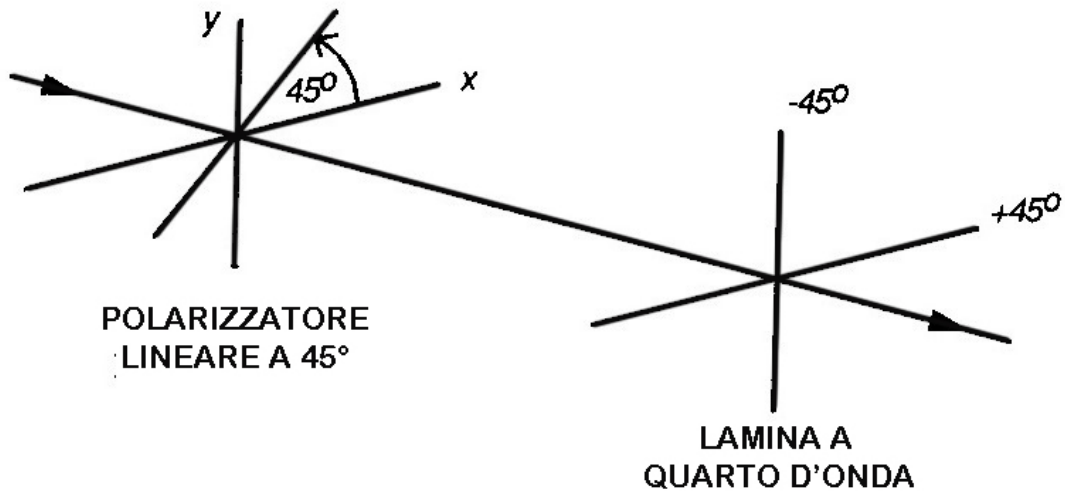


Figura 4.2: Polarizzazione circolare ottenuta con polarizzatore lineare e lamina a quarto d'onda

polarizzatore è la seguente

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Mentre per la combinazione polarizzatore-lamina utilizzata per ottenere il valore di S_3 basta invertire l'ordine nel prodotto tra matrici

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Per valutare anche la rotazione che il sistema è libero di compiere vanno calcolati anche i prodotti con le matrici di Mueller per la rotazione, $\mathbf{M}_R(2\theta)$ ed $\mathbf{M}_R(-2\theta)$, la cui funzione è già stata discussa nel paragrafo 3.4. il calcolo per la matrice

finale che dipende dall'angolo di rotazione θ , risulta essere quindi

$$\mathbf{M}(2\theta) = \mathbf{M}_R(-2\theta) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}_R(2\theta) \quad (4.20)$$

Per la misurazione di S_0 , S_1 ed S_2 realizzata per mezzo del sistema formato da lamina di ritardo seguita da polarizzatore, si ottiene che la matrice di Mueller ottenuta con le operazioni precedentemente discusse risulta

$$\mathbf{M}' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

il cui relativo vettore risultante S' che esce dal sistema ottico misura

$$\mathbf{S}' = \mathbf{M}' \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(S_0 - S_1 \sin 2\theta + S_2 \cos 2\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Per il calcolo di S_3 invece si capovolge il sistema, ottenendo la combinazione polarizzatore-lamina, e la matrice di Mueller vale

$$\mathbf{M}'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ \sin 2\theta & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ -\cos 2\theta & 0 & 0 & \cos 2\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

da cui si ottiene il vettore di Stokes in uscita

$$\mathbf{S}'' = \mathbf{M}'' \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(S_0 - S_3) \begin{pmatrix} 1 \\ \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Poichè l'interesse sta nel valutare l'intensità totale della luce dopo l'azione del polarizzatore circolare, basta calcolare il valore del parametro S_0 . Quindi dalle equazioni si (4.22) e (4.24) si derivano le 2 misure di intensità

$$I'(\theta) = \frac{1}{2}(S_0 - S_1 \sin 2\theta + S_2 \cos 2\theta) \quad (4.25)$$

