Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"
Corso di Laurea Triennale in Matematica

TESI DI LAUREA

Esistenza di triangolazioni per superfici compatte

Relatrice:
Prof.ssa Alessandra Bertapelle

Laureando:
Stefano Sanguin
Matricola 2033910

Anno Accademico 2023-2024
20 settembre 2024

Ai miei fratelli

Indice

Introduzione **ii**

1 Figure geometriche **1**
1.1 Complessi simpliciali e triangolazioni 1
1.1.1 Simplessi e complessi simpliciali euclidei 1
1.1.2 Simplessi e complessi simpliciali astratti 3
1.1.3 Rappresentazioni geometriche e triangolazioni 4
1.1.4 Grafi 6
1.2 Varietà 8
1.2.1 Definizione di Varietà topologica 8
1.2.2 Altre categorie di varietà 8
1.2.3 Esempi di varietà 9
1.2.4 Triangolazioni di varietà 11

2 Curve e grafi nel piano euclideo **14**
2.1 Curve nel piano 15
2.1.1 Archi e curve di Jordan 15
2.1.2 Il Teorema di Jordan per poligonali semplici 16
2.2 Grafi planari 22
2.2.1 Il Teorema di Kuratowski 24
2.2.2 Grafi 2-connessi planari 25
2.3 Il Teorema della curva di Jordan 27
2.4 Il Teorema di Jordan-Schönflies 30

3 Triangolazioni di superfici compatte **36**
3.1 Dimostrazione dell'esistenza di triangolazioni per superfici compatte . 36
3.2 Esempi e applicazioni 41
3.2.1 Triangolazioni di superfici classiche 41
3.2.2 Superfici orientabili e non orientabili 43
3.2.3 La caratteristica di Eulero-Poincaré e il genere di una superficie compatta 44

Bibliografia **46**

Introduzione

Lo studio delle superfici topologiche ha avuto inizio con la formula di Eulero per i poliedri semplici (ossia omeomorfi alla sfera):

$$v - e + f = 2$$

dove v, e ed f indicano rispettivamente i numeri di vertici, spigoli e facce del poliedro.

Nella prima metà del XIX secolo, i matematici iniziarono ad esplorare l'applicabilità di questa formula ad altri spazi, ponendo le basi per la nascita della topologia. Furono trovate delle eccezioni, cioè poliedri per i quali il valore $v-e+f$, chiamato *caratteristica di Eulero-Poincaré*, non è pari a 2. Inoltre, furono considerati poliedri con facce e lati "curvi", anziché "rettilinei"[1].

Un contributo decisivo in questa direzione venne dagli studi di Bernhard Riemann nell'ambito di quella teoria che ora chiamiamo analisi complessa. Possiamo far risalire a Riemann, come espresso da Pavel S. Aleksandrov in [Ale32], la definizione di superficie come spazio di Hausdorff a base numerabile e localmente omeomorfo ad un aperto del piano $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, ossia come una varietà topologica bidimensionale. Secondo questo approccio potrebbe sembrare artificioso pensare a una superficie con una struttura poliedrica, cioè decomposta in triangoli incollati lungo i bordi. Tuttavia la presenza di tale decomposizione, detta *triangolazione*, ha molti vantaggi: le difficili considerazioni alle quali si è condotti dallo studio delle varietà sono sostituite dallo studio d'uno schema combinatorio finito e questo apre molte possibilità di impiego di metodi algebrici.

Così quando Hermann Weyl nella fondamentale opera [Wey13] definì per la prima volta in modo completamente rigoroso le *superfici di Riemann*, richiese come condizione che fosse possibile dotare questi oggetti di una triangolazione. Questo ulteriore requisito ispirò l'articolo [Rad25] di Tibor Radò del 1925, in cui si mostra che la triangolabilità di una superficie di Riemann è una conseguenza del fatto che le mappe di transizione della superficie sono olomorfe.

A noi interessa però un altro risultato contenuto in [Rad25]: *ogni superficie topologica è triangolabile*. Lo scopo di questa tesi è fornirne una dimostrazione nel caso di superfici compatte. Per farlo seguirò la dimostrazione in [Tho92] di Carsten Thomassen, presente anche in [MT01].

La dimostrazione non è immediata. La strategia è quella di ricoprire una superficie compatta S con un insieme finito di sottospazi omemorfi a quadrati chiusi; se l'unione G dei bordi di questi quadrati è (omeomorfa alla rappresentazione geometrica di) un grafo finito e tutte le componenti connesse di $S \setminus G$ sono (omeomorfe a) poligoni convessi, abbiamo a disposizione una "poligonazione" della superficie S (si veda la figura 1). Siccome ogni poligono convesso nel piano è triangolabile, S stessa è triangolabile.

Tuttavia, i bordi dei quadrati si possono incontrare in infiniti punti, e per ricondursi al caso "finito" servirà applicare pazientemente un argomento di deformazione dei bordi;

[1] Per approfondire la storia della formula di Eulero si veda [Ric12].

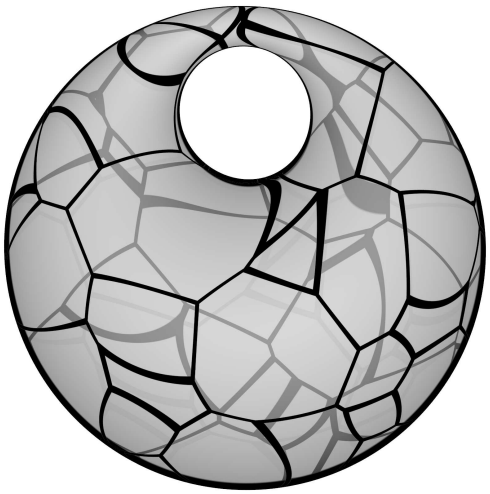


Figura 1: Una “poligonazione” di una superficie.

inoltre, dovremo garantire che le componenti connesse di $S \setminus G$ siano omeomorfe a poligoni convessi.

Vedremo come questi problemi possano essere risolti considerando le carte locali della superficie per ricondursi a lavorare con curve e grafi nel piano complesso.

La tesi è strutturata come segue.

Nel primo capitolo definiremo il concetto di triangolazione di una superficie. Gli ingredienti principali saranno le nozioni di complesso simpliciale e di varietà topologica. Concluderemo con una trattazione storica del problema della triangolazione di varietà. Poiché non presenta difficoltà, almeno a livello descrittivo, i concetti saranno definiti in ogni dimensione.

Il secondo capitolo si concentra sull'analisi di curve e grafi planari. Presenteremo un legame tra il Teorema di Kuratowski sulle condizioni di planarità dei grafi e il Teorema della curva di Jordan: in particolare, forniremo una dimostrazione di quest'ultimo usando la non planarità del grafo $K_{3,3}$. Discuteremo anche del Teorema di Jordan-Schönflies, un'estensione del Teorema della curva di Jordan: se J e J' sono curve di Jordan nel piano e f è un omeomorfismo tra di esse, allora f può essere estesa ad un omeomorfismo dell'intero piano. Questo è un risultato classico interessante di per sé. Verranno inoltre presentate due versioni della formula di Eulero applicata a grafi 2-connessi tracciati planari.

Il terzo capitolo contiene la dimostrazione del Teorema di Radò, il quale afferma che ogni superficie compatta è triangolabile. Sono presenti numerosi dettagli tecnici e la difficoltà della dimostrazione risiede precisamente in questi. Vengono poi proposti degli esempi di triangolazioni per le superfici classiche e alcune immediate applicazioni.

Il lavoro di tesi ha riguardato anche la generazione di immagini. La figura 1.7 a pagina 11 è stata creata con l'utilizzo del software SeifertView: essa rappresenta la superficie di Seifert relativa ai cosiddetti anelli di Borromeo e il suo doppio. Le immagini di oggetti tridimensionali (e qualcuno bidimensionale) sono state generate con il programma POV-Ray. Le altre sono state prodotte con l'aiuto della libreria Ti*k*Z di LaTeX.

In alcuni casi, le rappresentazioni delle curve di Jordan sono state volutamente rese più complesse, da un punto di vista visivo (ad esempio nella figura 2.3 a pagina 17 non è chiaro che i punti p_1 e p_2 si trovino all'esterno di J). Per queste immagini mi sono ispirato a labirinti, meandri e caerdroie, oggetti topologici le cui prime raffigurazioni risalgono a tempi preistorici. Essi possono essere descritti dalla configurazione, a meno di omeomorfismi del piano, di una curva di Jordan che interseca in finiti punti una retta orientata[2]. Mi sono servito di un codice Python per generare le coordinate del tragitto di tali curve.

[2]Per maggiori informazioni sullo studio dei meandri e sul problema della loro numerazione si veda [La 03].

Capitolo 1

Figure geometriche

La nozione di *figura geometrica* ha almeno due interpretazioni a cui corrispondono due concetti fondamentali: quello di *poliedro* da una parte e quello di *varietà* dall'altra.

Secondo la prima interpretazione, che possiamo definire *combinatoria*, insita nella geometria sintetica da Euclide fino ai nostri giorni, una figura è un sistema di elementi generalmente eterogenei (come punti, segmenti, triangoli, ecc.), collegati fra loro secondo certe regole, è dunque una *configurazione* nel senso più generale della parola.

Secondo l'altra interpretazione, una figura è un *insieme di punti*, in generale un insieme infinito di elementi omogenei. Affinché tale insieme possa costituire, in un modo o nell'altro, una figura geometrica possiamo introdurre una definizione d'intorno e un sistema di coordinate. Il concetto di figura dal punto di vista della teoria degli insiemi è antichissimo; si pensi, ad esempio, al concetto di luogo geometrio.

Per le definizioni in questo capitolo ho adoperato [Lee00].

1.1 Complessi simpliciali e triangolazioni

I complessi simpliciali sono spazi costruiti da blocchi più semplici chiamati simplessi, che sono punti, segmenti di retta, triangoli pieni, tetraedri solidi e loro analoghi in dimensione superiore. Forniscono un modo per costruire spazi topologici e giocano un ruolo fondamentale nella geometria e nella topologia algebrica.

Definiremo i complessi simpliciali in due fasi, partendo da una versione molto concreta (complessi euclidei) e procedendo verso una definizione più generale (complessi astratti). Vedremo che i complessi simpliciali astratti determinano con la loro realizzazione geometrica spazi topologici, chiamati poliedri.

1.1.1 Simplessi e complessi simpliciali euclidei

Ricordiamo che $k+1$ punti $v_0, v_1, \ldots, v_k$[1] nello spazio affine $\mathbb{R}^n$ si dicono *in posizione generale* se i k vettori $v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0$ sono linearmente indipendenti o, equivalentemente, non sono tutti contenuti in un sottospazio affine di dimensione $k-1$.

[1] Beninteso, $v_0, v_1, \ldots, v_k$ sono punti, non vettori; li indichiamo con la lettera v perché saranno *vertici*.

Definizione 1.1.1. Dati i punti $v_0, v_1, \ldots, v_k$ in posizione generale in $\mathbb{R}^n$, si chiama *k-simplesso* (o *simplesso di dimensione k*) l'insieme delle combinazioni baricentriche

$$\Delta(v_0, \ldots, v_k) = \left\{ \sum_{i=0}^{k} t_i v_i \;\middle|\; t_i \in [0,1], \textstyle\sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \right\}, \tag{1.1}$$

ovvero l'inviluppo convesso dei punti dati.

Inoltre, muniamo il simplesso della topologia indotta da quella di $\mathbb{R}^n$.

Un simplesso zerodimensionale è un punto; un simplesso unidimensionale è un segmento chiuso, simplessi bi- e tridimensionali sono rispettivamente un triangolo e un tetraedro[2], rappresentati in figura 1.1.

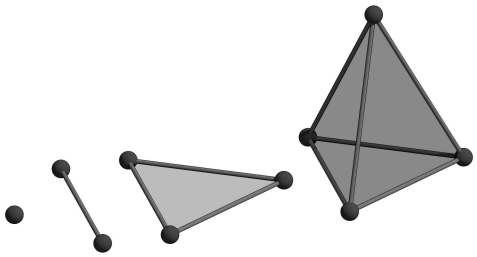


Figura 1.1: Simplessi euclidei fino alla terza dimensione.

Per $0 \leq r \leq k$, si chiama *faccia* r-dimensionale del simplesso $\Delta(v_0, \ldots, v_k)$ ogni r-simplesso, $\Delta(v_{i_0}, \ldots, v_{i_r})$, ottenuto prendendo $r+1$ punti (distinti) $v_{i_0}, \ldots, v_{i_r} \in \{ v_0, \ldots, v_k \}$. In particolare, le facce zerodimensionali sono anche dette i *vertici* del simplesso e le facce unodimensionali sono anche dette i *lati* del simplesso.

L'*interno relativo* di un simplesso σ si ottiene da σ rimuovendo tutte le facce di dimensione inferiore alla dimensione di σ. Osserviamo che l'interno di un vertice è il vertice stesso.

Ecco le semplici regole per unire i simplessi euclidei e formare una figura composta.

Definizione 1.1.2. Un *complesso geometrico* (o *complesso simpliciale euclideo*) è un insieme K di simplessi in $\mathbb{R}^n$ tale che:

(a) se $\sigma \in K$, allora ogni faccia di σ appartiene a K;

(b) due simplessi in K non hanno nessun punto in comune, oppure hanno in comune una e una sola faccia;

(c) ogni punto di un simplesso in K ha un intorno che interseca un numero finito di simplessi di K (tale proprietà è detta *finitezza locale*).

È mostrato un esempio nella figura 1.2.

La *dimensione* di K è la massima dimensione dei simplessi in K (ed è sempre al massimo n).

[2]Alcuni autori considerano anche $\emptyset$ un simplesso; in questo caso la sua dimensione è -1 per definizione.

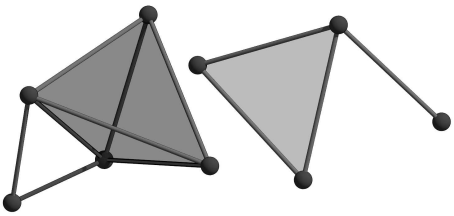


Figura 1.2: Un complesso simpliciale euclideo.

Sia K un complesso geometrico. Qualsiasi sottoinsieme $K' \subseteq K$ che sia esso stesso un complesso simpliciale è chiamato *sottocomplesso* di K. È chiaro che l'unica condizione che deve essere verificata è che le facce di ogni simplesso in K' siano in K'. In particolare, per qualsiasi intero non negativo k, il sottoinsieme $K^{(k)} \subseteq K$ costituito da tutti i simplessi di dimensione minore o uguale a k è un sottocomplesso, chiamato *k-scheletro* di K.

Dato un complesso geometrico K, l'unione di tutti i simplessi in K, con la topologia indotta da quella di $\mathbb{R}^n$, è uno spazio topologico che denotiamo con $|K|$ e chiamiamo *poliedro euclideo*.

Gli interni relativi di tutti i simplessi di un complesso geometrico K formano una partizione del poliedro $|K|$: per ogni punto $x \in |K|$ esiste esattamente un simplesso $\sigma \in K$ che contiene x nel suo interno relativo. Questo simplesso è denotato con $\mathrm{supp}(x)$ e viene chiamato il *supporto* del punto x.

