Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Corso di Laurea in Matematica

Gruppi di omotopia di ordine superiore

Relatore:

prof.ssa Alessandra Bertapelle

Laureando:

Jacopo De Pieri

Matricola N. 1177429

Anno Accademico 2021/2022 , Sessione di Laurea: 16/12/2022

Indice

Introduzione

La topologia algebrica nasce alla fine dell'Ottocento e lo scopo di tale branca della matematica è di studiare gli invarianti topologici e le problematiche ad essi correlati. Con invariante topologico si intende una proprietà di uno spazio topologico che vale per tutti gli spazi topologici ad esso omeomorfi. Uno dei primi invarianti topologici è il gruppo fondamentale, introdotto da Henri Poincaré nel 1895. Quasi quarant'anni dopo nasce la teoria dell'omotopia, la quale studia i gruppi di omotopia. Tali gruppi sono gli analoghi del gruppo fondamentale in dimensioni superiori. Fondamentale per questi gruppi è il concetto di omotopia, la quale permette di portare in modo "liscio" una funzione continua in un'altra, ovvero permette di spostare funzioni in modo continuo nello spazio topologico in esame, scoprendone alcune caratteristiche. Uno dei problemi legati ai gruppi di omotopia è il loro calcolo e tutt'ora sono oggetto di ricerca. Questo problema nasce dal fatto che per i gruppi di omotopia non vale un analogo del teorema di Seifert-van Kampen utile per il calcolo del gruppo fondamentale in quanto i gruppi di omotopia di ordine superiore al primo sono abeliani. Nonostante questa difficoltà non banale, ci sono risultati importanti che permettono di scoprire proprietà interessanti di uno spazio topologico ed altri che permettono il calcolo di alcuni gruppi di omotopia in alcuni casi.

In questa tesi vedremo la definizione di gruppo di omotopia e alcune sue proprietà, lasciandoci ispirare dalla strategia usata per studiare il gruppo fondamentale nel corso di Topologia. Dopodiché andremo a ricavare un importante risultato teorico sui gruppi di omotopia, mediante il teorema di Whitehead, che collega equivalenza omotopica e spazi con gruppi di omotopia isomorfi. Da tale risultato nasceranno i cosiddetti spazi di Eilenburg – MacLane, che non tratteremo in questo testo, i quali sono fondamentali in topologia algebrica. Un altro risultato importante che andremo ad analizzare è che, grazie al teorema di sospensione di Freudenthal, per un certo intervallo di indici i gruppi di omotopia sono prevedibili.

In particolare:

- Nel Capitolo 1 andremo a definire i gruppi di omotopia di uno spazio topologico e alcune loro proprietà, seguendo un percorso analogo a quello fatto per il gruppo fondamentale;

- Nel Capitolo 2 introdurremo i complessi di celle e capiremo perché essi siano particolarmente importanti all'interno della teoria dell'omotopia;
- Nel Capitolo 3 analizzeremo il teorema di Whitehead, il quale fornirà quando vale il "viceversa" di una determinata proposizione che troveremo già nel Capitolo 1;
- Nel Capitolo 4 analizzeremo alcuni risultati non banali sulla stabilità dei gruppi di omotopia.

Capitolo 1

Gruppi di Omotopia

1.1 Definizioni e concetti preliminari

Iniziamo presentando alcune definizioni e risultati preliminari che serviranno nei prossimi capitoli.

1.1 Definizione. Sia X uno spazio topologico. Definiamo **coppia di spazi** una coppia (X, A) in cui $A \subseteq X$. Dati, inoltre, uno spazio topologico Y e $B \subseteq Y$, denotiamo con $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ una funzione tale che $f(A) \subseteq B$.

Se $A = \{x_0\}$, allora la coppia di spazi $(X, \{x_0\})$ si dice **spazio puntato** e si denota con (X, x_0). Come conseguenza della definizione, definiamo funzione tra spazi puntati $f\colon X \to Y$ come una funzione continua tale che $f(x_0) = y_0$.

1.2 Definizione. Dati due spazi topologici X e Y e date due funzioni continue $f_0, f_1\colon X \to Y$, si dice **omotopia** tra f_0 e f_1 una funzione continua $H\colon X \times [0,1] \to Y$ tale che valga $H_0 = H(x, 0) = f_0(x)$ e $H_1 = H(x, 1) = f_1(x) \quad \forall x \in X$. In tal caso, denotiamo con $f_0 \sim f_1$ il fatto che le due funzioni siano omotope.

1.3 Proposizione. *Sia $\mathcal{C}(X, Y)$ l'insieme delle funzioni continue tra due spazi topologici X e Y. Allora la relazione di omotopia è una relazione di equivalenza nell'insieme $\mathcal{C}(X, Y)$.*

Dimostrazione.

> <u>Riflessività:</u> sia $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. La funzione $F\colon X \times [0,1] \to Y$ definita da $F(x,t) = f(x)$ è un'omotopia tra f ed f: infatti F è continua in quanto lo è f per ipotesi; inoltre, $F(x, 0) = F(x, 1) = f(x) \quad \forall x \in X$.

Simmetria: siano $f, g \in \mathcal{C}(X,Y)$ tali che $f \sim g$ e sia $F(x,t)$ un'omotopia tra f e g. Allora $F(x, 1-t)$ è un'omotopia tra g e f: infatti $F(x, 1-t)$ è continua perché composizione di funzioni continue e $F(x,0) = g(x)$, $F(x,1) = f(x) \quad \forall x \in X$.

Transitività: siano $f, g, h \in \mathcal{C}(X,Y)$ tali che $f \sim g$, $g \sim h$ e siano $F(x,t)$ un'omotopia tra f e g, $G(x,t)$ un'omotopia tra g e h. Allora la funzione

$H \colon X \times [0,1] \to Y$ definita da

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è un'omotopia tra f e h. Infatti H è una funzione continua e $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = G(x,1) = h(x) \quad \forall x \in X$.

Poiché la relazione di omotopia è riflessiva, simmetrica e transitiva, allora è una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathcal{C}(X,Y)$. $\square$

1.4 Definizione. Siano X, Y spazi topologici e siano $f_0, f_1 \colon X \to Y$ funzioni continue. Esse si dicono **funzioni omotope relativamente a un sottoinsieme** $A \subseteq X$, e scriveremo $f_0 \sim_A f_1$, se esiste un'omotopia F tra f_0 e f_1 tale che $F(a,t) = f_0(a) = f_1(a) \quad \forall t \in [0,1], \forall a \in A$.

1.5 Definizione. Un **sottoinsieme** A di uno spazio topologico X si dice **retratto** di X se esiste una funzione continua $r \colon X \to A$, detta **retrazione**, tale che, denotata con $\iota \colon A \hookrightarrow X$ l'inclusione, si ha $r \circ \iota = id_A$, ovvero $r(a) = a \quad \forall a \in A$.

1.6 Definizione. Un **sottoinsieme** A di uno spazio topologico X si dice **retratto per deformazione** se esiste una retrazione $r \colon X \to A$ e un'omotopia $F \colon X \times I \to X$ tale che $f(x,0) = x$, $f(x,1) = r(x)$, $f(a,t) = a \quad \forall a \in A, \forall t \in I, \forall x \in X$, ovvero $\iota \circ r \sim_A id_X$.

1.7 Definizione. Dati X e Y spazi topologici, una funzione continua $\varphi \colon X \to Y$ si dice **equivalenza omotopica** se esiste una funzione $\psi \colon Y \to X$ tale che $\psi \circ \varphi \sim id_X$, $\varphi \circ \psi \sim id_Y$. Se esiste un'equivalenza omotopica tra X e Y, essi si dicono **spazi omotopicamente equivalenti**.

D'ora in poi, salvo altrimenti detto, assumeremo che tutti gli spazi topologici siano connessi e localmente connessi per archi.

1.8 Definizione. Un **rivestimento** di uno spazio topologico X è una funzione continua e suriettiva $p \colon \tilde{X} \to X$, ove $\tilde{X}$ è uno spazio topologico, tale che per ogni $x \in X$ esiste un intorno U di x tale che:

1. $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ con U_i aperti di $\tilde{X}$;

2. $p_{|U_i} \colon U_i \to U$ è un omeomorfismo.

Ricordiamo ora la definizione di gruppo fondamentale. Nel caso di superfici reali compatte esso permette di contare i "buchi" di tali superfici.

1.9 Definizione. Sia X uno spazio topologico e sia $x_0 \in X$. Il **gruppo fondamentale** di X di punto base x_0 è l'insieme delle classi di omotopia di cammini chiusi di X (ovvero cammini in cui punto iniziale e punto finale coincidono) con punto base x_0 dotato della legge di gruppo data dal prodotto di cammini. Tale gruppo si indica con $\pi_1(X, x_0)$.

Ricordiamo che se $f \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ è una funzione continua tra spazi puntati, essa induce un omomorfismo di gruppi $f_* \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, per una delle proprietà funtoriali del gruppo fondamentale.

1.10 Lemma (Criterio di sollevamento). *Siano X uno spazio topologico, $x_0 \in X$. Siano $p \colon (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to (X, x_0)$ un rivestimento, $f \colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$. Siano $f_* \colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ e $p_* \colon \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to \pi_1(X, x_0)$ le funzioni indotte da f e p sui gruppi fondamentali. Esiste $\tilde{f} \colon (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x_0})$ tale che $p \circ \tilde{f} = f$ se e solo se $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \leq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))$.*

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, "\exists \tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

1.11 Definizione. Sia X uno spazio topologico. Un **rivestimento** $p \colon \tilde{X} \to X$ si dice **universale** se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso, ovvero se il gruppo fondamentale di $\tilde{X}$ è banale.

Fissato uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff X, consideriamo lo spazio $\mathcal{C}(X, Y)$ di tutte le funzioni continue da X a Y e lo dotiamo della topologia compatta-aperta. Tale topologia è quella che ha come prebase i sottoinsiemi $W(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) | f(K) \subseteq U\}$ al variare di K tra i compatti di X e di U tra gli aperti di Y. Definiamo l'insieme $[X, Y] = \mathcal{C}(X, Y)/\sim$ come l'insieme delle componenti connesse per archi di $\mathcal{C}(X, Y)$. Si vede facilmente che ogni omeomorfismo $Y \to Z$ induce un omeomorfismo $\mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X, Z)$ e conseguentemente una biiezione di insiemi $[X, Y] \to [X, Z]$. Richiamando il lemma seguente (la cui dimostrazione si trova nel libro di [Man14] a pgg. 165-166):

1.12 Lemma (**Legge esponenziale**)**.** *Siano X,Y,Z spazi topologici. Allora esiste una funzione naturale iniettiva* $\hat{\cdot}\colon \mathcal{C}(X \times Y, Z) \to \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$. *Inoltre:*

1. *se Y è localmente compatto di Hausdorff, allora* $\hat{\cdot}$ *è biiettiva;*
2. *se X è localmente compatto di Hausdorff, allora* $\hat{\cdot}$ *è continua;*
3. *se X,Y sono localmente compatti di Hausdorff, allora* $\hat{\cdot}$ *è un omeomorfismo.*

Ne segue che due funzioni in $\mathcal{C}(X, Y)$ appartengono alla stessa componente connessa per archi di $\mathcal{C}(X, Y)$ se e solo se sono omotope.

Più avanti, nel Capitolo 2, vedremo che il fatto di essere localmente di Hausdorff ha una rilevanza nello studio dei gruppi di omotopia di uno spazio topologico.

1.2 Gruppo di Omotopia di uno spazio

In questa sezione daremo la definizione di gruppo di omotopia di ordine n e dedurremo alcune sue proprietà.

Sia I^n l'n-**cubo** dato dal prodotto cartesiano dell'intervallo reale $I = [0, 1]$ per se stesso n volte con $n \geq 1$. Il bordo di I^n, ovvero la sua frontiera nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ di appartenenza, sarà indicato con ∂I^n ed è il sottospazio costituito dai punti che hanno almeno una coordinata uguale a 0 o a 1.

Siano (X, x_0),(Y, y_0) due spazi topologici puntati. Seguendo l'idea della sezione precedente, definiamo $[(X, x_0),(Y, y_0)] = \mathcal{C}((X, x_0),(Y, y_0))/\sim$, ove $\sim$ è la relazione di omotopia e $\mathcal{C}((X, x_0),(Y, y_0)) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) | f(x_0) = y_0\}$.

In particolare se definiamo $\mathcal{C}_n(X, x_0) = \{f \in \mathcal{C}(I^n, X) | f(\partial I^n) = x_0\}$, ovvero l'insieme delle funzioni continue di $(I^n, \partial I^n)$ in (X, x_0), allora
$\mathcal{C}_n(X, x_0)/\sim = [(I^n, \partial I^n),(X, x_0)]$.

Definiamo ora il concetto di omotopia utilizzando lo spazio $\mathcal{C}_n(X, x_0)$.

1.13 Definizione. Sia X uno spazio topologico e sia $x_0 \in X$. Se $f, g \in \mathcal{C}_n(X, x_0)$, un'**omotopia** tra f e g è un'omotopia relativa a ∂I^n, ovvero una funzione continua $F\colon I^n \times I \to X$ tale che

$$F(t_1, ..., t_n, t) = \begin{cases} f(t_1, ..., t_n) & \text{se } t = 0 \\ g(t_1, ..., t_n) & \text{se } t = 1 \\ x_0 & \text{se } (t_1, ..., t_n) \in \partial I^n \end{cases}$$

Se esiste un'omotopia di f in g, diremo che f è omotopa a g e lo indicheremo con $f \sim g$.

Osserviamo che tale definizione è stata data usando la Definizione 1.2 e il fatto che le funzioni $F_t \in \mathcal{C}_n(X, x_0)$.

Ora siamo pronti alla definizione di gruppo di omotopia di ordine n.

1.14 Definizione. Sia X uno spazio topologico e sia $x_0 \in X$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'**n-esimo gruppo di omotopia** di X è definito come l'insieme $\pi_n(X, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$.