$$I''(\theta) = \frac{1}{2}(S_0 + S_3) \quad (4.26)$$

Da queste equazioni, variando di volta in volta l'angolo di rotazione θ , è ora possibile valutare i singoli parametri di Stokes ed ottenere il vettore di Stokes finale, che descrive lo stato di polarizzazione della luce

$$S_0 = I'(0^\circ) + I'(90^\circ) \quad (4.27)$$

$$S_1 = S_0 - 2I'(45^\circ) \quad (4.28)$$

$$S_2 = I'(0^\circ) - I'(90^\circ) \quad (4.29)$$

$$S_3 = S_0 - 2I''(0^\circ) \quad (4.30)$$

Le equazioni appena riportate permettono la misurazione dei quattro parametri del vettore di Stokes tramite l'utilizzo di un polarizzatore circolare. L'impiego di questo strumento a differenza del metodo con la lamina di ritardo a quarto d'onda, permette il calcolo del vettore di Stokes in condizioni più semplici e accurate, poichè la presenza di un singolo elemento ottico permette di evitare il problema dell'assorbimento di energia differente verificatosi col metodo descritto nel paragrafo precedente. Inoltre si annullano le difficoltà dovute all'allineamento di più strumenti ottici, che vanno considerati nella realizzazione pratica della misurazione.

4.3 Metodo di annullamento dell'intensità

Come già accennato, la teoria esposta sui vettori di Stokes ha avuto origine quando ancora non vi era la possibilità tecnologica di costruire strumenti ottici che potessero misurare il grado di intensità della luce: l'unico rilevatore era l'occhio umano, capace solo di stabilire se l'intensità della luce fosse nulla o non nulla. Il metodo che segue è basato sull'utilizzo di uno strumento ottico denominato compensatore Babinet-Soleil: la sua funzione è simile a quella di una lamina di ritardo, cioè introduce un ritardo di fase variabile ϕ tra le componenti trasversali del campo elettromagnetico. Per completare il sistema ottico a questo componente segue un polarizzatore lineare che può ruotare, posto sempre lungo il cammino ottico del raggio del quale si vuole misurare lo stato di polarizzazione.

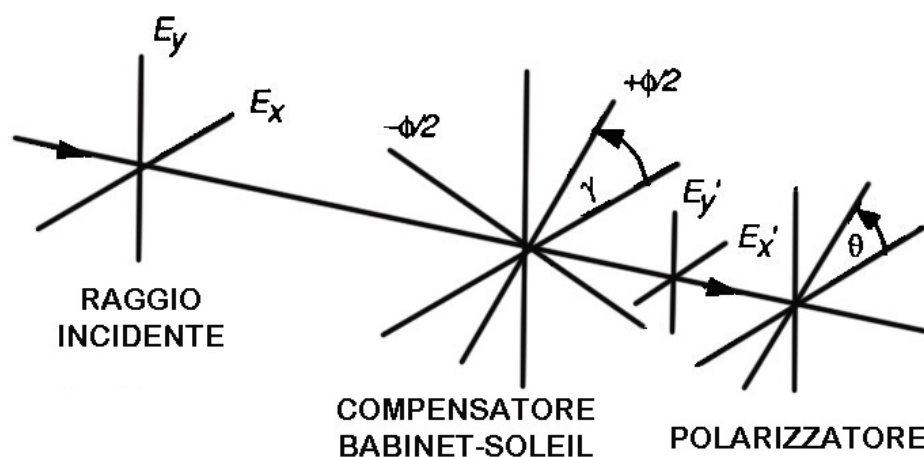


Figura 4.3: Schema per il metodo di intensità nulla

A differenza dei due metodi esposti precedentemente, l'analisi matematica ottenuta dalla misurazione porta ad ricavare indirettamente i parametri di Stokes, poichè effettivamente vengono misurati i valori di α e δ che sono propriamente parametri che descrivono l'ellisse di polarizzazione della luce: come già esposto nei capitoli 1 e 2, α è definito come l'angolo ausiliario, formato dalle ampiezze del campo

elettromagnetico oscillante, mentre δ è la differenza di fase tra le componenti ortogonali del campo.

