

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

---

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

# Modelli Geometrici nella Teoria della Percezione del Colore

Analisi del modello di H. Resnikoff

Relatore:

**Prof. Francesco Bottacin**

Correlatore:

**Prof. Edoardo Provenzi**

Laureanda:

**Fiammetta Cirrone**

13 Dicembre 2019

---

Anno Accademico 2018-2019



# Indice

Introduzione	i
<b>I La visione del colore</b>	<b>1</b>
<b>1 Cenni di anatomia e fisiologia dell'occhio</b>	<b>3</b>
1.1 La cornea e il cristallino . . . . .	4
1.2 La retina . . . . .	5
1.2.1 Coni e bastoncelli . . . . .	7
1.3 Meccanismi che influenzano la visione del colore . . . . .	8
1.3.1 Adattamento . . . . .	8
1.3.2 Induzione cromatica . . . . .	10
<b>2 Teorie del colore</b>	<b>13</b>
2.1 La teoria tricromatica . . . . .	13
2.2 La teoria dell'opponenza cromatica . . . . .	15
<b>II Introduzione alle algebre di Jordan</b>	<b>17</b>
<b>3 Algebre di Jordan</b>	<b>19</b>
3.1 Definizioni ed esempi . . . . .	19
3.2 Algebre di Jordan formalmente reali . . . . .	21
3.2.1 Classificazione delle AJFR . . . . .	23
3.3 Coni simmetrici e AJFR . . . . .	25
3.3.1 Coni simmetrici . . . . .	25
3.3.2 Cono degli elementi positivi di una AJFR . . . . .	26

<b>III</b>	<b>Il modello di Resnikoff</b>	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>Costruzione del modello</b>	<b>33</b>
4.1	Introduzione . . . . .	33
4.1.1	Notazione . . . . .	33
4.1.2	Gli assiomi di Schrödinger . . . . .	35
4.2	L'omogeneità di $\mathcal{P}$ . . . . .	36
4.2.1	L'assioma di omogeneità . . . . .	39
4.2.2	Conseguenze dell'assioma di omogeneità . . . . .	39
4.3	Metriche invarianti per $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Intensità luminosa percepita</b>	<b>47</b>
5.1	Differenza di luminosità . . . . .	47
5.2	Superfici a luminosità costante . . . . .	52
5.3	Dipendenza della luminosità dal colore . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Algebre di Jordan e percezione del colore</b>	<b>57</b>
6.1	Luminosità . . . . .	57
6.2	Tonalità e saturazione . . . . .	61
6.2.1	$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . . . . .	61
6.2.2	$\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^+ \times \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ . . . . .	62
6.3	Cenni di analisi delle scene visive . . . . .	63
6.3.1	Un'interpretazione alternativa . . . . .	64
	<b>Bibliografia</b>	<b>67</b>

# Introduzione

La comprensione della percezione del colore è da sempre stata una tematica di grande interesse per scienziati e filosofi. Già a partire dal IV secolo a.C., Aristotele si occupò della questione ipotizzando la necessità di un mezzo, la luce, che connette gli oggetti osservati agli occhi e propose una teoria per cui il colore sarebbe il risultato di una mescolanza di bianco e nero.

Per uno studio ulteriore dobbiamo aspettare fino alla prima metà del XVII secolo, quando Cartesio ipotizzò che i colori fossero dovuti alle diverse velocità di rotazione delle particelle dell'etere (le più elevate corrisponderebbero al rosso, quelle meno elevate al blu). Nel 1665, Robert Hooke confutò la teoria di Cartesio e ne propose una secondo la quale la luce fosse dovuta a vibrazioni propagate tramite delle onde e l'origine del colore avesse sede nella deviazione del fronte d'onda luminoso.

Pochi anni dopo, già nel 1671, Newton osservò tramite l'esperimento del prisma che la luce è composta da diverse luci spettrali primitive, non ulteriormente decomponibili. Per avere una prima rappresentazione geometrica dello spazio dei colori, bisogna invece aspettare fino al 1704 quando Newton pubblicò una raccolta dei suoi studi sulla luce (*Opticks*). Nella figura 1 è rappresentato il cerchio dei colori: al centro troviamo il bianco, la saturazione è rappresentata dalla distanza dal centro, mentre la tonalità è data dall'angolo. Sul bordo si trovano i colori spettrali. Nel 1752, grazie agli studi di Eulero, venne presentata per la prima volta una corrispondenza biunivoca tra colori e lunghezze d'onda.

Si osservi che a questo punto ancora non esiste una separazione tra proprietà fisiche e caratteristiche percettive del colore. Una vera distinzione in

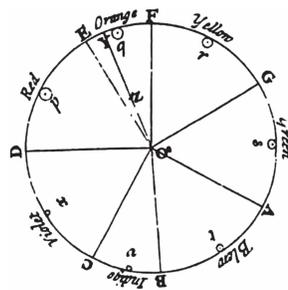


Figura 1

questo senso ci fu all’inizio del XIX secolo, quando Thomas Young propose una prima teoria tricromatica del colore: secondo questa teoria i recettori della retina sarebbero suddivisi in tre zone, ognuna sensibile ad un diverso colore principale. Oggi sappiamo che l’idea di Young era quasi esatta: l’occhio umano è in grado di percepire il colore perché nella retina sono presenti tre tipi di fotorecettori sensibili rispettivamente a tre lunghezze d’onda diverse. Circa mezzo secolo dopo, questa teoria venne confermata grazie a degli esperimenti condotti da Helmholtz in Germania e da Maxwell in Inghilterra.

Una volta stabilita la differenza tra studio del colore fisico e studio del colore percepito, si cominciò a cercare una descrizione più geometrica dello spazio dei colori percepiti. Nel 1853 il matematico Hermann Grassmann mostrò che lo spazio dei colori percepiti è un cono convesso in uno spazio affine tridimensionale, mentre l’anno dopo Bernhard Riemann citò nella sua tesi di dottorato lo spazio dei colori percepiti come esempio di varietà differenziabile tridimensionale. Verso la fine del XIX secolo Helmholtz riuscì a trovare una metrica Riemanniana coerente con la legge di Weber–Fechner<sup>1</sup>.

Nel 1920 il fisico Erwin Schrödinger raccolse in un piccolo gruppo di assiomi tutte le scoperte sulla percezione del colore dal punto di vista fisico, cognitivo e psicofisico fatte fino a quel momento. Da lì in avanti, prevalse soprattutto una descrizione empirica dello spazio dei colori percepiti, con una notevole eccezione: il lavoro del matematico americano Howard Leonard Resnikoff, riassunto nel suo articolo del 1974 “*Differential geometry and color perception*” [18]. Resnikoff modellizzò lo spazio dei colori percepiti, partendo proprio dagli assiomi di Schrödinger e, tramite soprattutto metodi di geometria differenziale, trovò due sole possibili caratterizzazioni dello spazio dei colori percepiti: una,  $\mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , isomorfa allo spazio tricromatico comunemente utilizzato in colorimetria, l’altra,  $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^+ \times \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ , completamente nuova. È proprio questa novità che rende lo studio del modello Resnikoff attuale: recenti risultati psicofisici tendono a mostrare che la struttura geometrica di  $\mathcal{P}_2$  è più vicina alla nostra percezione del colore.

Lo scopo di questa tesi è quello di analizzare e ripercorrere in chiave più moderna l’articolo di Resnikoff, mettendo in luce e approfondendo i dettagli del suo lavoro: vengono analizzati gli strumenti matematici principali che

---

<sup>1</sup>La legge di Weber–Fechner afferma che la luminosità percepita varia come il logaritmo dell’intensità della luce incidente.

l'autore utilizzò, in modo che il lettore possa trovare all'interno della tesi gran parte delle nozioni necessarie ad una comprensione profonda dell'articolo. Inoltre sono state corrette alcune imprecisioni ed inesattezze sorte durante la stesura della teoria di Resnikoff: le conclusioni, fortunatamente, non risultano compromesse.

Di seguito vediamo nel dettaglio la struttura di questa tesi.

Nella prima parte introduttiva, suddivisa a sua volta in due capitoli, viene illustrato in modo estremamente schematico il funzionamento dell'apparato visivo umano, in particolare dei fotorecettori, e alcuni meccanismi che influenzano la visione del colore (capitolo 1). Nel secondo capitolo invece vengono illustrate le due importanti teorie del colore: la teoria tricromatica e quella dell'opponenza cromatica.

Scopo di questa prima parte, oltre che contestualizzare in modo più completo il lavoro matematico, è anche quello di sottolineare l'enorme differenza che esiste tra colore fisico e colore percepito.

Nella seconda parte (capitolo 3) vengono definite le algebre di Jordan (algebre commutative, ma non associative), e introdotti in particolare alcuni importanti risultati sulle algebre di Jordan formalmente reali. Resnikoff usò proprio queste particolari algebre e la loro classificazione per descrivere le tre caratteristiche principali del colore percepito: luminosità, tonalità e saturazione. Lo spazio dei colori percepiti infatti può essere considerato (in entrambe le sue caratterizzazioni) come l'insieme degli elementi positivi di una algebra di Jordan formalmente reale.

Nella terza parte, la più corposa, viene sviluppata l'analisi del modello di Resnikoff. Il quarto capitolo è dedicato alla costruzione geometrica del modello: a partire dai quattro assiomi di Schrödinger e dall'assioma di omogeneità introdotto da Resnikoff stesso, si dimostra che lo spazio dei colori percepiti è uno spazio tridimensionale omogeneo rispetto al gruppo degli automorfismi, che è un gruppo di Lie. Inoltre, grazie ad un sesto assioma che riguarda l'invarianza della metrica rispetto all'azione del gruppo, si dimostra che una tale metrica può essere definita in modo unico in entrambi i casi ( $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$ ).

Nel quinto capitolo, tramite la metrica trovata nel capitolo precedente, viene definita e analizzata la luminosità dei colori percepiti studiando sepa-

ratamente le differenze di luminosità, le superfici a luminosità costante e la dipendenza della luminosità dal colore.

Nel sesto ed ultimo capitolo viene esplicitato il nesso tra algebre di Jordan e percezione del colore. Grazie a questa relazione è possibile analizzare da un nuovo punto di vista la luminosità e anche le altre due caratteristiche della percezione del colore: saturazione e tonalità. Infine si accenna brevemente all'analisi delle scene visive generali, dando ai risultati di Resnikoff un'interpretazione alternativa, più in linea con le moderne teorie di rappresentazione dell'immagine.

# Ringraziamenti

Desidero rivolgere un sincero ringraziamento ai professori Francesco Bottacin ed Edoardo Provenzi per avermi guidata con cura e interesse dall'inizio alla fine di questo percorso.



# Parte I

## La visione del colore



# Capitolo 1

## Cenni di anatomia e fisiologia dell'occhio

Per avere una più completa comprensione del processo della visione del colore, è necessario innanzitutto conoscere le basi dell'anatomia dell'occhio umano (in particolare della retina) e del funzionamento di trasmissione del segnale luminoso al cervello.

L'apparato visivo umano è un complesso sistema di elaborazione del segnale luminoso ed è composto da due organi pari e simmetrici, gli occhi, che possono essere considerati come un'appendice dell'encefalo, la parte del sistema nervoso centrale interamente contenuta nella scatola cranica. L'occhio è un organo dalla forma sferoidale, situato nella cavità orbitaria, protetto dalle palpebre e da altri annessi oculari. La sua funzione è quella di captare le radiazioni luminose provenienti dal mondo esterno e trasformarle in impulsi nervosi che, trasmessi alla corteccia cerebrale, saranno utilizzati a scopi percettivi (visione).

In questo capitolo (facendo riferimento principalmente a [7] e [9]) daremo dei brevi cenni sulle più importanti strutture direttamente coinvolte nel processo di ricezione e trasmissione del segnale luminoso. Queste si trovano all'interno del bulbo oculare, composto da tre membrane concentriche, dette *tonache*: nelle prime due membrane, dette *tonaca fibrosa* (esterna) e *tonaca vascolare* (intermedia) si trovano rispettivamente *cornea* e *cristallino*, che fungono da lenti, mentre in quella più interna, la *tonaca nervosa*, troviamo la *retina*: lo “schermo” sul quale vengono convogliati i raggi luminosi.

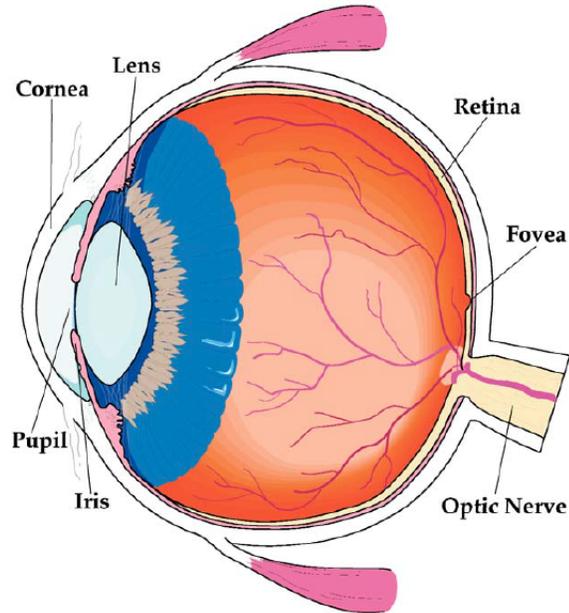


Figura 1.1: Rappresentazione schematica della struttura dell'occhio umano.

## 1.1 La cornea e il cristallino

La cornea è un piccolo segmento trasparente a contorno circolare che costituisce la parte anteriore della tonaca fibrosa. È la prima struttura che la luce attraversa entrando nell'occhio e, con alla sua curvatura, ha la funzione di una lente (la più potente dell'apparato visivo) che, insieme al cristallino, fa convergere i raggi luminosi sulla retina.

Nella tonaca vascolare, dietro all'iride (muscolo responsabile della dilatazione o contrazione della pupilla) si trova il cristallino (*lens*): un corpo trasparente e biconvesso che ha anch'esso la funzione di lente, ma, contrariamente alla cornea, è in grado di modificare la curvatura delle sue due facce, e il suo compito principale è proprio quello di permetterci di mettere a fuoco le immagini che vediamo, correggendo quando necessario l'azione della cornea nella messa a fuoco dei raggi luminosi sulla retina: *accomodazione*. Questo processo è controllato dai muscoli ciliari che permettendo una variazione di spessore del cristallino, ne consentono una variazione del potere rifrattivo.

Con l'invecchiamento, la struttura interna del cristallino cambia e perde gradualmente la sua flessibilità fino ad un'età di circa 50 anni, quando questa

è quasi completamente svanita e l'osservatore non è più in grado di mettere a fuoco oggetti vicini (presbiopia).

Il cristallino è in grado di assorbire e disperdere brevi lunghezze d'onda (blu e viola) e quando perde elasticità il livello di assorbimento e dispersione aumenta, determinando così un ingiallimento. Esistono diversi meccanismi di adattamento cromatico che in generale ci rendono inconsapevoli di questo cambiamento graduale, comunque grazie a questo fenomeno la vista umana avviene attraverso un filtro giallo che, oltre a cambiare con l'età, è significativamente diverso da osservatore a osservatore. Gli effetti sono più evidenti quando si confrontano *color matching*<sup>1</sup> effettuati da osservatori diversi, soprattutto relativamente al colore viola: un cristallino più anziano assorbe la maggior parte della luce blu riflessa da un oggetto viola, ma non influisce sulla luce rossa riflessa e dunque un osservatore anziano percepisce un oggetto viola più tendente al rosso rispetto a un osservatore più giovane.

## 1.2 La retina

Come accennato precedentemente, nella tonaca nervosa, si trova la retina, dalla quale ha origine il nervo ottico che conduce l'informazione alle strutture cerebrali. La sua faccia posteriore, la più estesa, è disposta regolarmente sulla faccia profonda del bulbo oculare e prende il nome di parte ottica della retina, essendo responsabile della funzione visiva. La parte anteriore, invece, non contiene elementi di natura nervosa, non partecipa alla formazione del nervo ottico e prende il nome di parte cieca della retina.

Per le necessità di questa tesi si porrà l'attenzione limitatamente alla parte ottica della retina, in particolare al suo *foglietto interno* o *retina propriamente detta*. Il *foglietto esterno*, o *epitelio pigmentato*, è rappresentato da un unico strato di speciali cellule epiteliali, e ha funzione, principalmente, di supporto metabolico per la retina propriamente detta.

Nella retina propriamente detta si trovano i fotorecettori, coni (*cones*) e bastoncelli (*rods*), che ricevono il segnale luminoso, lo trasformano in segnale chimico e lo trasmettono alle cellule bipolari che a loro volta sono collegate alle cellule gangliari (*ganglions*), che formano il nervo ottico.

---

<sup>1</sup>Il *color matching* è un metodo per confrontare la percezione di due colori diversi. Si veda, più avanti, la figura 4.1 per avere una descrizione dettagliata della procedura.

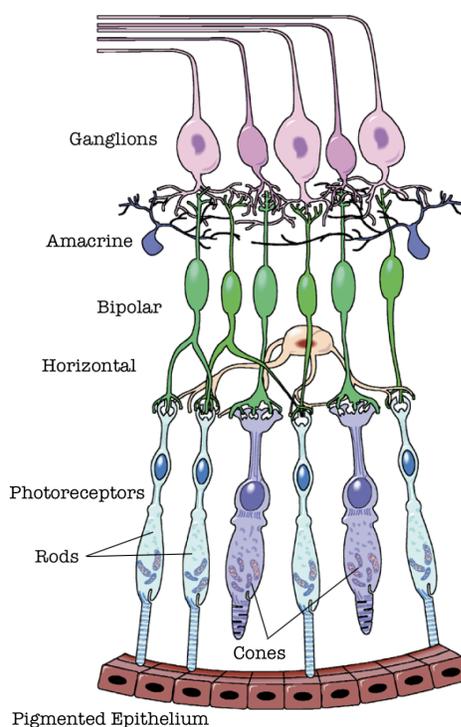


Figura 1.2: Rappresentazione schematica della struttura stratificata della retina.

Vale la pena osservare che il nervo ottico è composto da circa un milione di fibre, mentre nella retina il numero di fotorecettori è decisamente più elevato (circa 130 milioni). Questo significa che il segnale luminoso, prima di raggiungere il cervello, viene già elaborato e compresso nella retina: i collegamenti (sinapsi) tra fotorecettori, cellule bipolari e cellule gangliari, infatti, non sono puramente “verticali”, ma esistono, come possiamo notare dallo schema in figura 1.2, delle altre cellule neurali (orizzontali e amacrine) che collegano le cellule dei diversi strati anche lateralmente. Inoltre, durante la trasmissione, ogni sinapsi è in grado di compiere alcune basilari operazioni matematiche, come addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni dando luogo ad una trasmissione non lineare del segnale.