Osservazione. Per $n = 0$, $\pi_0(X, x_0)$ è l'insieme delle componenti connesse per archi di X. Infatti si ha I^0 che è un punto e $\partial I^0 = \emptyset$, dunque $\pi_0(X, x_0)$ non dipende da x_0 e consiste nelle classi di omotopia di funzioni da un punto allo spazio X.

Per $n = 1$, $\pi_1(X, x_0)$ è il gruppo fondamentale dello spazio X, il quale è studiato in modo approfondito nei capitoli 2,3,4,5 del Massey ([Mas67]).

Affinché la definizione precedente abbia senso, dobbiamo dotare l'insieme $\pi_n(X, x_0)$ di un'operazione binaria tale che renda questo insieme un gruppo. Similmente al gruppo fondamentale, per ogni coppia di elementi $f, g \in \mathcal{C}_n(X, x_0)$ sia $+ \colon \mathcal{C}_n(X, x_0) \times \mathcal{C}_n(X, x_0) \to \mathcal{C}_n(X, x_0)$ definita da:

$$(f+g)(s_1, ..., s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, ..., s_n) & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2s_1 - 1, s_2, ..., s_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

Osserviamo che tale operazione opera su una coordinata fissata, e dunque si può dare la definizione di tale operazione usando le altre coordinate. Tale arbitrarietà ci permetterà di dedurre le prime proprietà dei gruppi di omotopia in modo naturale.

Esempio. Se $n = 1$, poiché $\partial I = \{0, 1\}$, $\mathcal{C}_1(X, x_0) = \{f \in \mathcal{C}(I, X) | f(0) = f(1) = x_0\}$. Dunque se $f, g \in \mathcal{C}_1(X, x_0)$,

$$(f+g)(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

e tale operazione coincide con la definizione di prodotto di cammini data nel capitolo 2 di [Mas67].

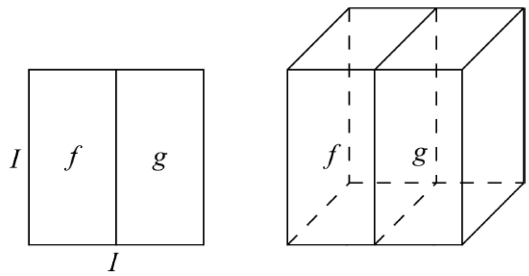
1.15 Proposizione. *Sia X uno spazio topologico e sia $x_0 \in X$. Per ogni $n \in \mathbb{N} : n \geq 1$ $(\pi_n(X, x_0), +)$ è un gruppo.*

Dimostrazione. Come è già stato osservato, poiché è coinvolta solo la prima coordinata in questa operazione, le stesse argomentazioni usate per dimostrare che $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo valgono anche in questo caso.

Si verifica facilmente che, ricordando le dimostrazioni fatte con il gruppo fondamentale con il prodotto di cappi (vedi pagg. 58-61 di [Mas67]): se $f \sim f'$, $g \sim g'$, con $f, f', g, g' \in \mathcal{C}_n(X, x_0)$, allora $f + g \sim f' + g'$. Dunque l'operazione di $\pi_n(X, x_0)$ è ben definita ponendo $[f] + [g] = [f + g]$.

L'elemento neutro dell'n-esimo gruppo di omotopia è la funzione costante che manda I^n in x_0. L'elemento inverso di $f \in \mathcal{C}_n(X, x_0)$ è dato da $-f(s_1, ..., s_n) = f(1 - s_1, ..., s_n)$. Inoltre l'operazione definita risulta essere associativa. $\square$

D'ora in poi al posto di scrivere $(\pi_n(X, x_0), +)$ scriveremo semplicemente $\pi_n(X, x_0)$. Un'illustrazione dell'operazione di gruppo nei casi $n = 2$ e $n = 3$ è riportata qui sotto:



Un punto di vista alternativo. Ricordiamo che un n-cubo I^n è omeomorfo ad una palla chiusa $\mathbb{D}^n$ con un omeomorfismo h che manda ∂I^n in $\partial \mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$. Dunque ad ogni funzione continua f di $(I, \partial I^n)$ in (X, x_0) è associata una funzione continua $\bar{f}$ di $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ in (X, x_0).

$$\begin{tikzcd}
(I^n, \partial I^n) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & (X, x_0) \\
(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Osserviamo che se $F \colon I^n \times I \to X$ è un'omotopia tra f e g relativa a ∂I^n, la funzione $F \circ (h^{-1} \times id_I) \colon \mathbb{D}^n \times I \to X$ è un'omotopia tra $\bar{f}$ e $\bar{g}$ relativa a $\mathbb{S}^{n-1}$. Da ciò segue che l'insieme $\pi_n(X, x_0)$ può essere anche costruito partendo dalla coppia di spazi $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ al posto della coppia $(I^n, \partial I^n)$. Però con tale costruzione risulta più complicato definire l'operazione di gruppo di $\pi_n(X, x_0)$, in quanto bisognerebbe capire come sfruttare la palla chiusa come dominio e il suo bordo in maniera semplice.

Per risolvere questo "problema", basti pensare che esiste una funzione continua $p \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n$ che manda il bordo di $\mathbb{D}^n$ in un punto $s_0 \in \mathbb{S}^n$ e tale funzione è un omemomorfismo di $\mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ su $\mathbb{S}^n \setminus \{s_0\}$. Ciò è dovuto al fatto che $\mathbb{S}^n$ si può ottenere come quoziente di $\mathbb{D}^n$ identificando ad un punto il chiuso $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{D}^n$. Allora per ogni funzione continua $\bar{f}\colon (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (X, x_0)$ esiste una funzione continua $\eta\colon (\mathbb{S}^n, s_0) \to (X, x_0)$ la quale rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
(I^n, \partial I^n) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & (X, x_0) \\
(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r] \arrow[ur, "\bar{f}"'] & (\mathbb{S}^n, s_0) \arrow[u, "\eta"']
\end{tikzcd}$$

Mettendo insieme tutte queste osservazioni e considerando che $I^n/\partial I^n \simeq \mathbb{S}^n$,$\partial I^n \ /\partial I^n \simeq s_0$, possiamo costruire il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
(I^n, \partial I^n) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & (X, x_0) \\
(\mathbb{S}^n, s_0) \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

e possiamo considerare la funzione $\varphi\colon \pi_n(X, x_0) \to [(\mathbb{S}^n, s_0), (X, x_0)]$ definita da $\varphi([f]) = [\tilde{f}]$, la quale è ben definita e biiettiva. Pertanto possiamo “ricopiare” l’operazione di $\pi_n(X, x_0)$ su $[(\mathbb{S}^n, s_0), (X, x_0)]$ ed ottenere un isomorfismo di gruppi.

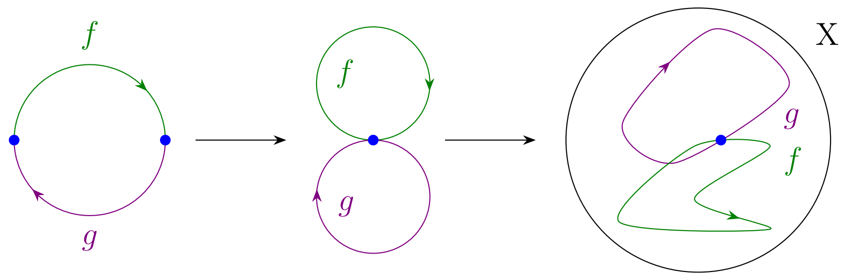
L’operazione su $[(\mathbb{S}^n, s_0), (X, x_0)]$ si definisce come $[f] \cdot [g] = [(f \vee g) \circ c]$, dove $c\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ è l’applicazione che collassa ad un punto s_0 un equatore di $\mathbb{S}^n$ passante per tale punto e il wedge di f e g è l’applicazione dalla wedge-sum di due $\mathbb{S}^n$ in X definita in modo naturale (si veda la figura nella pagina successiva). Nonostante l’operazione di gruppo così definita sia più complicata di quella data, questa nuova visione per alcuni risultati sui gruppi di omotopia è più efficace. ([Hat09],[Nak03])

Esempio. Analizziamo questo punto di vista in due casi facili.

1. Per $n = 1$, $I^n = I$,$\partial I^n = \{0, 1\}$,$\mathbb{D}^n = \mathbb{D}^1, \mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^0 = s_0$ e abbiamo dunque il diagramma

$$\begin{tikzcd}
(I, \{0, 1\}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & (X, x_0) \\
(\mathbb{S}^1, s_0) \arrow[ur, dotted, "\exists! \tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

   e la funzione biiettiva $\varphi\colon \pi_1(X, x_0) \to [(\mathbb{S}^1, s_0), (X, x_0)]$.



L'operazione su $[(\mathbb{S}^1, s_0), (X, x_0)]$ coincide con la definizione di prodotto di cammini. Cioè dati due cammini $f, g \in \mathcal{C}_1(X, x_0)$ tali che $f(1) = g(0)$, il prodotto di cammini è definito da

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e tale operazione è quella del gruppo fondamentale, in quanto la wedge-sum $f \vee g$ è l'unione di f e g nel loro punto in comune, ovvero punto finale di f e punto finale di g (che coincidono). Dunque il gruppo fondamentale, come è stato anche visto nel dettaglio nei capitoli 2,3,4 di [Mas67], misura la quantità do buchi 1-dimensionali, ovvero buchi di circonferenze (che sono omeomorfe a cammini chiusi) contenuti nello spazio X. In particolare il gruppo fondamentale descrive come possiamo "muoverci" tramite cammini chiusi nello spazio X.

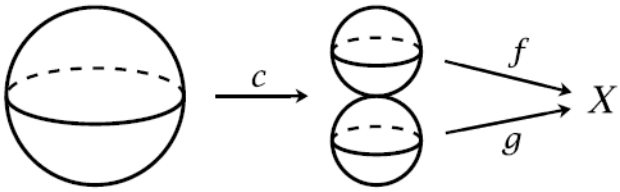
2. Per $n = 2$, $I^n = I^2$,$\partial I^2 = C = \mathit{supp}(\gamma)$, ove C è il sostegno della curva $\gamma\colon [0,4] \to \mathbb{R}^2$ (che descrive il perimetro del quadrato I^2) definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ (1, t-1) & \text{se } 1 \leq t < 2 \\ (3-t, 1) & \text{se } 2 \leq t < 3 \\ (0, 4-t) & \text{se } 3 \leq t \leq 4 \end{cases},$$

$\mathbb{D}^n = \mathbb{D}^2$, $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^1$ e abbiamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} (I^2, C) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & (X, x_0) \\ (\mathbb{S}^2, s_0) \arrow[ur, dotted, "\exists! \tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

e la funzione biiettiva $\varphi\colon \pi_2(X,x_0) \to [(\mathbb{S}^2,s_0),(X,x_0)]$. L'operazione definita su $[(\mathbb{S}^2,s_0),(X,x_0)]$ è definita come $[f]\cdot[g] = [(f \vee g)\circ c]$ che è rappresentata in figura (presente in [Hat09] a pagina 341):



1.16 Osservazione. Da tale punto di vista segue che si può definire l'n-esimo gruppo di omotopia come l'insieme delle classi di omotopia delle funzioni $\mathbb{S}^n \to X$ tali che $s_0 \mapsto x_0$. In questo modo, due funzioni continue sono omotope quando esse sono deformabili l'una nell'altra tramite funzioni continue che mandano s_0 in x_0. Dalla definizione data, invece, l'n-esimo gruppo di omotopia è l'insieme delle classi di omotopia delle funzioni $I^n \to X$ tali che $\partial I^n \mapsto x_0$. In questo modo due funzioni sono omotope se sono deformabili l'una nell'altra tramite funzioni che mandano il bordo dell'n-cubo in x_0.

I due punti di vista (che possono essere viste come definizioni dello stesso oggetto) sono equivalenti perché quozientando il bordo dell'n-cubo ad un punto $\partial I^n/x_0 \simeq \mathbb{S}^n$ (oppure si può considerare tale paragrafo come traccia di dimostrazione per l'equivalenza delle due definizioni).

Un risultato molto diverso ma al contempo strabiliante se confrontato con quanto noto per il gruppo fondamentale è dato dalla seguente proposizione:

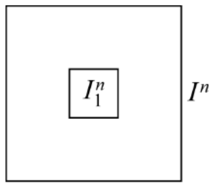
1.17 Proposizione. *Sia X uno spazio topologico e sia $x_0 \in X$. Allora $\pi_n(X,x_0)$ è un gruppo abeliano per ogni $n \geq 2$.*

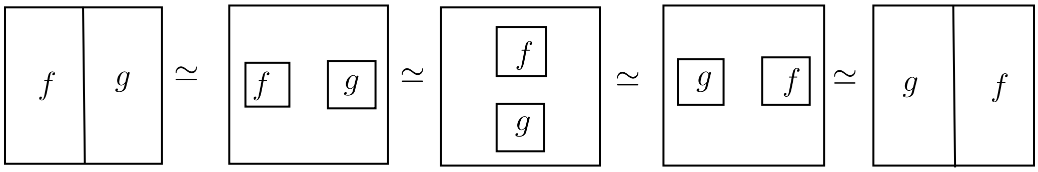
Dimostrazione. Siano $[f],[g] \in \pi_n(X,x_0)$. Osserviamo che se consideriamo un I^n_1 retratto per deformazione di I^n (come nella figura sottostante) con retrazione $r\colon I^n \to I^n_1$, allora ogni funzione $f\colon I^n \to X$ è omotopa ad una funzione $h\colon I^n \to X$ ottenuta per composizione nel modo seguente:

$I^n \xrightarrow{r} I^n_1 \xrightarrow{i} I^n \xrightarrow{f} X$, da cui $f \sim h = f \circ \iota \circ r$, ovvero h "concentra" la f su I^n_1 e in $I^n \setminus I^n_1$ è la funzione costante x_0.