1.1.2 Simplessi e complessi simpliciali astratti

Per alcune applicazioni è troppo restrittivo definire i poliedri come sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, pertanto definiamo un tipo di complesso più generale:

Definizione 1.1.3. Un *complesso simpliciale astratto* è una coppia $(V, \mathcal{K})$ dove V è un insieme, i cui elementi sono detti *vertici*, e $\mathcal{K}$ è una famiglia di sottoinsiemi di V finiti non vuoti chiamati *simplessi (astratti)*, per cui valgono le seguenti condizioni:

(a) $\{ v \} \in \mathcal{K}$ per ogni $v \in V$;

(b) se $\sigma \in \mathcal{K}$, allora ogni sottoinsieme non vuoto di σ è in $\mathcal{K}$.

Ogni sottoinsieme non vuoto di un simplesso astratto $\sigma \in \mathcal{K}$ è chiamato *faccia* di σ. La *dimensione* di un simplesso astratto $\sigma \in \mathcal{K}$ è definita come il numero di elementi di σ diminuito di uno. Chiameremo anche *k-simplesso astratto* un simplesso astratto di dimensione k. La dimensione di un complesso simpliciale astratto $(V, \mathcal{K})$ è l'estremo superiore delle dimensioni dei suoi simplessi; se ci sono simplessi di dimensioni arbitrariamente alte, $(V, \mathcal{K})$ è detto *di dimensione infinita*. Diciamo che $(V, \mathcal{K})$ è un complesso simpliciale astratto *finito* se V è un insieme finito, e *localmente finito* se ogni vertice appartiene solo a un numero finito di simplessi.

Dati un complesso simpliciale astratto $(V, \mathcal{K})$ e due sottoinsiemi $V' \subseteq V, \mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$, se $(V', \mathcal{K}')$ è esso stesso un complesso simpliciale, allora è chiamato un *sottocomplesso* di $(V, \mathcal{K})$. L'insieme $\mathcal{K}^{(k)}$ di tutti i simplessi di dimensione $\leq k$ in coppia con V forma un sottocomplesso k-dimensionale chiamato *k-scheletro* di $(V, \mathcal{K})$.

Introduciamo ora la nozione di mappa simpliciale, che è l'equivalente combinatorio di una mappa continua.

Definizione 1.1.4. Siano $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ due complessi simpliciali astratti. Una *mappa simpliciale* da $\mathcal{K}$ in $\mathcal{L}$ è una mappa $f\colon V(\mathcal{K}) \to V(\mathcal{L})$ che manda i simplessi in simplessi, ovvero tale che $f(\sigma) \in \mathcal{L}$ per ogni $\sigma \in \mathcal{K}$. Una mappa simpliciale biiettiva la cui inversa è anch'essa simpliciale si chiama un *isomorfismo di complessi simpliciali astratti*.

I complessi simpliciali astratti isomorfi differiscono quindi solo nei nomi dei vertici. Nel seguito, di solito non distingueremo tra complessi simpliciali isomorfi.

1.1.3 Rappresentazioni geometriche e triangolazioni

Esiste un modo naturale per costuire un complesso simpliciale astratto a partire da un complesso simpliciale euclideo. Dato un complesso simpliciale euclideo K, sia $\mathcal{K}$ l'insieme di tutti quei sottoinsiemi finiti $\{ v_0, \ldots, v_k \} \subseteq K^{(0)}$ che consistono di vertici di qualche simplesso in K. È immediato che $(K^{(0)}, \mathcal{K})$ è un complesso simpliciale astratto, chiamato *schema dei vertici* di K (si veda la figura 1.3 per un esempio). In questa situazione chiamiamo $|K|$ una realizzazione geometrica di $\mathcal{K}$.

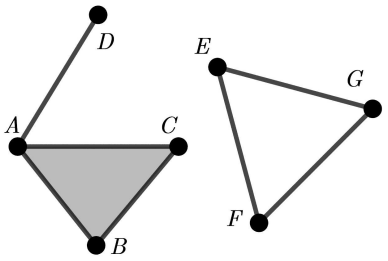


Figura 1.3: Lo schema di vertici di questo complesso geometrico è:

$$\left(\{ A, B, C, D, E, F, G \}, \left\{ \begin{array}{l} \{ A \}, \{ B \}, \{ C \}, \{ D \}, \{ E \}, \{ F \}, \{ G \}, \\ \{ A, B \}, \{ B, C \}, \{ C, A \}, \{ A, D \}, \\ \{ E, F \}, \{ F, G \}, \{ G, E \}, \\ \{ A, B, C \} \end{array} \right\} \right)$$

.

Non tutti i complessi simpliciali astratti rappresentano uno schema di vertici di qualche complesso geometrico[3], tuttavia diventa sempre vero se ci limitiamo ai complessi

[3] È necessario innanzitutto che tale complesso astratto sia di dimensione finita e localmente finito. Inoltre, la proprietà di finitezza locale dei complessi geometrici forza l'insieme dei vertici V ad essere un sottoinsieme discreto di $\mathbb{R}^n$ (ossia ogni vertice $v \in V$ ammette un intorno U tale che $U \cap V = \{ v \}$) e dunque il suo schema di vertici può avere solo un numero numerabile di simplessi. È possibile mostrare che queste condizioni sono anche sufficienti.

finiti: sia n il numero di vertici del complesso diminuito di 1 e prendiamo una funzione $r\colon V \to V'$, dove V' è l'insieme dei vertici di un simplesso n-dimensionale σ_n. Definiamo un sottocomplesso K di σ_n come $K = \{\, \Delta(r(v_1), \dots, r(v_k)) : \{\, v_1, \dots, v_k \,\} \in \mathcal{K} \,\}$. Così K è un complesso geometrico, e il suo schema di vertici è (isomorfo a) $\mathcal{K}$. In figura 1.4 è proposto un esempio. Quindi, ogni complesso simpliciale astratto $\mathcal{K}$ avente $n+1$

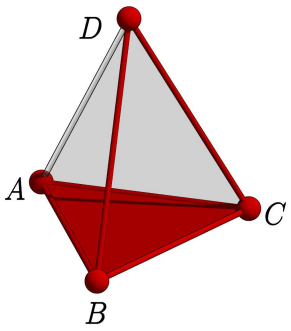


Figura 1.4: In rosso, la realizzazione geometrica di

$$\left(\{\, A, B, C, D \,\}, \left\{ \begin{array}{l} \{\, A \,\}, \{\, B \,\}, \{\, C \,\}, \{\, D \,\}, \\ \{\, A, B \,\}, \{\, B, C \,\}, \{\, C, A \,\}, \{\, B, D \,\}, \{\, C, D \,\}, \\ \{\, A, B, C \,\} \end{array} \right\} \right)$$

.

vertici ammette una realizzazione geometrica in $\mathbb{R}^n$ e specifica uno spazio topologico.

Ad ogni mappa simpliciale f tra complessi simpliciali associeremo una mappa continua $|f|$ tra le loro realizzazioni geometriche. In particolare, estendiamo f in modo affine su ciascun simplesso. Per esprimere ciò in modo preciso, notiamo innanzitutto che se $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ è un k-simplesso con vertici $v_0, v_1, \dots, v_k$, allora ogni punto $x \in \sigma$ può essere scritto in modo unico come somma baricentrica $x = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i v_i$, dove $\alpha_0, \dots, \alpha_k \geq 0$ e $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$. Infatti, esiste almeno una tale somma baricentrica poiché $x \in \Delta(v_0, \dots, v_k)$, e se esistessero due somme baricentriche distinte che danno x, si otterrebbe una contraddizione sottraendole, perché $v_0, \dots, v_k$ sono in posizione generale.

Definizione 1.1.5. Siano K e L complessi simpliciali geometrici, siano $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ i complessi simpliciali astratti ad essi associati, e sia $f\colon V(\mathcal{K}) \to V(\mathcal{L})$ una mappa simpliciale. Chiamiamo la mappa

$$|f|\colon |K| \to |L|$$

l'*estensione affine* di f, ottenuta estendendo f in modo che rispetti le somme baricentriche, ossia come segue: se $\sigma = \mathrm{supp}(x) \in K$ è il supporto di x, i vertici di σ sono $v_0, \dots, v_k$, $x = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i v_i$ con $\alpha_0, \dots, \alpha_k \geq 0$ e $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$, poniamo

$$|f|(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(v_i).$$

Osservazione 1.1.6. La mappa $|f|$ è ben definita, poiché la famiglia $\{ f(v_0), \dots, f(v_k) \}$ individua sempre un insieme di vertici di un simplesso in L.

Inoltre, per ogni mappa simpliciale $f\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$, $|f|\colon |K| \to |L|$ è una mappa continua. Se f è iniettiva, allora $|f|$ è anch'essa iniettiva, e se f è un isomorfismo, allora $|f|$ è un omeomorfismo.

Assodato ciò, è fondamentale osservare che due qualsiasi realizzazioni geometriche di un complesso simpliciale astratto risultano omeomorfe e isomorfe come simplessi; di conseguenza, è consistente parlare della realizzazione geometrica del complesso simpliciale astratto $\mathcal{K}$ ed usare il simbolo $|\mathcal{K}|$ per intendere una qualsiasi realizzazione geometrica di $\mathcal{K}$.

Ricapitolando, abbiamo visto che è possibile associare ad un complesso simpliciale astratto finito un poliedro euclideo in uno spazio $\mathbb{R}^n$, canonicamente a meno di omeomorfismi simpliciali, e quindi di attribuire proprietà topologiche ai complessi simpliciali astratti finiti.

In topologia due spazi si considerano equivalenti se sono omeomorfi. Da questo punto di vista, possiamo intendere per poliedro "curvo" un insieme di punti in $\mathbb{R}^n$ che sia omeomorfo a un poliedro euclideo. Chiameremo *poliedro* un qualsiasi spazio topologico X che è omeomorfo alla realizzazione geometrica di qualche complesso simpliciale astratto e un tale omeomorfismo è chiamato *triangolazione* di X. Uno spazio che ammette una triangolazione è detto *triangolabile*.

1.1.4 Grafi

In questa tesi chiameremo grafo quello che in letteratura viene generalmente detto grafo finito semplice astratto. Va detto che però esistono nozioni più generali (digrafi, multigrafi, grafi orientati, ipergrafi).

Definizione 1.1.7. Un *grafo semplice astratto* è un complesso simpliciale astratto di dimensione ≤ 1.

Tradizionalmente un grafo semplice viene denotato con una coppia (V, E), dove V è detto insieme dei *vertici* e E insieme degli *archi* (o lati); ogni arco congiunge due vertici distinti e per ogni coppia di vertici distinti esiste al più un arco che li congiunge. In questa notazione, un complesso simpliciale $(V, \mathcal{K})$ di dimensione ≤ 1 corrisponde alla coppia $(V, \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^{(0)})$, e cioè

$$\text{0-simplessi} = \text{vertici}, \quad \text{1-simplessi} = \text{archi}.$$

Dato un grafo semplice Γ, indicheremo con $V(\Gamma)$ il suo insieme dei vertici e con $E(\Gamma)$ il suo insieme degli archi. Se $e = \{ x, y \} \in E(\Gamma)$ è un arco, i due vertici x, y sono gli *estremi* di e e diciamo che sono congiunti da e; indicheremo l'arco anche con xy.

Salvo avviso contrario, da questo momento in poi useremo il termine grafo per intendere un grafo semplice finito, ossia con un numero finito di vertici e archi.

Un *isomorfismo di grafi* è un isomorfismo di complessi simpliciali astratti; equivalentemente, un isomorfismo tra due grafi $\Gamma = (V, E), H = (W, F)$ è una mappa biettiva $\phi\colon \Gamma \to H$ tale che $xy \in E$ se e solo se $\phi(x)\phi(y) \in F$.

Un *sottografo* di un grafo non è altro che un sottocomplesso simpliciale: equivalentemente, un sottografo di (V, E) è una coppia (W, D), con $W \subseteq V, D \subseteq E$ e gli estremi di ciascun arco $e \in D$ appartengono a W. Se $\Gamma = (V, E)$ è un grafo e $W \subseteq V, F \subseteq E$, allora $\Gamma \setminus (W, F)$ è il sottografo ottenuto da Γ eliminando tutti i vertici in W e tutti gli archi in F o aventi un estremo in W.

Definizione 1.1.8. Sia Γ un grafo. Un *cammino semplice* in Γ è un sottografo con vertici distinti $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V(\Gamma)$ e archi $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n \in E(\Gamma)$. Un tale cammino *connette* v_1 a v_n. Se $n \geq 3$ e anche l'arco $v_nv_1 \in E(\Gamma)$ esiste, aggiungendolo a questo cammino otteniamo un *ciclo*. Indicheremo sia il cammino che il ciclo sopra con $v_1v_2 \ldots v_n$ (sarà sempre chiaro dal contesto se stiamo parlando di un cammino semplice o di un ciclo).

Una *suddivisione* di un grafo G è un grafo ottenuto da G mediante un "inserimento di vertici sugli archi". Più precisamente, alcuni archi di G vengono sostituiti da cammini con gli stessi estremi.

Diciamo che un grafo Γ è *connesso* se per ogni coppia di vertici di Γ esiste un cammino semplice che li connette.

Diciamo che Γ è 2-*connesso* se contiene almeno tre vertici, è connesso e, per ogni vertice v, $\Gamma - \{ v \}$ (che indichiamo anche con $\Gamma - v$) è connesso. Equivalentemente, un grafo Γ è 2-connesso se ogni coppia di vertici (e di archi) appartiene ad uno stesso ciclo in Γ.

Chiaramente, ogni ciclo è 2-connesso; poi se H è un grafo 2-connesso e P è un cammino tale che $P \cap H$ consiste dei due estremi di P, allora $P \cup H$ è 2-connesso. Dunque, possiamo costruire grafi 2-connessi partendo da un ciclo e agguingendo successivamente un cammino semplice che ha solo gli estremi in comune con il grafo corrente. Possiamo ottenere ogni grafo 2-connesso in questo modo, per il seguente

Lemma 1.1.9. *Se $\Gamma = (V, E)$ è un grafo 2-connesso e $H = (W, F)$ è un sottografo 2-connesso di Γ, allora Γ può essere ottenuto da H aggiungendo successivamente dei cammini in modo che ciascuno di questi cammini connetta due vertici distinti nel grafo corrente e tutti gli altri vertici siano al di fuori del grafo corrente.*

Dimostrazione. La dimostrazione avviene per induzione sul numero di archi in $E \setminus F$. Se tale numero è zero, allora per connessione $\Gamma = H$ e il caso base è dimostrato.

Supponiamo ora che $\Gamma \neq H$. Per ipotesi induttiva, il Lemma vale quando la coppia Γ, H è sostituita da un'altra coppia $\Gamma' = (V', E'), H' = (W', F')$ tale che $E' \setminus F'$ abbia meno archi di $E \setminus F$. Ora sia H' un sottografo massimale 2-connesso di Γ, diverso da Γ e contenente H. Se $H' \neq H$, applichiamo l'ipotesi induttiva a H', H e poi a Γ, H'.