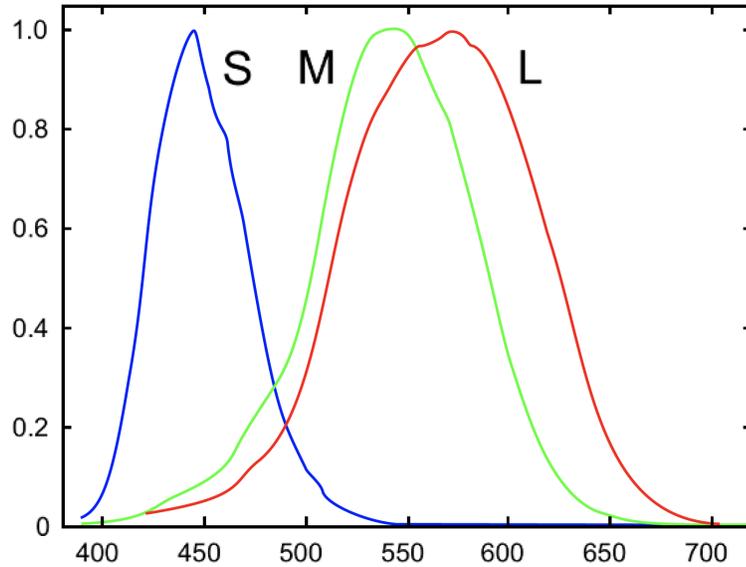


Figura 1.3: Sensibilità spettrale dei tre diversi tipi di coni presenti nella retina. I coni *S* hanno un picco di sensibilità a 420nm, i coni *M* a 530nm e i coni *L* a 560nm.

### 1.2.1 Coni e bastoncelli

Osserviamo più da vicino le caratteristiche e le funzioni dei due tipi di fotorecettori presenti nella retina. La principale differenza tra coni e bastoncelli consiste nel fatto che i primi si attivano in condizioni di elevata luminosità (visione *fotopica*), mentre i secondi in condizioni di livelli più bassi di luminosità (visione *scotopica*). A livelli di luminosità intermedi, entrambi i tipi di fotorecettori sono attivi (visione *mesopica*), ma sono meno efficienti rispetto a quando funzionano indipendentemente.

Nella *fovea*, la parte centrale della retina propriamente detta (che, nel campo visivo, corrisponde alla regione di messa a fuoco), sono presenti esclusivamente coni. Procedendo dalla fovea verso le regioni più periferiche della retina propriamente detta, la concentrazione dei coni va progressivamente scemando e aumenta progressivamente quella dei bastoncelli. Nella parte più periferica si ha presenza esclusiva di bastoncelli.

La visione del colore è possibile solo in condizioni di visione fotopica, infatti, mentre i bastoncelli hanno tutti la stessa sensibilità alla radiazione

luminosa, i coni differiscono tra loro per sensibilità a range diversi di lunghezze d'onda. Possiamo dunque distinguere tre tipi di coni: i coni di tipo *L* (*long*), di tipo *M* (*middle*) e di tipo *S* (*short*), maggiormente sensibili a lunghezze d'onda rispettivamente più lunghe, intermedie e più corte. Nella fovea si trovano solo coni di tipo *M* e *L*, mentre i coni *S* sono distribuiti solo nella parte più periferica della retina.

Talvolta i tre tipi di coni sono chiamati impropriamente *RGB*, anziché *LMS*, dal momento che alle lunghezze d'onda relative ai tre picchi di sensibilità massima si associano i colori rosso (*red*), verde (*green*) e blu (*blue*), come è rappresentato anche nella figura 1.3. Questa associazione è però inesatta, dal momento che i coni di tipo *L* hanno un picco di sensibilità che rientra nella regione del verde-giallo, anziché rosso.

Inoltre dal grafico in figura 1.3 si può osservare che le regioni di sensibilità dei tre tipi di coni si sovrappongono ampiamente, specialmente i coni *L* e *M*, e questo fatto rappresenta un'importante differenza tra la visione umana e la maggior parte dei sistemi di rappresentazione delle immagini, come le fotocamere digitali, in cui le aree di sensibilità dei sensori sono più nettamente separate.

## 1.3 Meccanismi che influenzano la visione del colore

Come si può evincere già da questa brevissima e schematica descrizione della retina, il modo in cui l'apparato visivo elabora il segnale luminoso è estremamente complesso e per questo esistono diversi meccanismi fisiologici e cognitivi che influiscono sulla percezione del colore, rendendo lo studio della percezione del colore molto diverso dallo studio delle proprietà fisiche dei colori, cioè di quella gamma di radiazioni elettromagnetiche con lunghezza d'onda compresa tra circa i 380nm e i 780nm.

### 1.3.1 Adattamento

Il meccanismo di percezione ed elaborazione del segnale luminoso non può essere considerato statico, infatti esistono dei sistemi di adattamento all'ambiente circostante che dipendono sia dalla quantità di luce, sia dal colore dell'illuminante.

**Adattamento luminoso.** L'apparato visivo risponde a situazioni di poca o troppa illuminazione diventando rispettivamente più o meno sensibile alla luce. Si pensi per esempio a quando, durante una giornata soleggiata, si entra in un locale chiuso e poco illuminato: inizialmente si ha la sensazione che il locale sia troppo buio, ma già dopo qualche minuto ci si abitua alle nuove condizioni luminose e si è di nuovo in grado di vedere bene (adattamento al buio). Viceversa, quando si esce dal locale, si ha una sensazione di abbagliamento, ma di nuovo, dopo pochi minuti, l'occhio si abitua (adattamento alla luce).

L'adattamento al buio è possibile grazie al fatto che i fotorecettori sono in grado di variare la propria sensibilità quando necessario e al fatto che i bastoncelli possono diventare estremamente più sensibili dei coni: infatti come accennato precedentemente è grazie ai bastoncelli che la visione è possibile anche in condizioni di illuminazione scarsa. Possiamo quindi affermare che l'adattamento al buio corrisponde al passaggio dell'apparato visivo da visione fotonica a visione scotopica: dopo che i coni hanno raggiunto la sensibilità massima (circa 10 minuti) e la vista al buio è già migliorata molto, si attivano anche i bastoncelli fino a raggiungere un livello di sensibilità tale da sovrastare quella dei coni e dunque prevalere completamente. La sensibilità dei bastoncelli continua a migliorare per circa 30 minuti.

Viceversa, l'adattamento alla luce corrisponde al passaggio da visione scotopica a quella fotonica: essenzialmente il processo è inverso rispetto a quello appena descritto, ma è nettamente più rapido. La velocità di adattamento dei coni è infatti molto più rapida di quella dei bastoncelli e la durata totale dell'adattamento alla luce dura circa 5 minuti.

**Adattamento cromatico.** Il meccanismo di adattamento cromatico è fisiologicamente molto simile a quello di adattamento luminoso ma coinvolge, chiaramente, solo i coni. Per capire in cosa consiste l'adattamento cromatico, si pensi a quando si osserva un oggetto bianco (come un foglio) sotto diversi tipi di illuminante. Anche se la luce riflessa dal foglio sarà diversa a seconda dell'illuminante considerato, questo apparirà comunque bianco. Per fissare le idee, consideriamo la seguente situazione: immaginiamo di avere un foglio bianco e di passare da un ambiente al chiuso, ma bene illuminato da una luce fluorescente, all'aperto, di giorno. La luce del sole ha una quantità di radiazioni con lunghezze d'onda corte molto maggiore rispetto alla luce fluorescente, perciò all'aperto i coni  $S$  diventeranno meno sensibili e il foglio



Figura 1.4: Un esempio di memoria del colore.

apparirà sempre bianco.

Dal fenomeno di adattamento cromatico deriva un'importantissima proprietà della visione del colore: la *costanza del colore* (o *color constancy*), ovvero quel fenomeno per cui la percezione dei colori resta pressoché invariata sotto significanti variazioni di colore dell'illuminante. La costanza del colore, comunque, dipende anche da un altro fenomeno, cognitivo e non fisiologico, che viene chiamato *memoria del colore*: si tratta della tendenza che si ha ad attribuire il colore “corretto” ad oggetti quotidianamente noti: nella figura 1.4 osserviamo una torta con delle fragole grigie, che però ci appaiono rosse.

### 1.3.2 Induzione cromatica

L'induzione cromatica (o contrasto simultaneo) è quel fenomeno per cui la percezione di un colore cambia al variare dell'accostamento con altri colori. Questo *shift* apparente tende a seguire delle precise regole, dalle quali è nata la teoria dell'opponenza cromatica<sup>2</sup>: se un colore è immerso in un sfondo luminoso, tenderà ad apparire più scuro di quanto non sia, se lo sfondo è

<sup>2</sup>Questa teoria è descritta nel capitolo seguente, al paragrafo 2.2.

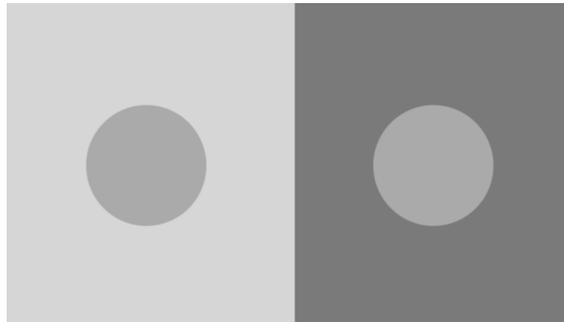


Figura 1.5: Un esempio di induzione cromatica: i due dischi all'interno dei quadrati sono della stessa tonalità di grigio, ma quello a sinistra appare più scuro di quello a destra: lo sfondo chiaro fa apparire il disco più scuro e viceversa.

rosso il colore apparirà più tendente al verde, mentre uno sfondo giallo induce uno shift verso il blu.

Analogamente lo sfondo scuro induce uno shift chiaro, lo sfondo verde induce uno shift rosso e uno sfondo blu induce uno shift giallo. Nella figura 1.5 è rappresentato un esempio di induzione cromatica.



# Capitolo 2

## Teorie del colore

Vedere a colori rappresenta il salto di qualità di eccellenza del senso visivo, significa non solo essere capaci di percepire uno stimolo ma di apprezzarne anche la qualità. Infatti, come osservato nel paragrafo 1.3.1, al di sotto di una certa soglia di intensità luminosa, detta *soglia assoluta*, la visione è acromatica e quindi di basso profilo qualitativo. Solo aumentando l'intensità dello stimolo fino ad una certa soglia (*soglia cromatica*) si inizia ad interpretare lo stimolo come colorato. L'intervallo esistente tra soglia assoluta e soglia cromatica prende il nome di *intervallo fotocromatico*. Nella visione cromatica esiste anche il concetto di *soglia differenziale*. Essa consiste nella minima variazione necessaria da imprimere alla lunghezza d'onda dello stimolo affinché si generi una diversa sensazione cromatica rispetto alla precedente. È stimato che tale incremento minimo si aggiri tra i 2nm e i 5nm.

Vediamo in questo capitolo le due principali teorie del colore: la teoria tricromatica e quella dell'opponenza cromatica.

### 2.1 La teoria tricromatica

Il primo tentativo di dare un fondamento scientifico alla percezione cromatica è da attribuire a Thomas Young che, all'inizio del 1800, ha contestato l'idea che esistesse nella retina la capacità di percepire tutte le differenze cromatiche dello spettro. Seguendo ciò che Maxwell già aveva affermato (i colori non hanno una natura fisica, sono creati dall'uomo), fu il primo a ipotizzare l'esistenza di tre tipi di fotorecettori ognuno contenente un proprio pigmento: il pigmento *cianolabile* (blu), in grado di rilevare le lunghezze d'onda più bre-

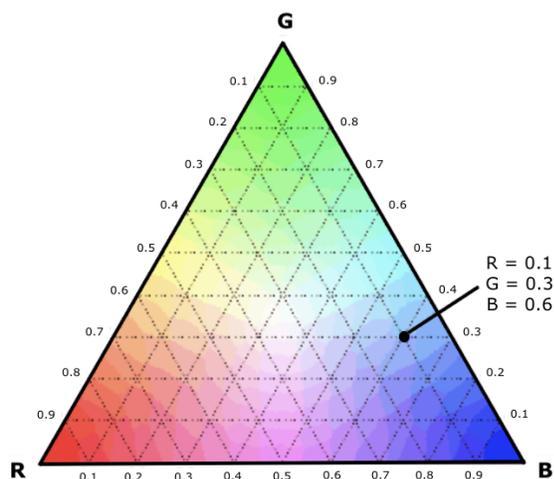


Figura 2.1: Triangolo dei colori per il modello  $RGB$ . Ogni colore è composto da tre strati sovrapposti corrispondenti a rosso, verde e blu di intensità variabile (su una scala normalizzata): il punto indicato in figura è composto da uno strato di rosso di intensità 0.1, uno di verde con intensità 0.3 e uno di blu con intensità 0.6.

vi (coni  $S$ ), il pigmento *clorolabile* (verde), capace di rispondere a lunghezze d'onda intermedie (coni  $M$ ) e il pigmento *eritrolabile* (rosso), sensibile alle lunghezze d'onda più lunghe (coni  $L$ ). Da questi tre colori, detti *primari*, e propriamente dalla loro somma effettuata dal cervello, discende tutta la variegata percezione cromatica.

Secondo questo modello tricromatico di percezione dei colori (ripreso in seguito anche da Helmholtz<sup>1</sup>) la visione, ad esempio, del colore giallo è l'effetto di una situazione in cui i coni  $M$  ed i coni  $L$  (sensibili rispettivamente a verde e rosso) sono massimamente stimolati, mentre l'eccitazione dei coni  $S$  (sensibili al blu) è del tutto trascurabile. La visione del bianco si ha, invece, quanto tutti e tre i tipi di coni risultano massimamente stimolati.

È possibile affermare che la teoria tricromatica della visione può essere considerata come una sorta di “antecedente fisiologico” del modello di rappresentazione digitale del colore  $RGB$  (figura 2.1).

<sup>1</sup>Helmholtz concorda in parte con Young ma ritiene che ogni cono contenga tutti tre i pigmenti ed invii al cervello un segnale già modulato.

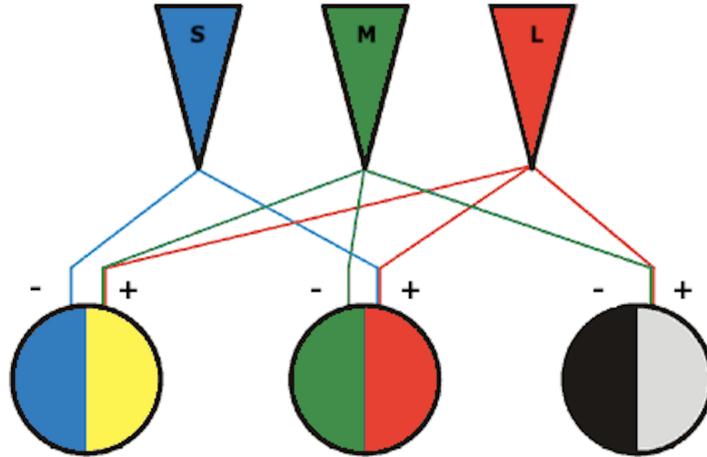


Figura 2.2: Rappresentazione schematica delle due fasi della teoria moderna dell'opponenza cromatica.

## 2.2 La teoria dell'opponenza cromatica

La teoria dell'opponenza cromatica è una teoria di visione del colore ideata nel 1892 dal fisiologo tedesco Ewald Hering, che, basandosi su fenomeni come quello del contrasto simultaneo, notò che è impossibile percepire alcune tonalità di colore. Infatti, mentre risulta facile immaginare un colore verde tendente al blu, è impossibile pensare ad un giallo bluastro o a un verde rosastro. Questo fatto suggerì ad Hering che ci fosse una sorta di antagonismo tra le coppie rosso-verde e giallo-blu. Egli propose una teoria sempre basata sull'esistenza di tre tipi di fotorecettori, sensibili non più a diverse lunghezze d'onda, bensì a tre diversi stimoli di contrasto: chiaro-scuro, rosso-verde e giallo-blu.

Questa teoria venne abbandonata presto, ma verso la metà del ventesimo secolo, venne ripresa dai due psicologi americani Leo Hurvich e Dorothea Jameson che integrarono la teoria di Hering con quella tricromatica di Young, introducendo una teoria della visione del colore composta principalmente da due stadi. Il primo stadio, cioè il momento in cui i recettori ricevono il segnale, è effettivamente tricromatico, ma questo segnale non viene trasmesso

direttamente al cervello come ipotizzato da Young e Helmholtz. Infatti, nel secondo stadio della visione del colore, il segnale tricromatico viene elaborato direttamente dai neuroni della retina che lo codificano e trasmettono un segnale diverso, contenente le informazioni, appunto, sulle opposizioni giallo-blu, rosso-verde e chiaro-scuro. Durante questa codifica gli output dei coni  $L$ ,  $M$  e  $S$  vengono sommati o sottratti, dando origine a tre nuovi tipi di segnali opponenti, uno acromatico ( $L + M + S$ ), uno relativo all'opponenza rosso-verde ( $L - M + S$ ) e uno relativo all'opponenza giallo-blu ( $L + M - S$ ).

## Parte II

# Introduzione alle algebre di Jordan



# Capitolo 3

## Algebre di Jordan

Nel tentativo di definire un'algebra delle osservabili della meccanica quantistica, il fisico e matematico tedesco Pascual Jordan definì in un suo articolo del 1933 delle algebre non associative, che da lui presero il nome: le algebre di Jordan.

In questo capitolo vedremo rapidamente come vengono definite queste algebre e ci concentreremo in particolare sulle algebre di Jordan formalmente reali, sulla loro classificazione e sul loro legame con i coni simmetrici. Come vedremo in seguito, nel capitolo 6, il modello di spazio dei colori percepiti analizzato in questa tesi può essere rappresentato dall'insieme degli elementi positivi di un'algebra di Jordan formalmente reale e grazie a questo modello sarà possibile andare a definire matematicamente le principali caratteristiche che definiscono un colore dal punto di vista percettivo.

### 3.1 Definizioni ed esempi

**Definizione 3.1.** Un'algebra di Jordan  $\mathcal{A}$  è uno spazio vettoriale su un campo  $K$  dotato di una operazione bilineare e commutativa

$$\begin{aligned} \bullet : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (a, b) &\mapsto a \bullet b = b \bullet a \end{aligned} \tag{3.1}$$

tale che valga la seguente relazione (identità di Jordan):

$$(a^2 \bullet b) \bullet a = a^2 \bullet (b \bullet a). \tag{3.2}$$

Tale operazione è detta prodotto di Jordan.

Un'algebra di Jordan è dunque un'algebra commutativa, non necessariamente associativa, in cui l'associatività viene sostituita dalla più debole proprietà (3.2).

**Esempio 3.2.** Data un'algebra associativa  $\mathcal{A}$  su  $\mathbb{R}$ , è sempre possibile ricavare un'algebra di Jordan definendo il seguente prodotto:

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, \quad a \bullet b := \frac{ab + ba}{2}. \quad (3.3)$$

Infatti tale prodotto è chiaramente commutativo e inoltre rispetta l'identità di Jordan:

$$\begin{aligned} 4(a^2 \bullet b) \bullet a &= (a^2b + ba^2)a + a(a^2b + ba^2) = \\ &= a^2ba + ba^3 + a^3b + aba^2 = \\ &= a^2(ba + ab) + (ba + ab)a^2 = 4a^2 \bullet (b \bullet a) \end{aligned} \quad (3.4)$$

In una qualsiasi algebra  $\mathcal{A}$ , per ogni elemento  $a \in \mathcal{A}$  possiamo definire due endomorfismi, la moltiplicazione a sinistra ( $L(a)$ ) e a destra ( $R(a)$ ):

$$\begin{aligned} L(a) : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} & R(a) : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ b &\mapsto L(a)b = a \bullet b & b &\mapsto R(a)b = b \bullet a \end{aligned} \quad (3.5)$$

Osserviamo che in questo modo si definiscono automaticamente i due operatori:  $L, R : \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(\mathcal{A})$ .