Notiamo che ciò è possibile perché f manda il bordo in x_0 e dunque tale funzione è continua. Intuitivamente, poiché l'operazione $+$ coinvolge solamente la prima coordinata (se $n \geq 2$), c'è abbastanza spazio per "scorrere f oltre g".

Vogliamo mostrare che $f+g \sim g+f$ tramite l'omotopia mostrata in figura.





L'omotopia inizia restringendo i domini di f e di g a cubi più piccoli dentro I^n, rispettivamente I_f^n e I_g^n, mandando la rimanente regione al punto base x_0 come descritto sopra. Fatto ciò, c'è abbastanza spazio per "scambiare" f e g, fintanto che i due sottocubi rimangono disgiunti. Dopodiché si estendono i domini di f e di g al loro dominio originario e si ottiene $g+f$. Ciò dimostra la tesi.

Osserviamo che l'intero procedimento può essere fatto usando solo le coordinate s_1 e s_2 e tenendo fisse le rimanenti coordinate. □

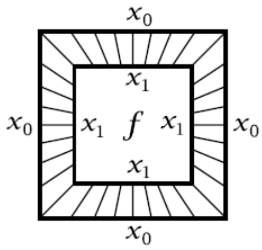
Da tale proposizione si evince che sarà complicato calcolare un gruppo di omotopia, in quanto non può valere un teorema simile al teorema di Seifert-van Kampen per il gruppo fondamentale. Dovremo cercare, quindi, dei modi per poter calcolare i gruppi di omotopia, ma non sarà affatto semplice.

1.2.1 Relazione tra $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi_n(X, x_1)$

Nel capitolo 2 di [Mas67] è stato dimostrato che se uno spazio topologico X è connesso per archi, allora la scelta del punto base produce sempre gruppi fondamentali isomorfi. Vediamo, mediante la prossima proposizione, se ciò accade anche per i gruppi di omotopia superiori al primo ordine.

1.18 Proposizione. *Se lo spazio topologico X è connesso per archi, allora, dati $x_0, x_1 \in X$, esiste un isomorfismo di gruppi $\pi_n(X, x_0) \simeq \pi_n(X, x_1)$ per ogni $n \geq 2$.*

Dimostrazione. Sia $\gamma\colon I \to X$ un cammino tale che $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Ad ogni funzione $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_1)$ possiamo associare una nuova funzione $\gamma f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ restringendo il dominio di f a un cubo più piccolo dentro a I^n (come descritto all'inizio della dimostrazione della Proposizione 1.16), successivamente inserendo il cammino γ in ogni segmento radiale nell'intercapedine tra il cubo più piccolo e ∂I^n (come mostrato in figura).



Consideriamo la funzione $\beta_\gamma\colon \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0)$ definita da $\beta_\gamma([f]) = [\gamma \circ f]$, che permette il cambiamento del punto base. Vogliamo dimostrare che β_γ è un isomorfismo di gruppi. Per mostrare ciò bisogna dimostrare che un'omotopia di γ o di f, attraverso funzioni che fissando ∂I o ∂I^n, produce un'omotopia di γf attraverso la funzione $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$. In particolare bisogna dimostrare la validità di tre proprietà:

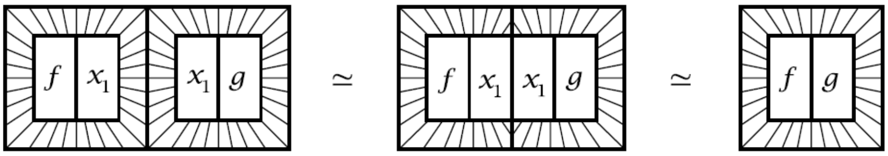
1. $\gamma(f + g) \sim \gamma f + \gamma g$;
2. $(\gamma\eta)f \sim \gamma(\eta f)$;
3. $1f \sim f$ ove 1 indica il cammino costante.

La proprietà (1) serve per mostrare che il restringimento del dominio della funzione $f + g$ è omotopa alla somma dei restringimenti delle singole funzioni e in riferimento alla funzione β_γ ciò dimostra che essa è un omomorfismo di gruppi; la proprietà (2) serve per mostrare che tale restringimento è associativo; la proprietà (3) serve per mostrare che il restringimento costante di una funzione è omotopo alla funzione stessa. In riferimento alla funzione β_γ le proprietà (2) e (3) implicano che tale funzione è un isomorfismo di gruppi, con funzione inversa $\beta_{\bar{\gamma}}$ ove $\bar{\gamma}(s) = \gamma(1 - s)$ è il cammino inverso di γ.

Le omotopie in (2) e in (3) sono ovvie. Per l'omotopia in (1), e facendo riferimento alla figura sottostante, prima deformiamo f e g affinché siano costanti nella metà destra e nella metà sinistra di I^n, rispettivamente, producendo funzioni che chiameremo $f + 0$ e $0 + g$. Dopodiché rimuoviamo una parte centrale simmetrica progressivamente più grande di $\gamma \circ (f + 0) + \gamma \circ (0 + g)$ finché diventa $\gamma \circ (f + g)$.

Una formula esplicita per questa omotopia è

$$h_t(s_1, ..., s_n) = \begin{cases} \gamma(f + 0)((2 - t)s_1, s_2, ..., s_n) & \text{se } s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(0 + g)((2 - t)s_1 + t - 1, s_2, ..., s_n) & \text{se } s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



Così abbiamo $\gamma(f+g) \sim \gamma(f+0) + \gamma(0+g) \sim \gamma f + \gamma g$.

(Tutte le figure della dimostrazione sono state prese da [Hat09])

Pertanto si ha la tesi. □

Pertanto se uno spazio topologico X è connesso per archi, possiamo scrivere semplicemente $\pi_n(X)$ senza specificare la scelta del punto base.

1.2.2 π_n è un funtore

Nel caso del gruppo fondamentale si era visto che esso possedeva proprietà funtoriali. Dimostriamo, in parte, che anche i gruppi di omotopia di ordine n hanno le medesime proprietà funtoriali.

1.19 Proposizione. *Siano X e Y spazi topologici e sia $x_0 \in X$. Allora una funzione continua $\varphi\colon X \to Y$ induce un omomorfismo di gruppi*

$$\varphi_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, \varphi(x_0))$$

definito da $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$ per ogni $n \geq 1$.

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che se $f \sim g$, allora $\varphi \circ f \sim \varphi \circ g$. Infatti se H è un'omotopia tra f e g, allora $\varphi \circ H$ è un'omotopia tra $\varphi \circ f \sim \varphi \circ g$. Quindi φ_* è ben definita. Dalla definizione di operazione di gruppo di omotopia, è chiaro che $\varphi \circ (f+g) = (\varphi \circ f) + (\varphi \circ g)$. Dunque $\varphi_*([f+g]) = [\varphi \circ f + \varphi \circ g] = [\varphi \circ f] + [\varphi \circ g] = \varphi_*([f]) + \varphi_*([g])$. Pertanto φ_* è un omomorfismo di gruppi. □

1.20 Proposizione. *Siano X, Y e Z spazi topologici. Gli omomorfismi indotti dalle funzioni continue $\varphi\colon X \to Y$, $\psi\colon Y \to Z$ sui gruppi di omotopia superiori soddisfano le seguenti due proprietà:*

1. $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$
2. $(id_X)_* = id_{\pi_n(X,x_0)}$.

Corollario. *Siano X e Y spazi topologici e siano $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Se $\varphi\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ è un'equivalenza omotopica, allora $\varphi_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, \varphi(x_0))$ è un isomorfismo per ogni $n \geq 1$.*

Le dimostrazioni di questi ultimi due enunciati sono analoghe a quelle fatte per il gruppo fondamentale nel capitolo 2 del Massey ([Mas67]).

Esempio. Consideriamo $\mathbb{R}^n$. Abbiamo che $\pi_n(\mathbb{R}^n) = 0 \quad \forall n \geq 1$ poiché $\mathbb{R}^n$ è omotopicamente equivalente a un punto (infatti $\mathbb{R}^n$ è uno spazio semplicemente connesso per ogni $n \geq 1$).

Risultato utile per i calcoli. Vediamo ora un risultato molto utile per il calcolo dei gruppi di omotopia di uno spazio topologico.

1.21 Proposizione. *Sia X uno spazio topologico e sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento. Allora $p_*\colon \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}) \to \pi_n(X, p(\tilde{x}))$ è un isomorfismo di gruppi per ogni $n \geq 2$.*

Dimostrazione.

Suriettività: sia $x = p(\tilde{x})$ e consideriamo $f\colon (\mathbb{S}^n, s_0) \to (X, x)$. Per $n \geq 2$ abbiamo che $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$ (in quanto $\mathbb{S}^n$ è semplicemente connesso per $n \geq 2$), dunque $f_*(\pi_1(\mathbb{S}^n, s_0)) = 0 \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$. Dunque per il Lemma 1.10 f ammette un sollevamento a X, ovvero esiste $\tilde{f}\colon (\mathbb{S}^n, s_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x})$ tale che $p \circ \tilde{f} = f$. Allora $[f] = [p \circ \tilde{f}] = p_*([\tilde{f}])$. Quindi p_* è suriettiva.

$$\begin{tikzcd}
 & (\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[d, "p"] \\
(\mathbb{S}^n, s_0) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, x)
\end{tikzcd}$$

Iniettività: supponiamo $[\tilde{f}] \in \ker(p_*)$. Dunque $p_*([\tilde{f}]) = [p \circ \tilde{f}] = 0$. Sia $p \circ \tilde{f} = f$. Allora $f \sim \varepsilon_x$ (ove ε_x indica la classe di omotopia del cammino costante a x) tramite un'omotopia $H\colon (\mathbb{S}^n, s_0) \times I \to (X, x_0)$ con omotopia $\tilde{H}\colon (\mathbb{S}^n, s_0) \times I \to (\tilde{X}, \tilde{x})$ tale che $p \circ \tilde{H} = H$.

$$\begin{tikzcd}
 & (\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[d, "p"] \\
(\mathbb{S}^n, s_0) \arrow[ur, "\tilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & (X, x)
\end{tikzcd}$$

Dunque $p \circ \tilde{H}(x, 1) = f$ e $p \circ \tilde{H}(x, 0) = \varepsilon_x$. Dall'unicità del sollevamento dobbiamo avere $\tilde{\varphi}_1 = f$ e $\tilde{\varphi}_0 = \varepsilon_{\tilde{x}}$. Allora $\tilde{H}$ è un'omotopia tra $\tilde{f}$ e $\varepsilon_{\tilde{x}}$. Dunque $[\tilde{f}] = 0$. Quindi p_* è iniettiva.

$\square$

Vediamo alcuni esempi del calcolo di gruppi di omotopia di spazi noti, sfruttando alcuni risultati visti durante il corso di Topologia.

Esempio. Consideriamo $\mathbb{S}^1$ con il rivestimento universale $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dato da $p(t) = e^{2i\pi t}$. Sappiamo che $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$. Se $n \geq 2$, dalla proposizione precedente segue che $\pi_n(\mathbb{S}^1) \simeq \pi_n(\mathbb{R}) = 0$.

Esempio. Consideriamo $\mathbb{T}^n \simeq \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1$ l'n-toro (che può essere visto anche come spazio quoziente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$). Abbiamo che $\pi_1(\mathbb{T}^n) \simeq \mathbb{Z}^n$. Utilizzando il rivestimento universale $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ e la proposizione precedente, si ha che $\pi_n(\mathbb{T}^n) \simeq \pi_n(\mathbb{R}^n) = 0$ per ogni $n \geq 2$.

Nell'esempio precedente abbiamo considerato uno spazio topologico prodotto, riguardo al quale nel Capitolo 2 di [Mas67] si era visto che il gruppo fondamentale è isomorfo al prodotto diretto dei gruppi fondamentali che compongono lo spazio, utilizzando pochissimi strumenti a disposizione. Nel caso dei gruppi di omotopia di ordine superiore al primo tale risultato rimane vero. Infatti, in generale, si ha la seguente:

1.22 Proposizione. *Sia $\{X_\alpha\}_\alpha$ una collezione di spazi topologici connessi per archi. Allora $\pi_n\Big(\prod_\alpha X_\alpha\Big) \simeq \prod_\alpha \pi_n(X_\alpha)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Idea di dimostrazione. Osserviamo che una funzione $f\colon \mathbb{S}^n \to \prod_\alpha X_\alpha$ è una collezione di funzioni $f_\alpha\colon \mathbb{S}^n \to X_\alpha$. Per gli elementi di π_n, osserviamo che, poiché tutti gli spazi sono connessi per archi, possiamo non considerare la scelta del punto base. La tesi segue percorrendo un procedimento analogo fatto per il gruppo fondamentale (presente nel [Mas67] al capitolo 2 sezione 7, considerando per le omotopie il dominio $\mathbb{S}^n \times I$). $\square$

1.3 Gruppi di omotopia relativi

Un'utile generalizzazione del gruppo di omotopia è il gruppo di omotopia relativo. Prima di darne la definizione, consideriamo come $I^{n-1} = \{(s_1, ..., s_n) \in I^n | s_n = 0\}$ la faccia del cubo I^n con l'ultima coordinata nulla e sia $J^{n-1} = \partial I^n \setminus I^{n-1}$ l'unione delle rimanenti facce di I^n.

Nel caso generale, date due coppie di spazi (X, A),(Y, B) con $U \subseteq A$,$V \subseteq B$, indichiamo con $\mathcal{C}_n((X, A, U), (Y, B, V))$ l'insieme delle funzioni continue $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ tali che $f(U) = V$. Allora definiamo

$$[(X, A, U), (Y, B, V)] = \mathcal{C}_n((X, A, U), (Y, B, V))/\sim,$$

ove $\sim$ è la relazione di omotopia relativa al sottoinsieme A secondo la Definizione 1.4.