Se invece $H' = H$ (si veda la figura 1.5a), poiché Γ è connesso, esiste un arco v_1v_2 in $E \setminus F$ tale che v_1 è in H (figura 1.5b). Dato che $\Gamma - v_1$ è connesso, ha un cammino $P : v_2, v_3, \ldots, v_k$ tale che $v_k \in W$ (possibilmente $k = 2$, cioè il cammino è formato dal solo vertice v_2; nella figura 1.5c $k = 5$). Unendo a H il cammino composto dall'arco v_1v_2 e da P (figura 1.5d) si ottiene un grafo 2-connesso che contiene H, e per l'ipotesi di massimalità è uguale a Γ. □

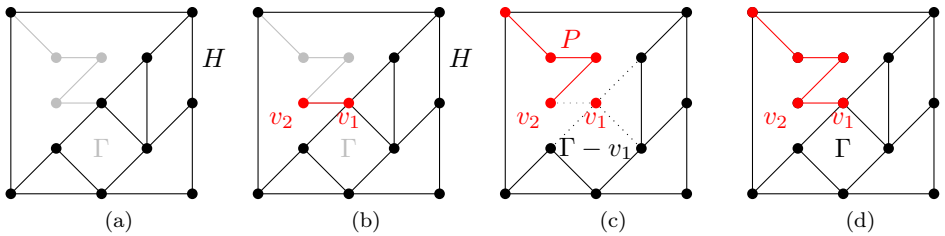


Figura 1.5: Diagrammi per la dimostrazione del Lemma 1.1.9.

1.2 Varietà

Oltre ai complessi simpliciali, un'altra classe fondamentale di spazi studiata in topologia è quella di varietà, che formalizza l'idea di curve, superfici e oggetti con una dimensione più alta.

1.2.1 Definizione di Varietà topologica

Una varietà topologica di dimensione n è una figura geometrica che assomiglia localmente allo spazio affine $\mathbb{R}^n$. Inoltre, imporremo che, come spazio topologico, sia di Hausdorff (in modo che la topologia sia abbastanza fine), a base numerabile (in modo che non lo sia troppo) e connessa. Otteniamo la seguente

Definizione 1.2.1. Una *n-varietà topologica* (o *varietà topologica di dimensione n*) è uno spazio topologico $\mathcal{M}$ di Hausdorff, a base numerabile e connesso che ha la seguente proprietà:

> $\mathcal{M}$ può essere ricoperto da sottoinsiemi aperti, ognuno dei quali è omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$. $(*)$

La superficie si dirà *compatta* se lo è in quanto spazio topologico.

Osservazione 1.2.2. Abbiamo richiesto che una varietà sia connessa; naturalmente tutto quello che vedremo si applicherebbe anche ad ogni componente connessa di una "varietà non connessa".

Chiamiamo *carta locale* intorno a un punto $p \in \mathcal{M}$ ogni coppia (U, φ) formata da un intorno aperto $U \subseteq \mathcal{M}$ di p e da un omeomorfismo $\varphi\colon U \to V$, dove V è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Anziché richiedere che gli aperti che formano il ricoprimento siano omeomorfi a un aperto qualsiasi di $\mathbb{R}^n$, a volte è utile specificare meglio il tipo di aperto.

Lemma 1.2.3. *Uno spazio topologico $\mathcal{M}$ ha la proprietà $(*)$ se e solo se una delle seguenti proprietà è soddisfatta:*

(a) Ogni punto di $\mathcal{M}$ ha un intorno aperto omeomorfo a una palla aperta in $\mathbb{R}^n$;

(b) Ogni punto di $\mathcal{M}$ ha un intorno aperto omeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. È immediato che qualsiasi spazio con proprietà (a) o (b) ha la proprietà $(*)$. Viceversa, supponiamo che $\mathcal{M}$ abbia la proprietà $(*)$. Poiché ogni palla aperta in $\mathbb{R}^n$ è omeomorfa a $\mathbb{R}^n$ stesso, le proprietà (a) e (b) sono equivalenti, quindi dobbiamo solo dimostrare (a).

Dato un punto $p \in \mathcal{M}$, sia U un intorno aperto di p che ammette un omeomorfismo $\varphi\colon U \to V$, dove V è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Il fatto che V sia aperto implica che esiste una qualche palla aperta $B \subseteq V$ che contiene $\varphi(p)$, e quindi $\varphi^{-1}(B)$ è un intorno di p omeomorfo a una palla aperta (si veda la figura 1.6 al punto (a)). □

1.2.2 Altre categorie di varietà

Se $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) sono due carte locali di una varietà topologica $\mathcal{M}$ tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, allora chiamiamo

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\big|_{\varphi(U_\alpha \cap U_\beta)} \colon \varphi(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

mappa di transizione (si veda la figura 1.6 al punto (b)). Le mappe di transizione sono sempre omeomorfismi. Richiedendo qualcosa in più della semplice continuità alle mappe di transizione, si possono considerare varietà topologiche con una struttura aggiuntiva:

(i) una *varietà differenziabile* è una varietà topologica dotata di ricoprimento tramite carte tali che le mappe di transizione tra le carte siano differenziabili (C^∞);

(ii) Una *varietà lineare a tratti*[4] è una varietà topologica dotata di un ricoprimento tramite carte tali che le mappe di transizione siano lineari a tratti, ossia rispettano una triangolazione opportuna di $\mathbb{R}^n$[5];

Parliamo invece di *varietà n-dimensionale con bordo* per indicare uno spazio topologico in cui ogni punto ha un intorno omeomorfo a un sottoinsieme aperto del semispazio n-dimensionale $\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0 \}$. Ancora, richiediamo che sia di Hausdorff, a base numerabile e connesso e gli omeomorfismi sono sempre chiamati *carte locali*. Se $\mathcal{M}$ è una varietà con bordo, un punto $p \in \mathcal{M}$ che ammette un intorno omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$ è detto *interno*, altrimenti *di bordo* (si veda la figura 1.6 al punto (c)). I punti di bordo vengono mandati dalle carte locali in punti dell'insieme $\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \}$, da cui segue che le componenti connesse dell'insieme dei punti di bordo sono varietà di dimensione $n-1$.

Esiste una semplice procedura, chiamata *duplicazione*, per ottenere una varietà senza bordo da una con bordo: Se $\mathcal{M}$ è una n-varietà con bordo e $\partial\mathcal{M}$ è l'insieme costituito dai punti di bordo, allora il quoziente dell'unione disgiunta $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{M}$ di due copie di $\mathcal{M}$ rispetto alla mappa identità $\partial\mathcal{M} \to \partial\mathcal{M}$ è una n-varietà senza bordo, chiamata il *doppio* di $\mathcal{M}$ e denotata con $D(\mathcal{M})$. In figura 1.7 è mostrato un esempio.

Questa operazione è ben definita a meno di omeomorfismo e consente di ridurre molti problemi sulle varietà con bordo a problemi sulle varietà senza bordo. Si può dimostrare anche che se $\mathcal{M}$ è compatta, allora anche $D(\mathcal{M})$ lo è.

1.2.3 Esempi di varietà

Vediamo alcuni esempi di varietà.

Esempio 1.2.4 (Curve semplici)**.** Le unovarietà (con o senza bordo) vengono chiamate *curve semplici* e vale il seguente

Teorema 1.2.5 (Classificazione delle curve)**.** *Esistono esattamente quattro curve semplici (a meno di omeomorfismi) e sono date dalla seguente tabella:*

	Senza bordo	**Con bordo**
Compatta	la circonferenza $\mathbb{S}^1$	il segmento chiuso $I = [0,1]$
Non compatta	la retta reale $\mathbb{R}$	la semiretta $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, +\infty)$

Notiamo anche che $D(I)$ è omemorfo a $\mathbb{S}$ e $D(\mathbb{R}_{\geq 0})$ a $\mathbb{R}$. Spazi omeomorfi a $\mathbb{S}$ e I sono anche chiamati rispettivamente *curve chiuse semplici* e *archi semplici*.

[4] in inglese *piecewise linear manifold*, spesso abbreviato con *PL-manifold*.

[5] Più precisamente, siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ due sottoinsiemi aperti. Una funzione continua $f\colon U \to V$ si dice *lineare a tratti* se per ogni punto $p \in U$ esiste una sfera $n-1$ dimensionale $S \subseteq U$ centrata in quel punto per cui $f(\lambda p + \mu x) = \lambda f(p) + \mu f(x)$ per ogni $x \in S$, con $\lambda, \mu \geq 0$ e $\lambda + \mu = 1$. Si veda [RS82] per approfondire.

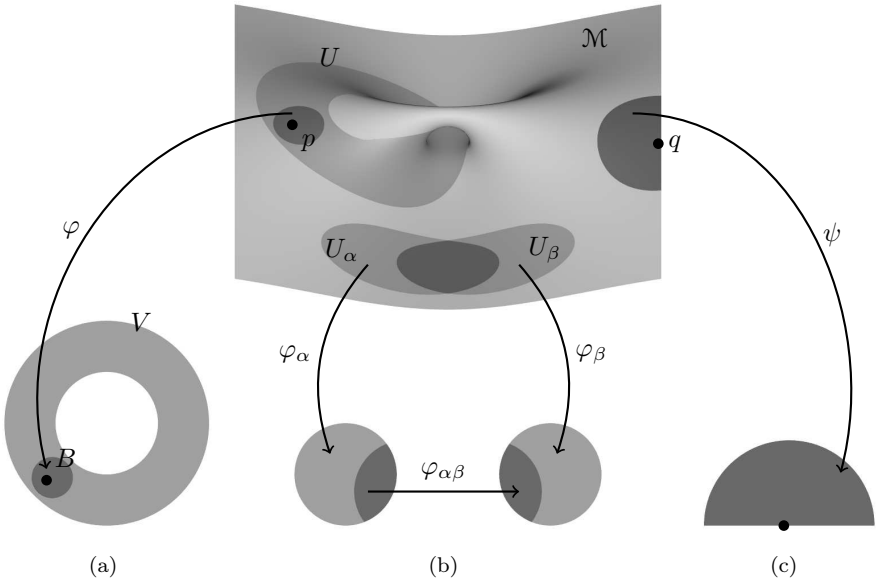


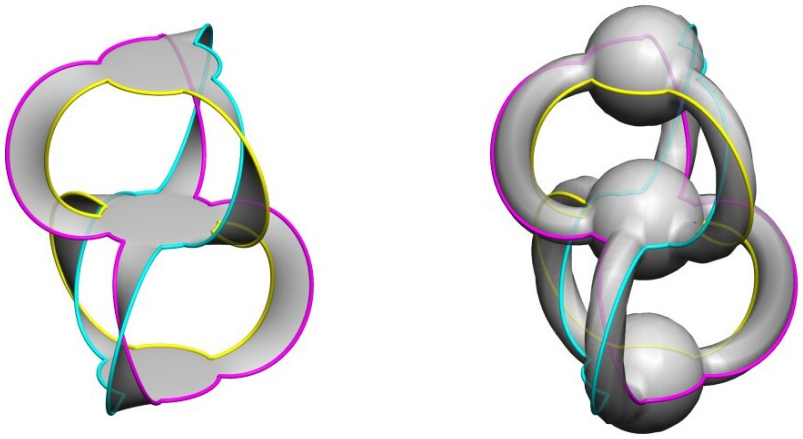
Figura 1.6: Una varietà con bordo. Il disegno include:

(a) un diagramma per la dimostrazione del Lemma 1.2.3;
(b) il classico diagramma per la mappa di transizione;
(c) un esempio di una carta locale per il punto di bordo q.

Esempio 1.2.6 (Superfici)**.** Le varietà a due dimensioni sono le *superfici*. La superficie più semplice è il piano $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. Le superfici compatte senza bordo si dicono anche *chiuse* ed alcuni esempi possono essere costruiti come segue.

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia finita di poligoni convessi disgiunti a due a due con i lati di lunghezza unitaria. Supponiamo che tutti questi poligoni insieme abbiano m lati $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ dove m è pari. Orientiamo arbitrariamente ciascun lato σ_i scegliendo uno dei vertici come punto iniziale e scegliamo una partizione arbitraria dei suoi lati a coppie. Dall'unione disgiunta dei poligoni in $\mathcal{F}$ formiamo uno spazio topologico S identificando i lati nelle date coppie della partizione rispettando l'orientazione, cioè se σ_i, σ_j sono una coppia, allora sono identificati in modo che il punto iniziale di σ_i sia identificato con il punto iniziale di σ_j.

In questo modo otteniamo un spazio di Hausdorff compatto S che è localmente omeomorfo a un disco nel piano. Questo è immediato per i punti all'interno dei poligoni e nell'interno delle coppie di lati identificate. Per vedere cosa succede con i punti x_i ottenuti identificando vertici dei poligoni, osserviamo che dopo ogni identificazione di una coppia di lati ogni punto x ha un intorno omeomorfo al semipiano superiore chiuso o all'intero piano. Quest'ultimo caso si verifica solo quando tutti i lati adiacenti al vertice che sono stati identificati con x sono già stati processati. Questo mostra che tutti i punti di S hanno un intorno aperto omeomorfo al piano. Dunque, se S è connessa, allora è una superficie.



(a) (b)

Figura 1.7: Processo di duplicazione per una varietà bidimensionale con bordo (le immagini sono state generate con *SeifertView, Jarke J. van Wijk, Technische Universiteit Eindhoven*).

Mostreremo che ogni superficie compatta può essere ottenuta in questo modo.

È permesso identificare coppie di lati appartenenti ad uno stesso poligono: ad esempio, quattro superfici classiche sono ottenute identificando i lati opposti di un quadrato: in base all'orientazione dei lati scelta abbiamo la sfera $\mathbb{S}^2$, il toro $\mathbb{T} \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e l'otre di Klein $\mathbb{K}$.

Se ci è permesso non identificare alcune coppie di lati, si possono ottenere delle superfici con bordo, come il cilindro $\mathbb{S}^1 \times I$ e il noto nastro di Moebius $\mathbb{M}$. Queste costuzioni sono mostrate nella figura 1.8. Il quadrato stesso, senza identificare alcun lato, è una superfice con bordo, omeomorfo ad disco chiuso $\mathbb{D}$.

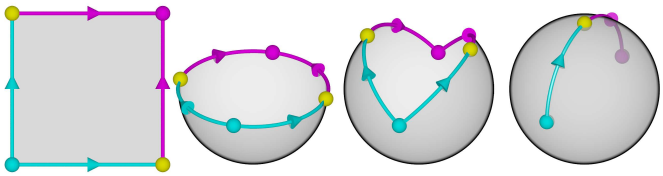
Osserviamo che il doppio del cilindro è omeomorfo al toro, il doppio del nastro di Möbius all'otre di Klein. Il doppio del quadrato è la sfera. Infine, identificando i bordi del quadrato e del nastro di Möbius otteniamo il piano proiettivo.

Esempio 1.2.7. Come esempi di varietà a più dimensioni menzioniamo, oltre a $\mathbb{R}^n$, gli spazi sferici $\mathbb{S}^n$ e proiettivi reali $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, anche il tritoro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$: esso è una 3-varietà che possiamo ottenere con un procedimento simile a quello usato per le superfici, cioè identificando a due a due le facce opposte d'un cubo preservando l'orientazione.