Se l'algebra considerata è di Jordan, in particolare commutativa, allora chiaramente i due operatori coincidono:  $L(a) = R(a)$ ,  $\forall a \in \mathcal{A}$  e consideriamo solo la moltiplicazione a sinistra.

Si osservi che la (3.2) è equivalente alla richiesta che per ogni  $a \in \mathcal{A}$ ,  $L(a)$  e  $L(a^2)$  commutino, cioè:

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, \quad L(a)L(a^2)b = L(a^2)L(a)b, \quad (3.6)$$

infatti:

$$L(a)L(a^2)b = a \bullet (a^2 \bullet b) = (a^2 \bullet b) \bullet a \stackrel{(3.2)}{=} a^2 \bullet (b \bullet a) = a^2 \bullet (a \bullet b) = L(a^2)L(a)b$$

**Esempio 3.3.** Sia  $W$  uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$  e  $B : W \times W \rightarrow \mathbb{K}$  una forma simmetrica e bilineare definita su  $W$ . Definiamo sullo spazio vettoriale  $V := \mathbb{K} \oplus W$  il prodotto seguente:

$$(\lambda + u) \bullet (\mu + v) := \underbrace{\lambda\mu + B(u, v)}_{\in \mathbb{K}} + \underbrace{\lambda v + \mu u}_{\in V} \quad (3.7)$$

Se  $x = \lambda + u$ , allora

$$x^2 = \lambda^2 + B(u, u) + 2\lambda u.$$

Ponendo  $T := B(\cdot, u)$ , osserviamo che, se  $I$  indica la funzione identica:

$$\begin{aligned} L(x) &= \lambda I + T, \\ L(x^2) &= (\lambda^2 + B(u, u))I + 2\lambda T. \end{aligned}$$

Quindi  $L(x)$  e  $L(x^2)$  commutano<sup>1</sup> e dunque  $V = \mathbb{K} \times W$  è un'algebra di Jordan.

Definiamo infine la mappa di *rappresentazione quadratica*:

$$\begin{aligned} P : \mathcal{A} &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{A}) \\ a &\mapsto P(a) = 2L^2(a) - L(a^2), \end{aligned} \tag{3.8}$$

e osserviamo inoltre che se  $\mathcal{A}$  è un'algebra con unità, cioè dotata di un elemento  $e \in \mathcal{A}$  tale che  $e \bullet a = a \bullet e = a, \forall a \in \mathcal{A}$ , si ha la seguente identità:

$$a^2 = P(a)e, \quad \forall a \in \mathcal{A}. \tag{3.9}$$

## 3.2 Algebre di Jordan formalmente reali

**Definizione 3.4.** Un'algebra di Jordan  $\mathcal{A}$  è detta *formalmente reale* (AJFR) se comunque presi  $n$  elementi  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$  vale la seguente implicazione:

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = 0 \quad \implies \quad a_1 = \dots = a_n = 0. \tag{3.10}$$

In una AJFR  $\mathcal{A}$  esiste sempre l'unità  $e$  (si veda [5]) ed è possibile definire la seguente relazione di ordine parziale:

$$a, b \in \mathcal{A}, a \leq b \quad \iff \quad b - a = \text{somma di quadrati}. \tag{3.11}$$

Questa è ben definita, infatti è:

i) riflessiva:  $a - a = 0 = 0^2 \Rightarrow a \leq a$ ;

---

<sup>1</sup>È banale: l'eventuale non commutatività deriverebbe dalla presenza di prodotti matriciali, che, in generale, non sono commutativi. In questo caso però le uniche due matrici che compaiono sono  $I$  e  $T$ , quindi ogni possibile prodotto tra queste è commutativo.

- ii) antisimmetrica: se  $a \leq b$ ,  $b \leq a$ , cioè  $b - a = c_1^2 + \dots + c_n^2$  e  $a - b = d_1^2 + \dots + d_m^2$  per opportuni elementi  $c_k, d_j \in \mathcal{A}$ , allora:  
 $0 = (a - b) + (b - a) = c_1^2 + \dots + c_n^2 + d_1^2 + \dots + d_m^2 \Rightarrow c_k = 0 = d_j, \forall k, j$ ,  
 cioè  $a - b = 0 \Rightarrow a = b$
- iii) transitiva: se  $a \leq b$ ,  $b \leq f$ , cioè  $b - a = c_1^2 + \dots + c_n^2$  e  $f - b = d_1^2 + \dots + d_m^2$  per opportuni elementi  $c_k, d_j \in \mathcal{A}$ , allora:  
 $f - a = f - b + b - a = d_1^2 + \dots + d_m^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2$ , cioè  $a \leq f$ .

Diciamo che un elemento  $a$  di una AJFR  $\mathcal{A}$  è positivo, se  $a \geq 0$  (i quadrati sono tutti positivi per definizione).

**Definizione 3.5.** Un'algebra di Jordan  $\mathcal{A}$  su  $\mathbb{R}$  è detta *Euclidea* se esiste una forma simmetrica, bilineare, definita positiva e associativa su  $\mathcal{A}$ ; ovvero se esiste su  $\mathcal{A}$  un prodotto scalare denotato con  $\langle a, b \rangle$  tale che, presi qualsiasi tre elementi  $a, b, c \in \mathcal{A}$ , valga  $\langle L(a)b, c \rangle = \langle b, L(a)c \rangle$ .

In un'algebra di Jordan Euclidea  $\mathcal{A}$  è possibile definire un *sistema completo* di idempotenti ortogonali, ovvero un insieme di elementi  $c_1, \dots, c_k$  tali che

$$\begin{aligned} c_i^2 &= c_i, & \forall i = 1, \dots, k, \\ \langle c_i, c_j \rangle &= 0, & \forall i \neq j \\ c_1 + \dots + c_k &= e. \end{aligned} \tag{3.12}$$

In [10] è dimostrato il seguente utile teorema spettrale:

**Teorema 3.6.** *Per ogni  $a$  nell'algebra di Jordan Euclidea  $\mathcal{A}$  esistono unici  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  tutti distinti e un unico sistema completo di idempotenti ortogonali  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}[a]$  tali che*

$$a = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_k c_k \tag{3.13}$$

*I numeri  $\lambda_j$  e la somma  $\sum \lambda_j c_j$  sono rispettivamente gli autovalori e la decomposizione spettrale di  $a$ .*

È facilmente verificabile che ogni algebra di Jordan Euclidea  $\mathcal{A}$  con identità  $e$  è anche formalmente reale, infatti se  $a$  e  $b$  sono due elementi di  $\mathcal{A}$  tali che  $a^2 + b^2 = 0$ , allora si ha:

$$\begin{aligned} \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle &= \langle e, L(a)a \rangle + \langle e, L(b)b \rangle = \\ &= \langle e, a^2 \rangle + \langle e, b^2 \rangle = \langle e, a^2 + b^2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Questo implica che si deve necessariamente avere  $a = 0 = b$ .

Il viceversa (più interessante) è anch'esso vero<sup>2</sup>:

**Proposizione 3.7.** *Un'algebra di Jordan formalmente reale è Euclidea.*

In particolare il prodotto scalare<sup>3</sup> associativo che si può definire su ogni algebra di Jordan formalmente reale  $\mathcal{A}$  è dato dalla traccia dell'operatore di moltiplicazione, che è ben definita, essendo  $L(a)$  un endomorfismo per ogni elemento  $a$  di  $\mathcal{A}$ :

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \quad \langle a, b \rangle := \text{tr}(L(a \bullet b)). \quad (3.14)$$

Osserviamo infine che una AJFR di dimensione finita è anche uno spazio di Hilbert nella topologia generata da questo prodotto scalare.

### 3.2.1 Classificazione delle AJFR

In un articolo del 1933 [11] Jordan stesso con von Neumann e Wigner dimostrò il seguente:

**Teorema 3.8.** *Ogni AJFR di dimensione finita può essere scritta come somma diretta di un numero finito di AJFR semplici.*

**Definizione 3.9.** Un'algebra di Jordan formalmente reale  $\mathcal{A}$  è detta *semplice* se è priva di ideali non banali.

Ricordiamo che un ideale è un sottospazio vettoriale  $B \subset \mathcal{A}$  tale che  $b \in B$  implica che  $a \bullet b \in B$  per ogni elemento dell'algebra  $\mathcal{A}$ .

Questo risultato è estremamente importante, perché permette di ridurre lo studio delle algebre di Jordan formalmente reali allo studio di quelle semplici; inoltre, sempre nello stesso articolo [11] viene mostrato che esistono solo le seguenti famiglie (infinite) di AJFR semplici:

- i)  $\mathfrak{H}(n, \mathbb{K})$ , con  $n \geq 3$ , cioè le matrici hermitiane (autoaggiunte) quadrate a coefficienti nei reali (se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), nei complessi ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) o nei quaternioni ( $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ ), dotate del prodotto di Jordan (3.3)  $a \bullet b := \frac{1}{2}(a \cdot b + b \cdot a)$ , dove  $\cdot$  indica il prodotto matriciale usuale;

<sup>2</sup>Per una dimostrazione si veda [10], proposizione VIII.4.2

<sup>3</sup>È banalmente bilineare e simmetrico grazie alla linearità di  $L(\cdot)$  e di  $\text{tr}(\cdot)$  e alla proprietà commutativa di  $\bullet$ , meno immediato è dimostrare che sia anche associativo e definito positivo. Tale dimostrazione coinvolge argomenti che esulano dai fini di questa tesi ed è reperibile in [10].

- ii)  $\mathfrak{H}(3, \mathbb{O})$ , sempre con il prodotto (3.3), è l'algebra delle matrici hermitiane  $3 \times 3$  a coefficienti negli ottonioni ed è detta *algebra di Albert*;
- iii)  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 0$ , detto *spin factor*, dotato del seguente prodotto (indichiamo con  $\cdot$  l'usuale prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$ ):

$$\begin{aligned} \bullet : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n \\ (\alpha + v, \beta + w) &\mapsto \alpha\beta + v \cdot w + \alpha w + \beta v. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Quest'ultimo è un prodotto di Jordan in quanto commutativo (banale) e rispetta l'identità di Jordan (3.2), infatti, dati  $x = \alpha + v$  e  $y = \beta + w \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$  si ha:

$$\begin{aligned} x^2 \bullet (y \bullet x) &= (\alpha^2 + v \cdot v + 2\alpha v) \bullet (\alpha\beta + v \cdot w + \alpha w + \beta v) = \\ &= \alpha^3\beta + 3\alpha\beta v \cdot v + (3\alpha^2 + v \cdot v) v \cdot w + \dots \\ &\dots + (\alpha^3 + \alpha v \cdot v) w + (3\alpha^3\beta + \beta v \cdot v + 2\alpha v \cdot w) v \end{aligned} \quad (3.16)$$

e

$$\begin{aligned} (x^2 \bullet y) \bullet x &= [(\alpha^2 + v \cdot v + 2\alpha v) \bullet (\beta + w)] \bullet (\alpha + v) = \\ &= \alpha^3\beta + 3\alpha\beta v \cdot v + (3\alpha^2 + v \cdot v) v \cdot w + \dots \\ &\dots + (\alpha^3 + \alpha v \cdot v) w + (3\alpha^3\beta + \beta v \cdot v + 2\alpha v \cdot w) v. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Osserviamo comunque che questo è un caso particolare dell'esempio 3.3, in cui  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $W = \mathbb{R}^n$  e  $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è la mappa che associa ad ogni coppia di vettori  $(u, v)$  il loro prodotto scalare  $u \cdot v$  (che è appunto simmetrico e bilineare).

*Osservazione 3.10.* Se  $\mathcal{A} = \mathfrak{H}(n, \mathbb{K})$  la rappresentazione quadratica  $P(a)$  dei suoi elementi soddisfa:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \quad P(a)b = a \cdot b \cdot a, \quad (3.18)$$

infatti:

$$\begin{aligned} P(a)b &= 2L^2(a)b - L(a^2)b = 2a \bullet (a \bullet b) - a^2 \bullet b = \\ &= 2a \bullet \frac{a \cdot b + b \cdot a}{2} - \frac{a^2 \cdot b + b \cdot a^2}{2} = \\ &= \frac{a \cdot (a \cdot b + b \cdot a) + (a \cdot b + b \cdot a) \cdot a}{2} - \frac{a^2 \cdot b + b \cdot a^2}{2} = \\ &= \frac{a \cdot b \cdot a + a \cdot b \cdot a}{2} = a \cdot b \cdot a \end{aligned}$$

*Osservazione 3.11.* Lo spin factor ha un significato fisico evidente, esso può essere infatti identificato con lo spazio di Minkowski  $(n + 1)$ -dimensionale.

Inoltre, come osservato da Baez in [2] le matrici hermitiane  $2 \times 2$  a coefficienti in qualsiasi algebra di divisione  $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H} \text{ o } \mathbb{O})$  sono isomorfe ad uno spin factor:

- i) l'algebra di Jordan  $\mathfrak{H}(2, \mathbb{R})$  è isomorfa a  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ ;
- ii) l'algebra di Jordan  $\mathfrak{H}(2, \mathbb{C})$  è isomorfa a  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ ;
- iii) l'algebra di Jordan  $\mathfrak{H}(2, \mathbb{H})$  è isomorfa a  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^5$ ;
- iv) l'algebra di Jordan  $\mathfrak{H}(2, \mathbb{O})$  è isomorfa a  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^9$ .

### 3.3 Coni simmetrici e AJFR

#### 3.3.1 Coni simmetrici

Consideriamo in questo paragrafo uno spazio vettoriale reale  $V$  dotato di un prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e, prima di definire il concetto di cono simmetrico, vediamo di seguito alcune definizioni e risultati introduttivi sui coni convessi.

**Definizione 3.12.** Un *cono*  $C$  è un sottoinsieme di  $V$  tale che per ogni  $x \in C$  e per ogni  $\lambda > 0$ , anche  $\lambda x$  è un elemento di  $C$ .

$C$  è *convesso* se presi comunque due elementi  $x, y \in C$  ed uno scalare  $\alpha \in (0, 1)$ , allora  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$

Possiamo dare la seguente caratterizzazione dei coni convessi:

**Proposizione 3.13.**  $C \subset V$  è un cono convesso se e solo se per ogni coppia di elementi  $x, y \in C$  e per ogni coppia di scalari  $\lambda > 0, \mu \geq 0$ ,  $\lambda x + \mu y \in C$

*Dimostrazione.* Dato  $C$  un cono convesso,  $x, y \in C$  e  $\lambda > 0, \mu \geq 0$ , allora:

$$\lambda x + \mu y = (\lambda + \mu) (\alpha x + (1 - \alpha)y), \text{ con } \alpha = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \in (0, 1),$$

quindi essendo  $C$  convesso  $z := \alpha x + (1 - \alpha)y \in C$  ed essendo  $C$  un cono  $(\lambda + \mu)z \in C$ .

L'altra implicazione è banale, basta scegliere  $\lambda \in (0, 1)$  e  $\mu = 1 - \lambda$  per mostrare la convessità, e  $\lambda > 0$  qualsiasi,  $\mu = 0$  per mostrare che  $C$  è un cono.  $\square$

Dato un qualsiasi cono  $C$ , possiamo definire i seguenti insiemi:

$$C - C := \{x - y : x \in C, y \in C\}, \quad (3.19)$$

$$C \cap (-C) := \{x : x \in C \text{ e } x \in -C\}. \quad (3.20)$$

Si può mostrare [10] che il primo è il più piccolo sottospazio di  $V$  contenente il cono  $C$ , mentre il secondo è il più grande sottospazio di  $V$  contenuto in  $C$  (se  $0 \in C$ , altrimenti  $C \cap (-C) = \emptyset$ ).

**Definizione 3.14.** Un cono  $C$  è detto *regolare* (o *proprio*) se  $\overline{C} \cap -\overline{C} = \{0\}$ .

Definiamo inoltre il *cono aperto duale*:

$$C^* := \{y \in V : \forall x \in \overline{C} \setminus \{0\}, \langle x, y \rangle > 0\}, \quad (3.21)$$

e il *cono chiuso duale* di un cono convesso  $C$ :

$$C^\# := \{y \in V : \forall x \in C, \langle x, y \rangle \geq 0\}. \quad (3.22)$$

**Definizione 3.15.** Un cono *aperto* convesso  $C$  è detto *autoduale* se  $C^* = C$ . Un cono *chiuso* convesso  $C$  è detto *autoduale* se  $C^\# = C$ .

Consideriamo il gruppo degli automorfismi di  $C$ , cioè il gruppo  $G(C) := \{g \in \text{GL}(V) : gC = C\}$ . Poiché per ogni  $g \in \text{GL}(V)$  vale che  $g \in G(C) \Leftrightarrow g\overline{C} = \overline{C}$ , segue che  $G(C)$  è un sottogruppo chiuso di  $\text{GL}(V)$  e perciò è un gruppo di Lie.

**Definizione 3.16.** Un cono aperto  $C$  è detto *omogeneo* se  $G(C)$  agisce transitivamente su di esso, ovvero se per ogni coppia di elementi  $x, y \in C$  esiste un automorfismo  $g \in G(C)$  tale che  $y = gx$ .

**Definizione 3.17.** Un cono aperto convesso  $C$  è detto *simmetrico* se è regolare, autoduale e omogeneo.

### 3.3.2 Cono degli elementi positivi di una AJFR

Data un'algebra di Jordan  $\mathcal{A}$  formalmente reale di dimensione finita, grazie alla relazione d'ordine introdotta precedentemente (3.11), possiamo definire l'insieme degli elementi positivi di  $\mathcal{A}$ :

$$C = \{a \in \mathcal{A} : a > 0\}. \quad (3.23)$$

Ricordando la definizione della relazione (3.11), osserviamo che un elemento positivo di un'algebra di Jordan è un elemento che può essere scritto come somma di quadrati.

Vediamo ora qualche proprietà di questo insieme.

**Proposizione 3.18.** *L'insieme degli elementi positivi  $C$  di una AJFR  $\mathcal{A}$  è un cono convesso e regolare.*

*Dimostrazione.* Verifichiamo intanto che  $C$  sia un cono: sia  $a \in C$ , ovvero  $a = \sum_k a_k^2$  per opportuni elementi  $a_k \in \mathcal{A}$ . Allora, se  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ , si ha:

$$\lambda a = \lambda \sum_k a_k^2 = \sum_k \lambda a_k^2 = \sum_k \left( \sqrt{\lambda} a_k \right)^2,$$

quindi per ogni  $\lambda > 0, a \in C$   $\lambda a$  è somma di quadrati, ovvero  $\lambda a \in C$ .

Consideriamo ora due elementi distinti di  $C$ ,  $a$  e  $b$ , in particolare abbiamo  $a = \sum_k a_k^2$  e  $b = \sum_j b_j^2$ , per opportuni  $a_k, b_j \in \mathcal{A}$ . Allora, per  $t \in (0, 1)$  abbiamo:

$$ta + (1-t)b = t \sum_k a_k^2 + (1-t) \sum_j b_j^2 = \sum_k \left( \sqrt{t} a_k \right)^2 + \sum_j \left( \sqrt{1-t} b_j \right)^2.$$

Perciò una combinazione convessa di due elementi del cono appartiene anch'essa al cono, cioè  $C$  è un cono convesso.