1.23 Definizione. Siano X uno spazio topologico, $A \subseteq X$, $x_0 \in A$. Definiamo l'**n-esimo gruppo di omotopia della coppia** (X, A) con punto base x_0 come $\pi_n(X, A, x_0) = [(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, x_0)]$.

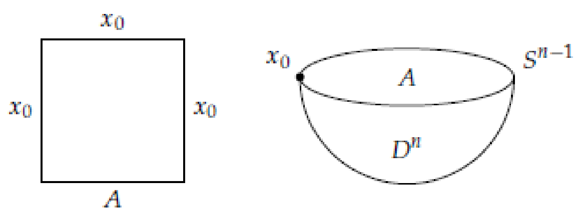
Osserviamo che se $A = \{x_0\}$, allora $\pi_n(X, A, x_0) = \pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$. Dunque i gruppi di omotopia sono casi speciali di gruppi di omotopia relativi.

Un'operazione di somma in $\pi_n(X, A, x_0)$ è definita dalle stesse formule per $\pi_n(X, x_0)$, eccetto per la coordinata s_n che gioca un ruolo speciale e non è più disponibile per l'operazione somma.

Similmente a quanto visto nella sezione precedente, collassando J^{n-1} a un punto otteniamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & (X, A, x_0) \\
& (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}, s_0) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

ove g è una funzione che collassa J^{n-1} a un punto s_0. In tale modo, possiamo dare una definizione alternativa a quella data precedentemente ovvero $\pi_n(X, A, x_0) = \{g\colon (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)\}/\sim = [(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}, s_0), (X, A, x_0)]$.



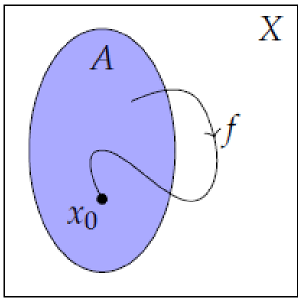
Con tale punto vista, la somma si fa tramite la funzione $c\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n \vee \mathbb{D}^n$ facendo collassare $\mathbb{D}^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n$ a un punto.

Ora vediamo due caratteristiche immediate su tali gruppi:

1.24 Proposizione. *Siano X uno spazio topologico, $A \subseteq X$, $x_0 \in A$. Se $n \geq 2$, allora $(\pi_n(X, A, x_0), +)$ è un gruppo sotto l'usuale operazione di somma. Se $n \geq 3$, allora $\pi_n(X, A, x_0)$ è un gruppo abeliano.*

La dimostrazione di questi due fatti è simile a quelle corrispondenti fatte nella sezione precedente parlando di gruppo di omotopia. Inoltre, seguendo lo stesso ragionamento delle dimostrazioni della sezione precedente, si possono verificare che valgono le medesime proprietà viste sui gruppi di omotopia (ovvero: una funzione continua tra due coppie di spazi induce un omomorfismo tra gruppi di omotopia relativi per $n \geq 2$ e le proprietà funtoriali).

Esempio. Nel caso $n = 1$ la Proposizione 1.23 fallisce. Consideriamo $\pi_1(X, A, x_0) = [(I, \{0, 1\}, \{1\}), (X, A, x_0)]$. Tale gruppo contiene le classi di omotopia di cammini che partono da un punto di A e finiscono in x_0, quindi non possiamo sempre concatenare due cammini.



Una riformulazione utile e illuminante di ciò che significa per un elemento di $\pi_n(X, A, x_0)$ essere zero è dato dal:

1.25 Lemma (Criterio di compressione). *Sia (X, A) una coppia di spazi con $x_0 \in A$. Una funzione $f\colon (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ rappresenta lo zero in $\pi_n(X, A, x_0)$ se e solo se è omotopa relativamente a $\mathbb{S}^{n-1}$ a una funzione con immagine contenuta in A.*

Dimostrazione.

($\Leftarrow$) Sia g una funzione tale che $f \sim g$ e $Im(g) \subseteq A$. Sia $r\colon \mathbb{D}^n \to s_0$, definita da $r(x) = ts_0 + (1-t)x$ con $t \in I$, una retrazione per deformazione del disco al punto $s_0 \in \mathbb{S}^n$. Componendo r e g si ottiene un'omotopia tra g e la funzione costante ε_{x_0} $H = g \circ r\colon \mathbb{D}^n \times I \to X$, definita da $H(x, t) = g(ts_0 + (1-t)x)$, ovvero $g \sim \varepsilon_{x_0}$. La retrazione r lascia fisso il punto s_0 e g ha immagine contenuta in A, con $g(s_0) = x_0$. Pertanto $[f] = [g] = [\varepsilon_{x_0}] = [0]$.

($\Rightarrow$) Se $[f] = 0$, esiste un'omotopia $H\colon \mathbb{D}^n \times I \to X$ che può essere ristretta ad una famiglia di n-dischi, cominciando da $\mathbb{D}^n \times \{0\}$, terminando con $(\mathbb{D}^n \times \{1\}) \cup (\mathbb{S}^{n-1} \times I)$ e tra inizio e fine considerare $(\mathbb{D}^n \times \{t\}) \cup (\mathbb{S}^{n-1} \times [0, t])$, con $t \in I$. Tali dischi hanno come bordo $\mathbb{S}^{n-1}$ e si ottiene, dunque, un'omotopia che lascia fisso $\mathbb{S}^{n-1}$ (ovvero H è un'omotopia relativamente a $\mathbb{S}^{n-1}$), tra f e una funzione che ha immagine contenuta in A, determinata dalla restrizione di r (definito nel verso precedente) a $(\mathbb{D}^n \times \{1\}) \cup (\mathbb{S}^{n-1} \times I)$. Poiché le omotopie considerate sono relative al bordo del disco, esso ha immagine contenuta in A tramite la funzione f.

$\square$

Il criterio di compressione non solo fa capire chi rappresenta l'elemento neutro nei gruppi di omotopia relativi ma afferma che l'elemento neutro dei gruppi di omotopia e dei gruppi di omotopia relativi è lo stesso. Questa conoscenza sarà molto utile a breve.

Tornando alle proprietà, per i gruppi di omotopia non relativi abbiamo mostrato che se lo spazio topologico è connesso per archi, allora il gruppo di omotopia è indipendente dalla scelta del punto base. Un risultato simile vale per i gruppi di omotopia relativi, la cui dimostrazione è simile al caso precedentemente richiamato e dunque viene omessa.

1.26 Lemma. *Sia (X, A) una coppia di spazi. Se A è connesso per archi, allora $\gamma_*\colon \pi_n(X, A, x_1) \to \pi_n(X, A, x_0)$ è un isomorfismo di gruppi e γ è un cammino da x_1 a x_0 contenuto in A.*

Terminiamo questo capitolo con un risultato molto importante sui gruppi di omotopia relativi. Prima di enunciarlo e dimostrarlo, diamo la seguente definizione:

1.27 Definizione. Una **successione esatta** di gruppi è una successione di gruppi e di loro omomorfismi in cui l'immagine dell'uno coincida con il nucleo del successivo.

1.28 Lemma. *Sia (X, A) una coppia di spazi e sia $x_0 \in A$. Definiamo i seguenti omomorfismi di gruppi:*

1. *$\iota_*\colon \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ indotto dall'inclusione $\iota\colon (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$;*
2. *$j_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)$ indotto dall'inclusione $j\colon (X, x_0, x_0) \to (X, A, x_0)$;*
3. *$\partial\colon \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$ ottenuta restringendo $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ a I^{n-1} (equivalentemente $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ a $\mathbb{S}^{n-1}$).*

Allora la successione

$$... \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{\iota_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \dot{\to} ..$$

è esatta.

Dimostrazione.

<u>$im(\iota_*) \subseteq \ker(j_*)$:</u> notiamo che $j_* \circ \iota_*$ è indotta da $j \circ \iota$ e queste sono entrambe inclusioni. Dunque per $[f] \in \pi_n(A, x_0)$, $(j_* \circ \iota_*)([f]) = [j \circ \iota \circ f]$ ma $j \circ \iota \circ f = f$, la quale ha l'immagine contenuta in A. In particolare per il criterio di compressione $(j_* \circ \iota_*)([f]) = 0$. Quindi $im(\iota_*) \subseteq \ker(j_*)$.

<u>$\ker(j_*) \subseteq im(\iota_*)$:</u> supponiamo $[f] \in \ker(j_*) : [j \circ f] = 0$. Per il criterio di compressione $f \sim g'$ relativamente a $\mathbb{S}^{n-1}$, ove g' ha immagine contenuta in A. Poiché $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$, l'omotopia fissa il punto base ($[f] = [g'] \in \pi_n(X, x_0)$). Ma, poiché g' ha immagine contenuta in A, $[g'] \in \pi_n(A, x_0)$ e $\iota_*([g']) = [\iota \circ g'] = [f]$, dunque $[f] \in im(\iota_*)$ e quindi $\ker(j_*) \subseteq im(\iota_*)$.

Dal fatto che $im(\iota_*) \subseteq \ker(j_*)$ e $\ker(j_*) \subseteq im(\iota_*)$, segue che $\ker(j_*) = im(\iota_*)$.

<u>$im(j_*) \subseteq \ker(\partial)$:</u> la composizione $\partial \circ j_* = 0$ poiché la restrizione di una funzione $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, x_0, x_0)$ a I^{n-1} ha immagine x_0, e ciò rappresenta 0 in $\pi_{n-1}(A, x_0)$. Dunque $im(j_*) \subseteq \ker(\partial)$.

<u>$\ker(\partial) \subseteq im(j_*)$:</u> supponiamo $[f] \in \ker(\partial)$. Da ciò segue che $f \sim_{\partial I^{n-1}} g$, ove g è una funzione con immagine contenuta in A. Sia $F\colon I^{n-1} \times I \to X$ tale omotopia. Poiché $f(\partial I^{n-1}) = f(J^{n-1}) = x_0$, segue che $F(\partial I^{n-1}, t) = x_0$ per ogni $t \in I$. Consideriamo la funzione

$H\colon (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ definita sull'incollamento dei domini di f e F lungo $f_{|I^{n-1}} = F_1$. Tale funzione vale $f(x)$ per i punti la cui ultima coordinata è minore o uguale a $\frac{1}{2}$, $F(x)$ altrimenti. Allora $H \sim f$ in $\pi_n(X, A, x_0)$ con un'omotopia che incolla il dominio di F al dominio di f. Dunque $[f] \in im(j_*)$.

Dal fatto che $\ker(\partial) \subseteq im(j_*)$ e $im(j_*) \subseteq \ker(\partial)$, segue che $im(j_*) = \ker(\partial)$.

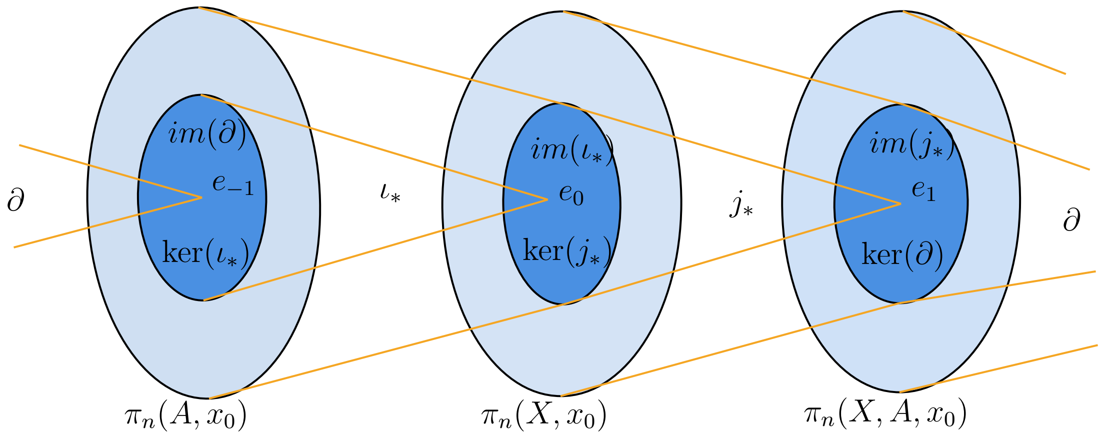
<u>$im(\partial) \subseteq \ker(\iota_*)$:</u> sia $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$. Allora $(\iota_* \circ \partial)([f]) \in \pi_{n-1}(X, x_0)$ è la classe che rappresenta $f_{|I^{n-1}}$ e questa è omotopa relativamente a J^{n-2} alla mappa costante ε_{x_0} tramite f vista come omotopia. Ciò implica che $im(\partial) \subseteq \ker(\iota_*)$.

<u>$\ker(\iota_*) \subseteq im(\partial)$:</u> sia $[f] \in \ker(\iota_*)$, ovvero $\iota_*([f]) = [\iota \circ f] = 0$. Allora esiste un'omotopia H tra f e una mappa costante attraverso un'omotopia G che ha immagine in X e preserva x_0. Dunque $H_0 = f$ ha immagine in A e H_1 ha immagine $\{x_0\}$ e H_t manda il bordo in $\{x_0\}$. Dunque $[H] \in \pi_n(X, A, x_0)$ tale che $\partial([H]) = [f] \Rightarrow [f] \in im(\partial) \Rightarrow \ker(\iota_*) \subseteq im(\partial)$.

Dal fatto che $\ker(\iota_*) \subseteq im(\partial)$ e $im(\partial) \subseteq \ker(\iota_*)$, segue che $im(\partial) = \ker(\iota_*)$. Da cui segue la tesi per definizione di successione esatta. $\square$

Una rappresentazione grafica di questo lemma è la seguente:

$$... \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{\iota_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \to ...$$



Capitolo 2

CW-Complessi

2.1 Definizioni e proprietà

La nozione di complesso di celle (o CW-complesso) viene introdotta da J.H.C. Whitehead per sopperire ad alcune necessità della teoria dell'omotopia.