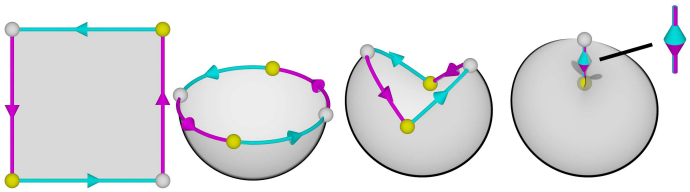
1.2.4 Triangolazioni di varietà

Si trovano varietà in molte parti della matematica; per esempio, possono apparire come spazi di soluzioni di sistemi di equazioni polinomiali, o di sistemi di equazioni differenziali. Tuttavia, sapere che uno spazio è una varietà non ci dice molto sulla sua struttura globale. Per studiare le proprietà di una varietà, è utile triangolarla.

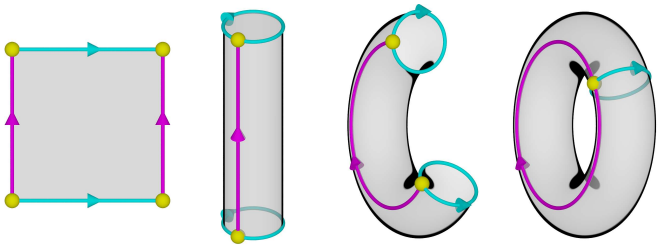
Ad esempio, se abbiamo due varietà e cerchiamo di distinguerle, la prima cosa da fare è verificare se i loro invarianti topologici sono gli stessi e una triangolazione permettere facilmente di calcolarne qualcuno.



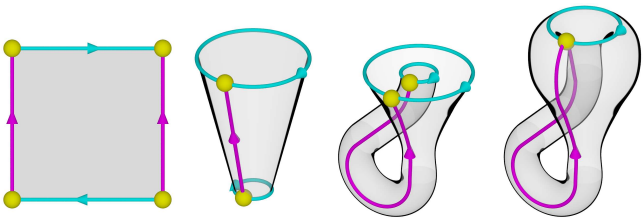
(a) *Sfera*



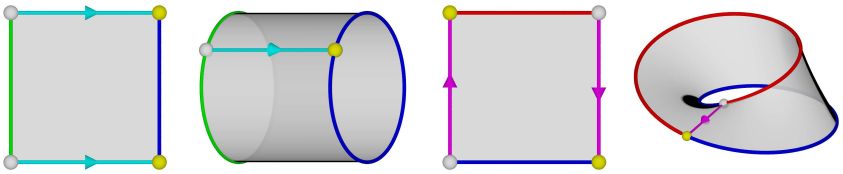
(b) *Piano Proiettivo*



(c) *Toro*



(d) *Otre di Klein*



(e) *Cilindro* (f) *Nastro di Möbius*

Figura 1.8: Superfici ottenute identificando lati opposti di un quadrato nello spazio tridimensionale.

In questa sezione ricordiamo parte di quanto riassunto in Manolescu [Man14] in merito al problema della triangolazione di varietà. Rimandiamo a quell'articolo per una bibliografia più completa sul tema.

La prima domanda sulla triangolazione delle varietà fu formulata da Henri Poincaré nel 1899. In linguaggio moderno, essa recita:

Domanda 1.2.8. Ogni varietà differenziabile ammette una triangolazione?

Nel 1924, il matematico Hellmuth Kneser pose una domanda più generale:

Domanda 1.2.9. Ogni varietà topologica ammette una triangolazione?

Una classe di varietà facili da triangolare sono quelle lineari a tratti. Infatti, ogni varietà a lineare a tratti ammette una triangolazione combinatoria, cioè, una in cui la struttura della varietà è evidente. Tecnicamente, in un complesso simpliciale K, si definisce il *link* di un simplesso σ come l'unione dei simplessi $\tau \in K$ tali che $\sigma \cap \tau = \emptyset$ e σ e τ sono entrambi facce di un simplesso in K. Una triangolazione è chiamata *combinatoria* se il link di ogni simplesso è una sfera.

Possiamo chiedere la seguente versione rafforzata della Domanda 2:

Domanda 1.2.10. Ogni varietà topologica ammette una triangolazione combinatoria (o, equivalentemente, una struttura a lineare a tratti)?

Rispondere alle tre domande sopra ha ispirato molte ricerche in topologia. Il primo tentativo di dare una risposta affermativa alla Domanda 1 fu fatto dallo stesso Poincaré, ma la sua dimostrazione mancava di rigore. Una dimostrazione completa fu trovata negli anni '40:

Teorema. *Ogni varietà differenziabile ammette una struttura compatibile lineare a tratti (essenzialmente unica).*

Le risposte alle Domande 2 e 3 sono affermative se rimaniamo a basse dimensioni (≤ 3). Infatti, al tempo di Kneser, era già noto che ogni superficie bidimensionale possiede una struttura a tratti lineari, grazie al lavoro di Radó e nel 1952 Edwin E. Moise dimostrò che ogni varietà tridimensionale è omeomorfa ad una differenziabile e quindi a una lineare a tratti.

Nel 1969, R. C. Kirby e L. C. Siebenmann dimostrarono che esistono varietà senza strutture lineari a tratti in ogni dimensione maggiore di 4.

Nei primi anni '80, Michael H. Freedman fornì un esempio di una varietà quadridimensionale (la varietà E_8) che non ha strutture lineari a tratti. Pertanto, la risposta alla Domanda 3 è "no" anche in dimensione quattro.

A metà degli anni '80, si introdusse un nuovo invariante che può essere usato per dimostrare che, per esempio, la varietà E_8 di Freedman non è triangolabile. Di conseguenza, anche la risposta alla Domanda 2 è negativa in dimensione quattro. Per quanto rigurda le dimensioni ≥ 5 invece, negli anni '70 questo problema fu dimostrato equivalente ad un altro in dimensione più bassa, che fu poi risolto nel 2013, dando una risposta negativa.

Il fatto che ogni superficie possa essere triangolata non è dunque così banale. Nel Capitolo 3 daremo una dimostrazione dell'esistenza di triangolazioni per superfici compatte, per la quale ci serviranno diversi risultati rigurardanti curve e grafi nel piano.

Capitolo 2

Curve e grafi nel piano euclideo

Nello scorso capitolo abbiamo visto come ottenere una realizzazione geometrica di un complesso simpliciale astratto $\mathcal{K}$ immersa nello spazio $\mathbb{R}^n$, dove n è il numero di vertici di $\mathcal{K}$ diminuito di 1. È lecito domandarsi se possano esistere spazi omeomorfi a $|\mathcal{K}|$ immersi in $\mathbb{R}^m$, con $m < n$ [1]. In questo capitolo vedremo qualche risultato riguardo questo problema riferito ai grafi con $m = 2$. Per alcuni grafi non è possibile avere dei tracciati planari (ossia sottoinsiemi del piano $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ omeomorfi alla loro realizzazione geometrica); oppure uno stesso grafo può avere tracciati planari diversi: non solo gli archi possono essere poligonali o curve più generali, ma due tracciati dello stesso grafo possono dividere il piano in modi diversi, come mostra la figura 2.1.

Per questo capitolo ho seguito Thomassen [Tho92] e ho aggiunto numerosi dettagli.

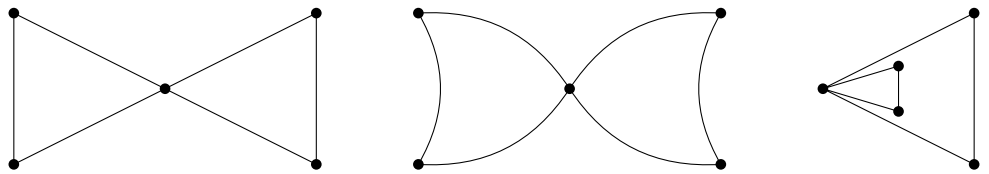


Figura 2.1: Tre tracciati planari di una stesso grafo.

Inizieremo dai grafi più semplici: i cammini semplici e i cicli, le cui rappresentazioni planari sono curve.

Ricordiamo che una *regione* di un sottoinsieme aperto A nel piano $\mathbb{C}$ è un sottoinsieme di A connesso massimale. Notiamo che ogni regione Ω di un sottoinsieme aperto $A \subseteq \mathbb{C}$ è aperta; infatti, ogni punto $p \in \Omega \subseteq A$ ammette un disco $D_p \subseteq A$ centrato in p e, siccome D_p è connesso, $D_p \subseteq \Omega$.

[1] Si può dimostrare che esiste sempre un tale spazio con $m = 2 * d + 1$, dove d è la dimensione di $\mathcal{K}$. Ciò significa ad esempio che per ogni grafo Γ esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ omeomorfo a $|\Gamma|$.

2.1 Curve nel piano

2.1.1 Archi e curve di Jordan

Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{C}$ si dice *arco di Jordan* se è un arco semplice, ossia se C è l'immagine di una funzione continua e iniettiva $\phi_C \colon I \to \mathbb{C}$. Una tale funzione ϕ_C è detta *parametrizzazione* di C.

Diciamo che $\phi_C(0)$ e $\phi_C(1)$ sono gli *estremi* dell'arco e che l'arco *connette* $\phi_C(0)$ e $\phi_C(1)$.

Un sottoinsieme $J \subseteq \mathbb{C}$ si dice *curva di Jordan* se è una curva chiusa semplice, ossia J è l'immagine di una funzione continua e iniettiva $\phi_J \colon S^1 \to \mathbb{C}$. La composizione $\phi_J \circ \pi \colon \mathbb{R} \to J$ è detta *parametrizzazione periodica* di J dove $\pi \colon \mathbb{R} \to S^1$ è il rivestimento universale della circonferenza definito da $\pi(t) = e^{it}$.

Gli archi e le curve di Jordan, essendo omeomorfi rispettivamente a segmenti e bordi di triangoli, sono poliedri. Ciò non toglie che possano essere insiemi molto complicati, ma per molti problemi ci si può ricondurre allo studio di una specifica classe di curve, le curve poligonali.

Un *arco poligonale semplice* e una *poligonale semplice* nel piano $\mathbb{C}$ sono rispettivamente un arco di Jordan e una curva di Jordan che sono anche poliedri euclidei finiti (ossia sono formati da un numero finito di segmenti rettilinei).

Poiché vogliamo ricondurci il più possibile a lavorare con archi, e soprattutto con archi poligonali, ci sarà utile il seguente:

Lemma 2.1.1. *Sia Ω è un insieme aperto non vuoto nel piano; sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. *ogni coppia di punti distinti $p, q \in \Omega$ sono connessi da un arco poligonale semplice;*
2. *ogni coppia di punti distinti $p, q \in \Omega$ sono connessi da un arco semplice;*
3. *Ω è connesso.*

Dimostrazione. 1 $\implies$ 2: Immediato.

2 $\implies$ 3: Supponiamo per assurdo che Ω non sia connesso. Esistono dunque A, B aperti disgiunti non vuoti tali che $A \cup B = \Omega$. Siano $a \in A$ e $b \in B$. Per ipotesi, esiste un arco parametrizzato da $\gamma \colon [0,1] \to \Omega$ che connette a e b. Consideriamo $\gamma^{-1}(A), \gamma^{-1}(B) \subseteq [0,1]$. Sono aperti perchè γ è continua, non vuoti perchè $\gamma(0) = a \in A$ e $\gamma(1) = b \in B$, ricoprono [0,1] e sono disgiunti. Ma $[0,1]$ è connesso, dunque siamo arrivati a una contraddizione.

3 $\implies$ 1: Sia $p \in \Omega$ e definiamo

$$\Omega^* = \{\, p' \in \Omega \mid \text{esiste un arco poligonale semplice da } p \text{ a } p' \text{ in } \Omega \,\} \cup \{\, p \,\}.$$

Poiché $p \in \Omega^* \neq \emptyset$ ci basta mostrare che Ω^* è sia aperto che chiuso in Ω. Sia $q \in \Omega$. Consideriamo un disco aperto $D \subseteq \Omega$ che contiene q e prendiamo $q' \in D$. Dobbiamo mostrare che se uno tra q e q' appartengono ad Ω^* allora anche l'altro vi appartiene ($q \in \Omega^* \implies q' \in \Omega^*$ dimostra che Ω^* è aperto, $q' \in \Omega^* \implies q \in \Omega^*$ dimostra che Ω^* è chiuso).

Per simmetria, possiamo supporre che $q \in \Omega^*$. Se $q = p$ allora considerando il segmento di retta da q a q' concludiamo che $q' \in \Omega^*$. Se $q \neq p$ allora esiste un arco poligonale semplice da p a q, sia P un tale arco (si veda la figura 2.2a).

Giustapponiamo a P un segmento di retta P' contenuto in D da q a q', parametrizzato da $\gamma'(t) = (1-t)q + tq', t \in [0,1]$. Otteniamo così un arco poligonale da p a q' che però potrebbe non essere semplice (figura 2.2b). Sia allora $\bar{t} = \max(\gamma'^{-1}(P \cap P'))$, che è ben definito perchè $0 \in \gamma'^{-1}(P \cap P')$ chiuso. L'arco poligonale da p a q formato dal segmento di P di estremi p e $\gamma'(\bar{t})$ e da $\gamma'([\bar{t}, 1])$ è semplice, quindi anche $q' \in \Omega^*$ (figura 2.2c). □

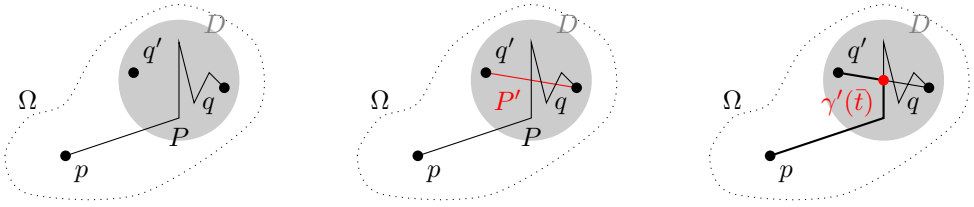


Figura 2.2: Diagrammi per l'implicazione 3 $\implies$ 1 del Lemma 2.1.1.

Se J è una curva di Jordan, l'unione delle regioni non limitate di $\mathbb{C} \setminus J$ è chiamata *esterno* di J e viene indicata con $\text{ext}(J)$. L'unione di tutte le altre regioni è l'*interno* di J e viene indicata con $\text{int}(J)$.

Inoltre, scriviamo

$$\overline{\text{int}}(J) = J \cup \text{int}(J), \quad \overline{\text{ext}}(J) = J \cup \text{ext}(J).$$

È facile dimostrare il seguente

Lemma 2.1.2. *Se $J \subseteq \mathbb{C}$ è una curva di Jordan, allora ext$(J) \neq \emptyset$ e consiste di una sola regione.*

Dimostrazione. Il sottospazio J è compatto in $\mathbb{C}$, quindi limitato. Esiste cioè una palla aperta B di raggio r e centro $O \in \mathbb{C}$ che contiene J.