Infine verifichiamo la regolarità di  $C$ , cioè che se un elemento e il suo opposto appartengono entrambi alla chiusura  $\overline{C} = \{a \in \mathcal{A} : a \geq 0\}$ , allora questo elemento è lo zero. Questo significa mostrare che:

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ a \leq 0 \end{cases} \implies a = 0.$$

Assumiamo dunque che  $a, -a \geq 0$  allora  $a = \sum_k a_k^2$  e  $-a = \sum_j b_j^2$  per opportuni  $a_k, b_j \in \mathcal{A}$ . Ma allora  $-a = -\sum_k a_k^2 = \sum_k -a_k^2$ . Quindi, essendo  $\mathcal{A}$  formalmente reale:

$$\sum_k -a_k^2 = \sum_j b_j^2 \iff \sum_{k,j} a_k^2 + b_j^2 = 0 \iff a_k = 0 = b_j \forall k, j,$$

cioè  $a = 0$ . □

Come abbiamo visto nella sezione 3.2, ogni algebra di Jordan formalmente reale è anche Euclidea ed è quindi possibile definire il prodotto scalare (3.14)  $\langle a, b \rangle = \text{tr}(L(a \bullet b))$  e possiamo dunque considerare il cono duale del cono degli elementi positivi  $C^*$  definito nella (3.21), che si può scrivere più semplicemente come

$$C^* = \{a \in \mathcal{A} : \forall b \in C, \langle a, b \rangle > 0\}, \quad (3.24)$$

poiché  $C$  è regolare e quindi  $C = \overline{C} \setminus \{0\}$ .

Inoltre, grazie al teorema spettrale 3.6, per la (3.13) si ha che:

$$a = \sum_{j=1}^k \lambda_j c_j \implies a^2 = \sum_{j=1}^k \lambda_j^2 c_j \quad (3.25)$$

È quindi facile verificare che la chiusura del cono degli elementi positivi di  $\mathcal{A}$ ,  $\overline{C} = \{a \in \mathcal{A} : a \geq 0\}$ , coincide con l'insieme  $Q := \{a^2 : a \in \mathcal{A}\}$  dei quadrati di  $\mathcal{A}$  (e dunque l'interno di  $Q$  coincide con  $C$ ).

L'inclusione  $Q \subset \overline{C}$  è ovvia, quindi bisogna verificare l'inclusione opposta. Sia  $a \in \overline{C}$ , ovvero un elemento positivo (o nullo), allora può essere scritto come somma di quadrati:  $a = \sum_n b_n^2$ , per opportuni  $b_n \in \mathcal{A}$  e applicando la (3.13) a tutti i  $b_n$  si ottiene:

$$a = \sum_n \left( \sum_{j=1}^k \lambda_{jn}^2 c_j \right) = \sum_{j=1}^k \left( c_j \underbrace{\sum_n \lambda_{jn}^2}_{=\mu_j^2} \right) = \sum_{j=1}^k \mu_j^2 c_j \in Q.$$

**Proposizione 3.19.** *Il cono degli elementi positivi  $C$  di una AJFR  $\mathcal{A}$  è autoduale, ovvero  $C = C^*$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $C = \text{int}(Q)$  sarà sufficiente mostrare che  $Q$  è autoduale (cioè  $Q = Q^\#$ , dove  $Q^\#$  è il cono chiuso duale definito in (3.22)). Consideriamo allora il cono duale

$$Q^\# = \{a \in \mathcal{A} : \forall b \in \mathcal{A}, \langle a, b^2 \rangle \geq 0\}$$

e osserviamo intanto che, siccome  $\langle a, b^2 \rangle = \langle ab, b \rangle = \langle L(a)b, b \rangle$ , allora:

$$Q^\# = \{a \in \mathcal{A} : L(a) \text{ è semi-definita positiva} \}.$$

$Q \subset Q^\#$ : Sia  $a = \sum \lambda_j^2 c_j \in Q$ , allora per ogni  $b = \sum \mu_i c_i \in \mathcal{A}$  abbiamo:

$$\begin{aligned} \langle a, b^2 \rangle &= \left\langle \sum_j \lambda_j^2 c_j, \sum_i \mu_i^2 c_i \right\rangle = \sum_{i,j} \lambda_j^2 \mu_i^2 \langle c_j, c_i \rangle = \\ &= \sum_i \lambda_i^2 \mu_i^2 \|c_i\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Cioè  $a \in Q^\#$ .

$Q^\# \subset Q$ : Sia  $a = \sum \lambda_j c_j \in Q^\#$ . Allora:

$$\begin{aligned} \langle a, c_k \rangle &= \left\langle \sum_j \lambda_j c_j, c_k \right\rangle = \lambda_k \|c_k\|^2 \implies \lambda_k = \frac{1}{\|c_k\|^2} \langle a, c_k \rangle = \frac{1}{\|c_k\|^2} \langle a, c_k^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{\|c_k\|^2} \langle L(a)c_k, c_k \rangle. \end{aligned}$$

Per l'osservazione iniziale,  $a \in Q^\#$  implica che  $L(a)$  è semi-definita positiva, perciò  $\lambda_k = \frac{1}{\|c_k\|^2} \langle L(a)c_k, c_k \rangle \geq 0$ , cioè  $a = b^2$ , con  $b = \sum \sqrt{\lambda_j} c_j$ .

Abbiamo dunque dimostrato che  $Q$  è autoduale e di conseguenza lo è anche  $C$ . Dalle considerazioni all'inizio della dimostrazione, inoltre, segue anche che il cono degli elementi positivi corrisponde all'insieme degli elementi  $a$  di  $\mathcal{A}$  tali che l'operatore  $L(a)$  sia definito positivo. □

*Osservazione 3.20.* All'inizio della dimostrazione precedente abbiamo visto che il cono  $C$  degli elementi positivi di una AJFR  $\mathcal{A}$  coincide con l'interno dell'insieme  $Q$  dei quadrati di  $\mathcal{A}$ .

In [10] è dimostrato in modo analogo (sempre sfruttando il teorema spettrale per algebre di Jordan Euclidee) che  $C$  può essere definito anche come insieme degli esponenziali di  $\mathcal{A}$ . Dato  $a \in \mathcal{A}$ ,  $a = \sum \lambda_j c_j$ , si definisce il suo esponenziale come  $\exp(a) := \sum e^{\lambda_j} c_j$ .

Dunque si ha che  $C = \text{int}Q = \exp \mathcal{A}$ , ovvero:

$$\{a \in \mathcal{A} : a > 0\} = \text{int}\{a^2 : a \in \mathcal{A}\} = \{\exp(a) : a \in \mathcal{A}\} \quad (3.26)$$

È possibile anche dimostrare ([10], [12]) che il cono degli elementi positivi  $C$  di un'algebra di Jordan formalmente reale  $\mathcal{A}$  è omogeneo.

Questo fatto, unito alle proposizioni 3.18 e 3.19, implica il seguente risultato.

**Corollario 3.21.** *Il cono degli elementi positivi  $C$  di una AJFR  $\mathcal{A}$  è un cono simmetrico.*

Non è tutto. La relazione tra coni simmetrici e algebre di Jordan formalmente reali è molto più profonda di così: come spiega Koecher in [12], dato un cono simmetrico  $C$  in uno spazio vettoriale Euclideo  $V$ , è sempre possibile definire su  $V$  un prodotto  $\bullet$ , che dia a  $V$  una struttura di algebra di Jordan Euclidea con unità (e quindi di AJFR). Il cono degli elementi positivi di questa nuova algebra di Jordan è proprio il cono iniziale  $C$ .

Si ha dunque il seguente importante teorema (Koecher–Vinberg):

**Teorema 3.22.** *Ogni cono simmetrico è isomorfo al cono degli elementi positivi di un'algebra di Jordan formalmente reale.*

Questo risultato, insieme al teorema di classificazione di Jordan, Von-Neumann e Wigner (descritto nel paragrafo 3.2.1), ci permette anche di dare una classificazione dei coni simmetrici:

- i) il cono degli elementi positivi di  $\mathfrak{H}(n, \mathbb{K})$ , per  $n \geq 3$  e per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  o  $\mathbb{H}$ :  $\mathfrak{H}^+(n, \mathbb{K})$ ;
- ii) il cono degli elementi positivi di  $\mathfrak{H}(3, \mathbb{O})$ :  $\mathfrak{H}^+(3, \mathbb{O})$ ;
- iii) il cono degli elementi positivi di  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$ , per  $n > 0$ :  $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+)^n$  (detto cono di luce del futuro).

## **Parte III**

### **Il modello di Resnikoff**



# Capitolo 4

## Costruzione del modello

Partendo dai quattro assiomi di Schrödinger sullo spazio dei colori percepiti  $\mathcal{P}$  e aggiungendone uno di omogeneità, il matematico statunitense Howard Leonard Resnikoff sviluppò in un articolo [18] del 1974 un modello in cui le uniche due possibili rappresentazioni matematiche di  $\mathcal{P}$  coerenti con questi assiomi sono due varietà omogenee:  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  o  $\mathbb{R}^+ \times \text{SL}(2, \mathbb{R}^+)/\text{SO}(2)$ . La prima, già nota, rappresenta lo spazio dei colori percepiti con tre diverse coordinate cromatiche (LMS, RGB); la seconda invece è una nuova caratterizzazione e introduce lo spazio bidimensionale di Poincaré-Lobachevsky  $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$  con curvatura costante negativa.

### 4.1 Introduzione

#### 4.1.1 Notazione

Introduciamo ora la notazione (la stessa che si trova in [16]) che useremo nel seguito di questo capitolo.

Denotiamo lo spettro visibile con  $\Lambda = [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ , ovvero quella parte di spettro elettromagnetico percepibile dall'occhio umano: le radiazioni elettromagnetiche con lunghezza d'onda compresa tra  $\lambda_{min}$  ( $\approx 380\text{nm}$ ) e  $\lambda_{max}$  ( $\approx 780\text{nm}$ ).

$\mathbf{x} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^+$  indica la luce fisica, misurata da un trasduttore ottico. Poiché gli stimoli luminosi hanno energia finita ( $\int_{\Lambda} \mathbf{x}(\lambda)^2 d\lambda < \infty$ ), possiamo consi-

derare le luci fisiche come funzioni in  $L_+^2(\Lambda) := L^2(\Lambda, \mathbb{R}^+)$ .

Chiamiamo *color matching* il modo di confrontare la percezione di due luci fisiche: si divide il campo visivo in due parti (campo bipartito) e si mettono i due stimoli visivi uno di fianco all'altro, su uno sfondo uniforme comune (Figura 4.1).

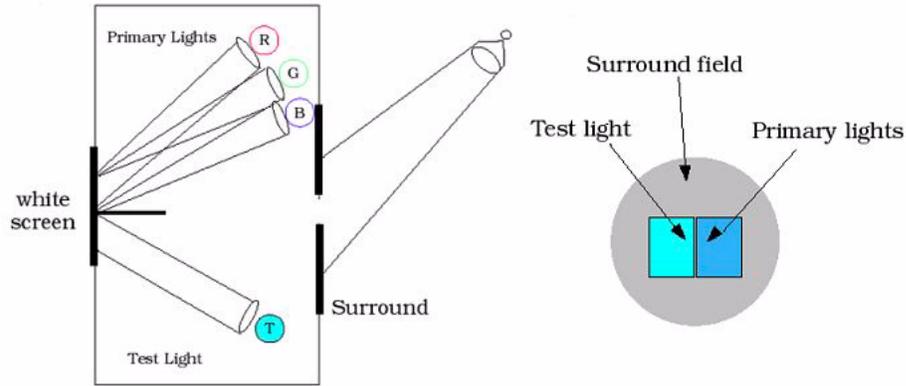


Figura 4.1: **color matching**: a sinistra è rappresentato il modo in cui viene allestito un esperimento di *color matching*, a destra ciò che vede l'osservatore durante l'esperimento.

L'osservatore è posto davanti ad uno schermo suddiviso in due parti (schermo bipartito): in una viene proiettata una luce colorata, mentre nell'altra parte dello schermo l'osservatore deve riprodurre la stessa luce come combinazione di tre fattori (per esempio tinta, intensità e saturazione, oppure, come nello schema, una combinazione di tre colori, come rosso verde e blu).

Sperimentalmente è stato verificato che stimoli luminosi spettralmente distinti possono essere percepiti come lo stesso colore dall'occhio umano; possiamo quindi definire tra gli elementi di  $L_+^2(\Lambda)$  la seguente relazione di equivalenza (*metamerismo*):

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_+^2(\Lambda), \quad \mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ sono ugualmente percepite.}$$

A questo punto possiamo definire lo spazio dei colori percepiti  $\mathcal{P}$  come lo spazio delle luci fisiche modulo metamerismo e i colori percepiti  $x$  come le classi di equivalenza del metamerismo:

$$\mathcal{P} = L_+^2(\Lambda) / \sim, \quad \mathcal{P} \ni x = [\mathbf{x}]_{\sim}.$$

Possiamo trasferire da  $L_+^2(\Lambda)$  in  $\mathcal{P}$  la somma e la moltiplicazione per uno scalare positivo ponendo:

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y = [\lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{y}]_{\sim}, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_+^2(\Lambda),$$

dove  $\lambda \mathbf{x}$  rappresenta la luce fisica  $\mathbf{x}$  la cui intensità è stata modulata di un fattore  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  e la somma  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  rappresenta la sovrapposizione<sup>1</sup> delle due luci fisiche  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

Indichiamo con  $V = \text{span}(\mathcal{P})$  lo spazio vettoriale generato dallo spazio dei colori percepiti rispetto alla struttura lineare descritta sopra: l'uguaglianza rappresenta il *color matching*, mentre la moltiplicazione per un numero reale negativo va interpretata come sovrapposizione luminosa dall'altro lato del campo bipartito in un esperimento di *color matching*. Si osservi che  $V$  è uno spazio vettoriale reale e dunque è naturalmente dotato di una struttura differenziale euclidea.

### 4.1.2 Gli assiomi di Schrödinger

**Assioma 1.**  $x \in \mathcal{P}, \alpha \in \mathbb{R}^+ \implies \alpha x \in \mathcal{P}$ .

Questo primo assioma significa fondamentalmente che  $\mathcal{P}$  è un cono. Si noti comunque che si tratta di una idealizzazione: se  $\alpha$  è molto grande i fotorecettori si saturano e di fatto l'occhio non è più in grado di percepire tale luce; se al contrario  $\alpha$  è vicino allo zero allora effetti quantici e rumori di fondo interrompono il meccanismo di input-output che persiste in condizioni fotopiche (paragrafo 1.2.1).

**Assioma 2.**  $x \in \mathcal{P} \implies \nexists y \in \mathcal{P} : x + y = 0$ .

Il secondo assioma significa che nessuna sovrapposizione di luci fisiche può essere percepita come assenza di luce. Matematicamente questo assioma può essere inteso come il fatto che nessun elemento di  $\mathcal{P}$  è l'opposto di un altro elemento di  $\mathcal{P}$ ; ovvero  $\mathcal{P}$  non contiene alcun sottospazio vettoriale di dimensione 1.

---

<sup>1</sup>La buona definizione di queste operazioni è da verificarsi sperimentalmente: date due coppie di colori metamerici  $\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{y}_1 \sim \mathbf{y}_2$ , si deve ottenere  $\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 \sim \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$  e dato uno scalare  $\lambda > 0$ , si deve ottenere  $\lambda \mathbf{x}_1 \sim \lambda \mathbf{x}_2$ . In questo modo le operazioni così definite non dipendono dalla scelta dei rappresentanti.

**Assioma 3.**  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \mathcal{P}, \quad \forall x, y \in \mathcal{P}, \forall \alpha \in [0, 1].$

Il terzo assioma significa che il segmento che unisce due colori percepiti consiste interamente di colori percepiti, ovvero  $\mathcal{P}$  è un cono convesso. Insieme al primo, questo assioma implica che  $\mathcal{P}$  è chiuso per combinazioni lineari arbitrarie con coefficienti positivi, infatti per ogni  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$  e per ogni  $x_1, x_2 \in \mathcal{P}$ ,  $z = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) / (\alpha_1 + \alpha_2)$  è una combinazione convessa di elementi di  $\mathcal{P}$ , quindi  $z \in \mathcal{P}$  (per il terzo assioma), ma per l'assioma 1 anche  $(\alpha_1 + \alpha_2)z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \mathcal{P}$ ; quindi, iterando questo ragionamento,  $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \in \mathcal{P}$  per ogni  $\alpha_k \in \mathbb{R}^+, x_k \in \mathcal{P}, k = 1, \dots, n.$

L'assioma 3 implica inoltre, insieme ai precedenti, che  $\mathcal{P}$  è connesso (e quindi connesso per archi e contraibile).

**Assioma 4.**  $x_k \in \mathcal{P} \Rightarrow \exists \alpha_k \in \mathbb{R}$  non tutti nulli :  $\sum_{k=1}^4 \alpha_k x_k = 0.$

Questo assioma significa che presi comunque più di tre colori percepiti, questi formano una famiglia linearmente dipendente nello spazio vettoriale  $V$  (generato da  $\mathcal{P}$ ); cioè 4 colori percepiti sono sempre linearmente dipendenti rispetto alla struttura algebrica di  $V$ , definita precedentemente.

Osserviamo che i primi tre assiomi implicano che i coefficienti  $\alpha_k$  non possono avere segno concorde, infatti: supponiamo che i coefficienti siano tutti positivi; allora  $y := \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \in \mathcal{P}$  (per quanto appena visto),  $z := \alpha_4 x_4 \in \mathcal{P}$  (per l'assioma 1) e dall'assioma 4 segue che  $y + z = 0$ , cioè  $y = -z$  e questo contraddice l'assioma 2.

Possiamo dunque riscrivere il quarto assioma in una versione più forte:

**Assioma 4'.**  $\forall x_k \in \mathcal{P}, k = 1, \dots, 4, \exists \alpha_k \in \mathbb{R}$ , non tutti con lo stesso segno, tali che:  $\sum_{k=1}^4 \alpha_k x_k = 0.$

Un'importante conseguenza diretta del quarto assioma è che la dimensione di  $V$  può essere al più 3, in particolare possiamo distinguere quattro tipi di osservatori: tricromatico (se  $\dim(V)=3$ ), dicromatico ( $\dim(V)=2$ ), monocromatico (se  $\dim(V)=1$ ) o cieco (se  $\dim(V)=0$ ).

## 4.2 L'omogeneità di $\mathcal{P}$

Prima di continuare l'analisi del lavoro di Resnikoff, è utile richiamare alcune nozioni sugli spazi omogenei.

**Definizione 4.1.** i. Dati un gruppo  $G$  e un insieme  $M$ , un'azione di  $G$  su  $M$  è una mappa:

$$\begin{aligned}\eta : G \times M &\rightarrow M \\ (\sigma, m) &\mapsto \eta_\sigma(m)\end{aligned}$$

tale che:

$$\begin{cases} \eta_{1_G}(m) = m, & \forall m \in M \\ \eta_\sigma(\eta_\tau(m)) = \eta_{\sigma\tau}(m), & \forall m \in M, \forall \sigma, \tau \in G. \end{cases}$$

ii. Un'azione  $\eta$  di un gruppo  $G$  su un insieme  $M$  si dice *transitiva* se, presi comunque due elementi  $m, n$  di  $M$ , esiste sempre un elemento  $\sigma$  del gruppo  $G$  tale che:

$$n = \eta_\sigma(m).$$

iii. Uno spazio topologico  $M$  è detto *spazio omogeneo* rispetto ad un gruppo  $G$  (o *spazio  $G$ -omogeneo*) se esiste un'azione transitiva di  $G$  su  $M$ .

iv. Un spazio topologico  $M$  è detto *spazio localmente omogeneo* rispetto ad un gruppo  $G$  (o *spazio localmente  $G$ -omogeneo*) se per ogni elemento  $m \in M$  esiste un'azione transitiva di  $G$  su un intorno aperto  $U_m$  di  $m$ .