Sia \mathbf{S} il vettore di Stokes in ingresso al sistema; considerando la notazione con i parametri appena accennati \mathbf{S} è definito come

$$\mathbf{S} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \cos \delta \\ \sin 2\alpha \sin \delta \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Il vettore di Stokes ottenuto dopo l'interazione col compensatore Babinet-Soleil si ottiene similmente a quanto ricavato per una lamina di ritardo (capitolo 3):

$$\mathbf{S}' = I_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \cos \delta \\ \sin 2\alpha \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \cos(\delta - \phi) \\ \sin 2\alpha \sin(\delta - \phi) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Valutando anche l'azione del polarizzatore lineare che ruota posto in sequenza si ottiene il vettore di Stokes per la luce uscente dal sistema

$$\mathbf{S}'' = \frac{I_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \cos(\delta - \phi) \\ \sin 2\alpha \sin(\delta - \phi) \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Come per gli altri casi, l'interesse sta nel valutare S_0 che coincide con l'intensità totale, ottenuta moltiplicando la prima riga della prima matrice al vettore colonna della seconda matrice. Risulta quindi

$$I(\theta, \phi) = \frac{I_0}{2} [1 + \cos 2\theta \cos 2\alpha + \sin 2\theta \sin 2\alpha \cos(\delta - \phi)] \quad (4.34)$$

L'equazione (4.34) permette la realizzazione del metodo a intensità nulla per misurare i parametri α e δ : si variano ora gli angoli ϕ e θ rispettivamente del com-

pensatore Babinet-Soleil e del polarizzatore lineare, affinché l'intensità in uscita sia nulla, cosicchè anche l'occhio sia in grado di rilevare tale condizione. Più precisamente prima si impone che l'angolo del compensatore eguagli la differenza di fasi tra le componenti ortogonali del campo elettromagnetico ($\phi = \delta$) ottenendo

$$I(\theta, \phi) = \frac{I_0}{2}[1 + \cos 2\theta \cos 2\alpha + \sin 2\theta \sin 2\alpha] = \frac{I_0}{2}[1 + \cos 2(\theta - \alpha)] \quad (4.35)$$

e successivamente si impone che l'intensità totale si azzeri, ottenendo che l'asse del polarizzatore deve verificare la condizione

$$\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} \quad (4.36)$$

Riassumendo, con l'applicazione del metodo descritto, cioè variando dapprima la fase del compensatore e poi l'asse del polarizzatore in modo tale che l'intensità della luce si annulli, è possibile ottenere i valori degli angoli α e δ , e da questi ricavare gli angoli di ellitticità χ e di orientazione ψ tramite le espressioni già dedotte nei capitoli 1 e 2. Si ottiene così una completa descrizione dell'ellisse di polarizzazione in tutti i suoi parametri e quindi una totale conoscenza dello stato di polarizzazione della luce.

È interessante accennare anche all'esistenza di una variante che il metodo di intensità nulla presenta, sviluppata negli anni trenta del ventesimo secolo; si tratta del metodo ideato da Kent e Lawson per la misurazione dei parametri dell'ellisse di polarizzazione. Questo metodo come il precedente, include l'utilizzo di un compensatore Babinet-Soleil ed un polarizzatore, ma aggiunge rispetto al sistema ottico precedente, un tubo fotomoltiplicatore alla fine del cammino ottico che il raggio luminoso da analizzare deve percorrere. La funzione del tubo fotomoltiplicatore è la stessa di quella svolta dall'occhio umano nell'esperienza descritta poco fa: si tratta di uno strumento in grado di rilevare la presenza di singoli fotoni.