Sia ora $p \in \mathbb{C} \setminus B$ e consideriamo la semiretta L che parte da p nel verso opposto ad O. Abbiamo che $L \cap J = \emptyset$, L connesso per archi e non limitato. Dunque $p \in L \subseteq \text{ext}(J) \neq \emptyset$.

Resta da verificare che $\text{ext}(J)$ è composto da una sola regione di $\mathbb{C} \setminus J$. Siano p_1, p_2 due punti in $\text{ext}(J)$ e mostriamo che sono connessi da un arco semplice. Siccome le regioni dove si trovano p_1, p_2 sono non limitate, esistono due punti $q_1, q_2 \in \mathbb{C} \setminus B$ tali che p_i, q_i appartengono alla stessa regione di $\mathbb{C} \setminus J$, $i = 1, 2$. Rimane da mostrare che q_1, q_2 sono connessi da un arco in $\mathbb{C} \setminus B$. Prendiamo per tale arco il segmento con estremi q_1, q_2 se questo non entra in B. Altrimenti, il segmento q_1q_2 interseca il bordo di B in due punti q_1', q_2' e prendiamo l'arco semplice formato dal segmento da q_1 a q_1', uno dei due archi di circonferenza nel bordo di B da q_1' a q_2' e il segmento da q_2' a q_2 (si veda la figura 2.3). □

2.1.2 Il Teorema di Jordan per poligonali semplici

Uno dei Teoremi che discuteremo è il famoso Teorema della Curva di Jordan, il quale afferma che se J è una curva chiusa semplice nel piano, allora anche $\text{int}(J)$ consiste in una sola regione non vuota, ossia $\mathbb{C} \setminus J$ ha precisamente due regioni, ciascuna delle quali ha J come bordo.

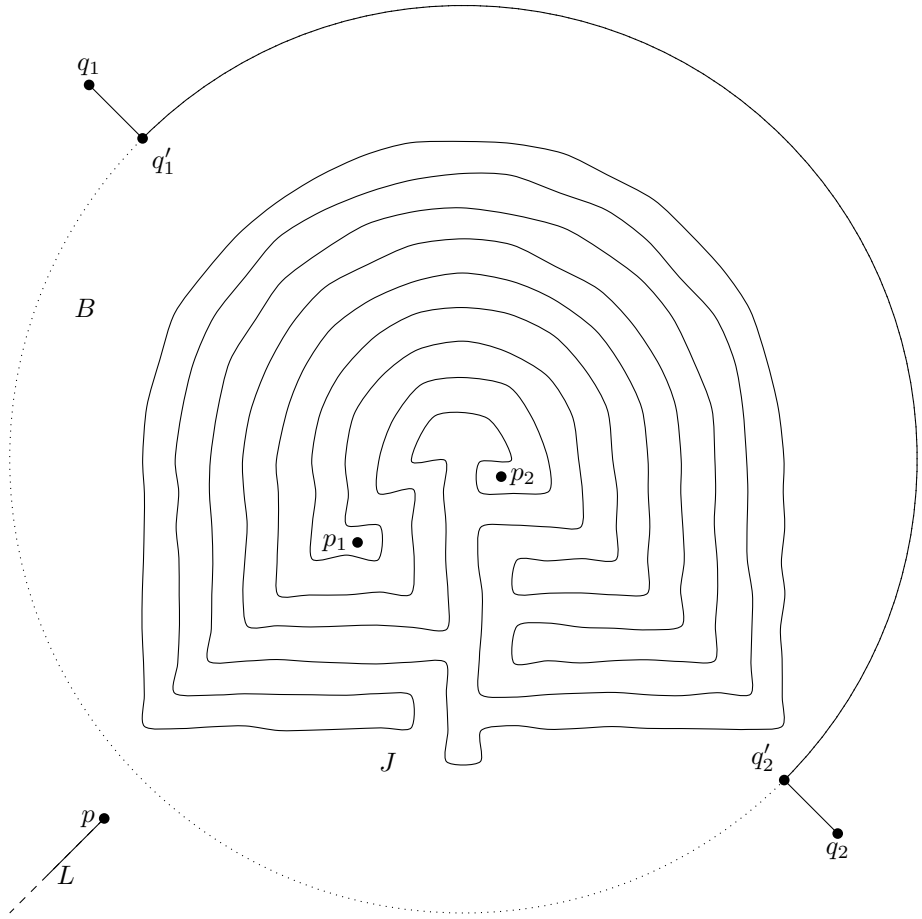


Figura 2.3: Diagramma per la dimostrazione del Lemma 2.1.2.

La dimostrazione di questo teorema non presenta difficoltà per curve quali circonferenze e bordi di triangoli, essendo il loro interno convesso. Nel caso generale tuttavia non è affatto banale, a dispetto della semplicità del suo enunciato. L'insidia sta proprio nel concetto di curva chiusa semplice, che comprende una vastissima quantità di oggetti geometrici tra i quali alcuni (in un certo senso la maggior parte) presentano comportamenti "patologici"[2].

Cominciamo col dimostrare il risultato nel caso di una poligonale semplice P. L'idea chiave è di introdurre una funzione, detta *parità*, che associa ad ogni punto $q \in \mathbb{C} \setminus P$ un valore nell'insieme $\{ 0, 1 \} \subseteq \mathbb{N}$.

Per ogni punto q in $\mathbb{C} \setminus P$ consideriamo una semiretta L con origine in q. L'intersezione $L \cap P$ è l'unione (possibilmente vuota) di un numero finito di segmenti di retta e singoli punti. Consideriamo un tale segmento o punto e indichiamolo con Q. Se P entra e esce da Q sulla stessa parte di L, diremo che Q è un'intersezione *essenziale*. Il numero di intersezioni essenziali ridotto modulo 2 viene chiamato *parità* di q e si indica con $E_P(q)$. La figura 2.4 mostra un esempio.

[2]Si veda ad esempio Sauter [Sau18].

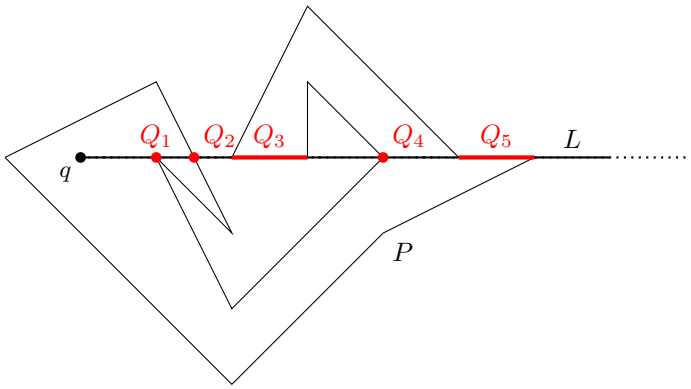


Figura 2.4: Q_2, Q_4 e Q_5 sono intersezioni essenziali, mentre Q_1 e Q_3 no. La parità di q dunque è pari a 1.

La definizione della funzione parità potrebbe dipendere dalla scelta della semiretta L scelta. Ci dice che invece è ben definita il seguente:

Lemma 2.1.3. *Sia P una poligonale e $q \in \mathbb{C} \setminus P$. $E_P(q)$ non dipende dalla scelta di L.*

Dimostrazione. Siano L_1 e L_2 due semirette distinte con origine in q. Poiché P è compatta, è possibile scegliere in L_1 e L_2 due punti che siano vertici di un triangolo T (per il quale vale il Teorema di Jordan) che interseca P solo in $L_1 \cup L_2$: se L_1 e L_2 appartengono alla stessa retta, si considera un terzo punto come terzo vertice del triangolo (si veda la figura 2.5a); altrimenti come terzo vertice si prende q (figura 2.5b).

La somma del numero delle intersezioni essenziali per la semiretta L_1 con quello della semiretta L_2 corrisponde al numero di volte che P passa dall'esterno di T all'interno o viceversa e questo numero è certamente pari. □

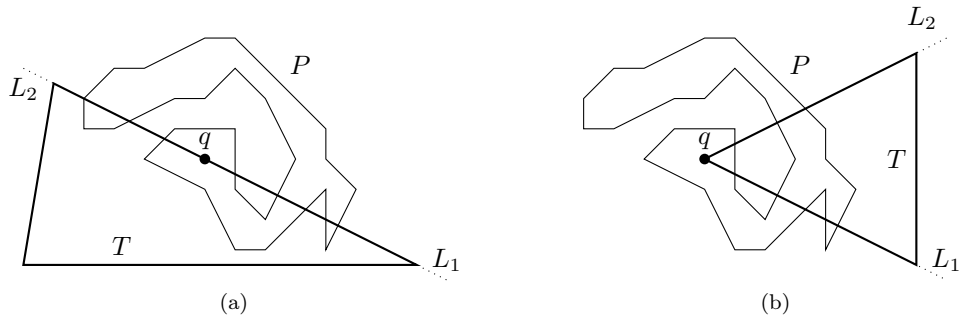


Figura 2.5: Diagrammi per la dimostrazione del Lemma 2.1.3.

L'idea di usare il bordo di un triangolo per dimostrare che la funzione parità è ben definita l'ho trovata in Schwartz [Sch16].

Osserviamo che la funzione parità non può essere definita per una curva di Jordan J generica, in quanto il numero di intersezioni essenziali di J con una semiretta può essere infinito.

In varie situazioni, ci servirà anche il seguente

Lemma 2.1.4. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto nel piano e siano P, p una delle seguenti (si veda la figura 2.6):*

(a) P una curva poligonale chiusa in Ω e $p \in P$; oppure

(b) P un arco poligonale semplice con estremi p, q_1 tale che $P \setminus \{ q_1 \} \subseteq \Omega$; oppure

(c) P un arco poligonale semplice con estremi q_1, q_2 e $p \in P \setminus \{ q_1, q_2 \} \subseteq \Omega$.

Se un punto $q \in \mathbb{C} \setminus P$ è connesso a p con un arco poligonale semplice $Q \subseteq \mathbb{C}$ tale che $Q \setminus \{ q \} \subseteq \Omega$, allora esiste un arco poligonale semplice $Q^* \subseteq \mathbb{C}$ da q a $p \in P$ che non interseca altrove P tale che $Q^* \setminus \{ q \} \subseteq \Omega$.

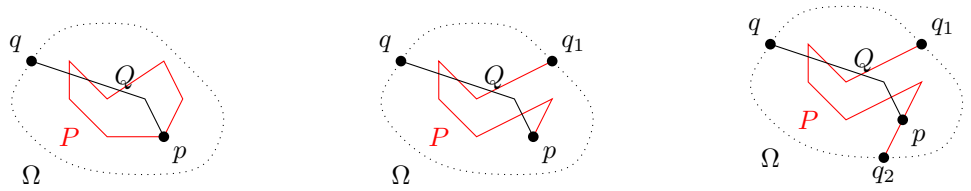


Figura 2.6: I tre casi nel Lemma 2.1.4.

Dimostrazione. Sia Q un arco poligonale semplice da q a $p \in P$ tale che $Q \setminus \{ q \} \subseteq \Omega$ e $\phi_Q \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ una sua parametrizzazione. Poiché P è compatto, $A = \phi_Q^{-1}(P) = \{ t \in [0,1] \mid \phi_Q(t) \in P \} \subseteq [0,1]$ è compatto e $1 \in A \neq \emptyset$, sono ben definiti $t^* = \min(A)$ il primo valore di t in cui Q interseca P e $p' = \phi_Q(t^*) \in \Omega$ la prima intersezione. Se $t^* = 1$, cioè $p' = p$, allora la dimostrazione è finita.

Altrimenti, sia $P' \subseteq \Omega$ l'arco poligonale semplice in P da p' a p (esiste perché $P \cup \Omega$ è connesso in tutti e tre i casi) e $\phi_{P'} \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ una sua parametrizzazione.

Definiamo

$$B = \left\{ \tau \in [0,1] \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{esiste un arco poligonale semplice } Q_\tau \text{ da } q \text{ a } \phi_{P'}(\tau) \\ \text{tale che } Q_\tau \setminus \{ q \} \subseteq \Omega \text{ e } Q_\tau \cap P = \{ \phi_{P'}(\tau) \} \end{array} \right\}$$

e osserviamo che $0 \in B \neq \emptyset$, dunque è ben definito $\tau^* = \sup(B) \in [0,1]$. Rimane da mostrare che $\tau^* = 1 \in B$.

Definiamo $p^* = \phi_{P'}(\tau^*) \in \Omega$. Prendiamo un disco chiuso $D^* \subseteq \Omega$ di centro p^* e raggio $r^* > 0$ tale che $D^* \cap P$ sia un segmento di retta o due segmenti con estremo p^* in comune. Siccome $\phi_{P'}$ è continua, esiste $\varepsilon \geq 0$ tale che $\phi_{P'}([\tau^* - \varepsilon, \tau^*]) \subseteq D^*$. Per la definizione di τ^*, esistono $\tau^* - \varepsilon \leq \tau' \leq \tau^*$ e un arco semplice Q' da q a $\phi_{P'}(\tau')$ che ha solo $\phi_{P'}(\tau')$ in comune con P e tale che $Q' \setminus \{ q \} \subseteq \Omega$ (si veda la figura 2.7a). Ma allora Q' entra in D^* senza intersecare P e si può modificare la parte di Q' dentro D^* in modo da ottenere un arco poligonale semplice Q^* che arrivi a p^* che abbia solo questo punto in comune con P e tale che $Q^* \setminus \{ q \} \subseteq \Omega$ (figura 2.7b). Questo significa che $\tau^* \in B$.

Supponiamo ora che $\tau^* \neq 1$. In questo caso, per la continuità di $\phi_{P'}$, il disco D^* contiene anche un punto $\phi_{P'}(\tau'')$ con $\tau'' > \tau^*$. Ma allora si può modificare la parte di Q' dentro D^* analogamente a prima, ma in modo da ottenere un arco Q'' che arriva a $\phi_{P'}(\tau'')$ anziché p^* (figura 2.7c). Questo contraddice la definizione di τ^*, dunque $\tau^* = 1 \in B$. □

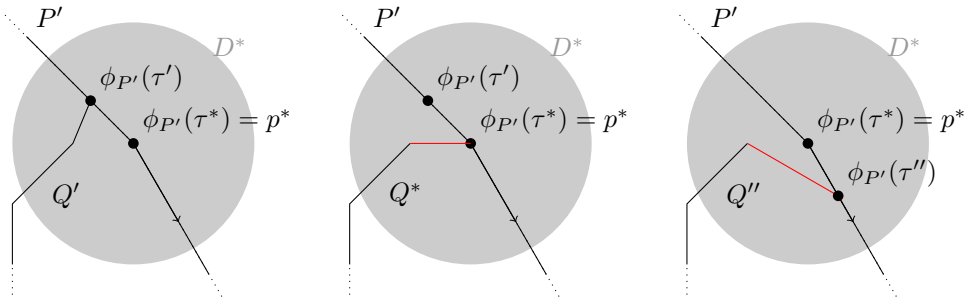


Figura 2.7: Diagrammi per la dimostrazione del Lemma 2.1.4.