Il motivo per cui introduciamo il concetto di omogeneità è la legge di Weber–Fechner, che afferma che la luminosità percepita  $b(x)$  di una luce di intensità  $x \in \mathbb{R}^+$  è proporzionale a  $\log x$ , quindi la luminosità (percepita) relativa  $b(x_1) - b(x_2)$  tra due luci rispettivamente di intensità  $x_1$  e  $x_2$  di  $\mathcal{P}$  sarà proporzionale a  $\log x_1 - \log x_2 = \log\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ . Possiamo dunque concludere che la luminosità relativa è invariante per cambiamenti simultanei di intensità luminosa: infatti, modulando contemporaneamente l'intensità luminosa di due stimoli di un fattore  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  ( $x_1 \mapsto \lambda x_1$ ,  $x_2 \mapsto \lambda x_2$ ), la loro luminosità relativa viene percepita allo stesso modo:

$$b(\lambda x_1) - b(\lambda x_2) \propto \log \frac{\lambda x_1}{\lambda x_2} = \log \frac{x_1}{x_2} \propto b(x_1) - b(x_2).$$

Possiamo ora identificare l'insieme di tutte le possibili intensità luminose con  $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$  (non consideriamo l'assenza di luce) e questo è sia uno spazio topologico che un gruppo, rispetto alla moltiplicazione per numeri

reali positivi.  $\mathbb{R}^+$  è uno spazio omogeneo rispetto a  $\mathbb{R}^+$  stesso, infatti per ogni coppia  $x, y \in \mathbb{R}^+$  esiste  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tale che  $y = \lambda x$  (tale  $\lambda$  è proprio  $y/x$ ). A questo punto osserviamo che grazie alla legge di Weber–Fechner è possibile definire una metrica su  $\mathbb{R}^+$  invariante rispetto a  $\mathbb{R}^+$  stesso:

$$d(x_1, x_2) = |\log x_1 - \log x_2| = \left| \log \frac{x_1}{x_2} \right|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

L’obiettivo di Resnikoff in [18] è quello di generalizzare questo fatto all’intero spazio dei colori percepiti, usando proprietà di invarianza della visione umana per fare emergere delle metriche su  $\mathcal{P}$ .

La principale evidenza fenomenologica che ci porta a pensare che l’intero spazio dei colori sia omogeneo rispetto all’azione di un qualche gruppo è la costanza del colore, ovvero la stabilità del sistema visivo umano nel percepire i colori (e non soltanto l’intensità luminosa) rispetto a illuminanti diversi (*color constancy* nel paragrafo 1.3). Questa proprietà è essenziale per la stabilità della nostra visione, infatti senza di essa saremmo costretti a ridefinire le relazioni di colore tra gli oggetti ogni volta che cambia l’illuminazione di fondo. La costanza del colore è in effetti una delle prime caratteristiche che servono in ogni modello di visione robotica, videosorveglianza, etc.

Il resto dell’articolo [18] si occupa dello sviluppo matematico di una teoria della percezione del colore, basata su questa presunta omogeneità dello spazio dei colori percepiti<sup>2</sup>.

La prima informazione di cui abbiamo bisogno è relativa al gruppo di trasformazioni rispetto al quale  $\mathcal{P}$  risulterebbe omogeneo. Resnikoff propose il gruppo  $GL^+(\mathcal{P})$ , delle trasformazioni lineari che preservano l’orientamento di  $V$  e preservano il cono  $\mathcal{P}$ :

$$GL^+(\mathcal{P}) := \{B \in GL(V) : \det(B) > 0, B(x) \in \mathcal{P} \forall x \in \mathcal{P}\},$$

dove  $GL(V)$  è il gruppo degli operatori lineari invertibili su  $V$ , che può essere identificato con il gruppo delle matrici reali  $n \times n$  ( $n = 3 = \dim(V)$ ), con determinante diverso da zero<sup>3</sup>. Chiamiamo cambiamenti di sfondo gli elementi  $B$  di  $GL^+(\mathcal{P})$ .

<sup>2</sup>È importante notare che l’assetto di osservazione considerato da Resnikoff in [18] è quello di un contesto uniforme, cioè uno sfondo uniformemente illuminato; la presenza di questo contesto sarà cruciale, come vedremo, per lo sviluppo della sua teoria.

<sup>3</sup> $GL(V)$  è un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^9$  rispetto alla topologia euclidea. Infatti è il complementare in  $M(3, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$  dell’insieme di livello  $\det^{-1}(0)$ , che è chiuso perché la funzione  $\det(\cdot)$  è continua nella topologia euclidea.

### 4.2.1 L'assioma di omogeneità

È noto che ogni colore percepito  $x \in \mathcal{P}$  può essere trasformato in un qualsiasi altro colore  $y \in \mathcal{P}$  “sufficientemente vicino”, tramite un opportuno cambiamento di sfondo. Per questo motivo Resnikoff postulò che  $\mathcal{P}$  è omogeneo rispetto al gruppo  $GL^+(\mathcal{P})$ . Come osservato precedentemente (paragrafo 1.3.2), questa non è una proprietà fisica del colore, ma una caratteristica della visione umana, l'induzione cromatica. Così per ogni  $x \in \mathcal{P}$  esiste un intorno aperto  $U_x \subset \mathcal{P}$  tale che ogni  $y \in U_x$  può essere scritto come  $y = B(x)$  per una opportuna trasformazione  $B \in GL^+(\mathcal{P})$ , quindi ogni punto di  $\mathcal{P}$  è un punto interno, cioè  $\mathcal{P}$  è aperto in  $V$  e ne eredita la struttura di varietà differenziabile. Rispetto a questa struttura differenziabile, ogni trasformazione  $B \in GL^+(\mathcal{P})$ ,  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  è un diffeomorfismo.

$\mathcal{P}$  è dunque localmente omogeneo e convesso (assioma 3): per ogni coppia di colori percepiti  $x, y$  esiste in  $\mathcal{P}$  il segmento  $L$  che congiunge  $x$  e  $y$ . Tale segmento è un sottoinsieme compatto di  $\mathcal{P}$  e, grazie alla omogeneità locale, sappiamo che per ogni  $z \in L$  esiste un intorno aperto  $U_z$  omogeneo rispetto al gruppo  $GL^+(\mathcal{P})$ . Muovendo il punto  $z$  lungo tutto il segmento  $L$ , otteniamo un ricoprimento aperto  $\bigcup_{z \in L} U_z$ , da cui, per compattezza, possiamo estrarre un ricoprimento aperto finito  $\bigcup_{k=1}^n U_{x_k}$  di  $L$  ( $n < +\infty$ ).

Sia ora  $B_k \in GL^+(\mathcal{P})$  il cambiamento di background che porta il colore percepito  $x_k$  nel colore percepito  $x_{k+1}$ , per  $k = 1, \dots, n-1$ ,  $x_0 = x$ ,  $x_n = y$ ; allora, essendo  $GL^+(\mathcal{P})$  un gruppo, la trasformazione  $B := B_{n-1} \circ B_{n-2} \circ \dots \circ B_0$  porta  $x$  in  $y$ . Ovvero per ogni  $x, y \in \mathcal{P}$  esiste una trasformazione  $B \in GL^+(\mathcal{P})$  tale che  $y = B(x)$ :

**Assioma 5.**  $\mathcal{P}$  è uno spazio  $GL^+(\mathcal{P})$ -omogeneo.

Gli spazi omogenei hanno molte utili proprietà che Resnikoff utilizzò per determinare la struttura geometrica di  $\mathcal{P}$  e per identificare metriche invarianti su di esso.

### 4.2.2 Conseguenze dell'assioma di omogeneità

Ricordiamo innanzitutto che se  $M$  è uno spazio omogeneo rispetto all'azione del gruppo  $G$ , allora il *sottogruppo di isotropia* (o *stabilizzatore*)  $G_{m_0}$  di un elemento  $m_0 \in M$  è il sottogruppo delle trasformazioni di  $G$  che lasciano invariato  $m_0$ , cioè

$$G_{m_0} := \{\sigma \in G : \eta_\sigma(m_0) = m_0\}. \quad (4.1)$$

Tutti i sottogruppi di isotropia di uno spazio omogeneo sono chiusi e tra loro coniugati, cioè per ogni coppia di elementi  $m, n \in M$ , esiste una trasformazione  $\bar{\sigma} \in G$  tale che  $G_n = \bar{\sigma}G_m\bar{\sigma}^{-1}$ .

Nella situazione che stiamo considerando, il gruppo che agisce sulla varietà  $\mathcal{P}$  è un gruppo di Lie e in questo caso vale il seguente teorema, di cui si può trovare una dimostrazione in [19]:

**Teorema 4.2.** *Sia  $H$  un sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie  $G$ . Sia  $G/H$  l'insieme delle classi laterali sinistre  $\{\sigma H : \sigma \in G\}$  e denotiamo con  $\pi : G \rightarrow G/H$  la proiezione canonica  $\pi(\sigma) = \sigma H$ . Allora  $G/H$  ha un'unica struttura di varietà differenziabile tale che:*

- i.  $\pi$  è  $C^\infty$ ,*
- ii. esistono sezioni locali lisce di  $G/H$  in  $G$ , ovvero se  $\sigma H \in G/H$ , allora esiste un intorno  $W$  di  $\sigma H$  e una mappa  $C^\infty$   $\tau : W \rightarrow G$  tale che  $\pi \circ \tau = id$ .*

Grazie a questo risultato (in particolare grazie al punto *i*) è possibile dare una dimostrazione del seguente, che sarà fondamentale per la descrizione dello spazio dei colori  $\mathcal{P}$ :

**Teorema 4.3.** *Sia  $\eta : G \times M \rightarrow M$  un'azione transitiva del gruppo di Lie  $G$  sulla varietà  $M$ . Sia  $m_0 \in M$  e  $H$  il sottogruppo di isotropia di  $m_0$ .*

*Allora la mappa*

$$\begin{aligned} \beta : G/H &\rightarrow M \\ \sigma H &\mapsto \beta(\sigma H) = \eta_\sigma(m_0) \end{aligned} \tag{4.2}$$

*è un diffeomorfismo.*

*Dimostrazione.* Verifichiamo innanzitutto la buona definizione, cioè che  $\beta(\sigma H)$  non dipenda dal rappresentante  $\sigma$  della classe di equivalenza  $\sigma H$ : sia  $h \in \sigma H$ , cioè  $h = \sigma k$  per qualche  $k \in H$ . Allora:

$$\begin{aligned} \beta(hH) &= \eta_h(m_0) = \eta_{\sigma k}(m_0) = \eta_\sigma \eta_k(m_0) \stackrel{k \in H}{=} \\ &= \eta_\sigma(m_0) = \beta(\sigma H). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dimostriamo dunque che  $\beta$  è un diffeomorfismo, cioè che è biiettiva,  $C^\infty$  e che  $d\beta$  è non singolare.

Chiaramente  $\beta$  è suriettiva, dal momento che l'azione  $\eta$  è transitiva (per ogni  $m \in M$ , esiste  $\sigma \in G$  tale che  $\eta_\sigma(m_0) = m$ ) ed è iniettiva poiché se  $\beta(\sigma H) = \beta(\tau H)$ , allora

$$\eta_\sigma(m_0) = \eta_\tau(m_0) \quad \Rightarrow \quad \eta_{\tau^{-1}\sigma}(m_0) = m_0 \quad \Rightarrow \quad \tau^{-1}\sigma \in H,$$

cioè  $\sigma H = \tau H$ .

Consideriamo ora la proiezione  $\pi$  di  $G$  sul quoziente  $G/H$ ,  $\pi : \sigma \mapsto \sigma H$ . La mappa  $\beta$  è  $\mathcal{C}^\infty$  se e solo se lo è  $\bar{\beta} = \beta \circ \pi$ . Quest'ultima è  $\mathcal{C}^\infty$ , infatti  $\bar{\beta}(\sigma) = \beta(\pi(\sigma)) = \eta_\sigma(m_0)$ , quindi  $\bar{\beta} = \eta \circ i_{m_0}$ , dove  $i_{m_0}(\sigma) := (\sigma, m_0)$ .

Infine, per dimostrare che  $d\beta$  è non singolare, è sufficiente mostrare per ogni  $\sigma \in G$  che il nucleo di  $\ker(d\bar{\beta}_\sigma) = \ker(d\pi_\sigma)$ , cioè  $\ker(d\bar{\beta}_\sigma) = T_\sigma(\sigma H)$ .

Osserviamo intanto che, indicando con  $l_\tau$  la moltiplicazione sinistra in  $G$  per ogni  $\tau$ , vale:

$$\bar{\beta} = \eta_\sigma \circ \bar{\beta} \circ l_{\sigma^{-1}}. \quad (4.4)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(\tau) &= \beta(\tau H) = \eta_\tau(m_0), \\ \eta_\sigma \circ \bar{\beta} \circ l_{\sigma^{-1}}(\tau) &= \eta_\sigma(\beta(\sigma^{-1}\tau H)) = \eta_\sigma(\eta_{\sigma^{-1}\tau}(m_0)) = \eta_\tau(m_0). \end{aligned}$$

Quindi per la (4.4), possiamo limitarci a dimostrare che  $\ker(d\bar{\beta}_e) = T_e H$ , dove  $e$  è l'unità di  $G$ . Chiaramente si ha  $T_e H \subset \ker(d\bar{\beta}_e)$ <sup>4</sup>, quindi è sufficiente mostrare l'altra inclusione.

Sia  $x \in \ker(d\bar{\beta}_e)$  e sia  $X$  il campo vettoriale su  $G$  determinato da  $x$  e invariante a sinistra, cioè tale che  $dl_\sigma X(\tau) = X(\sigma\tau)$  per ogni  $\sigma \in G$ .

Consideriamo il vettore tangente in  $t$  alla curva  $t \mapsto \bar{\beta}(\exp tX)$ :

$$\begin{aligned} d\bar{\beta}(X_{\exp tX}) &= d(\eta_{\exp tX} \circ \bar{\beta} \circ l_{\exp(-tX)})(X_{\exp tX}) = \\ &= d\eta_{\exp tX} \circ d\bar{\beta}(dl_{\exp(-tX)}X(\exp tX)) = \\ &= d\eta_{\exp tX} \circ d\bar{\beta}(X(e)) = d\eta_{\exp tX} \circ d\bar{\beta}(x). \end{aligned}$$

Siccome  $x \in \ker(d\bar{\beta}_e)$ , il vettore tangente  $d\bar{\beta}(X_{\exp tX})$  è sempre nullo su  $M$ , quindi  $\bar{\beta}(\exp tX) \equiv m_0$ . Ma allora:

$$\bar{\beta}(\exp tX) = \beta(\pi(\exp tX)) = \eta_{\exp tX}(m_0) \equiv m_0,$$

cioè  $\exp tX \in H$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e questo implica che  $x \in T_e H$ .  $\square$

<sup>4</sup>Infatti:  $T_e H = \ker(d\pi_e) \subset \ker(d\bar{\beta}_e) = \ker(d(\beta \circ \pi)_e)$ .

Nel contesto da noi considerato,  $\mathcal{P}$  è uno spazio omogeneo rispetto al gruppo  $GL^+(\mathcal{P})$ , che, essendo un sottogruppo di  $GL^+(V)$ , ne eredita la struttura di gruppo di Lie. La situazione, quindi, è proprio quella del teorema 4.3 e abbiamo così il seguente diffeomorfismo:

$$\mathcal{P} \simeq GL^+(\mathcal{P})/H, \quad (4.5)$$

dove, come nell'enunciato del teorema, indichiamo con  $H$  il sottogruppo di isotropia di  $GL^+(\mathcal{P})$  in un punto  $x \in \mathcal{P}$  fissato (ma arbitrario).

Per l'assioma 1, per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  la mappa  $x \mapsto \alpha x$  preserva  $\mathcal{P}$ , quindi qualunque trasformazione  $B \in GL^+(\mathcal{P})$  può essere espressa in modo unico come  $\alpha B'$  per opportuni  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  e  $B' \in SL(\mathcal{P})$ , dove  $SL(\mathcal{P})$  è il sottogruppo di  $GL^+(\mathcal{P})$  dato dalle matrici con determinante 1.

Da ciò segue che:

$$GL^+(\mathcal{P}) = \mathbb{R}^+ \times SL(\mathcal{P}) \quad (4.6)$$

e quindi, siccome il sottogruppo di isotropia di  $\mathbb{R}^+$  è chiaramente  $\{1\}$  e  $\mathbb{R}^+/\{1\} = \mathbb{R}^+$ , l'unica parte non banale del quoziente  $\mathcal{P} \simeq GL^+(\mathcal{P})/H$  è su un sottogruppo compatto  $K$  di  $SL(\mathcal{P})$ , ovvero:

$$\mathcal{P} \simeq \mathbb{R}^+ \times SL(\mathcal{P})/K. \quad (4.7)$$

$K$  è dunque identificato con un sottogruppo compatto di  $SL(\mathcal{P})$ , che è a sua volta un sottogruppo di  $SL(n, \mathbb{R})$  (con  $n = 1, 2, 3$  in accordo con l'assioma 4).

Consideriamo il caso tricromatico ( $n = 3$ ):

$$\begin{aligned} 3 = \dim(\mathcal{P}) &= \dim(\mathbb{R}^+ \times SL(\mathcal{P})/K) = \\ &= 1 + \dim(SL(\mathcal{P})/K), \end{aligned} \quad (4.8)$$

pertanto  $\dim(SL(\mathcal{P})/K) = 2$ .

Ora, poiché  $SL(\mathcal{P})$  è un sottogruppo di  $SL(3, \mathbb{R})$ , che ha dimensione 8, si ha il seguente vincolo dimensionale:

$$\dim(SL(\mathcal{P})) = 2 + \dim(K) \leq 8. \quad (4.9)$$

A questo punto, nel suo articolo [18], Resnikoff afferma che la contraibilità di  $\mathcal{P}$  implica che, qualunque sia il gruppo di Lie  $SL(\mathcal{P})$ , questo coincida con l'esponenziale della sua algebra di Lie  $\mathfrak{sl}(\mathcal{P})$ . Così, grazie alla classificazione delle algebre e dei gruppi di Lie e a vincoli dimensionali come (4.9), l'autore

ricava due sole possibilità per  $\mathrm{SL}(\mathcal{P})$  e, grazie alla (4.7) ottiene infine le due possibili realizzazioni per lo spazio  $\mathcal{P}$ :

$$\mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \text{oppure} \quad \mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2). \quad (4.10)$$

Questo approccio, però, presenta un problema: non è vero che la contraiibilità di  $\mathcal{P}$  implica che  $\mathrm{SL}(\mathcal{P})$  coincide con  $\exp \mathfrak{sl}(\mathcal{P})$ . La mappa esponenziale  $\exp : \mathfrak{sl}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathrm{SL}(\mathcal{P})$  infatti non è necessariamente suriettiva.

Consideriamo come controesempio  $\mathrm{SL}(\mathcal{P}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  il gruppo delle matrici  $2 \times 2$  con determinante 1 e la sua algebra di Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  (l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  a traccia nulla).