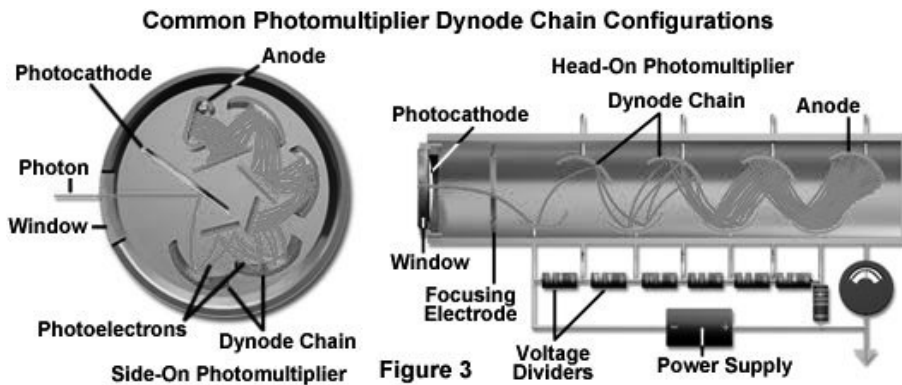


Figura 4.4: Schema di un tubo fotomoltiplicatore

4.4 Metodo di Fourier

Un altro metodo per la misurazione dei parametri di Stokes utilizza un sistema ottico costituito da una lamina a quarto d'onda, posta su un supporto in grado di ruotare ad una velocità angolare ω , seguita da un polarizzatore lineare orizzontale e sfrutta l'analisi di Fourier per ricavare i quattro parametri ricercati. Sia S il

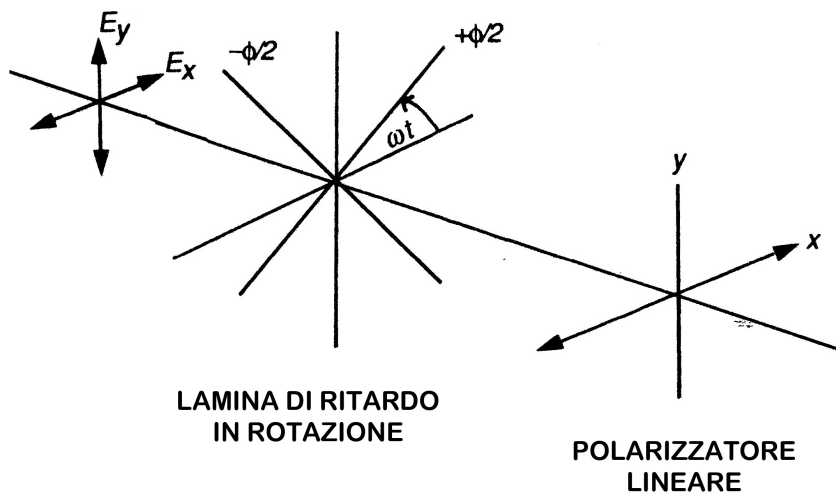


Figura 4.5: Sistema per l'applicazione del metodo di Fourier

vettore di Stokes in ingresso; con le regole descritte nel capitolo 3 si ottiene la relativa matrice di Mueller che descrive l'intero sistema e si calcola il valore di

Stokes della radiazione uscente:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{M}_{\text{pol}} \cdot \mathbf{M}(-2\theta) \cdot \mathbf{M}_{\text{lam}} \cdot \mathbf{M}(2\theta) \cdot \mathbf{S} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{S}' = \frac{1}{2}(S_0 + S_1 \cos^2 2\theta + S_2 \sin 2\theta \cos 2\theta - S_3 \sin 2\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

dove si è sostituito ωt con θ . L'intensità è uguale ad S'_0 ; applicando alcune trasformazioni trigonometriche, l'intensità può essere scritta così

$$I(\theta) = \frac{1}{2}[(S_0 + \frac{S_1}{2}) + \frac{S_1}{2} \cos 4\theta + \frac{S_2}{2} \sin 4\theta - S_3 \sin 2\theta] \quad (4.39)$$

Sostituendo di nuovo θ con ωt , si può riscrivere l'equazione dell'intensità in modo tale da riconoscere una particolare serie troncata di Fourier:

$$I(\omega t) = \frac{1}{2}[A - B \sin 2\omega t + C \cos 4\omega t + D \sin 4\omega t] \quad (4.40)$$

dove

$$A = S_0 + \frac{S_1}{2}, \quad B = S_3, \quad C = \frac{S_1}{2}, \quad D = \frac{S_2}{2} \quad (4.41)$$