L'idea del complesso di celle è di costruire uno spazio topologico incollando delle "celle". Whitehead, in un certo senso, generalizza il modo in cui erano già stati definiti alcuni spazi ora noti come superfici reali compatte o il concetto di triangolazione di spazi topologici.

2.1 Definizione. Una **cella n-dimensionale** aperta, o semplicemente cella, è uno spazio topologico omeomorfo ad una palla n-dimensionale, ovvero $e^n = (\mathbb{D}^n, \partial\mathbb{D}^n) = (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$.

Da tale definizione, ad esempio, e^0 è un punto, e^1 è omeomorfa a un segmento aperto, e^2 è omeomorfa a un disco aperto. Questi piccoli esempi ci saranno d'aiuto per capire sia la definizione di complesso di celle (definito in modo costruttivo) sia per capire alcuni esempi.

Si vuole cercare un modo per cambiare uno spazio topologico senza modificarne il tipo di omotopia, utilizzando la variazione continua del modo con cui le sue parti sono "incollate" insieme (quello che sarà definito come "incollamento di celle").

L'idea di complesso di celle è la seguente: partendo da uno spazio X^0 e da uno spazio X^1, vogliamo attaccare X^1 a X^0 identificando i punti in un sottospazio $A \subseteq X^1$ con punti di X^0. Per fare ciò occorre una funzione $f\colon A \to X^0$ affinché noi possiamo formare uno spazio quoziente di $X^0 \sqcup X^1$, identificando ogni punto $a \in A$ con la sua immagine $f(a) \in X^0$. Denotiamo con $X^0 \sqcup_f X^1$ lo spazio X^0 con X^1 incollato lungo A tramite f. Da qui un modo costruttivo per definire il concetto di CW-complesso è dato dalla seguente:

2.2 Definizione. Un **CW-complesso** (o complesso di celle) è uno spazio topologico X munito di una struttura aggiuntiva che lo costruisce in modo induttivo al variare di $n \geq 0$:

1. Si definisce lo 0-scheletro X^0 come un insieme arbitrario di punti di X dotato della topologia discreta;

2. Avendo definito l'$(n-1)$-scheletro X^{n-1}, si definisce X^n tramite l'incollamento di n-celle e^n_α a X^{n-1} attraverso una famiglia di funzioni continue $\varphi_\alpha \colon \mathbb{S}^{n-1} \to X^{n-1}$, dette **funzioni di incollamento**. Ciò significa che X^n è lo spazio quoziente dell'unione disgiunta $X^{n-1} \sqcup_\alpha \mathbb{D}^n_\alpha$ di X^{n-1} con una famiglia di n-dischi $\mathbb{D}^n_\alpha$ mediante le identificazioni $x \sim \varphi_\alpha(x)$ per $x \in \partial\mathbb{D}^n_\alpha = \mathbb{S}^{n-1}$.

$$\begin{tikzcd} \sqcup_\alpha \mathbb{S}^{n-1}_\alpha \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & X^{n-1} \arrow[d] \\ \sqcup_\alpha \mathbb{D}^n_\alpha \arrow[r] & X^n \end{tikzcd}$$

   Ovvero $X^n = \left(X^{n-1} \sqcup_\alpha \mathbb{D}^n_\alpha\right) / \sim = X^{n-1} \sqcup_\alpha e^n_\alpha$.

3. Ci si può fermare dopo un numero finito di passi, ponendo $X = X^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, oppure si può continuare all'infinito, ponendo $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$. In quest'ultimo caso consideriamo X dotato della topologia finale rispetto alla famiglia delle inclusioni $\{X^n \hookrightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Esempio. La sfera $\mathbb{S}^n$ è un CW-complesso con una cella e^0 di dimensione 0 (ovvero un punto), una cella e^n di dimensione n. Ciò segue considerando un punto $s_0 = e^0$, lo si incolla al disco chiuso mediante la funzione di incollamento $\vartheta \colon (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (\mathbb{S}^n, s_0)$ e facendo collassare la circonferenza $\mathbb{S}^{n-1}$ nel punto s_0.

Esempio. Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{RP}^n$ è lo spazio di sottospazi $\mathbb{R}$-lineari di dimensione 1 in $\mathbb{R}^{n+1}$. Esso è omeomorfo a $\mathbb{S}^n / \sim$ ove la relazione $\sim$ identifica $v \in \mathbb{S}^n$ con $-v \in \mathbb{S}^n$ (ovvero i punti antipodali sulla sfera, e tale relazione solitamente si denomina con "relazione di antipodia"). Inoltre si ha che tale spazio quoziente è omeomorfo al disco chiuso $\mathbb{D}^n / \sim$, ove $\sim$ identifica i punti antipodali del suo bordo $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$. Ma, seguendo il ragionamento fatto poc'anzi, $\mathbb{S}^{n-1} / \sim \cong \mathbb{RP}^{n-1}$. Dunque $\mathbb{RP}^n$ si ottiene da $\mathbb{RP}^{n-1}$ incollando una cella n-dimensionale usando la proiezione canonica $\pi_n \colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$. Osservo che, siccome $\mathbb{RP}^{n-1} \cong \mathbb{S}^{n-1} / \sim$, ove $\sim$ è la relazione di antipodia, e tale quoziente è omeomorfo al disco chiuso $\mathbb{D}^{n-1}/\sim$, ove $\sim$ identifica i punti antipodali sul bordo del disco chiuso che è $\mathbb{S}^{n-2}$. Dunque $\mathbb{RP}^{n-1}$ si ottiene da $\mathbb{RP}^{n-2}$ incollando una cella $(n-1)$-dimensionale mediante la proiezione $\pi_{n-1}\colon \mathbb{S}^{n-2} \to \mathbb{RP}^{n-2}$. Per induzione si dimostra, quindi, che lo spazio proiettivo reale $\mathbb{RP}^n$ è un CW-complesso ottenuto dall'incollamento di celle di ogni dimensione compresa tra 0 e n.

Esempio. Lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^n$ è lo spazio di sottospazi $\mathbb{C}$-lineari di dimensione 1 in $\mathbb{C}^{n+1}$. Esso è omeomorfo a $\mathbb{S}^{2n}/\sim$, ove la relazione di equivalenza $\sim$ è la relazione di antipodia (ovvero identifica i punti antipodali w e $-w$ in $\mathbb{S}^{2n}$). Tale spazio quoziente è omeomorfo al disco chiuso $\mathbb{D}^{2n}$ in cui identifico i punti antipodali sul suo bordo $\partial\mathbb{D}^{2n} = \mathbb{S}^{2n-1}$. Inoltre si ha che $\mathbb{CP}^{n-1} \cong \mathbb{S}^{2n-1}/\sim$. Dunque $\mathbb{CP}^n$ si ottiene da $\mathbb{CP}^{n-1}$ incollando una cella $2n$-dimensionale attraverso la funzione di incollamento $\pi_{2n}\colon \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$. Seguendo lo stesso ragionamento fatto nell'esempio precedente, segue che lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^n$ è un CW-complesso ottenuto incollando celle di ogni dimensione tra 0 e $2n$.

Si può dimostrare che i CW-complessi sono normali, di Hausdorff, sono dotati della topologia debole e hanno la proprietà di chiusura-finitezza. Le dimostrazioni di questi fatti si possono trovare nell'Appendice di [Hat09].

Diamo un'altra definizione di complesso di celle sfruttando, però, le proprietà elencate sopra.

2.3 Definizione. Un **complesso di celle** (o **CW-complesso**) è uno spazio topologico X di Hausdorff con una famiglia di funzioni $\varphi_\alpha\colon \mathbb{D}^n_\alpha \to X$ tali che:

1. Ogni φ_α si può restringere ad un omeomorfismo $int(\mathbb{D}^n_\alpha)$ alla sua immagine $e^n_\alpha \subseteq X$ e tali celle sono tutte disgiunte e la loro unione è tutto X;

2. Per ogni cella e^n_α, $\varphi_\alpha(\partial\mathbb{D}^n_\alpha)$ è contenuta in un'unione finita di celle di dimensione inferiore a n;

3. Un sottoinsieme di X è chiuso se e solo se esso incontra la chiusura di ogni cella di X in un insieme chiuso.

Le funzioni φ_α si chiamano **funzioni caratteristiche** (o di incollamento) e i sottospazi $\varphi_\alpha(\mathbb{D}^n)$ sono le n-celle di X. X^n è chiamato l'n-scheletro di X. Se $X^n = X$ per qualche n, il più piccolo n soddisfacente a questa condizione è chiamato **dimensione** di X.

Osserviamo che la proprietà (2) indica che X ha la topologia debole e la proprietà (3) indica che X ha la chiusura-finitezza. Tali due proprietà caratterizzano i CW-complessi, usando sia la definizione 2.3 sia come conseguenza della definizione 2.2, come si dimostra nell'Appendice dell'[Hat09]. Diamo la seguente definizione che sarà utile più avanti:

2.4 Definizione. Un **sottocomplesso di celle** Y di un complesso di celle X è un'unione $Y = \bigcup_{\alpha \in \Lambda_n} e_\alpha$ di celle aperte tali che la chiusura di ogni cella è contenuta in Y.

Una curiosità è l'uso delle lettere "CW" quando si indica un complesso di celle.

Le lettere "CW" stanno ad indicare due proprietà soddisfatte dai CW-complessi:

1. Closure-finiteness (chiusura-finitezza): la chiusura di ogni cella appartiene a un sottocomplesso finito, i.e. un sottocomplesso costituito da un numero finito di celle.

2. Weak Topology (topologia debole): un insieme è chiuso se e solo se esso incontra la chiusura di ogni cella in un insieme chiuso.

Dunque tali lettere richiamano la definizione stessa di complesso di celle, la quale fornisce caratteristiche che saranno di cruciale importanza più avanti.

Diamo alcuni esempi di complessi di celle che non sono CW-complessi.

Esempio.

1. $\mathbb{S}^2$ dove ogni punto è una 0-cella. Essa non soddisfa la proprietà sulla topologia debole.

2. $\mathbb{D}^3$ con celle e^3, $e^0_x = \{x\}$ per ogni $x \in \mathbb{S}^2$. Tale spazio non soddisfa la proprietà di chiusura-finitezza.

Le due definizioni date di complesso di celle descrivono lo stesso oggetto ma in modo differente: mediante la prima definizione si costruisce uno spazio topologico "pezzo per pezzo"; mediante, invece, la seconda definizione si dà un descrizione precisa dello spazio in tutte le sue componenti, dando allo spazio creato le proprietà che discendono dal complesso di celle costruito con la definizione costruttiva. Inoltre all'inizio del capitolo sono stati usati i termini "complesso di celle" e "CW-complesso" senza fare alcuna distinzione. Ciò è dovuto al fatto che le due definizioni sono equivalenti (la cui dimostrazione si può trovare in [Mau80] a pagina 278, oppure in [Hat09] nell'Appendice a pagina 521).

2.2 La connessione

Riprendendo i gruppi di omotopia assoluti e relativi, si può dimostrare che, dato uno spazio topologico X, le seguenti affermazioni sono equivalenti tra loro:

1. Ogni funzione $\mathbb{S}^i \to X$ è omotopa alla funzione costante per $i \leq n$.
2. Ogni funzione $\mathbb{S}^i \to X$ si estende a una funzione sul disco $\mathbb{D}^{i+1} \to X$ per $i \leq n$.
3. $\pi_i(X, x_0) = 0$ per ogni $x_0 \in X$ e per $i \leq n$.

Similmente, nel caso relativo si può dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti per $i > 0$:

(I) Ogni funzione $(\mathbb{D}^i, \partial\mathbb{D}^i) \to (X, A)$ è omotopa relativamente a $\partial\mathbb{D}^i$ ad una funzione $\mathbb{D}^i \to A$.

(II) Ogni funzione $(\mathbb{D}^i, \partial\mathbb{D}^i) \to (X, A)$ è omotopa tramite funzioni dello stesso tipo ad una funzione $\mathbb{D}^i \to A$.

(III) Ogni funzione $(\mathbb{D}^i, \partial\mathbb{D}^i) \to (X, A)$ è omotopa tramite funzioni dello stesso tipo a una funzione costante $\mathbb{D}^i \to A$.

(IV) $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ per ogni $x_0 \in A$.

Le dimostrazioni di queste affermazioni equivalenti si trovano alle pagg.141-142 di Dieck ([tD08]).

2.5 Osservazione. Se $\varphi\colon \mathbb{S}^n \to X$ rappresenta un elemento $[\varphi] \in \pi_n(X, x_0)$, allora $[\varphi] = 0$ se e solo se φ si estende a una funzione $\mathbb{D}^{n+1} \to X$. Perciò se allarghiamo lo spazio X a uno spazio $X' = X \cup_\alpha e_\alpha^{n+1}$ aggiungendo una $(n+1)$-cella e_α^{n+1} con funzione di incollamento φ, allora l'inclusione $j\colon X \hookrightarrow X'$ induce un omomorfismo di gruppi $j_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X', x_0)$ con $j_*([\varphi]) = 0$. Ciò significa che, allargando lo spazio, la funzione di incollamento è omotopa alla funzione costante nel nuovo spazio, dunque rappresenta l'elemento neutro sia del gruppo di omotopia di partenza sia del gruppo di omotopia dello spazio ampliato. In altre parole possiamo allargare lo spazio mantenendo intatto l'elemento neutro dei gruppi di omotopia.

Da quest'ultima osservazione si può dimostrare un qualcosa in più che riguarda l'inclusione descritta e ciò è descritto dal lemma seguente:

2.6 Lemma. *Sia (X, x_0) uno spazio puntato e sia $X' = X \cup_\alpha e_\alpha^{n+1}$ uno spazio ottenuto da X incollando una $(n+1)$-cella. Allora l'inclusione $j\colon X \hookrightarrow X'$ induce un omomorfismo di gruppi $j_*\colon \pi_i(X, x_0) \to \pi_i(X', x_0)$, il quale è un isomorfismo per $i < n$ ed è un epimorfismo per $i = n$.*

Tenendo conto delle affermazioni equivalenti sopra scritte si possono dare le seguenti definizioni:

2.7 Definizione. Uno **spazio** topologico X con punto base x_0 si dice n-**connesso** se $\pi_i(X, x_0) = 0$ per $i \leq n$.