Ed ecco finalmente il

Lemma 2.1.5 (Teorema di Jordan per curve poligonali)**.** *Se P è una poligonale semplice nel piano, allora $\mathbb{C} \setminus P$ ha esattamente due regioni, ognuna delle quali ha P come bordo.*

Dimostrazione. In primo luogo, dimostriamo che $\mathbb{C} \setminus P$ ha al massimo due regioni. Supponiamo per assurdo che q_1, q_2, q_3 appartengano a regioni distinte di $\mathbb{C} \setminus P$. Selezioniamo un punto $p \in P$ e un disco D centrato in p e di raggio r tale che $D \cap P$ sia un segmento di retta o due segmenti con estremo p in comune. In ogni caso, $D \cap P$ ha solo due componenti connesse.

Poiché ciascun q_i è connesso a p con un arco poligonale semplice (ad esempio il segmento di retta che li unisce) il Lemma 2.1.4(a) (con $\Omega = \mathbb{C}$) ci permette di concludere che per ogni $i = 1, 2, 3$ abbiamo un arco poligonale semplice da q_i a p che ha solo p in comune con P. Ma allora tale arco entra in D senza intersecare mai P (si veda la figura 2.8a).

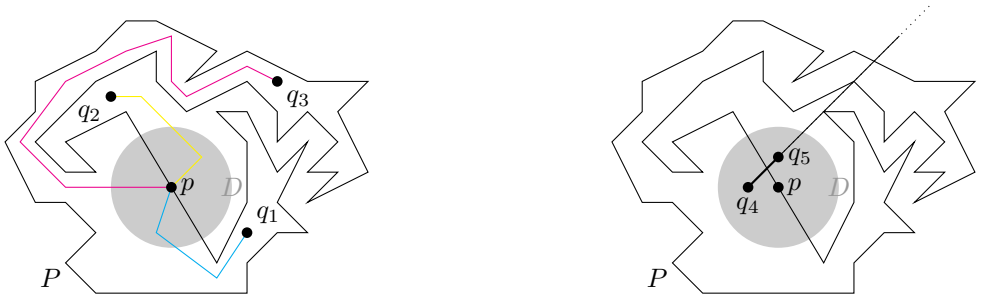
Poiché D ha due sole regioni, per il principio dei cassetti due dei punti q_1, q_2, q_3 arrivano tramite i corrispettivi archi nella stessa regione di D e dunque sono connessi da un arco poligonale semplice, una contraddizione.

Dimostriamo che $\mathbb{C} \setminus P$ non è connesso utilizzando la funzione parità. Ora, questa funzione è costante lungo segmenti di retta in $\mathbb{C} \setminus P$ (per calcolare la parità di questi punti possiamo scegliere la semiretta con la stessa direzione del segmento) e quindi anche per i punti su un arco poligonale semplice in $\mathbb{C} \setminus P$ e allora pure per tutti i punti in una regione di $\mathbb{C} \setminus P$ per il Lemma 2.1.1.

Ora dobbiamo mostrare che esistono punti con parità diversa. Riprendiamo il disco D usato nella prima parte e due punti $q_4, q_5 \in D \setminus P$ appartenenti a diverse regioni di $D \setminus P$. Osserviamo, usando una semiretta con il verso del segmento che collega q_4 a q_5, che questi punti hanno diversa parità e quindi appartengono a diverse regioni (figura 2.8b).

Dunque esistono esattamente due regioni. La funzione parità ci permette anche di caratterizzarle: $\mathrm{ext}(P)$ è formato da tutti i punti con parità 0 e $\mathrm{int}(P)$ da tutti i punti con parità 1.

Abbiamo anche mostrato che ogni intorno aperto di un punto $p \in P$ interseca entrambe le regioni; ne consegue che P è la frontiera comune. □



(a) I punti q_1, q_3 appartengono alla stessa regione di $\mathbb{C} \setminus P$.

(b) I punti q_4, q_5 hanno diverse parità.

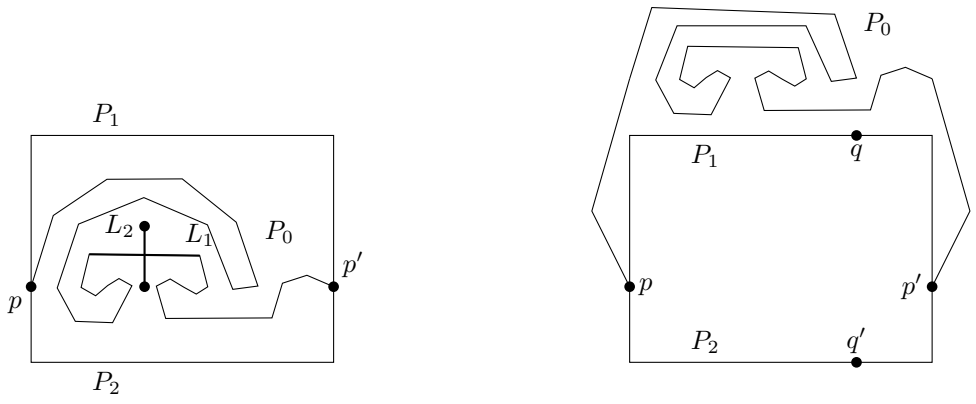
Figura 2.8: Diagrammi per la dimostrazione del Lemma 2.1.5.

Corollario 2.1.6. *Sia $P \subseteq \mathbb{C}$ una poligonale semplice e P_0 un arco poligonale semplice in $\overline{int}(P)$ che connette $p, p' \in P$ e non abbia altri punti in comune con P. Indichiamo con P_1 e P_2 i due archi su P da p a p'. Allora $\mathbb{C} \setminus (P \cup P_0)$ ha esattamente tre regioni i cui bordi sono P, $P_1 \cup P_0$, $P_2 \cup P_0$, rispettivamente.*

Dimostrazione. Chiaramente, $\text{ext}(P)$ è una regione di $\mathbb{C} \setminus (P \cup P_0)$. Come nella dimostrazione del Lemma 2.1.5, concludiamo che l'aggiunta di P_0 a P suddivide $\text{int}(P)$ in al più due regioni.

Dalla stessa dimostrazione si vede anche che ve ne sono almeno due: siano L_1, L_2 segmenti di retta incidenti tali che L_1 sia un segmento di P_0 e L_2 abbia esattamente un punto in comune con $P \cup P_0$. Le estremità di L_2 sono in $\text{int}(P)$ e in regioni distinte di $\mathbb{C} \setminus (P_0 \cup P_2)$, quindi anche in regioni distinte di $\mathbb{C} \setminus (P \cup P_0)$ (si veda la figura 2.9a). □

Osservazione 2.1.7. Il Corollario 2.1.6 implica che, se q e q' sono punti rispettivamente su $P_1 \setminus \{p, p'\}$ e $P_2 \setminus \{p, p'\}$, allora non è possibile unire q e q' con un arco poligonale semplice in $\overline{\text{int}}(C)$ senza intersecare P_0. Il Corollario 2.1.6 e questa osservazione valgono anche quando si scambiano ext e int (figura 2.9b).



(a)

(b)

Figura 2.9: Diagrammi per la dimostrazione del Corollario 2.1.6 e l'Osservazione 2.1.7.

2.2 Grafi planari

Ad ogni grafo Γ, come complesso simpliciale astratto, resta associata una realizzazione geometrica $|\Gamma|$.

Diremo che il grafo Γ può essere *tracciato* in uno spazio topologico X se esiste un sottospazio $Y \subseteq X$ omeomorfo a $|\Gamma|$. Ai vertici di Γ corrispondono punti distinti in X e ad ogni arco di Γ corrisponde un arco semplice che unisce i suoi due estremi in modo che due archi si intersecano in al più un estremo. Se X è il piano euclideo $\mathbb{C}$, diremo che un grafo tracciato in X è un *grafo tracciato planare*, e un grafo astratto che può essere rappresentato in X è un *grafo planare*.

Ai grafi tracciati planari è associata una diversa notazione: cambiano i significati dei termini "faccia" e "unione".

Se Γ è un grafo tracciato planare, le *facce* di Γ non sono altro che le regioni di $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Esiste una sola faccia non limitata (la dimostrazione è analoga a quella per il Lemma 2.1.2) e la chiamaremo *faccia esterna*. Se Γ è 2-connesso, il bordo della faccia esterna è il *ciclo esterno*.

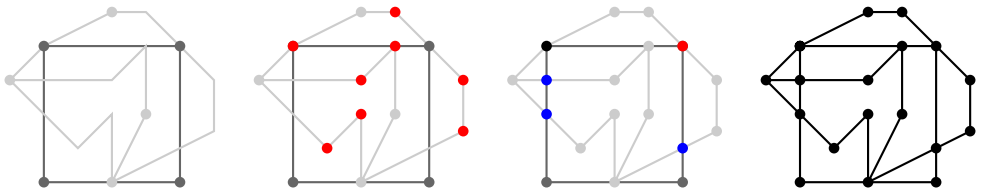
L'unione di due grafi astratti $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ è definita in modo naturale $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Per i grafi tracciati planari faremo uso di un tipo di unione diverso. Se Γ_1 e Γ_2 sono due grafi tracciati planari tali che ogni arco è un arco poligonale semplice (si veda la figura 2.10a), allora l'unione di Γ_1 e Γ_2 è un grafo planare Γ_3 costruito come segue.

Innanzitutto, denotiamo con Γ_i' il grafo planare tale che Γ_i' è una suddivisione di Γ_i' e ogni arco di Γ_i' è un segmento rettilineo per $i = 1, 2$ (figura 2.10b).

In secondo luogo, sia Γ_i'' la suddivisione di Γ_i' tale che un punto p su un arco a di Γ_i' è un vertice di Γ_i'' se p è un vertice di Γ_{3-i}' o p è su un arco di Γ_{3-i}' che attraversa a (figura 2.10c).

Quindi l'unione usuale dei grafi Γ_1'' e Γ_2'' può svolgere il ruolo di Γ_3 (figura 2.10d).

Notiamo che l' unione per grafi planari definita sopra è associativa.



(a) Γ_1 in chiaro, Γ_2 in scuro.

(b) I vertici rossi sono aggiunti a Γ_1; Γ_2 ha già tutti gli archi rettilinei.

(c) I vertici blu sono aggiunti a entrambi Γ_1', Γ_2'; il vertice rosso a Γ_1'.

(d) $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Figura 2.10: Costruzione dell'unione di due grafi planari.

Per poter applicare ai grafi tracciati planari alcuni risultati sugli archi e curve poligonali occorre il seguente:

Lemma 2.2.1. *Se G è un grafo planare, allora G può essere disegnato (tracciato) nel piano in modo che tutti gli archi siano archi poligonali semplici.*

Dimostrazione. Sia Γ un grafo tracciato planare isomorfo a G. Per ogni vertice p di Γ sia D_p un disco chiuso centrato in p che interseca solo quegli archi che hanno estremo

in p. A meno di diminuire i raggi dei dischi, possiamo supporre che $D_p \cap D_q = \emptyset$ per ogni coppia di vertici distinti p, q di Γ (si veda la figura 2.11a).

Per ogni arco pq di Γ parametrizzato da $\gamma_{pq}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, esistono $0 < \tau'_{pq} < \tau''_{pq} < 1$ tali che $\gamma_{pq}(\tau'_{pq})$ è nel bordo di D_p e $\gamma_{pq}(\tau''_{pq})$ nel bordo di D_q.

Definiamo $C_{pq} = \gamma_{pq}([\tau'_{pq}, \tau'_{pq}])$. Osserviamo che i C_{pq} sono mutualmente disgiunti perché gli archi pq lo erano (figura 2.11b).

Trasformiamo uno ad uno ciascun C_{pq} in un arco poligonale semplice usando il Lemma 2.1.1 nella regione di

$$\mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{\substack{a \text{ arco di } \Gamma \\ a \neq pq}} a \cup \bigcup_{\substack{p' \text{ vertice di } \Gamma \\ p' \neq p,q}} D_{p'} \right)$$

che contiene C_{pq} (nella figura 2.11c è trasformato un solo arco, nella figura 2.11d questo passaggio è completato).

I nuovi C_{pq}, che ora sono archi poligonali semplici, possono entrare nei disci chiusi D_p, D_q. Poiché $C_{pq} \cap D_p$ e $C_{pq} \cap D_q$ sono non vuoti, disgiunti e compatti, C_{pq} contiene un arco poligonale semplice $P_{pq} \subseteq C_{pq}$ che connette D_p con D_q e ha solo gli estremi in comune con $D_p \cup D_q$ (figura 2.11e).

Possiamo ora ridisegnare Γ in modo che tutti gli archi presenti nel nuovo disegno siano formati fuori dai dischi D_p dagli archi P_{pq} e dentro i dischi D_p da segmenti di retta (figura 2.11f). □

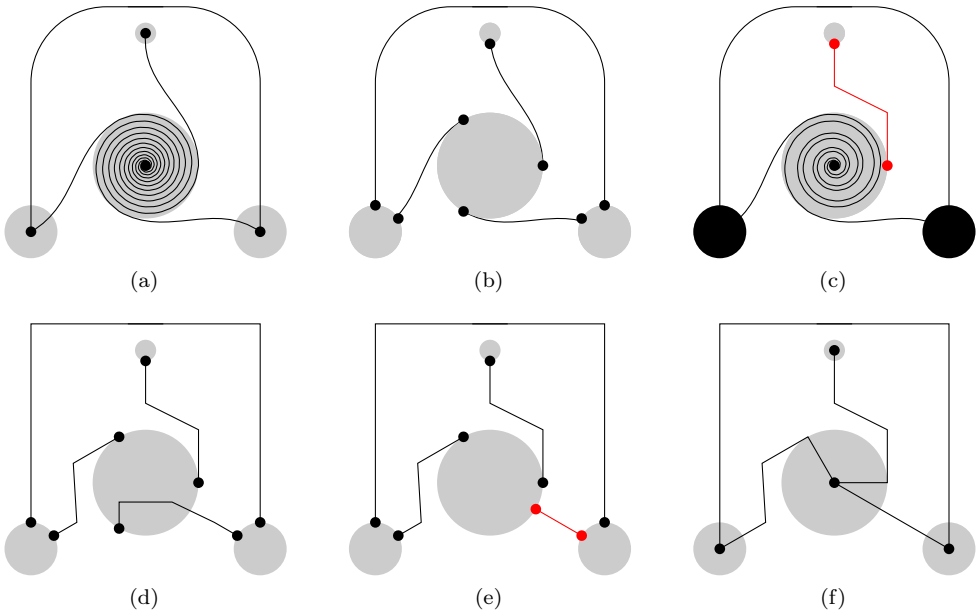
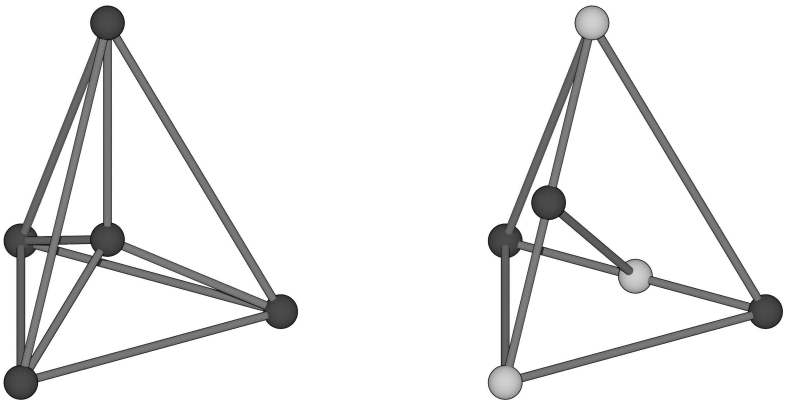


Figura 2.11: Diagrammi per la dimostrazione del Lemma 2.2.1.