I coefficienti A , B , C e D , si ricavano ricordando che nel caso di una serie di Fourier reale, come la seguente

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad (4.42)$$

le espressioni per derivarli sono

$$a_0 = \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad a_n = \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (4.43)$$

Nella pratica si ha che la lamina di ritardo è posta su un supporto in grado di ruotare non con continuità, ma in N numero finito di passi. Ponendo $\omega t = n\theta_j$ (θ_j è l'ampiezza di un singolo passo), si utilizzano le seguenti espressioni per ricavare

i coefficienti, nella quale l'integrale è stato sostituito da una sommatoria finita:

$$I_n(\theta_j) = \frac{1}{2}[A - B \sin 2n\theta_j + C \cos 4n\theta_j + D \sin 4n\theta_j] \quad (4.44)$$

$$A = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N I(n\theta_j) \quad B = \frac{4}{N} \sum_{n=1}^N I(n\theta_j) \sin 2n\theta_j \quad (4.45)$$

$$C = \frac{4}{N} \sum_{n=1}^N I(n\theta_j) \cos 4n\theta_j \quad D = \frac{4}{N} \sum_{n=1}^N I(n\theta_j) \sin 4n\theta_j \quad (4.46)$$

La procedura consiste nell'eseguire N misurazioni dell'intensità, ruotando la lamina di ritardo a intervalli angolari di $\frac{2\pi}{N}$. Moltiplicando per il *seno* o il *coseno* come indicato da (4.45) e (4.46) si ottengono i quattro coefficienti; per ricondursi ai quattro parametri di Stokes basta seguire le relazioni di (4.41), che scritte in maniera esplicita danno

$$S_0 = A - C, \quad S_1 = 2C, \quad S_2 = 2D, \quad S_3 = B \quad (4.47)$$

Software di calcolo come Matlab permettono la rapida simulazione del metodo appena descritto e la verifica del suo funzionamento; sia per esempio 16 il numero di passi con la quale è la lamina a quarto d'onda compie una rotazione completa: l'intensità viene misurata quindi 16 volte con intervalli angolari pari a $\pi/8$. Ponendo in ingresso una luce polarizzata linearmente, definita come al solito dal seguente vettore di Stokes normalizzato

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

si effettuano le misure dell'intensità ottenendo il seguente insieme di valori

$$\begin{bmatrix} 0.75 & 0.50 & 0.75 & 1.00 & 0.75 & 0.50 & 0.75 & 1.00 \\ 0.75 & 0.50 & 0.75 & 1.00 & 0.75 & 0.50 & 0.75 & 1.00 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Applicando la (4.45) e la (4.46) si ottengono i quattro coefficienti

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = 0 \quad (4.50)$$

e quindi i parametri di Stokes dalla (4.47) valgono

$$S_0 = A - C = 1, \quad S_1 = 2C = 1, \quad S_2 = 2D = 0, \quad S_3 = B = 0 \quad (4.51)$$

come conferma della corretta applicazione del metodo.

Capitolo 5

Conclusioni

Il lavoro presentato in questa tesi ha descritto in maniera dettagliata e precisa le modalità con la quale si opera per indagare sullo stato di polarizzazione della luce: sono stati discussi i fenomeni determinati dalla natura della luce, a partire dalle equazioni delle onde elettromagnetiche che li causano. Sono state derivate delle importanti caratterizzazioni matematiche ottenute con l'introduzione del vettore di Stokes e della matrice di Mueller, che consentono di descrivere in modo completo sia il tipo di polarizzazione che la radiazione presenta, sia l'interazione che avviene tra la luce e i diversi componenti ottici fondamentali, delineati in questa opera.

L'adozione del formalismo utilizzato e del modello matematico presentato è dovuta come osservato all'evidente facilità e calcolabilità dei vari parametri della polarizzazione: il non banale problema di ottenere informazioni riguardanti lo stato di polarizzazione della luce è stato risolto con semplici calcoli algebrici, e la descrizione del funzionamento degli strumetti ottici più importanti e della loro conseguente interazione con la luce è stata ottenuta perlopiù attraverso prodotti tra matrici.