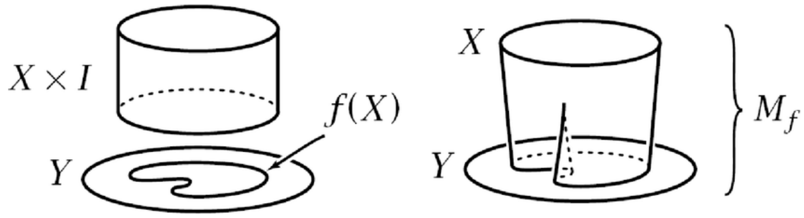
Dunque 0-connesso significa connesso per archi e 1-connesso significa semplicemente connesso. Poiché n-connesso implica 0-connesso, la scelta del punto base non è significativa. La condizione di essere n-connesso può essere espressa senza menzionare un punto base in quanto valgono le affermazioni sopra scritte. Alla luce di quanto detto, in modo equivalente si può dire che uno spazio topologico è n-connesso se valgono le proprietà (1)-(2)-(3).

Guardando al secondo gruppo di affermazioni equivalenti, per $i = 0$ non possiamo definire il gruppo di omotopia relativo π_0, e (I)-(III) sono equivalenti a dire che ogni componente connessa per archi di X contiene punti in A, in quanto $\mathbb{D}^0$ è un punto e $\partial\mathbb{D}^0 = \emptyset$. Una coppia di spazi (X, A) si dice n-**connessa** se (1)-(4) valgono per $i \leq n$ per $i > 0$ e (I)-(III) valgono per $i = 0$. In modo più compatto:

2.8 Definizione. Una **coppia** di spazi si dice n-**connessa** se $\pi_i(X, A) = 0$ per $i \leq n$.

Un'altra costruzione interessante e utile, che ricorre all'incollamento, è:

2.9 Definizione. Dati due spazi topologici X e Y e una funzione $f: X \to Y$, chiamiamo **cilindro mappante** M_f lo spazio ottenuto da Y attaccando $X \times I$ lungo $X \times \{1\}$ tramite f, ovvero lo spazio $M_f = (Y \sqcup (X \times I))/ \sim$, ove $(x, 1) \sim f(x)$.



2.3 Proprietà di estensione dell'omotopia

2.10 Definizione. Dati una coppia di spazi (X, A), una funzione continua $f_0: X \to Y$ e un'omotopia $F: A \times I \to Y$ tale che $F_0 = F(x, 0) = f_{0|A}(x)$, diciamo che (X, A) verifica la **proprietà di estensione dell'omotopia** se esiste un'omotopia $G: X \times I \to Y$ che estende F e f_0.

In altre parole (X, A) verifica la proprietà di estensione dell'omotopia se ogni coppia di funzioni $X \times \{0\} \to Y$ e $A \times I \to Y$ che coincidono su $A \times \{0\}$ possono essere estese a una funzione $X \times I \to Y$.

Vediamo ora se vale anche il viceversa di questa affermazione appena fatta.

2.11 Proposizione. *Una coppia (X, A), con A chiuso in X e con X di Hausdorff, ha la proprietà di estensione dell'omotopia se e solo se $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ è un retratto di $X \times I$.*

Dimostrazione.

($\Rightarrow$): la proprietà di estensione dell'omotopia per (X, A) implica che la funzione identica $(X \times \{0\}) \cup (A \times I) \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ si estende a una funzione $X \times I \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$, dunque $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ è un retratto di $X \times I$.

($\Leftarrow$): supponiamo che A sia chiuso in X. Allora componendo due funzioni $X \times \{0\} \to Y$ e $A \times I \to Y$ che coincidono su $A \times \{0\}$ si ottiene una funzione $(X \times \{0\}) \cup (A \times I) \to Y$ che è continua in quanto è continua sugli insiemi chiusi $X \times \{0\}$ e $A \times I$. Componendo tale funzione $(X \times \{0\}) \cup (A \times I) \to Y$ con una retrazione $X \times I \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$, otteniamo un'estensione $X \times I \to Y$, dunque (X, A) ha la proprietà di estensione dell'omotopia.

$\square$

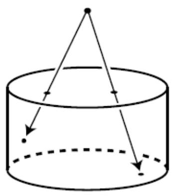
2.12 Osservazione. L'ipotesi di chiusura dell'insieme A può essere evitata in quanto la prima implicazione può essere dimostrata considerando A generico. Per la seconda implicazione, si osservi che se $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ è un retratto di $X \times I$ e X è di Hausdorff, allora A deve essere chiuso in X. Se $r\colon X \times I \to X \times I$ è una retrazione su $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$, allora l'immagine di r è l'insieme dei punti $z \in X \times I$ con $r(z) = z$ (un insieme chiuso se X è di Hausdorff), dunque $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ è chiuso in $X \times I$ e dunque A è chiuso in X.

Il caso X non di Hausdorff è ancora vero, ma è più complicato da dimostrare.

Vediamo se tale condizione necessaria e sufficiente può essere trasportata sui CW-complessi.

2.13 Proposizione. *Se (X, A) è una coppia di CW-complessi, allora $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ è un retratto per deformazione di $X \times I$. In particolare (X, A) ha la proprietà di estensione dell'omotopia.*

Dimostrazione. Considero una retrazione $r\colon \mathbb{D}^n \times I \to (\mathbb{D}^n \times \{0\}) \cup (\partial\mathbb{D}^n \times I)$, che rappresenta la proiezione radiale dal punto $(0,2) \in \mathbb{D}^n \times \mathbb{R}$ ed è definita da $r(x,t) = tr + (1-t)x$. Allora essa è anche una retrazione per deformazione di $\mathbb{D}^n \times I$ su $(\mathbb{D}^n \times \{0\}) \cup (\partial\mathbb{D}^n \times I)$. Questa retrazione per deformazione dà origine a una retrazione per deformazione di $X^n \times I$ su $(X^n \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$, poiché $X^n \times I$ è ottenuto da $(X^n \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$ mediante l'incollamento di copie di $\mathbb{D}^n \times I$ lungo $(\mathbb{D}^n \times \{0\}) \cup (\partial\mathbb{D}^n \times I)$. Se consideriamo la retrazione per deformazione di $X^n \times I$ su $(X^n \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$, questa concatenazione infinita di omotopie è una retrazione per deformazione di $X \times I$ su $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$.



Tale retrazione per deformazione è continua in $t = 0$ in quanto è continua in $X^n \times I$, rimane costante nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{2^{n+1}}\right]$, e i CW-complessi hanno la topologia debole che rispetta gli scheletri. Dunque una funzione è continua se e solo se la sua restrizione su ogni scheletro è continua. □

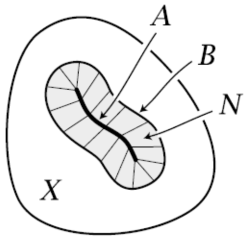
Quest'ultima proposizione ha come corollario un fatto riguardante i cilindri mappanti che tornerà utile nella dimostrazione di un importante teorema.

Corollario. *Sia $f\colon X \to Y$ una funzione tra spazi topologici. La coppia di spazi (M_f, X) soddisfa la proprietà di estensione dell'omotopia.*

Dimostrazione. Dimostreremo il seguente fatto più generale, per poi applicarlo al caso specifico del corollario.

Una coppia di spazi (X, A) ha la proprietà di estensione dell'omotopia se A ha un intorno del tipo cilindro mappante in X, ovvero un intorno chiuso N contenente un sottospazio B, pensato come il bordo di N, con $N \setminus B$ un intorno aperto di A, tale che esiste una funzione $f\colon B \to A$ e un omeomorfismo $h\colon M_f \to N$ con $h_{|A \cup B} = id$.

Per verificare la proprietà di estensione dell'omotopia, osserviamo innanzitutto che $I \times I$ si ritrae su $(I \times \{0\}) \cup (\partial I \times I)$, dunque $(B \times I) \times I$ si ritrae a $(B \times I \times \{0\}) \cup (B \times \partial I \times I)$ e questa retrazione induce una retrazione di $M_f \times I$ su $(M_f \times \{0\}) \cup ((A \cup B) \times I)$. Perciò $(M_f, A \cup B)$ ha la proprietà di estensione dell'omotopia. Analogamente si ottiene il medesimo risultato anche per la coppia omeomorfa $(N, A \cup B)$. Date una funzione $X \to Y$ e



un'omotopia della sua restrizione ad A, possiamo prendere l'omotopia costante su $X \setminus (N \setminus B)$ e poi estenderla sopra N applicando la proprietà di estensione dell'omotopia di $(N, A \cup B)$ all'omotopia data su A e all'omotopia costante su B. $\square$

Quest'ultimo corollario sembra più un esercizio che un fatto particolarmente interessante. Invece, dà la base per un teorema potente che coinvolge il cilindro mappante e l'equivalenza omotopica. Prima di enunciare e dimostrare questo risultato alquanto sorprendente, enunciamo la seguente proposizione, la cui dimostrazione si trova in [Hat09] a pagina 16.

2.14 Proposizione. *Se la coppia di spazi (X, A) soddisfa la proprietà di estensione dell'omotopia e l'inclusione $A \hookrightarrow X$ è un'equivalenza omotopica, allora A è un retratto per deformazione di X.*

Come dicevamo poco fa, il cilindro mappante viene coinvolto in una condizione necessaria e sufficiente per avere un'equivalenza omotopica tra due spazi topologici.

2.15 Proposizione. *Una funzione $f\colon X \to Y$ è un'equivalenza omotopica se e solo se X è un retratto per deformazione del cilindro mappante M_f. In particolare, due spazi X e Y sono omotopicamente equivalenti se e solo se esiste un terzo spazio contenente sia X sia Y come retratti per deformazione.*

Dimostrazione. Nel diagramma sottostante le funzioni i e j sono inclusioni e r è la retrazione canonica.

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, shift right, "j"'] \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "i"'] & \\
& M_f \arrow[u, shift right, "r"']
\end{tikzcd}$$

Dunque $f = r \circ i$ e $i \sim j \circ f$. Poiché j e r sono equivalenze omotopiche, f è un'equivalenza omotopica se e solo se i è un'equivalenza omotopica, in quanto composizione di due equivalenze omotopiche è un'equivalenza omotopica e una funzione omotopa a un'equivalenza omotopica è un'equivalenza omotopica. Applicando la proposizione precedente alla coppia (M_f, X), che soddisfa la proprietà di estensione dell'omotopia, considerando l'intorno $X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ di X in M_f, si ottiene la tesi.

□

2.4 Approssimazione cellulare

Passiamo ora ad un altro aspetto delle funzioni tra spazi topologici. Prima di iniziare definiamo le funzioni tra due CW-complessi.

2.16 Definizione. Siano X,Y due CW-complessi. Una **funzione** $f\colon X \to Y$ si dice **cellulare** se $f(X^n) \subseteq Y^n$ per ogni n.

Dunque una funzione cellulare rispetta la struttura delle celle dei CW-complessi mappando gli n-scheletri del dominio negli n-scheletri del codominio. Ciò non è per nulla scontato in generale.

Un "sogno", quindi, sarebbe che una funzione tra due CW-complessi possa essere anche cellulare o deformata a una funzione cellulare, questo perché permetterebbe l'utilizzo delle proprietà che hanno le coppie di spazi, anche solo sugli scheletri di ciascun spazio. Il seguente teorema fa avverare questo "sogno":

2.17 Teorema (di approssimazione cellulare). *Ogni funzione $f\colon X \to Y$ tra CW-complessi è omotopa a una funzione cellulare. Se f è cellulare su un sottocomplesso $A \subseteq X$, l'omotopia può essere presa costante su A.*

Idea di dimostrazione. Dimostriamo per induzione sugli scheletri.

Se $f(X^0) \nsubseteq Y^0$ per ogni 0-cella e^0_α, ovvero i punti, $f(e^0_\alpha)$ è contenuto in una k-cella, con k minimo, e^k_β di Y. Dunque $\exists y_0 \in e^k_\beta \setminus f(e^0_\alpha)$. Costruiamo una retrazione radiale di $e^k_\beta \setminus \{y_0\}$ su $\partial \bar{e}^k_\beta$ e andiamo avanti fino ad ottenere un'omotopia che manda $f(e^0_\alpha)$ in una 0-cella di Y. Grazie alla proprietà di estensione dell'omotopia le omotopie locali si estendono a omotopie globali.

Per il passo induttivo iteriamo lo stesso metodo, usando anche il fatto che ogni funzione $\mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^k$, con $n < k$, è omotopa a una funzione non suriettiva. □

Tale teorema è molto utile perché, come abbiamo visto precedentemente in questo capitolo, uno spazio ottenuto incollando celle attraverso funzioni cellulari (che sono particolari funzioni di incollamento) a un CW-complesso è ancora un CW-complesso e ciò permette una migliore compresione dello spazio topologico in esame e, come vedremo nel Capitolo 4, un modo per calcolare i gruppi di omotopia.

Corollario. *Una coppia di CW-complessi* (X, A) *è* n*-connessa se tutte le celle in* $X \setminus A$ *hanno dimensione più grande di* n*. In particolare la coppia* (X, X^n) *è* n*-connessa, dunque l'inclusione* $X^n \hookrightarrow X$ *induce isomorfismi sui gruppi di omotopia* π_i *per* $i < n$ *e un epimorfismo sui gruppi di omotopia per* $i = n$*.*

Dimostrazione. Applicando il teorema di approssimazione cellulare alle funzioni $(\mathbb{D}^i, \partial\mathbb{D}^i) \to (X, A)$ con $i \leq n$ otteniamo la prima parte della tesi. La seconda parte della tesi segue scrivendo la lunga succesione esatta della coppia (X, X^n). □

Osserviamo che tale corollario è collegato al Lemma 2.6.