2.2.1 Il Teorema di Kuratowski

Il Teorema di Kuratowski afferma che un grafo (finito) non è planare se e solo se contiene una suddivisione di uno dei grafi di Kuratowski $K_{3,3}$ o K_5[3]. Ricordiamo che K_5 è il grafo su cinque vertici p_i, $i = 1, \ldots, 5$ tale che ogni coppia di vertici è connessa da esattamente un arco (si veda la figura 2.12a) mentre $K_{3,3}$ è il grafo con sei vertici $v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3$ e tutti e nove gli archi $v_i u_j$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$ (figura 2.12b).



(a) K_5 (b) $K_{3,3}$

Figura 2.12: Rappresentazioni dei grafi di Kuratowsky.

In un certo senso, nel Teorema di Kuratowsky, il grafo $K_{3,3}$ riveste un ruolo più fondamentale di qullo di K_5. Ad esempio, è possibile mostrare che possiamo omettere K_5 restringendo il Teorema di Kuratowsky ai grafi con almeno 6 vertici e 3-connessi (cioè grafi G tali che, per ogni insieme $S \subseteq V(G)$ formato da 3 vertici distinti, $G - S$ è connesso). Il grafo $K_{3,3}$ ha pure un legame col Teorema della curva di Jordan, che può essere esteso anche a spazi topologici più generali del piano. In particolare, vale il seguente

Teorema 2.2.2. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff connesso per archi che non può essere separato da un arco semplice. Assumiamo inoltre che X non sia omeomorfo a S^1. Allora le seguenti sono equivalenti:*

1. *ogni curva chiusa semplice $C \subseteq X$ separa X;*
2. *ogni curva chiusa semplice $C \subseteq X$ separa X in esattamente due componenti connesse per archi;*
3. *$K_{3,3}$ non può essere tracciato in X;*
4. *né $K_{3,3}$ né K_5 possono essere tracciati in X.*

Le implicazioni $2 \implies 1$ e $4 \implies 3$ sono immediate. Noi dimostreremo, per $X = \mathbb{C}$, $2 \iff 3$.

[3]Questo Teorema è stato dimostrato per la prima volta da Kuratowski [Kur30] nel 1930.

Per l'implicazione 2 $\implies$ 3, con $X = \mathbb{C}$, possiamo restringere alcune ipotesi: non ci occorre il fatto che gli archi semplici non separano $\mathbb{C}$ e possiamo considerare solo le poligonali (per le quali abbiamo mostrato che separano $\mathbb{C}$ in esattamente due componenti connesse per archi) al posto delle generiche curve chiuse semplici $C \subseteq \mathbb{C}$. Quello che otteniamo è il seguente:

Lemma 2.2.3. *$K_{3,3}$ non è planare.*

Dimostrazione. $K_{3,3}$ può essere pensato come un ciclo $J\colon u_1v_1u_2v_2u_3v_3$ con tre corde u_1v_2, u_2v_3, u_3v_1. Se $K_{3,3}$ fosse planare, avremmo un disegno piano tale che tutti gli archi sono archi poligonali semplici, grazie al Lemma 2.2.1. Quindi J sarebbe una poligonale semplice e due degli archi u_1v_2, u_2v_3, u_3v_1 sarebbero o in $\overline{\text{int}}(J)$ o in $\overline{\text{ext}}(J)$ per il principio dei casssetti (si veda la figura 2.13). Ma ciò contraddirebbe l'osservazione 2.1.7. □

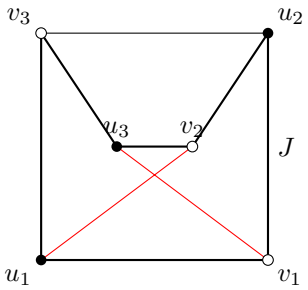


Figura 2.13: Diagramma per la dimostrazione del Lemma 2.2.3.

2.2.2 Grafi 2-connessi planari

Per l'implicazione 3 $\implies$ 2 nel Teorema 2.2.2 con $X = \mathbb{C}$, quando vorremo dimostrare che una curva di Jordan separa il piano in al più due regioni, ci occorrerà il fatto che gli archi di Jordan non lo separano. Per dimostrare questa proprietà (detta anche Teorema degli archi di Jordan) studieremo più approfonditamente i grafi 2-connessi planari, a cominciare dal seguente

Lemma 2.2.4. *Se Γ è un grafo tracciato planare 2-connesso, i cui archi sono archi poligonali semplici, e v e a sono rispettivamente il numero di vertici e di archi di Γ, allora il numero f di facce in $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ sono*

$$f = a - v + 2, \tag{2.1}$$

ognuna delle quali ha un ciclo di Γ come bordo.

Dimostrazione. Sia J un ciclo in Γ. Per il Lemma 2.1.5, il Lemma 2.2.4 vale se $\Gamma = J$.

Altrimenti, Γ può essere ottenuto da J aggiungendo successivamente percorsi come nel Lemma 1.1.9. Ciascun tale percorso viene aggiunto in una regione. Tale regione è delimitata da un ciclo e ora applichiamo il Lemma 2.1.6 (che afferma che il numero di regioni aumenta di 1 quando una regione è suddivisa) per completare la dimostrazione. □

La formula (2.1), di cui più avanti ne dimostreremo una lieve generalizzazione (Lemma 2.3.8), è un caso particolare della nota formula di Eulero.

Vediamo ora cosa succede con particolari unioni di grafi 2 connessi tracciati nel piano. Osserviamo innanzitutto che se sia Γ_1 che Γ_2 sono grafi 2-connessi tracciati planari e hanno almeno due punti in comune, allora anche $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ è 2-connesso. Quello che ci interessa è il seguente

Lemma 2.2.5. *Siano $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ grafi tracciati planari 2-connessi tutti i cui archi sono archi poligonali semplici tali che Γ_i ha almeno due punti in comune con ciascuno dei Γ_{i-1} e Γ_{i+1} e nessun punto in comune con gli altri Γ_j (per $i = 2, 3, \ldots, k-1$). Supponiamo anche che $\Gamma_1 \cap \Gamma_k = \emptyset$. Allora ogni punto che è nella faccia esterna di ciascuna delle unioni $\Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \ldots, \Gamma_{k-1} \cup \Gamma_k$ è anche nella faccia esterna di $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_k$.*

Dimostrazione. Supponiamo che p sia un punto in una faccia limitata di $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ (si veda la figura 2.14a). Poiché $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ è 2-connesso, segue dal Lemma 2.2.4 che esiste un ciclo C in $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ tale che $p \in \text{int}(C)$. Scegliamo C in modo che C sia in $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1} \cup \cdots \cup \Gamma_j$ e tale che $j - i$ sia minimo (figura 2.14b). Vogliamo mostrare che $j - i \leq 1$.

Supponiamo per assurdo che $j - i > 1$. Tra tutti i cicli in $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1} \cup \cdots \cup \Gamma_j$ che hanno p nell'interno, assumiamo che C sia scelto in modo che il numero dei suoi archi fuori da Γ_{j-1} sia minimo.

Poiché C interseca sia Γ_j che Γ_{j-2}, C ha almeno due segmenti massimali disgiunti in Γ_{j-1}; sia P uno di questi (figura 2.14c) e sia P' un percorso minimale in Γ_{j-1} da P a $C - V(P)$ (figura 2.14d).

Gli estremi di P' dividono C in archi P_1 e P_2, ognuno dei quali contiene segmenti fuori da Γ_{j-1} (figura 2.14e). Uno dei cicli $P' \cup P_1$ e $P' \cup P_2$ contiene p nel suo interno e ha meno archi fuori da Γ'_i di quanto ne abbia C (figura 2.14f). Ciò contraddice la minimalità di C, quindi un C minimale giace in una unione $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1}$ per qualche i e questo dimostra il Lemma. □

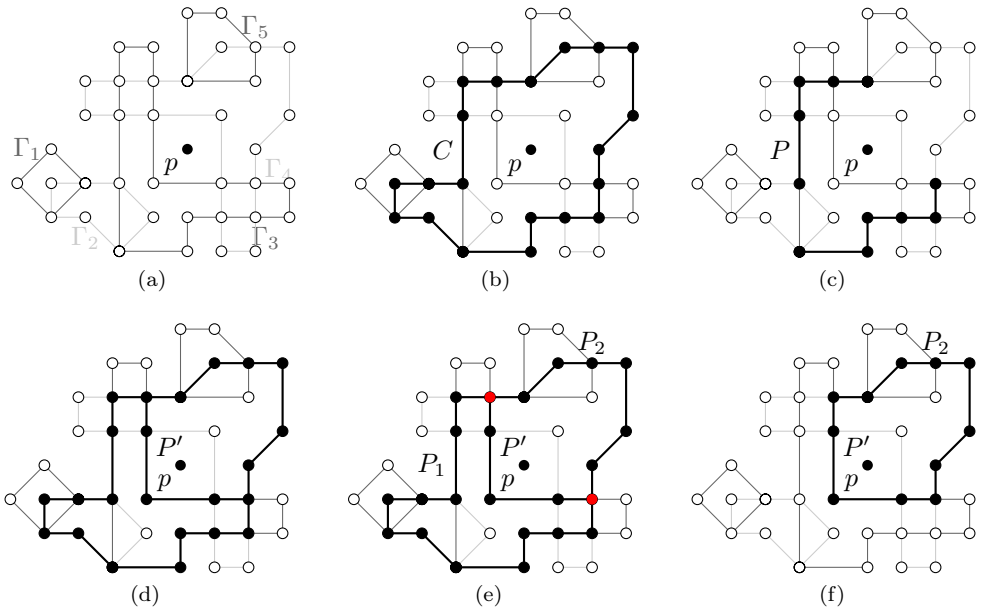


Figura 2.14: Diagrammi per la dimostrazione del Lemma 2.2.5.

2.3 Il Teorema della curva di Jordan

Siamo pronti a dimostrare il Teorema della curva di Jordan, che suddivideremo in più parti.

Proposizione 2.3.1. *Se J è una curva chiusa semplice nel piano, allora $\mathbb{C} \setminus J$ è disconnesso.*

Dimostrazione. Tracciamo una retta verticale L_1 (rispettivamente, L_2) che interseca J in modo che J sia nel semipiano chiuso destro (rispettivamente, sinistro) di L_1 (rispettivamente, L_2). Queste costruzioni sono possibili perchè J è compatta; inoltre, $L_1 \neq L_2$, altrimenti J sarebbe un segmento verticale o un punto (si veda la figura 2.15a). Chiamiamo p_1 (rispettivamente p_2) il punto superiore su $L_1 \cap J$ (rispettivamente, su $L_2 \cap J$). Sia L_3 un arco poligonale da p_1 a p_2 in $\text{ext}(J)$ costituito da segmenti di L_1, L_2 e un segmento di retta orizzontale sopra J (figura 2.15b).

Siano P_1 e P_2 le due curve su J da p_1 a p_2. Tracciamo una retta verticale L_4 tra L_1 e L_2 (figura 2.15c). Poiché $P_1 \cap L_4$ e $P_2 \cap L_4$ sono non vuoti, disgiunti e compatti, L_4 contiene un arco poligonale che connette P_1 con P_2 e ha solo i suoi estremi in comune con $P_1 \cup P_2 = J$. Chiamiamo tale intervallo L_5 e i suoi estremi p_3, p_4 (figura 2.15d). Mostriamo che ogni arco che connette un punto in $L3 \setminus \{ p_1, p_2 \}$ a un punto in $L5 \setminus \{ p_3, p_4 \}$ interseca J e quindi $\mathbb{C} \setminus J$ è composto da almeno due regioni.

Supponiamo che esista un arco poligonale semplice L_6 che connette L_3 a L_5 senza intersecare J (figura 2.15e). Poiché $L_3 \cap L_6$ e $L_5 \cap L_6$ sono non vuoti, disgiunti e compatti, L_6 contiene un arco poligonale L_7 che connette L_3 con L_5 e ha solo i suoi estremi, p_5 e p_6, in comune con $L_3 \cup L_5$ (figura 2.15f).

Ma allora $J \cup L_3 \cup L_5 \cup L_7$ è un grafo planare con vertici $p_1, p_2, \ldots, p_6$ isomorfo a $K_{3,3}$, contraddizione per il Lemma 2.2.3. □

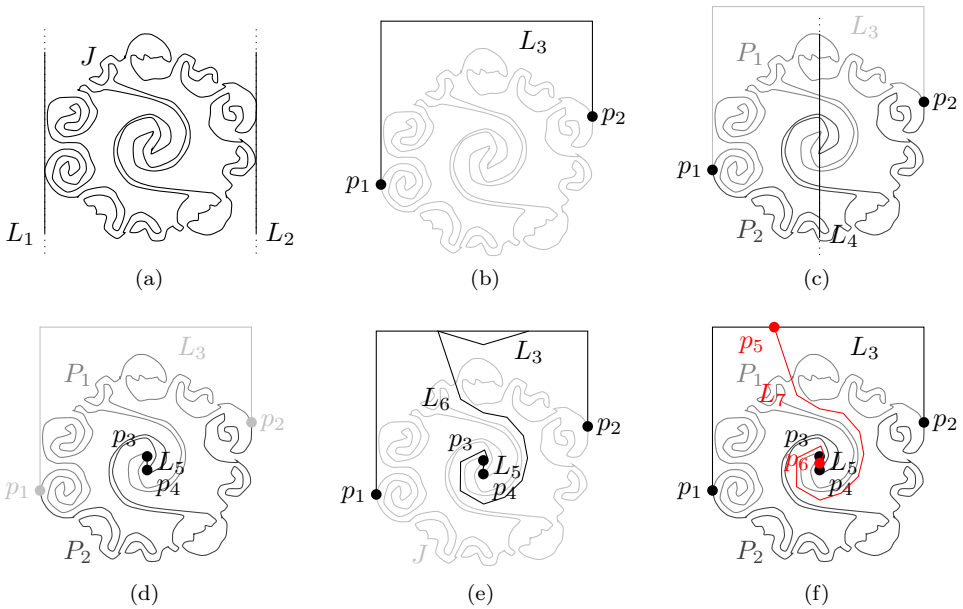


Figura 2.15: Diagrammi per la dimostrazione della Proposizione 2.3.1.

Per il Lemma 2.1.2, questa Proposizione ci dice che anche l'interno di una curva di Jordan non è vuoto. Volgiamo ora dimostrare che è composto da una sola regione. Per le poligonali abbiamo usato il Lemma 2.1.4(a), che dice che ogni punto in una poligonale P può essere raggiunto da un punto in $\mathbb{C} \setminus P$ con un arco poligonale.