I risultati che vengono ottenuti con i metodi descritti in questo lavoro possono essere ricavati anche a computer, tramite software di simulazione, che prendendo in ingresso i diversi parametri ed effettuando numerose misurazioni dell'intensità della luce, permettono di tracciare l'ellisse di polarizzazione interpolando i diversi

valori misurati; al contrario, nel capitolo vengono presentate diverse metodologie che producono una serie di risultati quasi immediati, che danno una valutazione diretta dello stato di polarizzazione della luce.

Si sono discussi vantaggi e svantaggi per ognuno dei metodi proposti, la cui scelta è propesa a seconda dell'accuratezza del risultato che si vuole ottenere, o a seconda della difficoltà e della precisione di realizzazione della misurazione che si è disposti a soddisfare. In accordo con l'esecuzione pratica della metodologia esposta, sono stati discussi i principali problemi che si verificano nel misurare il vettore di Stokes, per esempio con il metodo con la lamina di ritardo, e si è prontamente esibita una soddisfacente risoluzione che permettesse di giungere alla conclusione desiderata.

Per concludere, la tesi qui redatta vuole essere un'approfondita trattazione teorica sul tema della misurazione dello stato di polarizzazione della luce, il cui studio permette una rapida conoscenza sulle caratteristiche fondamentali e sui parametri che descrivono il fenomeno della polarizzazione.

L'applicazione delle regole e delle metodiche qui sviluppate consente di possedere uno strumento valido, in grado di analizzare il problema e far giungere ad una soluzione in modo veloce e relativamente semplice, grazie al modello matematico indotto dall'utilizzo dei vettori di Stokes e delle matrici di Mueller.

La trattazione esposta, quindi, si propone come solida base per l'indagine e lo studio della luce polarizzata e mira come passo successivo alla concreta implementazione pratica, che coinvolge l'innumerabile varietà di applicazioni basate sulla polarizzazione della luce. In particolare i criteri e i metodi riportati possono essere applicati per testare l'effettivo funzionamento di apparecchiature ottiche come polarizzatori, analizzatori o interferometri, o semplicemente per misurare ed ottenere una valutazione della precisione o della presunta efficacia definite in teoria.

Ringraziamenti

Desidero porgere la più sincera gratitudine a coloro che hanno reso possibile la realizzazione di questa tesi: in particolare ringrazio la dottoressa Pelizzo, mia relatrice, per avermi trasmesso interesse e curiosità per la materia e per la piena disponibilità concessami, sia durante il corso da lei tenuto, sia in fase di stesura dell'elaborato.

Grazie al dottor Corso, correlatore, per la gentilezza con cui mi ha seguito passo dopo passo nella spiegazione e nella correzione dei temi affrontati in questa opera.

Infine con massima riconoscenza ringrazio i miei genitori, con il loro incrollabile sostegno morale ed economico, ed i miei amici coi quali ho affrontato l'esperienza universitaria sia dentro che fuori l'Ateneo, senza i quali non sarei riuscito a raggiungere questo importante traguardo.

Bibliografia e sitografia

- [1] L. Setian, 2002, *Application in Electro-Optics*, Prentice Hall
- [2] *La Polarizzazione della Luce*, www.funsci.com/
- [3] *Yagi Antenna Info*, www.yagiantenna.net
- [4] K. Ahmed, *Satellite Communications Polarization*, www.rfcafe.com
- [5] *Antenna Polarization*, www.radio-electronics.com/info/antennas/basics/polarisation-polarization.php
- [6] Ciena, 2008, *The Road to 100G Networking*, www.nggovernmentsummit.com/
- [7] *Polarization State Generator*, www.arcoptix.com/
- [8] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci, 2007, *Fisica vol. II*, EdiSES
- [9] D. Goldstein, 2003, *Polarized Light*, Marcel Dekker Inc.
- [10] A. Bettini, 1993, *La Luce e le Onde*, Edizioni Decibel