Se la mappa  $\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  fosse suriettiva ogni  $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  sarebbe l'immagine di una qualche matrice  $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Sia allora:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \quad (4.11)$$

e  $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  tale che  $T = \exp A$ . Qualunque sia la matrice  $A$ , sappiamo che ha sempre due autovalori  $\alpha$  e  $-\alpha$  in  $\mathbb{C}$  ed esiste quindi una matrice triangolare superiore  $P$  tale che:

$$AP = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow T = P \exp \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} P^{-1}. \quad (4.12)$$

Se  $\alpha = 0$ , allora  $\exp \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e questo non può succedere, altrimenti  $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  sarebbe una matrice con autovalori  $-1$  simile ad una con autovalori uguali a 1.

Se invece  $\alpha \neq 0$ , allora le matrici  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$  e la sua esponenziale avrebbero autovalori distinti e sarebbero quindi diagonalizzabili. Anche questo caso è impossibile perché altrimenti  $T$ , che non è diagonalizzabile, sarebbe simile ad una matrice diagonalizzabile.

Pertanto il ragionamento di Resnikoff non può essere applicato, tuttavia fortunatamente le sue conclusioni restano comunque vere.

Ricordiamo infatti che  $\mathrm{SL}(\mathcal{P})/K$  è uno spazio omogeneo, bidimensionale, connesso e contraibile, quindi, considerando la classificazione degli spazi

omogenei bidimensionali (si vedano [8] e [13]), gli unici due spazi che hanno queste proprietà sono proprio  $\mathbb{R}^2$  (diffeomorfo<sup>5</sup> a  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ) e il piano iperbolico  $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ .

Ricapitolando: i 5 assiomi (quelli di Schrödinger e quello di omogeneità) implicano che  $\mathcal{P}$  è uno spazio omogeneo equivalente a uno dei seguenti:

$$\mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad (4.13)$$

oppure

$$\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^+ \times \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2). \quad (4.14)$$

La prima caratterizzazione rappresenta lo spazio dei colori con tre coordinate cromatiche separate, per esempio *RGB*, *LMS*, *XYZ*, etc. La seconda caratterizzazione è invece la novità di Resnikoff e introduce nella teoria dei colori lo spazio di Poincaré–Lobachevsky bidimensionale con curvatura negativa costante  $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ .

### 4.3 Metriche invarianti per $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$

Una volta individuate le uniche due scelte possibili per la struttura geometrica di  $\mathcal{P}$  compatibili con i cinque assiomi, Resnikoff cercò, per ognuna di queste, di definire una metrica Riemanniana per misurare la differenza tra colori percepiti. Come vedremo in questa sezione, riuscì a determinare in modo unico le metriche tramite un principio di invarianza, sempre coerentemente con gli assiomi di Schrödinger.

Siano  $x, y \in \mathcal{P}$  due colori percepiti rispetto allo stesso sfondo (background)  $b$  ed effettuiamo un cambio di background, da  $b$  a  $b'$  modellato dalla trasformazione  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ . Otterremo così  $x' = B(x)$  e  $y' = B(y)$  che saranno le luci  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  percepite nel nuovo background  $b'$ .

L'ipotesi è che la differenza percettiva tra  $x$  e  $y$  è la stessa che c'è tra  $x'$  e  $y'$  e può essere formalizzata nel seguente

**Assioma 6.** Se  $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty)$  è la distanza Riemanniana su  $\mathcal{P}$  che misura le differenze percettive tra coppie di luci percepite  $x, y \in \mathcal{P}$ , allora  $d$  è  $\text{GL}^+(\mathcal{P})$ -invariante, ovvero:

$$d(B(x), B(y)) = d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{P}, \forall B \in \text{GL}^+(\mathcal{P}). \quad (4.15)$$

---

<sup>5</sup>Tramite il diffeomorfismo  $\exp : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ ,  $x \mapsto e^x$

Chiamiamo una tale  $d$  *metrica percettiva del colore*.

Di seguito mostriamo come la richiesta di  $\text{GL}^+(\mathcal{P})$ -invarianza ci permetta di identificare una metrica percettiva del colore per entrambe le strutture geometriche di  $\mathcal{P}$ . Innanzitutto osserviamo che il diffeomorfismo  $B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $B \in \text{GL}^+(\mathcal{P})$ , induce un isomorfismo lineare sullo spazio tangente  $T_x\mathcal{P}$  per ogni  $x \in \mathcal{P}$ , tramite la mappa differenziale  $d_x B : T_x\mathcal{P} \rightarrow T_{B(x)}\mathcal{P}$ ; questo ci permette di introdurre il push-forward della metrica Riemanniana  $B_*g$  su  $\mathcal{P}$ , tramite la seguente equazione:

$$\begin{aligned} B_*g_{B(x)}(dB(X), dB(Y)) &= g_x(X, Y), \\ \forall B \in \text{GL}^+(\mathcal{P}), \forall X, Y \in T_x\mathcal{P}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ricordiamo che, come visto precedentemente,  $\mathcal{P}$  può essere identificato con lo spazio omogeneo  $\text{GL}^+(\mathcal{P})/H$  e che  $\text{GL}^+(\mathcal{P})$  agisce transitivamente su  $\mathcal{P}$ , quindi se fissiamo un qualsiasi  $x \in \mathcal{P}$ , possiamo sempre raggiungere ogni altro  $y \in \mathcal{P}$  tramite l'azione di una trasformazione del gruppo (cioè esiste un  $B \in \text{GL}^+(\mathcal{P})$  tale che  $y = B(x)$ ).

Scegliamo, in particolare, come elemento  $x \in \mathcal{P} \equiv \text{GL}^+(\mathcal{P})/H$  la classe di equivalenza a cui appartiene la trasformazione identica di  $\text{GL}^+(\mathcal{P})$ , ovvero  $K$  stesso. In questo caso, per definizione, abbiamo  $B(x) = x, \forall B \in K$  e possiamo riscrivere la (4.16) come segue:

$$B_*g_x(dB(X), dB(Y)) = g_x(X, Y), \quad \forall B \in H, \forall X, Y \in T_x(\mathcal{P}). \quad (4.17)$$

La ricerca di una metrica percettiva del colore su  $\mathcal{P}$  si è quindi ridotta al più semplice problema di cercare metriche  $H$ -invarianti per gli spazi  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  definiti rispettivamente in (4.13) e (4.14).

Per  $\mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  abbiamo visto che  $K = \{1\}$  e quindi l'invarianza rispetto a  $K$  non introduce alcun vincolo. Comunque la metrica che cerchiamo dev'essere somma di metriche  $\mathbb{R}^+$ -invarianti su ogni fattore (per la legge di Weber–Fechner) e tutte le metriche su  $\mathbb{R}^+$  con questa proprietà sono tra loro proporzionali: è sufficiente individuarne una e le altre saranno suoi multipli positivi. La metrica su  $\mathbb{R}^+$   $ds^2 = (dx/x)^2$  è chiaramente invariante rispetto a  $\mathbb{R}^+$ , quindi la metrica percettiva del colore su  $\mathcal{P}_1$  sarà della forma:

$$ds^2 = \alpha_1 \left( \frac{dx_1}{x_1} \right)^2 + \alpha_2 \left( \frac{dx_2}{x_2} \right)^2 + \alpha_3 \left( \frac{dx_3}{x_3} \right)^2, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^+, \quad (4.18)$$

Consideriamo ora il caso  $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^+ \times \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ : qui  $K = \text{SO}(2)$  e quindi lo spazio tangente a  $\mathcal{P}_2$  in  $x \in \mathcal{P}_2$  è:

$$T_x \mathcal{P}_2 = \mathbb{R} \oplus T_K \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2), \quad \forall x \in \mathcal{P}_2. \quad (4.19)$$

Quindi in questo caso invarianza rispetto a  $K$  significa invarianza rispetto alle rotazioni e quindi segue che la metrica percettiva del colore per  $\mathcal{P}_2$  deve essere la somma di una metrica euclidea 1-dimensionale e una 2-dimensionale, quindi tale metrica sarà unica, modulo la scelta di unità di misura su ognuno dei fattori  $\mathbb{R}^+$  e  $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ .

Diamo una caratterizzazione esplicita di questa metrica su  $\mathcal{P}_2$ . Ricordiamo, innanzitutto, che  $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$  è isomorfo all'insieme  $\mathcal{N}$  delle matrici  $2 \times 2$  reali, simmetriche, definite positive e con determinante 1. Se  $x$  è una generica matrice  $2 \times 2$  simmetrica e definita positiva, il suo determinante sarà certamente positivo, ma in generale diverso da 1; possiamo comunque scrivere  $x = \det x \frac{x}{\det x}$  e quindi si ha:

$$\mathcal{P}_2 \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathcal{N}, \quad (4.20)$$

ovvero  $\mathcal{P}_2$  è isomorfo all'insieme delle matrici reali  $2 \times 2$  simmetriche e definite positive e  $\text{GL}^+(\mathcal{P}_2)$  può essere identificato con  $\text{GL}^+(2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \times \text{SL}(2, \mathbb{R})$ .

L'azione di  $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$  su  $\mathcal{P}$  è data da:

$$\begin{aligned} \text{GL}^+(2, \mathbb{R}) \times \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ (A, x) &\mapsto Q(x) := Ax A^t, \end{aligned} \quad (4.21)$$

e una metrica su  $\mathcal{P}$   $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ -invariante e normalizzata è data da:

$$ds^2 = \text{tr}(x^{-1} dx x^{-1} dx). \quad (4.22)$$

Verifichiamo che  $ds^2$  sia effettivamente invariante rispetto a  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ : osservando che  $Q(x)^{-1} = A^{-t} x^{-1} A^{-1}$  (dove  $A^{-t} = (A^t)^{-1}$ ),  $dQ(x) = Adx A^t$  (per linearità) e ricordando la proprietà ciclica della traccia ( $\text{tr}(ABCD) = \text{tr}(DABC) = \dots$ ), otteniamo:

$$\begin{aligned} \text{tr}(Q(x)^{-1} dQ(x) Q(x)^{-1} dQ(x)) &= \text{tr}(A^{-t} x^{-1} dx x^{-1} dx A^t) \\ &= \text{tr}(A^t A^{-t} x^{-1} dx x^{-1} dx) \\ &= \text{tr}(x^{-1} dx x^{-1} dx). \end{aligned} \quad (4.23)$$

E siccome questo è valido per ogni  $A \in \text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ , questo dimostra la  $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ -invarianza.

# Capitolo 5

## Intensità luminosa percepita

Tramite la metrica percettiva del colore è possibile dare una descrizione matematica della percezione della luminosità, relativamente ad un colore di riferimento. In questo capitolo ci occuperemo dunque di ricavare una definizione matematica per la luminosità percepita e analizzarne alcuni aspetti; questa analisi sarà suddivisa in tre paragrafi dedicati rispettivamente a differenze di luminosità, superfici a luminosità costante e dipendenza dal colore della luminosità.

### 5.1 Differenza di luminosità

Se  $\mathbf{x}$  è una luce fisica e  $\lambda > 0$ , allora, nella configurazione considerata da Resnikoff, ovvero quella di uno stimolo su uno sfondo uniforme,  $\mathbf{x}$  e  $\lambda\mathbf{x}$  produrranno due sensazioni di colore, rispettivamente  $x$  e  $\lambda x$ , che differiranno solo in intensità; questa differenza è detta appunto differenza di luminosità.

La differenza di luminosità dovrà allora essere misurata calcolando la distanza tra le due luci percepite, tramite la metrica percettiva  $d$ :

$$d(x, \lambda x) = \int_x^{\lambda x} ds, \quad (5.1)$$

dove l'integrale è preso lungo un arco di geodetica che connette  $x$  a  $\lambda x$  e  $d(\lambda x) = \lambda dx$ .

Per  $\mathcal{P}_1$  la distanza  $d$  è data dalla (4.18):  $ds^2 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left(\frac{dx_i}{x_i}\right)^2$ , pertanto si ottiene:

$$d(x, \lambda x) = \int_1^\lambda \sqrt{\sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{dt}{t}} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \alpha_i} |\log(\lambda)|; \quad (5.2)$$

considerando invece  $\mathcal{P}_2$  e la metrica data da (4.22) ( $ds^2 = \text{tr}(x^{-1} dx x^{-1} dx)$ ) otteniamo

$$d(x, \lambda x) = \int_1^\lambda \sqrt{\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{dt}{t}} = \sqrt{2} |\log(\lambda)|. \quad (5.3)$$

Notiamo che in entrambi i casi otteniamo che la differenza di luminosità percepita risulta proporzionale al logaritmo del rapporto tra le intensità, cioè proprio ciò che afferma la legge di Weber–Fechner.

Il problema diventa decisamente più complicato nel momento in cui si considerano differenze di luminosità indotte da stimoli luminosi che differiscono, oltre che in intensità, anche rispetto alle loro proprietà cromatiche (tonalità e saturazione).

Se  $b(x, y)$  è la differenza di luminosità di due elementi qualsiasi  $x, y \in \mathcal{P}$ , allora, dal momento che  $b$  misura solo la differenza in luminosità mentre  $d$  anche quelle in tonalità e saturazione, certamente si ha  $b(x, y)^2 \leq d(x, y)^2$ . Per semplificare la notazione consideriamo  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{M}$  in modo tale che  $x \in \mathcal{P}$  possa essere scritto come:

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (\xi, u), \quad \xi \in \mathbb{R}^+, u = (u_1, u_2) \in \mathcal{M}, \quad (5.4)$$

dove

$$\mathcal{M} = \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \text{per } \mathcal{P}_1 \\ \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2) & \text{per } \mathcal{P}_2. \end{cases} \quad (5.5)$$

Consideriamo  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  separatamente.

- $\mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ,  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Una scelta conveniente per una parametrizzazione esplicita ci permette di esibire la struttura di prodotto cartesiano di  $\mathcal{P}_1$ , dividendo la distanza Riemanniana in due termini, ognuno

dei quali corrisponde ad un fattore cartesiano:

$$\begin{cases} \xi = \sqrt[3]{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}}, & (\text{una sorta di media geometrica delle } x_i); \\ u_1 = \frac{x_1^\sigma}{\xi}, & (\text{con } \sigma = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3}, \text{ media aritmetica delle } \alpha_i); \\ u_2 = \frac{x_2^\sigma}{\xi}. \end{cases} \quad (5.6)$$

Calcoliamo la distanza (4.18) ( $ds^2 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i (\frac{dx_i}{x_i})^2$ ) in questo sistema di riferimento. Osserviamo innanzitutto che  $x_1 = (u_1 \xi)^{\frac{1}{\sigma}}$ ,  $x_2 = (u_2 \xi)^{\frac{1}{\sigma}}$  e per  $x_3$  si ha:

$$x_3^{\alpha_3} = \frac{\xi^3}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}} = \frac{\xi^3}{(u_1 \xi)^{\alpha_1/\sigma} (u_2 \xi)^{\alpha_2/\sigma}} = \frac{\xi^{3 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sigma}}}{u_1^{\alpha_1/\sigma} u_2^{\alpha_2/\sigma}}, \quad (5.7)$$

ed essendo  $\sigma = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3}$

$$x_3 = \frac{\xi^{1/\sigma}}{u_1^{\alpha_1/\sigma} u_2^{\alpha_2/\sigma}}. \quad (5.8)$$

Derivando, otteniamo:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{1}{\sigma} u_1^{\frac{1}{\sigma}-1} \xi^{\frac{1}{\sigma}} du_1 + \frac{1}{\sigma} u_1^{\frac{1}{\sigma}} \xi^{\frac{1}{\sigma}-1} d\xi = \frac{(u_1 \xi)^{1/\sigma}}{\sigma} \left[ \frac{du_1}{u_1} + \frac{d\xi}{\xi} \right] = \\ &= \frac{x_1}{\sigma} \left[ \frac{du_1}{u_1} + \frac{d\xi}{\xi} \right], \end{aligned} \quad (5.9)$$

analogamente:

$$dx_2 = \frac{x_2}{\sigma} \left[ \frac{du_2}{u_2} + \frac{d\xi}{\xi} \right], \quad (5.10)$$

e infine:

$$\begin{aligned} dx_3 &= \frac{1}{\sigma} \frac{\xi^{1/\sigma-1}}{u_1^{\alpha_1/\sigma} u_2^{\alpha_2/\sigma}} d\xi - \frac{\alpha_1}{\sigma} \frac{\xi^{1/\sigma}}{u_1^{\alpha_1/\sigma-1} u_2^{\alpha_2/\sigma}} du_1 - \frac{\alpha_2}{\sigma} \frac{\xi^{1/\sigma}}{u_1^{\alpha_1/\sigma} u_2^{\alpha_2/\sigma-1}} du_2 = \\ &= \frac{1}{\sigma} x_3 \frac{d\xi}{\xi} - \frac{\alpha_1}{\sigma} x_3 \frac{du_1}{u_1} - \frac{\alpha_2}{\sigma} x_3 \frac{du_2}{u_2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Per la (4.18), la distanza in queste coordinate soddisfa dunque:

$$\begin{aligned} \sigma^2 ds^2 = & \alpha_1 \left( \frac{du_1}{u_1} \right)^2 + \alpha_1 \left( \frac{d\xi}{\xi} \right)^2 + 2\alpha_1 \left( \frac{du_1}{u_1} \right) \left( \frac{d\xi}{\xi} \right) + \alpha_2 \left( \frac{du_2}{u_2} \right)^2 + \\ & + \alpha_2 \left( \frac{d\xi}{\xi} \right)^2 + 2\alpha_2 \left( \frac{du_2}{u_2} \right) \left( \frac{d\xi}{\xi} \right) + \alpha_3 \left( \frac{d\xi}{\xi} \right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3} \left( \frac{du_1}{u_1} \right)^2 + \\ & + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3} \left( \frac{du_2}{u_2} \right)^2 - 2\alpha_1 \left( \frac{du_1}{u_1} \right) - 2\alpha_2 \left( \frac{du_2}{u_2} \right) + 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3} \left( \frac{du_1}{u_1} \frac{du_2}{u_2} \right). \end{aligned}$$

Pertanto osserviamo, come anticipato precedentemente, che la distanza Riemanniana è composta da due termini corrispondenti ai due fattori cartesiani della struttura di  $\mathcal{P}$ :

$$\begin{aligned} \sigma^2 ds^2 = & 3\sigma \left( \frac{d\xi}{\xi} \right)^2 + \left[ \left( \alpha_1 + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3} \right) \left( \frac{du_1}{u_1} \right)^2 + 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3} \left( \frac{du_1}{u_1} \frac{du_2}{u_2} \right) + \right. \\ & \left. + \left( \alpha_2 + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3} \right) \left( \frac{du_2}{u_2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

In questa parametrizzazione, l'effetto di un cambiamento di luminosità  $x \mapsto \lambda x$ ,  $\lambda > 0$  è il seguente:

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \implies \begin{cases} \xi \mapsto \lambda^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3}} \xi = \lambda^\sigma \xi, \\ u_1 \mapsto \frac{\lambda^\sigma x_1^\sigma}{\lambda^\sigma \xi} = u_1, \\ u_2 \mapsto \frac{\lambda^\sigma x_2^\sigma}{\lambda^\sigma \xi} = u_2, \end{cases} \quad (5.13)$$

cioè le coordinate  $u_1, u_2$  sono indipendenti dalla trasformazione  $x \mapsto \lambda x$ .

Dal momento  $ds^2$  dipende separatamente da  $\xi$  e da  $u_1, u_2$  e poiché un cambio di luminosità ha effetto solo sulla coordinata  $\xi$ , la parametrizzazione (5.6) ci permette di esprimere i cambi di luminosità interamente in termini della coordinata  $\xi$ .