Sulla situazione del precedente corollario si può dire qualcosa in più, ma vediamo se il teorema precedente può essere esteso al caso relativo.

2.18 Teorema (di approssimazione cellulare relativa). *Ogni funzione* $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ *di coppie di CW-complessi ha un'approssimazione cellulare da un'omotopia attraverso tali funzioni di coppie.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $f_{|A}\colon A \to B$. Per il teorema di approssimazione cellulare ottengo $f'\colon A \to B$ una funzione cellulare omotopa a $f_{|A}$ tramite l'omotopia H. Per la proprietà di estensione dell'omotopia possiamo considerare H come un'omotopia su tutto X, per cui otteniamo una funzione $f'\colon X \to Y$ tale che $f'_{|A}$ è una funzione cellulare. Per il teorema di approssimazione cellulare $f' \sim f''$, dove $f''\colon X \to Y$ è una funzione cellulare tale che $f'_{|A} = f''_{|A}$. Quest'ultima funzione fornisce l'approssimazione cellulare di f richiesta. □

Corollario. *Sia* (X, A) *una coppia di CW-complessi e supponiamo che tutte le celle di* $X \setminus A$ *abbiano dimensione maggiore di* n*. Allora* $\pi_i(X, A) = 0$ *per* $i \leq n$*.*

Dimostrazione. Sia $[f] \in \pi_i(X, A)$. Per il teorema di approssimazione cellulare relativa la funzione di coppie $f\colon (\mathbb{D}^i, \mathbb{S}^{i-1}) \to (X, A)$ è omotopa a una funzione g tale che $g(\mathbb{D}^i) \subseteq X^i$. Per $i \leq n$ si ha che $X^i \subseteq A$, dunque $im(g) \subseteq A$. Pertanto $[f] = [g] = 0$ per il criterio di compressione (Lemma 2.3). □

Corollario. *Se* X *è un CW-complesso, allora* $\pi_i(X, X^n) = 0$ *per ogni* $i \leq n$*.*

Scrivendo la lunga successione esatta dei gruppi di omotopia della coppia di spazi (X, X^n) si ha che:

Corollario. *Sia* X *un CW-complesso. Per* $i < n$*,* $\quad \pi_i(X) \simeq \pi_i(X^n)$*.*

Questi teoremi, e i conseguenti corollari, permettono di raffinare la successione esatta decritta nel Lemma 1.27 e dunque di avere una descrizione più accurata dello spazio topologico in analisi, oltre a descriverne alcune proprietà.

Capitolo 3

Teorema di Whitehead

Ora andremo a enunciare e dimostrare un teorema importante in teoria dell'omotopia formulato da J.H.C. Whitehead.

Il teorema di Whitehead, conseguenza del teorema di approssimazione cellulare, coinvolge le funzioni che inducono isomorfismi tra i gruppi di omotopia tra due spazi topologici. Definiamo tali funzioni.

3.1 Definizione. Siano X,Y due spazi topologici. Una funzione $f\colon X \to Y$ si chiama **equivalenza omotopica debole** se la funzione indotta $f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ è iniettiva e se la funzione indotta $f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to (Y, f(x_0))$ è un isomorfismo di gruppi per $n \geq 1$ e per ogni $x_0 \in X$.

Osserviamo che se X e Y sono due spazi topologici connessi per archi, è sufficiente che $f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to (Y, f(x_0))$ sia un isomorfismo per $n \geq 1$ e per un solo punto $x_0 \in X$, affinché f sia un'equivalenza omotopica debole.

È chiaro che ogni equivalenza omotopica è un'equivalenza omotopica debole. Ma è vero il viceversa? Il teorema di Whitehead risponde in modo affermativo a questa domanda a patto che ci siano determinate ipotesi su X e Y.

Prima di enunciare e dimostrare il teorema di Whitehead, abbiamo bisogno di un lemma preliminare.

3.2 Lemma (di compressione). *Sia (X, A) una coppia di CW-complessi e sia (Y, B) una coppia qualsiasi tale che $B \neq \emptyset$. Supponiamo che per ogni n per cui $X \setminus A$ ammette n-celle, $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$ per ogni $y_0 \in B$. Allora ogni funzione $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ è omotopa relativamente ad A alla funzione $X \to B$.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'asserzione per induzione su $k \in \mathbb{N}$. Supponiamo di avere un'omotopia relativamente ad A tra f e una funzione definita su X^{k-1} con immagine in B.

Se φ è la funzione caratteristica di una cella e^k di $X \setminus A$, consideriamo la composizione $f \circ \varphi \colon (\mathbb{D}^k, \partial\mathbb{D}^k) \to (Y, B)$, ovvero $(\mathbb{D}^k, \partial\mathbb{D}^k) \xrightarrow{\varphi} (X^k, X^{k-1}) \xrightarrow{f} (Y, B)$.

Per $k = 0$, la coppia (Y, B) è 0-connessa, quindi ogni funzione $(\mathbb{D}^0, \partial\mathbb{D}^0) \to (Y, B)$ è omotopa a una funzione $\mathbb{D}^0 \to B$.

Per $k \neq 0$, per ipotesi $\pi_k(Y, B, y_0) = 0$ per ogni $y_0 \in B$, quindi la composizione $f \circ \varphi$ rappresenta la classe di equivalenza nulla. Per il criterio di compressione $f \circ \varphi$ è omotopa relativamente a $\partial\mathbb{D}^k$ ad una funzione con immagine contenuta in B. In entrambi i casi tale omotopia di $f \circ \varphi$ induce un'omotopia di f sullo spazio quoziente $X^{k-1} \cup e^k$ di $X^{k-1} \sqcup \mathbb{D}^k$, un'omotopia relativamente a X^{k-1}.

Iterando questo procedimento per ogni k-cella di $X \setminus A$ e prendendo l'omotopia costante su A, otteniamo un'omotopia di $F_{|X^k \cup A}$ a una funzione in B. Per la proprietà di estensione dell'omotopia, tale omotopia si estende a un'omotopia definita su tutto X e il passo induttivo è concluso.

Se le celle di $X \setminus A$ hanno dimensione limitata, la tesi è provata per induzione. In caso contrario restringiamo la k-esima omotopia relativa al k-scheletro all'intervallo $\left[1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right]$ ottenendo la tesi per incollamento. Ogni k-scheletro X^k è eventualmente costante sotto l'azione di queste omotopie, quindi abbiamo una ben definita omotopia H, $t \in [0, 1]$ con $H_1(X) \subseteq B$. $\square$

Osserviamo che se $n = 0$, la condizione $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$ per ogni $y_0 \in B$ deve essere sostituita dicendo che la coppia (Y, B) è 0-connessa.

Ora siamo pronti per l'enunciato e la dimostrazione del teorema di Whitehead.

3.3 Teorema (di Whitehead). *Siano X, Y due CW-complessi connessi. Se esiste un'equivalenza omotopica debole $f \colon X \to Y$, allora f è un'equivalenza omotopica. In particolare se f è l'inclusione di un sottocomplesso $X \hookrightarrow Y$, allora X è un retratto per deformazione di Y.*

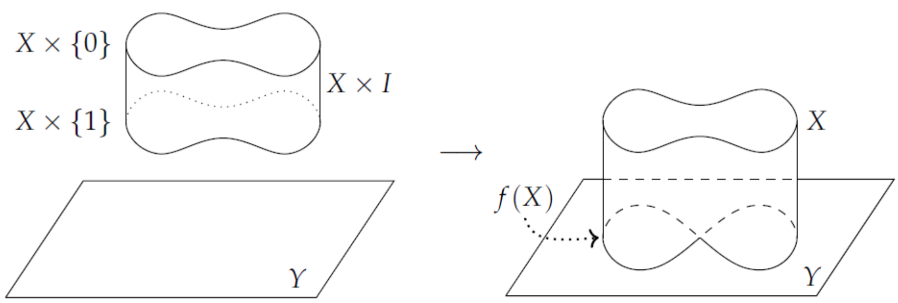
Dimostrazione. Possiamo suddividere la dimostrazione in due casi.

Caso 1: Consideriamo il caso in cui f è l'inclusione di un sottocomplesso, ovvero $f \colon X \hookrightarrow Y$. Per ipotesi abbiamo che $\pi_n(X) \simeq \pi_n(Y)$ per ogni n. Consideriamo la successione esatta dei gruppi di omotopia della coppia (Y, X):

$$\ldots \xrightarrow{\iota_*} \pi_n(Y, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(Y, X, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(X, x_0) \xrightarrow{\iota_*} \ldots$$

Poiché $f = \iota$ induce isomorfismi su tutti i gruppi di omotopia, i gruppi di omotopia relativi $\pi_n(Y, X) = 0$ (osserviamo che x_0 si può omettere in quanto i CW-complessi sono connessi per ipotesi). Applichiamo il lemma di compressione alla funzione identica $(Y, X) \to (Y, X)$: $X \neq \emptyset$ e per ogni n i gruppi di omotopia sono nulli, quindi l'identità è omotopa relativamente a X a una funzione $Y \to X$ che è una retrazione, e dunque X è retratto per deformazione di Y.

Caso 2: il caso generale di una funzione $f\colon X \to Y$ può essere ricondotto al Caso 1 (quindi a un'inclusione) usando il cilindro mappante e sfruttando la Proposizione 2.15. Consideriamo il cilindro mappante $M_f = (X \times I) \sqcup Y/(x,1) \sim f(x)$, il quale contiene sia $X = X \times \{0\}$ sia Y come sottospazi, e Y è un retratto per deformazione di M_f.



Possiamo vedere la funzione f come composizione dell'inclusione $\iota\colon X \hookrightarrow M_f$ con la retrazione $r\colon M_f \to Y$:

$$f\colon X = X \times \{0\} \overset{\iota}{\hookrightarrow} M_f \xrightarrow{r} Y$$

Poiché M_f è omotopicamente equivalente a Y tramite r, è sufficiente mostrare che X è un retratto per deformazione di M_f, in quanto così possiamo sostituire f con l'inclusione ι (perché f è un'equivalenza omotopica debole) o, equivalentemente, che i gruppi di omotopia $\pi_n(M_f, X) = 0$ per ogni n.

Se la funzione $f\colon X^n \to Y^n$ è cellulare ogni n, allora (M_f, X) è una coppia di CW-complessi e per il Caso 1 X è un retratto per deformazione di M_f.

Se la funzione f non è cellulare, per il teorema di approssimazione cellulare esiste una funzione cellulare $g\colon X \to Y$ omotopa alla funzione f. Dunque applicando il Caso 1 alla funzione g e al cilindro mappante M_g si conclude la dimostrazione. $\square$

3.4 Osservazione. Osserviamo che il teorema di Whitehead dimostra che ogni equivalenza omotopica debole tra CW-complessi è un'equivalenza omotopica. Inoltre, poiché i CW-complessi sono dati per incollamento di mappe i cui domini sono sfere, i gruppi di omotopia di tali spazi danno molte informazioni grazie al teorema di Whitehead.

Attenzione che il teorema di Whitehead non dice che due CW-complessi X e Y con gruppi di omotopia isomorfi sono omotopicamente equivalenti, in quanto c'è una differenza tra dire che X e Y hanno gruppi di omotopia isomorfi e dire che c'è una funzione $X \to Y$ che induce isomorfismi sui gruppi di omotopia.

Vediamo un controesempio.

Esempio. Sia $X = \mathbb{RP}^2$ e sia $Y = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{RP}^\infty$. Questi spazi hanno come gruppo fondamentale $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il rivestimento universale di $\mathbb{RP}^2$ è $\mathbb{S}^2$, dunque per la Proposizione 1.20 $\pi_i(X) \simeq \pi_i(\mathbb{S}^2)$ per ogni $i \geq 2$. Il rivestimento universale di $\mathbb{RP}^\infty$ è $\mathbb{S}^\infty = \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{S}^n$, dunque per la Proposizione 1.20 e per la Proposizione 1.21 $\pi_i(Y) \simeq \pi_i(\mathbb{S}^2) \times \pi_i(\mathbb{S}^\infty)$ per ogni $i \geq 2$. Per determinare $\pi_i(\mathbb{S}^\infty)$ usiamo il teorema di approssimazione cellulare. Ogni funzione $f \colon \mathbb{S}^i \to \mathbb{S}^\infty$ è omotopa a una funzione cellulare g per il teorema di approssimazione cellulare, dunque $im(g) \subseteq \mathbb{S}^n$ per $i < n$. Quindi $[f] = [g] \in \pi_i(\mathbb{S}^n) = 0$ e per cui si ha che $\pi_i(X) \simeq \pi_i(\mathbb{S}^2) \simeq \pi_i(Y)$ per $i \geq 2$. Dunque X e Y hanno gli stessi gruppi di omotopia. Però per il teorema di Whitehead non può esistere una funzione $f \colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{RP}^\infty$ che induce isomorfismi tra i gruppi di omotopia π_n per ogni n e dunque non esiste un'equivalenza omotopica tra i due spazi.

Sembra piuttosto raro che il tipo di omotopia di un CW-complesso è determinato dai suoi gruppi di omotopia.

Un caso speciale in cui il tipo di omotopia di un CW-complesso è determinato dai suoi gruppi di omotopia è quando tutti i gruppi di omotopia sono banali, per cui la funzione di inclusione di una 0-cella in un complesso induce un isomorfismo sui gruppi di omotopia, cosicché il complesso si retragga per deformazione alla 0-cella. Oppure un altro caso in cui un CW-complesso che ha il tipo di omotopia univocamente determinato dai gruppi di omotopia è quando esso ha un gruppo di omotopia non banale. Gli spazi che soddisfano questa situazione sono gli spazi di Eilenburg-MacLane, di cui non tratteremo in questo testo.