- $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^+ \times \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ ,  $\mathcal{M} = \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ . In questo caso possiamo considerare  $\mathcal{P}_2$  come l'insieme delle matrici reali  $2 \times 2$  simmetriche e definite positive  $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix}$ . Una opportuna parametrizzazione di  $\mathcal{P}_2$  è

la seguente:

$$\begin{cases} \xi = \sqrt{\det x} = \sqrt{x_1 x_2 - x_3^2} \\ u_1 = \frac{x_3}{x_2} \\ u_2 = \frac{\xi}{x_2}, \end{cases} \quad (5.14)$$

da cui otteniamo  $x_2 = \xi \frac{1}{u_2}$ ,  $x_3 = u_1 x_2 = \xi \frac{u_1}{u_2}$  e per  $x_1$ :

$$\xi = \sqrt{x_1 \frac{\xi}{u_2} - \xi^2 \frac{u_1^2}{u_2^2}} \Rightarrow x_1 \frac{\xi}{u_2} = \xi^2 \left(1 + \frac{u_1^2}{u_2^2}\right) \Rightarrow x_1 = \xi \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_2} \quad (5.15)$$

e quindi

$$x = \xi \begin{pmatrix} \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_2} & \frac{u_1}{u_2} \\ \frac{u_1}{u_2} & \frac{1}{u_2} \end{pmatrix} \Rightarrow x^{-1} = \frac{1}{\xi} \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2} & -\frac{u_1}{u_2} \\ -\frac{u_1}{u_2} & \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_2} \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

e  $dx = \begin{pmatrix} dx_1 & dx_3 \\ dx_3 & dx_2 \end{pmatrix}$ , dove:

$$\begin{cases} dx_1 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_2} d\xi + \frac{2\xi u_1}{u_2} du_1 + \frac{u_1^2 - u_2^2}{u_2^2} du_2 \\ dx_2 = \frac{1}{u_2} d\xi - \frac{\xi}{u_2^2} du_2 \\ dx_3 = \frac{u_1}{u_2} d\xi + \frac{\xi}{u_2} du_1 - \frac{\xi u_1}{u_2^2} du_2 \end{cases} \quad (5.17)$$

In questa parametrizzazione, la distanza Riemanniana percettiva  $ds^2 = \text{tr}(x^{-1} dx x^{-1} dx)$  (4.22) diventa :

$$ds^2 = 2 \left( \frac{d\xi}{\xi} \right)^2 + 2 \left[ \frac{(du_1)^2 + (du_2)^2}{u_2^2} \right]. \quad (5.18)$$

Consideriamo di nuovo un cambio di luminosità  $x \mapsto \lambda x$ ,  $\lambda > 0$ . L'effetto di questa trasformazione in questa parametrizzazione è:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_3 \\ \lambda x_3 & \lambda x_2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \xi \mapsto \sqrt{\det(\lambda x)} = \lambda \sqrt{\det x} = \lambda \xi, \\ u_1 \mapsto \frac{\lambda x_3}{\lambda x_2} = u_1, \\ u_2 \mapsto \frac{\lambda \xi}{\lambda x_2} = u_2, \end{cases} \quad (5.19)$$

Come nel caso precedente, anche in questa parametrizzazione la differenza di luminosità è espressa solo in termini della coordinata  $\xi$ .

Grazie a queste considerazioni, nel modello di Resnikoff si definisce la luminosità relativa tra due colori percepiti  $x, y \in \mathcal{P}$ , in coordinate (5.6) o (5.14)  $x = (\xi, u)$ ,  $y = (\eta, v)$ , come segue:

$$b(x, y) = \chi \int_{\eta}^{\xi} \frac{dt}{t} = \chi \log \frac{\xi}{\eta}, \quad (5.20)$$

dove  $\chi$  è una costante introdotta per rendere questa definizione coerente con le equazioni (5.2) e (5.3), nel caso in cui  $x$  e  $y$  siano proporzionali.

## 5.2 Superfici a luminosità costante

Le equazioni che abbiamo introdotto fino a questo punto sono state usate da Resnikoff per studiare la geometria delle superfici a luminosità costante, o superfici iso-luminose.

Sia  $c = (\gamma, v) \in \mathcal{P}$  un colore di riferimento, indichiamo con  $b(x, c)$  la luminosità di  $x = (\xi, u)$  relativamente a  $c$ . Osserviamo che, coerentemente con il formalismo introdotto finora, interpretiamo  $x$  e  $c$  come sensazioni cromatiche indotte da due stimoli luminosi immersi nello stesso sfondo uniforme (fissato in precedenza).

Nel caso di  $\mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , la luminosità relativa a  $c$  di  $x$  è data da:

$$b(x, c) = \chi \log \frac{\xi}{\gamma}, \quad \chi \in \mathbb{R} \text{ costante}, \quad (5.21)$$

quindi la superficie a luminosità costante  $\beta$  è l'insieme di tutti gli  $x \in \mathcal{P}$  tali che  $b(x, c) = \beta$ , ovvero, nella parametrizzazione (5.6),

$$\chi \log \left( \frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{3}} = \beta \iff x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} = \gamma e^{\frac{3\beta}{\chi}} = \text{costante}. \quad (5.22)$$

Queste sono le stesse superfici a luminosità costante trovate da Stiles, che sono isomorfe a  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , in accordo con il fatto che  $\mathcal{P}_1$  è in effetti lo spazio colorimetrico standard.

Risultati più interessanti arrivano invece considerando il secondo caso:  $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^+ \times \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ , con la parametrizzazione (5.14). Qui le superfici a luminosità costante sono date da:

$$\chi \log \frac{\det x^{1/2}}{\gamma} = \beta \iff \det x = \gamma^2 e^{\frac{2\beta}{\chi}} = \text{costante}. \quad (5.23)$$

Dal momento che  $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix}$ , il determinante di  $x$  è  $\det x = x_1 x_2 - x_3^2$  e quindi le superfici a luminosità costante per  $\mathcal{P}_2$  sono gli iperboloidi di equazione  $x_1 x_2 - x_3^2 = \text{costante}$ .

### 5.3 Dipendenza della luminosità dal colore

In questo paragrafo  $\beta$  (la luminosità relativa a  $c$ ) non sarà più considerata costante, ma una funzione del colore  $x$ :

$$\beta(x) = \begin{cases} \chi \log \left( \frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{3}}, & \text{per } x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; \\ \chi \log \frac{\det x^{1/2}}{\gamma}, & \text{per } x \in \mathbb{R}^+ \times \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2). \end{cases} \quad (5.24)$$

Scegliendo per ognuno dei due casi come colore di riferimento un  $c = (\gamma, v)$  appropriato, otteniamo:

$$\beta(x) = \begin{cases} \log (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3})^{\frac{1}{3}}, & \text{per } x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; \\ \log \det x, & \text{per } x \in \mathbb{R}^+ \times \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2). \end{cases} \quad (5.25)$$

Nel seguito del paragrafo consideriamo solo il secondo caso, per vedere come varia la luminosità di un colore percepito sotto cambiamenti di background.

Consideriamo allora  $x \in \mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^+ \times \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ .

$$\beta(x) = \log \det x \iff e^{\beta(x)} = \det x. \quad (5.26)$$

Essendo  $x \in \mathcal{P}$  una matrice reale  $2 \times 2$  definita positiva e simmetrica, può essere diagonalizzata ottenendo una matrice con due autovalori positivi sulla diagonale e possiamo inoltre considerare la radice quadrata principale  $x^{1/2} \in \mathcal{P}$  di  $x$ , cioè l'unica matrice reale  $2 \times 2$  definita positiva e simmetrica tale che  $x^{1/2}x^{1/2} = x$ . Tale  $x^{1/2}$  è invertibile e denotiamo la sua inversa con  $x^{-1/2}$ .

Se consideriamo un qualsiasi altro  $y \in \mathcal{P}$ , indicando con  $\mathbb{1}$  la matrice identità  $2 \times 2$ , si ha:

$$\begin{aligned} x + y &= x^{1/2}x^{1/2} + \mathbb{1}y\mathbb{1} = x^{1/2}x^{1/2} + x^{1/2}x^{-1/2}yx^{1/2}x^{-1/2} = \\ &= x^{1/2} [\mathbb{1} + x^{-1/2}yx^{-1/2}] x^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

quindi, usando la (5.26) otteniamo:

$$\begin{aligned} e^{\beta(x+y)} &= \det(x + y) = \det(x^{1/2} [\mathbb{1} + x^{-1/2}yx^{-1/2}] x^{1/2}) = \\ &= \det(x^{1/2}) \det(\mathbb{1} + x^{-1/2}yx^{-1/2}) \det(x^{1/2}) = \\ &= \det(x^{1/2}x^{1/2}) \det(\mathbb{1} + x^{-1/2}yx^{-1/2}) = \\ &= \det x \det(\mathbb{1} + x^{-1/2}yx^{-1/2}). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Essendo  $x^{-1/2}yx^{-1/2}$  simmetrica e definita positiva, i suoi autovalori  $\lambda_1, \lambda_2$  sono positivi, inoltre il determinante è invariante per cambi di base, quindi possiamo considerare una base in cui  $x^{-1/2}yx^{-1/2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . Allora:

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{1} + x^{-1/2}yx^{-1/2}) &= \det \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \\ &= 1 + (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 = \\ &= 1 + \text{tr}(x^{-1/2}yx^{-1/2}) + \det(x^{-1/2}yx^{-1/2}). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Grazie alla proprietà ciclica della traccia e al teorema di Binet, otteniamo:

$$\begin{aligned}
e^{\beta(x+y)} &= \det x \left( 1 + \operatorname{tr} (x^{-1/2} y x^{-1/2}) + \det (x^{-1/2} y x^{-1/2}) \right) = \\
&= \det x \left( 1 + \operatorname{tr} (x^{-1/2} x^{-1/2} y) + \det (x^{-1/2}) \det (x^{-1/2}) \det(y) \right) = \\
&= \det x \left( 1 + \operatorname{tr} (x^{-1} y) + \det (x^{-1}) \det(y) \right) = \\
&= \det x \left( 1 + \operatorname{tr} (x^{-1} y) + \frac{\det(y)}{\det x} \right) = \\
&= \det x \left( \frac{1}{\det(y)} + \frac{\operatorname{tr}(x^{-1} y)}{\det(y)} + \frac{1}{\det x} \right) \det(y) = \\
&= e^{\beta(x)} \left( \frac{1}{\det(y)} + \frac{1}{\det x} + \frac{\operatorname{tr}(x^{-1} y)}{\det(y)} \right) e^{\beta(y)}.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Infine, prendendo il logaritmo da entrambi i lati dell'uguaglianza, otteniamo:

$$\beta(x+y) = \beta(x) + \beta(y) + \log \left( \frac{1}{\det(y)} + \frac{1}{\det x} + \frac{\operatorname{tr}(x^{-1} y)}{\det(y)} \right). \tag{5.31}$$

Si può dimostrare che ogni trasformazione in  $\operatorname{GL}(\mathcal{P})$  può essere scritta come la composizione di trasformazioni della forma  $B_a(x) = a^{1/2} x a^{1/2}$ , per opportuni  $a \in \mathcal{P}$ , quindi usando nuovamente il teorema di Binet, si ha che  $\det (a^{1/2} x a^{1/2}) = \det(a) \det x$ , perciò:

$$\beta(B_a(x)) = \beta(a^{1/2} x a^{1/2}) = \log (\det(a)) + \log (\det x), \tag{5.32}$$

ovvero:

$$\beta(B_a(x)) = \beta(a) + \beta(x). \tag{5.33}$$

Questo mostra che sotto cambiamenti di background, la luminosità di  $x$  relativamente a un colore standard  $c$  (visto rispetto allo stesso background) varia di una costante additiva che dipende soltanto dal cambiamento di background e non dal colore  $x$ .



# Capitolo 6

## Algebre di Jordan e percezione del colore

Come mostrato dallo stesso Resnikoff in [18], lo spazio dei colori percepiti  $\mathcal{P}$  può essere considerato (in entrambe le sue realizzazioni  $\mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  e  $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^+ \times \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ ) come il cono degli elementi positivi di un'algebra di Jordan formalmente reale di dimensione 3.

Sia infatti  $\mathcal{A}$  una tale algebra; grazie al teorema di classificazione 3.2.1,  $\mathcal{A}$  non può che essere lo spin factor  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$  o lo spazio delle matrici reali simmetriche  $\mathfrak{H}(2, \mathbb{R})$  (tra loro isomorfi) e i coni degli elementi positivi di queste due algebre di Jordan sono rispettivamente proprio  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  e  $\mathfrak{H}^+(2, \mathbb{R})$ , che è lo spazio delle matrici  $2 \times 2$  simmetriche definite positive, cioè proprio  $\mathbb{R}^+ \times \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ .

### 6.1 Luminosità

Nel capitolo precedente, si è giunti alla definizione della luminosità  $\beta$  relativa ad un colore di riferimento  $c$  in un modo piuttosto articolato basandoci, in entrambi i casi ( $\mathcal{P}_1$  o  $\mathcal{P}_2$ ), sulla struttura di varietà differenziabile dello spazio  $\mathcal{P}$ , fino a mostrare l'importante relazione (5.33).

$$\beta(B_a(x)) = \beta(a) + \beta(x). \quad (6.1)$$

Quest'ultima è nota anche come *legge di Abney*, che afferma che la luminosità totale di una mescolanza di colori è pari alla somma delle luminosità

dei colori mescolati<sup>1</sup>.

Resnikoff, nel suo articolo [18], mostra che è possibile anche ricavare una definizione esplicita di  $\beta$  in modo più rapido, partendo da un nuovo assioma che impone la validità della (5.33) e utilizzando la stretta relazione che c'è tra spazio dei colori percepiti e algebre di Jordan.

In questo nuovo contesto la relazione (5.33) è equivalente a

$$\beta(P(a^{1/2})x) = \beta(a) + \beta(x), \quad (6.2)$$

infatti, ricordando la (3.18), la trasformazione  $B_a$  definita nel capitolo precedente può essere intesa come la rappresentazione quadratica di  $a^{1/2}$ . Quest'ultimo è ben definito dal momento che  $a$  è un elemento del cono degli elementi positivi di una AJFR e questo, come visto nell'osservazione 3.20, è l'interno dell'insieme dei quadrati.

Consideriamo ora una versione (apparentemente) più debole della (6.2):

**Assioma 7.** La luminosità  $\beta(x)$  di un colore percepito  $x \in \mathcal{P} = \exp \mathcal{A}$  relativa all'unità  $c \in \mathcal{A}$  è una funzione differenziabile tale che:

$$\beta(P(a^{1/2})x) = \beta(x) + \chi(a), \quad (6.3)$$

dove  $\chi(a)$  dipende solo dal cambiamento dell'illuminazione di background.

Osserviamo che se  $x = c$  si deve avere  $\beta(x) = 0$ , dal momento che  $c$  è il riferimento standard della luminosità. Ricordiamo inoltre la relazione (3.9): essendo  $c$  l'unità di  $\mathcal{A}$ , si ha che  $P(a^{1/2})c = a$ . Alla luce di queste semplici osservazioni possiamo notare che in realtà la (6.3) dell'assioma 7 è equivalente alla (6.2), infatti:

$$\beta(a) = \beta(P(a^{1/2})c) = \beta(c) + \chi(a) = \chi(a). \quad (6.4)$$

A questo punto, prima di ottenere una definizione esplicita della luminosità  $\beta(x)$ , introduciamo intanto la funzione  $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto e^{\beta(x)}$ . Le relazioni (6.2) e (6.3) sono equivalenti a

$$\phi(P(a^{1/2})x) = \phi(a)\phi(x), \quad (6.5)$$

---

<sup>1</sup>Possiamo infatti considerare il cambiamento di luce di background  $a$  per un certo colore  $x$  come la mescolanza dei due colori  $x$  e  $a$

infatti:

$$\phi(P(a^{1/2})x) = e^{\beta(P(a^{1/2})x)} = e^{\beta(a)+\beta(x)} = \phi(a)\phi(x).$$

Definiamo inoltre la funzione  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \alpha \mapsto \phi(\alpha c) = e^{\beta(\alpha c)}$ . Allora dati  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ , ricordando che  $c^2 = c$ , si ha:

$$\begin{aligned} h(\alpha_1\alpha_2) &= \phi(\alpha_1\alpha_2c) = \phi(\alpha_1c\alpha_2) = \phi(P(\alpha_1^{1/2}c)\alpha_2c) = \\ &= \phi(\alpha_1c)\phi(\alpha_2c) = h(\alpha_1)h(\alpha_2). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Dunque  $h$  è una funzione da  $\mathbb{R}^+$  a  $\mathbb{R}^+$ , differenziabile (perché lo è  $\beta$  per ipotesi) e tale che  $h(\alpha_1\alpha_2) = h(\alpha_1)h(\alpha_2)$ . Questo implica che  $h$  è della forma  $h(\alpha) = \alpha^\lambda$ , per qualche  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Infatti derivando  $h(\alpha_1\alpha_2)$  rispetto ad  $\alpha_2$  otteniamo:

$$\begin{aligned} \alpha_1 h'(\alpha_1\alpha_2) &= \alpha_1 \lim_{d \rightarrow 0} \frac{h(\alpha_1\alpha_2 + d) - h(\alpha_1\alpha_2)}{d} = \\ &= \alpha_1 \frac{h(\alpha_1)}{\alpha_1} \lim_{d \rightarrow 0} \frac{h(\alpha_2 + \frac{d}{\alpha_1}) - h(\alpha_2)}{\frac{d}{\alpha_1}} = h(\alpha_1)h'(\alpha_2). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Calcolando questa derivata in  $\alpha_2 = 1$ , la relazione appena trovata diventa<sup>2</sup>:

$$\alpha h'(\alpha) = h(\alpha)h'(1) \quad (6.8)$$

e dunque, indicando  $\lambda = h'(1) \in \mathbb{R}$ , otteniamo:

$$\int \frac{h'(\alpha)}{h(\alpha)} d\alpha = \lambda \int \frac{1}{\alpha} d\alpha \quad \Rightarrow \quad \log |h(\alpha)| = \lambda \log |\alpha| + C. \quad (6.9)$$

Sia ora  $A := e^C$ ; poiché  $\alpha, h(\alpha) \in \mathbb{R}^+$ , otteniamo  $h(\alpha) = A\alpha^\lambda$ . Infine utilizzando la relazione  $h(\alpha_1\alpha_2) = h(\alpha_1)h(\alpha_2)$  si hanno due sole possibilità per  $A$ :  $A = 0$ , ma allora  $h(\alpha) = \phi(\alpha c) = e^{\beta(\alpha c)}$  sarebbe identicamente nulla e non è possibile; oppure  $A = 1$ , cioè:

$$h(\alpha) = \alpha^\lambda. \quad (6.10)$$

A questo punto consideriamo  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  e  $x \in \mathcal{P}$  tale che  $x = \gamma c$  con  $\gamma \in \mathbb{R}$ , allora:

$$\phi(\alpha x) = \phi(\alpha\gamma c) = \phi(\alpha c)\phi(\gamma c) = h(\alpha)\phi(x) = \alpha^\lambda\phi(x); \quad (6.11)$$

<sup>2</sup>Scriviamo  $\alpha_1 = \alpha$  per semplicità di notazione

cioè  $\phi$  è una funzione omogenea di grado  $\lambda$ . Inoltre osserviamo che la (6.5) implica che per ogni  $a, x \in \mathcal{P}$ , si ha  $\phi(ax) = \phi(a)\phi(x)$ , infatti, se  $x = \gamma c$ , con  $\gamma \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}\phi(ax) &\stackrel{(3.9)}{=} \phi(P(a^{1/2})c\gamma c) = \phi(P(a^{1/2})\gamma c^2) \stackrel{c^2=c}{=} \\ &= \phi(P(a^{1/2})x) = \phi(a)\phi(x).\end{aligned}$$

Dunque  $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^+$  è una funzione differenziabile (perché lo è  $\beta$ ) e tale che  $\phi(ax) = \phi(a)\phi(x)$ : possiamo quindi applicare il seguente teorema (dimostrato da Koecher in [12] a partire da pagina 20):

**Teorema 6.1.** *Sia  $X$  lo spazio delle matrici reali  $n \times n$  e  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile tale che:*

- i)  $\phi(x) > 0$  per ogni  $x \in X$  con  $\det x \neq 0$ ,*
- ii)  $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$  per qualsiasi  $x, y \in X$ .*

*Allora  $\phi$  è della forma  $\phi(x) = \det x^\lambda$  per qualche  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

Quindi per  $\mathcal{P} = \mathfrak{H}^+(2, \mathbb{R})$  otteniamo:

$$\phi(x) = (\det x)^{\frac{\lambda}{2}}. \quad (6.12)$$

Nel caso  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , invece,  $\phi$  è una funzione differenziabile omogenea a variabili reali e, facendo un ragionamento simile a quello fatto per  $h$ , otteniamo:

$$\phi(x) = |x^\alpha|^\lambda = (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3})^\lambda. \quad (6.13)$$

Infine, ricordando la definizione di  $\phi$ , otteniamo le seguenti espressioni per la luminosità  $\beta(x)$ :

$$\beta(x) = \begin{cases} \lambda \log(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}), & \text{per } x = (x_1, x_2, x_3) \in \exp \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2, \\ \frac{\lambda}{2} \log(\det x), & \text{per } x \in \exp \mathfrak{H}(2, \mathbb{R}). \end{cases} \quad (6.14)$$

Come ci si aspetta, queste espressioni corrispondono proprio a quelle ottenute nel capitolo precedente in (5.25), riscalate di un fattore moltiplicativo,  $\lambda/2$  nel primo caso e  $\lambda$  nel secondo.

## 6.2 Tonalità e saturazione

Come visto all'inizio di questo capitolo, il cono dei colori percepiti  $\mathcal{P}$  può essere considerato come l'esponenziale delle due algebre di Jordan formalmente reali  $\mathcal{A}_1 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$  e  $\mathcal{A}_2 = \mathfrak{H}(2, \mathbb{R})$ . Analizziamo separatamente queste due possibili configurazioni per definire matematicamente i concetti di tonalità e saturazione per un colore percepito  $x$ , relativamente ad un colore standard  $c$ .

### 6.2.1 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Abbiamo visto precedentemente che la metrica su  $\mathcal{P}_1 = \exp \mathcal{A}_1$  è data dalla (4.18):  $ds^2 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i (dx_i/x_i)^2$ . Possiamo supporre (per semplicità) di avere  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ , e dunque la (4.18) è:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{dx_i}{x_i} \right)^2. \quad (6.15)$$

Ora, essendo  $\exp : \mathcal{A}_1 \rightarrow \exp \mathcal{A}_1, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_3})$  una mappa biiettiva, possiamo considerarne l'inversa:

$$\begin{aligned} \log : \exp \mathcal{A}_1 &\longrightarrow \mathcal{A}_1 \\ (v_1, v_2, v_3) &\mapsto (\log v_1, \log v_2, \log v_3). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Quindi la metrica indotta su  $\mathcal{A}_1 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3$  dalla (6.15) è proprio la metrica euclidea.

Consideriamo inoltre la seguente norma ridotta su  $\exp \mathcal{A}_1$ :

$$|x| := x_1 x_2 x_3, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \exp \mathcal{A}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \quad (6.17)$$

e definiamo il seguente sottoinsieme di  $\exp \mathcal{A}_1$ :

$$\mathcal{N} := \{x \in \exp \mathcal{A}_1 : |x| = x_1 x_2 x_3 = 1\}. \quad (6.18)$$

Si osservi che  $\mathcal{N}$  è la superficie a luminosità costante che contiene l'unità  $c = (1, 1, 1)$  e chiaramente si ha che  $\exp \mathcal{A}_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{N}$ .

Definiamo ora il seguente sottoinsieme di  $\mathcal{A}_1$ :

$$\begin{aligned} \log \mathcal{N} &:= \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{A}_1 : |\exp v| = e^{v_1} e^{v_2} e^{v_3} = 1\} = \\ &= \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{A}_1 : v_1 + v_2 + v_3 = 0\}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Osserviamo che  $\log \mathcal{N}$  è in effetti il piano euclideo, infatti dal momento che  $c \in \mathcal{N}$  e  $\log c = (0, 0, 0)$ ,  $\log \mathcal{N}$  è un'ipersuperficie di  $\mathcal{A}_1 \simeq \mathbb{R}^3$  contenente  $0 \in \mathbb{R}^3$  e la restrizione a  $\log \mathcal{N}$  del pull-back della metrica su  $\mathcal{A}_1$  (6.15) è la metrica euclidea. Questo implica che  $\mathcal{N}$  stesso è isometrico (tramite l'isometria  $\log$ ) al piano euclideo.

Sia  $x \in \mathcal{P}_1 = \exp \mathcal{A}_1$ , come abbiamo già visto nel capitolo 5,  $x$  può essere rappresentato in modo unico come  $x = (\xi, u)$  con  $\xi \in \mathbb{R}^+$  e  $u \in \mathcal{N}$ . Tramite l'isometria  $\log$ , mandiamo  $u \in \mathcal{N}$  in  $\log u \in \log \mathcal{N} \simeq \mathbb{R}^2$  e definiamo per  $\log u$  le coordinate polari  $(r, \theta)$ :  $r \geq 0$  è la distanza tra  $u$  e  $(0, 0)^3$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  è l'angolo tra  $u$  e  $(0, 0)$ . Così facendo le coordinate per  $u \in \mathcal{N}$  saranno  $(e^r, e^\theta)$  e diciamo che  $r$  e  $\theta$  sono rispettivamente la saturazione e la tonalità del colore  $x = (\xi, u)$  relativamente a  $c$ .

### 6.2.2 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})/\mathbf{SO}(2)$

Il ragionamento in questo caso è molto simile: la norma ridotta definita su  $\exp \mathcal{A}_2 = \exp \mathfrak{H}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{H}^+(2, \mathbb{R})$  è

$$|x| = \det x = x_1 x_2 - x_3^2, \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \in \exp \mathcal{A}_2 = \mathfrak{H}^+(2, \mathbb{R}). \quad (6.20)$$

Come prima definiamo l'insieme  $\mathcal{N}$  che corrisponde alla superficie a luminosità costante contenente l'unità  $c = \mathbb{1}$  e tale che  $\exp \mathcal{A}_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{N}$ :

$$\mathcal{N} = \{x \in \exp \mathcal{A}_2 : \det(x) = x_1 x_2 - x_3^2 = 1\}. \quad (6.21)$$

Come abbiamo visto per ogni superficie a luminosità costante di  $\mathcal{P}_2$  (paragrafo 5.2),  $\mathcal{N}$  può essere considerato come un iperboloide bidimensionale immerso in  $\mathbb{R}^3$  con la metrica indotta da  $\mathbb{R}^3$ . Questo è isometrico al semipiano superiore  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$ , dotato della metrica di Poincaré  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ , a sua volta isometrico<sup>4</sup> al disco unitario  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ , con la metrica  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ .

<sup>3</sup>cioè la proiezione sul piano di  $(0, 0, 0) = \log c$ .

<sup>4</sup>Se consideriamo  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ , allora il semipiano superiore è  $\{w = x + iy : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$  il disco è  $\{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} < 1\}$  e l'isometria cercata è  $w \mapsto \frac{w-i}{w+i} = z$ .

Di nuovo,  $x \in \mathcal{P}_2 = \exp \mathcal{A}_2$  può essere rappresentato in modo unico come  $x = (\xi, u)$  con  $\xi \in \mathbb{R}^+$  e  $u \in \mathcal{N}$ . Essendo  $\mathcal{N}$  isometrico a  $\mathcal{D}$ , è possibile, analogamente al caso precedente, definire tramite le coordinate polari  $(r, \theta)$  su  $\mathcal{D}$  delle coordinate  $u(r, \theta) = (u_1(r), u_2(\theta))$  su  $\mathcal{N}$ . Come prima  $r$  e  $\theta$  rappresentano la saturazione e la tonalità di  $x = (\xi, u(r, \theta))$  relativamente all'unità  $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

## 6.3 Cenni di analisi delle scene visive

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto come definire le caratteristiche di uno specifico colore in uno sfondo uniforme. Vediamo adesso come è possibile ricavare delle informazioni sulla luce percepita da un osservatore, in una scena visiva  $S$  generica.

Consideriamo per semplicità che in  $S$  ci sia un numero finito di luci percepite distinte  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{P}$  (è il caso, per esempio, di un'immagine digitale composta da pixel) e per ognuna di esse consideriamo la quantità  $\mu_k \in [0, 1]$  che rappresenta il rapporto tra la porzione di immagine occupata dalla luce  $x_k$  e la scena totale. Chiaramente si dovrà avere  $\sum_{k=1}^n \mu_k = 1$ . Denotiamo infine con  $d(x, y)$  la distanza tra i colori percepiti  $x$  e  $y$  in una metrica invariante rispetto a  $GL(\mathcal{P})$ . Possiamo a questo punto definire il colore medio  $\bar{x}(S)$  della scena visiva  $S$  come quell'elemento di  $\mathcal{P}$  che rende minima la seguente quantità:

$$\sum_{k=1}^n \mu_k d(x_k, x)^2 \quad (6.22)$$

(Se  $\mathcal{P}$  fosse lo spazio Euclideo e  $d$  la metrica Euclidea, allora  $\bar{x}(S)$  potrebbe essere considerato come il centro di massa della distribuzione dei punti materiali  $x_k$ , ognuno con massa  $\mu_k$ ).

Definire questo colore medio  $\bar{x}(S)$  è di grande importanza, poiché l'adattamento cromatico (descritto nel paragrafo 1.3) risulta proprio dipendere da esso: Resnikoff, infatti, afferma in [18] che l'osservatore considera  $\bar{x}(S)$  come una sorta di "bianco standard" e formula il seguente assioma:

**Assioma 8.** Se  $S$  è una scena visiva generica, allora  $\bar{x}(S)$  definito come in (6.22) è percepito come luce bianca.

Questo assioma risulta molto importante alla luce di quanto visto fin'ora: è possibile infatti identificare  $\bar{x}(S)$  con l'unità  $c$  dell'algebra di Jordan  $\mathcal{A}$  associata allo spazio dei colori percepiti  $\mathcal{P}$  e questo consente all'osservatore di classificare i colori della scena visiva secondo la loro luminosità, tonalità e saturazione, che sono, appunto, caratteristiche non assolute, ma definite relativamente all'unità  $c$  di  $\mathcal{A}$ .

### 6.3.1 Un'interpretazione alternativa

Abbiamo visto che Resnikoff, facendo riferimento ad un articolo di Land e McCann del 1971 [14], considera  $\bar{x}(S)$  come un bianco. In questo articolo, infatti, è descritto un algoritmo (detto *white-patch*) che permette di stimare l'informazione sull'illuminante (supposto uniforme) in una scena visiva, e rimuoverla dall'immagine ottenuta fotografando la scena.

Vediamo brevemente in cosa consiste questo algoritmo, descritto in [14] e in [17].

Consideriamo una scena visiva  $S$ , rappresentata da un'immagine digitale  $RGB$ , ovvero con tre strati sovrapposti d'intensità corrispondente al rosso (Red), verde (Green) e blu (Blue). L'immagine è composta da un numero finito di punti (pixel) ed ogni pixel rappresenta un elemento della scena visiva di posizione  $x$ . Sia  $I(x)$  l'intensità di  $x$  in un arbitrario, ma fissato, canale cromatico  $R$ ,  $G$  o  $B$ .  $I(x)$  dipenderà direttamente sia dall'illuminante (omogeneo e isotropo) presente nell'immagine, sia dalla sua capacità di riflettere la luce, cioè dalla sua *riflettanza* (proprietà intrinseca del colore). Possiamo scrivere dunque:

$$\forall x \in S, \quad I(x) = \lambda \rho(x), \quad (6.23)$$

dove  $\lambda \in \mathbb{R}$  rappresenta l'illuminante, mentre  $\rho(x)$  ha valori in  $[0, 1]$  e rappresenta la riflettanza di  $x$  (il bianco, che riflette tutta la luce, avrà riflettanza pari a 1, mentre il nero, che non riflette affatto, avrà riflettanza pari a 0).

Consideriamo valida la seguente assunzione:

*In ogni scena visiva  $S$  esiste almeno un  $\bar{x} \in S$  tale che  $\rho(\bar{x}) = 1$ .*

Questo significa che in ogni immagine esiste sempre un punto (un pixel)  $\bar{x}$  bianco<sup>5</sup>. Allora  $\bar{x}$  sarà il punto di intensità massima della scena (infatti per

---

<sup>5</sup>In realtà questo non è sempre vero, si pensi infatti ad una fotografia ravvicinata di un oggetto colorato in cui non è presente il bianco. Comunque possiamo considerare questa assunzione valida per scene visive più ampie e "naturali".

ogni altro  $x \in S$ ,  $\rho(x) \leq \rho(\bar{x}) = 1$ ), inoltre:

$$I(\bar{x}) = \lambda \rho(\bar{x}) = \lambda, \quad (6.24)$$

cioè il punto più luminoso dell'immagine rappresenta proprio l'illuminante  $\lambda$ . Allora per ogni punto  $x$  della scena  $S$  è possibile ricavare la sua riflettanza, semplicemente dividendo la sua intensità per quella massima:

$$\forall x \in S, \quad \rho(x) = \frac{I(x)}{I_{\max}}. \quad (6.25)$$

Osserviamo dunque che l'assioma 8 di Resnikoff in [18] riprende l'assunzione fatta in questo modello, con la differenza che per Land e McCann il bianco è rappresentato dal punto più luminoso della scena  $S$ , mentre per Resnikoff il bianco è rappresentato da una media pesata di tutti i colori di  $S$ .

Oggi, questa differenza ci porta ad interpretare il colore di riferimento di Resnikoff come un grigio anziché un bianco. Infatti, sei anni dopo la pubblicazione dell'articolo [18], nel 1980 Buchsbaum pubblicò un articolo [6] in cui descrive un algoritmo diverso (*gray-world*) per rimuovere l'illuminante dall'intensità del colore di un punto di una scena visiva.

Nello stesso contesto del caso precedente, l'assunzione<sup>6</sup> fatta è differente:

*In ogni scena visiva  $S$  la media della riflettanza è pari a  $1/2$ , cioè è la riflettanza del grigio medio:*

$$\frac{1}{|S|} \sum_{x \in S} \rho(x) = \frac{1}{2}, \quad (6.26)$$

dove  $|S|$  è la misura dell'immagine, ovvero il numero dei suoi pixel.

Con questa ipotesi notiamo che la media aritmetica delle intensità di tutti i punti dell'immagine è:

$$\bar{I} = \frac{1}{|S|} \sum_{x \in S} I(x) = \frac{1}{|S|} \sum_{x \in S} \lambda \rho(x) = \frac{\lambda}{2}. \quad (6.27)$$

---

<sup>6</sup>Anche questa non è sempre vera, ma, per lo stesso motivo di prima, possiamo considerarla valida per la maggior parte delle scene naturali.

Perciò in questo modello l'illuminante  $\lambda$  è rappresentato dal doppio dell'intensità media della scena e quindi la riflettanza sarà data da:

$$\forall x \in S, \quad \rho(x) = \frac{I(x)}{2\bar{I}}. \quad (6.28)$$

Possiamo concludere quindi che il ragionamento di Resnikoff porta alla definizione del grigio medio come colore di riferimento per l'osservatore, dal quale è possibile ricavare le informazioni su luminosità, tonalità e saturazione per ogni altro punto di una scena visiva nei modi descritti nei paragrafi precedenti.

# Bibliografia

- [1] ANDERSON, J. W.: *Hyperbolic Geometry*, Springer, 2005.
- [2] BAEZ, J.: *Division Algebras and Quantum Theory*, Foundations of Physics 42. 10.1007/s10701-011-9566-z., 2011.
- [3] BAEZ, J.: *The Octonions*, Bulletin of the American Mathematical Society. 39. 10.1090/S0273-0979-01-00934-X., 2001.
- [4] BERTHIER, M.: *Geometry of color perception. Part 2: Perceived colors from real quantum states and Hering's rebit*, inviato alla rivista Journal of Mathematical Neuroscience. Preprint disponibile alla pagina: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02342456/document>
- [5] BRAUN, H., KOECHER, M.: *Jordan-Algebren*, Springer-Verlag, 1966.
- [6] BUCHSBAUM, G.: *A Spatial Processor Model for Object Colour Perception*, Journal of The Franklin Institute, Pergamon Press, vol. 310, no. 1, 1980.
- [7] CHIARUGI, G., BUCCIANTE, L.: *Istituzioni di anatomia dell'uomo. Vol. 5*, Casa Editrice dr. Francesco Vallardi, 1977.
- [8] DOUBROV, B., KOMRAKOV, B.: *Low-Dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces*, Preprint Univ. Oslo, 1995
- [9] FAIRCHILD, M. D.: *Color Appearance Models*, John Wiley and Sons, Ltd.  
URL: [http://last.hit.bme.hu/download/firtha/video/Colorimetry/Fairchild.M.\\_Color\\_appearance\\_models\\_2005.pdf](http://last.hit.bme.hu/download/firtha/video/Colorimetry/Fairchild.M._Color_appearance_models_2005.pdf)
- [10] FARAUT, J., KORÁNYI, A.: *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford University Press, USA, 1995.

- 
- [11] JORDAN, P., VON NEUMANN, J., WIGNER, E.: *On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism*, Annals of Mathematics, Vol. 35, pp. 29-64, 1934.  
URL: <https://www.jstor.org/stable/1968117>
- [12] KOECHER, M.: *The Minnesota Notes on Jordan Algebras and Their Applications*, Springer, 1999.
- [13] KOMRAKOV, B., CHURYUMOV, A., DOUBROV, B.: *Two-dimensional homogeneous spaces*, Preprint Univ. Oslo, no. 17, 1993
- [14] LAND, E. H., MCCANN, J. J.: *Lightness and Retinex Theory*, Journal of the Optical Society of America, vol. 61, no. 1, 1971.
- [15] MCCRIMMON, K.: *A Taste of Jordan Algebras*, Springer, 2004.
- [16] PROVENZI, E.: *Geometry of color perception. Part 1: Structures and metrics for a homogeneous space of perceived colors*, inviato alla rivista Journal of Mathematical Neuroscience. Preprint disponibile alla pagina: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02336556/document>
- [17] PROVENZI, E., DE CARLI, L., RIZZI, A., MARINI, D.: *Mathematical definition and analysis of the Retinex algorithm*, Journal of the Optical Society of America, vol. 22, no. 1, 2005.
- [18] RESNIKOFF, H. L.: *Differential geometry and color perception*, Journal of Mathematical Biology 1, 1974, pp. 97-131.
- [19] WARNER, F. W.: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Glenview, III: Scott, Foresman, 1971.