Qualcosa di familiare alla filosofia del lemma di compressione è il seguente lemma.

3.5 Lemma (di estensione). *Data una coppia di CW-complessi (X, A) e una funzione $f \colon A \to Y$ con Y connesso per archi, allora f può essere estesa a una funzione $X \to Y$ se $\pi_{n-1}(Y) = 0$ per ogni n tale che $X \setminus A$ ha celle di dimensione n.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'asserzione per induzione sugli scheletri. Assumiamo che f sia stata estesa sull'$(n-1)$-esimo scheletro. Allora un'estensione sopra una n cella esiste se e solo se la composizione delle funzioni di incollamento delle celle $\mathbb{S}^{n-1} \to X^{n-1}$ con $f \colon X^{n-1} \to Y$ è nullomotopica. (Il resto della dimostrazione si trova a pagg.148 - 151 di Dieck [tD08]) $\square$

Capitolo 4

Gruppi di Omotopia Stabili

Finora abbiamo parlato dei gruppi di omotopia, delle loro proprietà e di ciò che possono dire su uno spazio, scorgendo anche un'interessante connessione con le sfere. Ma non abbiamo mai parlato del calcolo dei gruppi di omotopia, a eccezione della Proposizione 1.21. Questa difficoltà nasce dal fatto che i gruppi di omotopia sono abeliani dal secondo ordine in poi e ciò impedisce di generalizzare a dimensioni superiori il teorema di Seifert-van Kampen utilizzato per il calcolo dei gruppi fondamentali.

Questa difficoltà non da poco viene un po' meno con due teoremi che vedremo in questo capitolo in quanto essi condurranno all'idea dei gruppi stabili di omotopia. La ricerca dei gruppi stabili di omotopia è ardua ed è ancora oggetto di ricerca. Già dal primo capitolo abbiamo osservato, con un certo stupore, che sfere e gruppi di omotopia sono collegati. E questo è uno dei motivi per cui il calcolo dei gruppi di omotopia delle sfere è oggetto di ricerca ancora oggi.

In questo capitolo vedremo come calcolare alcuni gruppi di omotopia, prediligendo i gruppi di omotopia delle sfere.

4.1 Sospensione ed escissione

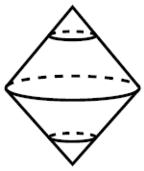
Diamo un paio di definizioni che ci saranno utili per enunciare i teoremi di cui parlavamo poco fa.

4.1 Definizione. Dato uno spazio topologico X, il **cono** $\mathcal{C}X$ è lo spazio quoziente $\mathcal{C}X = (X \times I)/(X \times \{0\})$ del prodotto di X con I rispetto alla relazione di equivalenza che identifica i punti del tipo $(x, 0)$.

In altre parole, il cono $\mathcal{C}X$ si ottiene incollando il cilindro $X \times I$ dalla sua faccia $X \times \{0\}$ a un punto $x \in X$ lungo la funzione $p\colon X \times \{0\} \to x$.

4.2 Definizione. Per uno spazio topologico X, la **sospensione** ΣX è il quoziente di $X \times I$ ottenuto collassando $X \times \{0\}$ a un punto e $X \times \{1\}$ a un altro punto, ovvero $\Sigma X = (X \times I)/(X \times \{0\}, X \times \{1\})$.

Esempio. Sia $X = \mathbb{S}^n$. La sospensione di X è $\Sigma X = \mathbb{S}^{n+1}$ con i due punti di sospensione ai polo nord e sud di $\mathbb{S}^{n+1}$, ovvero i punti $(0, ..., \pm 1)$.



Se X è un CW-complesso, allora ΣX e $\mathcal{C}X$ sono CW-complessi come quozienti di $X \times I$ con la struttura di cella prodotto (descritta dettagliatamente in [Hat09] a pagina 8), ove ad I è data dalla struttura di cella standard di due 0-celle attaccate da una 1-cella.

Inoltre, possiamo vedere X come un sottospazio di $\mathcal{C}X$ tramite $X \times \{1\} \subseteq \mathcal{C}X$. Poiché $\mathcal{C}X$ è semplicemente connesso, la lunga successione esatta di gruppi di omotopia fornisce gli isomorfismi $\pi_n(\mathcal{C}X, X, x_0) \simeq \pi_{n-1}(X, x_0)$. Quindi si possono usare proprietà dei gruppi di omotopia relativi sui gruppi di omotopia.

La sospensione comincia a diventare importante nella topologia algebrica perché una sua proprietà utile è che non solo gli spazi ma anche le funzioni possono essere sospese. Una funzione $f\colon X \to Y$ si sospende a $\Sigma f\colon \Sigma X \to \Sigma Y$, mediante la funzione quoziente di $f \times id\colon X \times I \to Y \times I$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, hook] \\
X \times I \arrow[r, "{(f,id)}"'] \arrow[d, two heads] & Y \times I \arrow[d, two heads] \\
\Sigma X \arrow[r, "\Sigma f"] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

Enunciamo il seguente teorema (la cui dimostrazione si trova in [Hat09] a pagg. 361-362 oppure in [tD08] a pagg. 150-151) che avrà un ruolo cruciale nel teorema seguente:

4.3 Teorema (di escissione). *Sia X un CW-complesso formato dall'unione di sottocomplessi A e B tali che $A \cap B = C \neq \emptyset$ sia connesso per archi. Se (A, C) è una coppia m-connessa e (B, C) è una coppia n-connessa, con $m, n \geq 0$, allora la funzione $\pi_i(A, C) \to \pi_i(X, B)$ indotta dall'inclusione è un isomorfismo per $i < m + n$ e un epimorfismo per $i = m + n$*

Il teorema (o proprietà) di escissione non funziona sempre con i gruppi di omotopia ma c'è qualche intervallo di dimensioni in cui esso funziona e ciò appoggia l'idea della stabilità dei gruppi di omotopia, ancora oggi oggetto di ricerca. Per questo motivo, il teorema di escissione può essere visto come un analogo del teorema di Seifert-van Kampen, anche se molto più debole in quanto non calcola direttamente i gruppi di omotopia ma fornisce delle relazioni tra gruppi di omotopia di spazi differenti. Ciò che rende difficile il calcolo dei gruppi di omotopia di uno spazio topologico è il fallimento (o meglio la poca applicabilità) del teorema di escissione nelle condizioni non soddisfatte dal teorema.

Una conseguenza di tale teorema è molto utile nel calcolo dei gruppi di omotopia:

4.4 Teorema (di Sospensione di Freudenthal). *Sia X un CW-complesso $(n-1)$-connesso. Per ogni funzione $f\colon \mathbb{S}^i \to X$ si consideri la sua sospensione $\Sigma f\colon \Sigma\mathbb{S}^i \to \Sigma X$. Allora la funzione $\pi_i(X) \to \pi_{i+1}(\Sigma X)$, definita da $[f] \mapsto [\Sigma f]$, definisce un isomorfismo per $i < 2n-1$ e un epimorfismo per $i = 2n-1$.*

Dimostrazione. Decomponiamo la sospensione ΣX come l'unione di due coni $\mathcal{C}_+X$ e $\mathcal{C}_-X$ che si intersecano in una copia di X. Usando la lunga successione esatta e sfruttando il fatto che i coni $\mathcal{C}_+X$ e $\mathcal{C}_-X$ sono semplicemente connessi, la funzione di sospensione può essere scritta come una composizione di funzioni

$$\pi_i(X) \simeq \pi_{i+1}(\mathcal{C}_+X, X) \to \pi_{i+1}(\Sigma X, \mathcal{C}_-X) \simeq \pi_{i+1}(\Sigma X)$$

ove la funzione in mezzo è indotta dall'inclusione. Poiché X è $(n-1)$-connesso, dalla lunga sequenza esatta di $(\mathcal{C}_\pm X, X)$, osserviamo che le coppie $(\mathcal{C}_\pm, X)$ sono n-connesse. Per il teorema di escissione $\pi_{i+1}(\mathcal{C}_+X, X) \to \pi_{i+1}(\Sigma X, \mathcal{C}_-X)$ è un isomorfismo per $i+1 < 2n$ ed è un epimorfismo per $i+1 = 2n$. $\square$

Come conseguenza del teorema di escissione, il teorema di sospensione di Freudenthal guida verso i gruppi stabili di omotopia, in particolare vedremo i gruppi di omotopia delle sfere.

4.2 Gruppi di omotopia delle sfere

Come preannunciato, ora ci occuperemo del calcolo dei gruppi di omotopia delle sfere $\pi_i(\mathbb{S}^n)$. Il loro calcolo è molto difficile in generale, ma con gli strumenti che abbiamo in mano ora possiamo calcolarne alcuni.

Osserviamo che se $f\colon \mathbb{S}^i \to \mathbb{S}^n$ è una funzione non suriettiva, ovvero $\exists y \in \mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^i)$, allora essa si fattorizza attraverso $\mathbb{R}^n$, il quale è uno spazio semplicemente connesso. Componendo f con una retrazione $\mathbb{R}^n \to x_0$, otteniamo che $f \sim \varepsilon_{x_0}$. Però ci sono funzioni suriettive $\mathbb{S}^i \to \mathbb{S}^n$ per $i < n$ per cui tale procedimento fallisce. Affinché le cose funzionino, dobbiamo "trasformare" f in una funzione cellulare. Dunque ci domandiamo: $\pi_n(\mathbb{S}^k) = 0$ per $n < k$?

Una strategia apparentemente intuitiva per provare che $\pi_n(\mathbb{S}^k) = 0$ per $n < k$ sarebbe di mostrare prima che ogni funzione $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^k$ può essere deformata per rendere la sua immagine mancante al più di un punto di $\mathbb{S}^k$, e poi usare il fatto che il complemento di un punto in $\mathbb{S}^k$ è contraibile per terminare la dimostrazione. Uno potrebbe pensare che il primo step non sia necessario, ovvero che nessuna funzione continua $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^k$ potrebbe essere suriettiva quando $n < k$, ma non è arduo produrre tali funzioni. Perciò per rendere questa strategia una dimostrazione valida bisogna fare alcuni lavori per costruire omotopie eliminando lo strano comportamento di queste funzioni che alzano la dimensione.

Per funzioni tra CW-complessi è sufficiente richiedere che le funzioni siano tra celle della stessa dimensione o di dimensione inferiore.

Per il teorema di approssimazione cellulare è un fatto fondamentale per cui funzioni arbitrarie possono sempre essere deformate a funzioni cellulare. Dunque:

4.5 Proposizione. *$\pi_n(\mathbb{S}^k) = 0$ per $n < k$.*

Dimostrazione. Se $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{S}^k$ sono dotate dell'usuale struttura di celle, con le 0-celle come punti base, allora ogni funzione che preserva ogni punto base $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^k$ è omotopa, fissando un punto base, a una funzione cellulare per il teorema di approssimazione cellulare. Ovvero per $[f] \in \pi_n(\mathbb{S}^k)$, la funzione $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^k$ è cellulare . Dunque $f(\mathbb{S}^n) \subseteq (\mathbb{S}^k)_n$. Ma $(\mathbb{S}^k)_n$ è un punto, quindi f è la funzione costante se $n < k$. □

Riscriviamo il teorema di sospensione nel caso di $X = \mathbb{S}^n$.

4.6 Teorema (di Sospensione (caso sfere)). *Sia $f\colon \mathbb{S}^i \to \mathbb{S}^n$ una funzione e consideriamo la sua sospensione $\Sigma f\colon \Sigma\mathbb{S}^i \to \Sigma\mathbb{S}^n$. Allora la funzione $\pi_i(\mathbb{S}^n) \to \pi_{i+1}(\mathbb{S}^{n+1})$, definita da $[f] \mapsto [\Sigma f]$, è un isomorfismo per $i < 2n-1$ e un epimorfismo per $i = 2n-1$.*

In questo modo sarà leggermente più facile dimostrare il seguente fatto:

Corollario. *Esiste un isomorfismo $\pi_n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$, generato dalla funzione identica, per ogni $n \geq 1$.*

Dimostrazione. Per il teorema di sospensione (caso sfere) abbiamo che:

$$\mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \twoheadrightarrow \pi_2(\mathbb{S}^2) \simeq \pi_3(\mathbb{S}^3) \simeq \pi_4(\mathbb{S}^4) \simeq ...$$

ove la prima funzione è suriettiva e le successive funzioni sono isomorfismi. $\square$

Ciò che abbiamo provato quindi è che

$$\pi_n(\mathbb{S}^k) = \begin{cases} 0 & \text{se } n < k \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = k \end{cases}$$

Questo permette di costruire una tabella di gruppi di omotopia delle sfere. Di seguito c'è una tabella che include anche gruppi di omotopia delle sfere che non abbiamo calcolato in questo testo.

$\pi_i(S^n)$

$n \downarrow$ \ $i \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$
5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$
6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
7	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0

Osservando questa tabella si nota la larga regione di zeri sotto la diagonale, dovuta al fatto che $\pi_i(\mathbb{S}^n) = 0$ per ogni $i < n$. C'è un'altra sequenza di zeri nella prima riga, che suggerisce che $\pi_i(\mathbb{S}^1) = 0$ per ogni $i > 1$, che discende dalla Proposizione 1.20.

Si può, inoltre, osservare che lungo ogni diagonale i gruppi $\pi_{n+k}(\mathbb{S}^n)$, con k fissato e n variabile, diventa indipendente da n per un gran numero di n. Questa proprietà di stabilità è dovuta al teorema di sospensione di Freudenthal.

Bibliografia

[Hat09] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2009.

[Man14] Marco Manetti. *Topologia.* Springer, 2014.

[Mas67] William S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction.* Salomon Bochner and W. G. Lister, Editors, 1967.

[Mau80] C.R.F. Maunder. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 1980.

[Nak03] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics.* Institute of Physics Publishing, 2003.

[tD08] Tammo tom Dieck. *Algebraic Topology.* European Mathematical Society, 2008.