Formalizziamo questo concetto: se C è un sottoinsieme chiuso del piano e q è un punto di $\mathbb{C} \setminus C$, allora un punto p in C è *accessibile* da q se c'è un arco poligonale semplice da q a p che ha solo p in comune con C. Il Lemma 2.1.4(a) dice cioè che tutti i punti di una curva poligonale semplice $P \subseteq C$ sono accessibili da ogni punto $q \in \mathbb{C} \setminus P$. L'ipotesi che P sia poligonale è essenziale: se J è una curva di Jordan generica, allora un punto $p \in J$ potrebbe non essere accessibile da un punto $q \in \mathbb{C} \setminus J$.

Tuttavia l'insieme dei punti accessibili è denso in J. Per dimostrarlo, avremo bisogno del già menzionato Teorema dell'arco di Jordan, ovvero la seguente

Proposizione 2.3.2 (Teorema dell'arco di Jordan)**.** *Se C è un arco semplice nel piano, allora $\mathbb{C} \setminus C$ è connesso.*

Dimostrazione. Siano p e q due punti in $\mathbb{C} \setminus C$ e sia d un numero positivo tale che ciascuno di p e q abbia distanza $> 3d$ da C.

Poiché C è compatto, lo possiamo partizionare in segmenti $C_1, C_2, \ldots, C_k$ tali che C_i unisce p_i e p_{i+1}, per $i = 1, 2, \ldots, k$ e tale che ogni punto su C_i abbia distanza minore di d da p_i per $i = 1, 2, \ldots, k-1$ (ci si immagini qualcosa di simile alla figura 2.16a).

Sia d' la distanza minima tra C_i e C_j per $1 \leq i \leq j-2 \leq k-2$. Notiamo che $d' \leq d$. Per ogni $i = 1, 2, \ldots, k$, partizioniamo C_i in segmenti $C_{i,1}, C_{i,2}, \ldots, C_{i,k_i}$ tali che $C_{i,j}$ unisce $p_{i,j}$ a $p_{i,j+1}$, per $j = 1, 2, \ldots, k_i - 1$ e tale che ogni punto su $C_{i,j}$ abbia distanza minore di $d'/4$ da $p_{i,j}$.

Sia Γ_i il grafo che è l'unione dei bordi dei quadrati formati da segmenti rettilinei orizzontali e verticali di lunghezza $d'/2$ e hanno un punto $p_{i,j}$ come centro (si immagini qualcosa di simile alla figura 2.16b). Allora i grafi $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ soddisfano l'ipotesi del Lemma 2.2.5. Pertanto, sia p che q sono nella faccia esterna di $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ (perché sono fuori dal disco di raggio $3d$ e con centro p_i, mentre $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1}$ è interno a quel disco) e C non interseca quella faccia. Quindi, p e q possono essere uniti da un arco poligonale semplice disgiunto da C. Per il Lemma 2.1.1 e per la generalità dei punti p, q concludiamo che $\mathbb{C} \setminus C$ è connesso. □

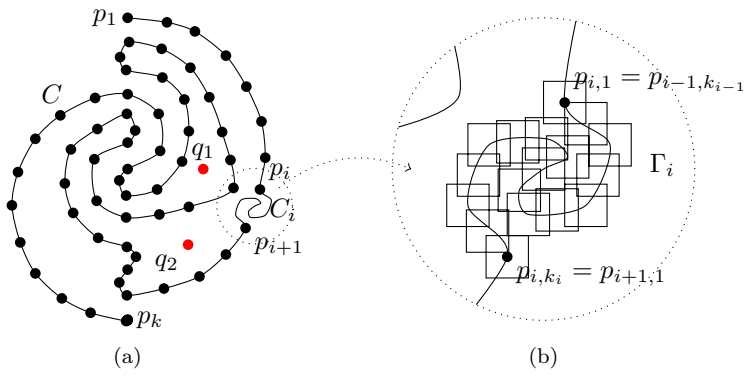


Figura 2.16: Diagrammi per la dimostrazione della dimostrazione del Lemma 2.3.2.

Ora si può dimostrare il seguente

Lemma 2.3.3. *Siano $J \subseteq \mathbb{C}$ una curva di Jordan e $q \in \mathbb{C} \setminus J$, allora l'insieme $A(q) = \{\, p \in J \mid p \text{ è accessibile da } q \,\}$ è denso in J.*

Dimostrazione. Sia U un aperto in J e mostriamo che $U \cap A(q) \neq \emptyset$. Sia $q' \in \mathbb{C} \setminus J$ un punto appartenente a una regione di $\mathbb{C} \setminus J$ diversa da quella di q. Esiste un sottoarco aperto $C \subseteq U$ di J. Per il Lemma 2.3.2, $\mathbb{C} \setminus (J \setminus C)$ è connesso. Esiste dunque un arco poligonale semplice in $\mathbb{C} \setminus (J \setminus C)$ da q a q'. Questo arco deve allora intersecare C in un punto accessibile da q. □

Siamo pronti per la seguente

Proposizione 2.3.4. *Se J è una curva chiusa semplice nel piano, allora $\mathbb{C} \setminus J$ ha al più due regioni.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che p_1, p_2, p_3 siano punti in regioni distinte $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ di $\mathbb{C} \setminus J$ (si veda la figura 2.17a). Siano Q_1, Q_2, Q_3 segmenti mutualmente disgiunti di J (figura 2.17b). Il Lemma 2.3.3 garantisce che in ciascun Q_j esistono tre punti distinti $q_{1,j}, q_{2,j}, q_{3,j}$ accessibili tramite un arco poligonale semplice $P_{i,j}$ in $\Omega_i \cup Q_j$ da p_i a $q_{i,j}$ per ogni combinazione di $i, j = 1, 2, 3$ (in figura 2.17c sono disegnati i $Q_{3,j}$). Chiaramente $P_{i,j} \cap P_{i',j'} \subseteq \{\, q_{i,j} \,\}$ quando $i \neq i'$.

Possiamo assumere che $P_{i,j} \cap P_{i,j'} = \{\, p_i \,\}$ per $j \neq j'$. Infatti, possiamo modificare $P_{i,2}$ in modo che $P_{i,2} \cap P_{i,1} = \{\, q_i \,\}$ grazie al Lemma 2.1.4(b) (figura 2.17d) e poi $P_{i,3}$ grazie al Lemma 2.1.4(c) in modo che $P_{i,3} \cap (P_{i,1} \cup P_{i,2}) = \{\, p_i \,\}$ (figura 2.17e).

Ora possiamo estendere (aggiungendo un arco in ciascuno dei Q_1, Q_2, Q_3) l'unione degli archi $P_{i,j}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ ad un grafo tracciato planare isomorfo a $K_{3,3}$ (figura 2.17e), contraddizione per il Lemma 2.2.3. □

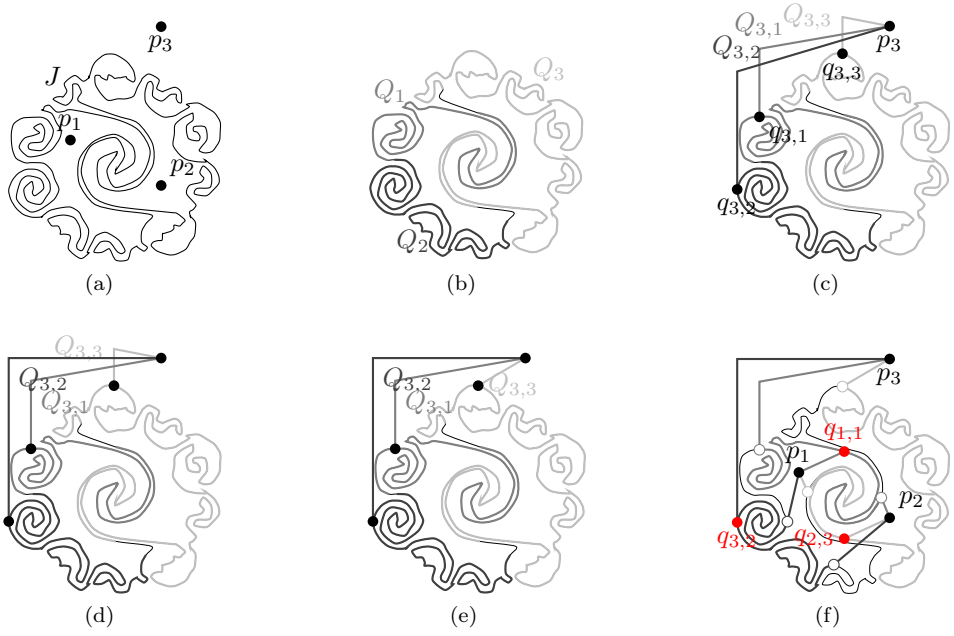


Figura 2.17: Diagrammi per la dimostrazione della Proposizione 2.3.4

Osservazione 2.3.5. Il Lemma 2.3.3 implica anche che ogni punto di J è un punto di frontiera di $\text{ext}(J)$ e $\text{int}(J)$.

Questa osservazione e le Proposizioni 2.3.1, 2.3.4 costituiscono il

Teorema 2.3.6 (Teorema della curva di Jordan)**.** *Se J è una curva chiusa semplice nel piano, allora $\mathbb{C} \setminus J$ ha precisamente due regioni, ciascuna delle quali ha J come bordo.*

Ora che è dimostrato, possiamo esterndere alcuni risultati precedenti. Innanzitutto, il Lemma 2.1.6 si generalizza nel

Lemma 2.3.7. *Sia J una curva chiusa semplice e P un arco poligonale semplice in $int(J)$ tale che P connetta p e q su J e non abbia altri punti in comune con J. Siano P_1 e P_2 i due archi su J da p a q. Allora $\mathbb{C} \setminus (J \cup P)$ ha esattamente tre regioni i cui bordi sono J, $P_1 \cup P$ e $P_2 \cup P$ rispettivamente.*

Dimostrazione. Come nella dimostrazione del Lemma 2.1.6, l'unica parte non banale è dimostrare che $\overline{\text{int}}(J)$ è suddiviso in (almeno) due regioni. Se le estremità di L_2 (definito come nella dimostrazione del Lemma 2.1.6) sono nella stessa regione di $\mathbb{C} \setminus (J \cup P)$, allora quella regione contiene un arco poligonale P_3 tale che $P_3 \cup L_2$ è una semplice curva poligonale chiusa.

Dalla dimostrazione del Lemma 2.1.5, le estremità di L_1 sono in regioni distinte di $\mathbb{C} \setminus (P_3 \cup L_2)$. Ma sono anche nella stessa regione di $\mathbb{C} \setminus (P_3 \cup L_2)$ poiché sono unite da un arco semplice (in $J \cup P$) che non interseca $P_3 \cup L_2$. Questa contraddizione dimostra il Lemma. □

Generalizziamo il Lemma 2.2.4 nel

Lemma 2.3.8. *Se Γ è un grafo 2-connesso contenente un ciclo J (che è una curva chiusa semplice) tale che tutti gli archi in $\Gamma \setminus J$ sono archi poligonali semplici in $\overline{int}(J)$, e v e a sono rispettivamente il numero di vertici e di archi di Γ, allora il numero f di facce in $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ sono*

$$f = a - v + 2, \tag{2.2}$$

ognuna delle quali ha un ciclo di Γ come bordo.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Lemma 2.2.4 tranne che ora utilizziamo il Lemma 2.3.7 invece del Lemma 2.1.6. □

Infine, estenderemo la definizione di unione per grafi planari anche per coppie di grafi Γ_1 e Γ_2 che sono tracciati planari e la cui intersezione nel piano contiene un ciclo J tale che tutti gli archi in $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \setminus J$ sono archi poligonali semplici in $\overline{\text{int}}(J)$.

2.4 Il Teorema di Jordan-Schönflies

Se J e J' sono curve di Jordan, Γ e Γ') sono grafi 2-connessi tracciati planari i cui cicli esterni sono rispettivamente J e J', allora Γ e Γ' si dicono *piano-isomorfi* se esiste un isomorfismo $\gamma\colon \Gamma \to \Gamma'$ cha mappa J in J' e tale che un ciclo in Γ delimita una faccia di Γ se e solo se l'immagine del ciclo delimita una faccia di Γ'. L'isomorfimo γ è chiamato *isomorfismo planare* tra Γ e Γ'.

Teorema 2.4.1 (Teorema di Jordan-Schönflies)**.** *Se f è un omeomorfismo di una curva chiusa semplice J in una curva chiusa semplice J', allora f può essere estesa a un omeomorfismo dell'intero piano.*

Dimostrazione. Senza perdere di generalità possiamo assumere che J' sia un quadrato (si veda la figura 2.18a). Cominciamo trovando un estensione di f a $\overline{\text{int}}(J)$.

Siccome i punti di J accessibili da un punto $q \in \text{int}(J)$ (e quindi per il Teorema 2.3.6 e il Lemma 2.1.1 da tutti i punti in $\text{int}(J)$) sono densi in J, esiste un insieme numerabile e denso A in J formato da punti accessibili da $\text{int}(J)$. Denotiamo invece con B un insieme numerabile e denso in $\text{int}(J)$ (ad esempio i punti con coordinate razionali). Sia $p_1, p_2, \ldots$ una sequenza di punti in $A \cup B$ tale che ogni punto in $A \cup B$ compare infinite volte nella sequenza.

Pensiamo a J e J' come due grafi 2-connessi tracciati planari Γ_0, Γ'_0 e f come un isomorfismo planare γ_0 tra Γ_0 e Γ_1.

Definiremo due sequenze di grafi 2-connessi $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$ e $\Gamma'_0, \Gamma'_1, \ldots$ tali che, per ogni $n \geq 1$:

(i) $p_n \in \Gamma_n$;
(ii) Γ_n è un'estensione di una suddivisione di Γ_{n-1};
(iii) Γ'_n è un'estensione di una suddivisione di Γ'_{n-1};
(iv) esiste un isomorfismo planare $\gamma_n \colon \Gamma_n \to \Gamma'_n$ che coincide con γ_{n-1} in $V(\Gamma_{n-1})$;
(v) Γ_n è formata da J e archi semplici poligonali in $\overline{\text{int}}(J)$;
(vi) Γ'_n è formata da J' e archi semplici poligonali in $\overline{\text{int}}(J')$;
(vii) $\Gamma'_n - J'$ è connesso.

Estenderemo poi f a $J \cup V(\Gamma_n)$ in modo che f e γ_n coincidano in $V(\Gamma_n)$. Supponiamo aver già definito $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$, $\Gamma'_0, \Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_{n-1}$ e $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ (figura 2.18b). Definiamo Γ_n, Γ'_n in un certo modo a seconda che p_n appartenga ad A o a B.

Se $p_n \in A \subseteq J$, sia P un arco semplice poligonale da p_n a un punto q_n di Γ_{n-1} tale che $\Gamma_{n-1} \cap P = \{ p_n, q_n \}$. Denotiamo con Γ_n il grafo $\Gamma_{n-1} \cup P$. P è disegnato in una faccia di Γ_{n-1} delimitata da un ciclo $S \subseteq \Gamma_n$.

Aggiungiamo a Γ'_{n-1} un arco poligonale semplice P' che connette $f(p_n) = p'_n$ con $\gamma_{n-1}(q_n) = q'_n$ in modo che $P' \setminus \{ p'_n, q'_n \}$ stia nella faccia delimitata da $\gamma_{n-1}(S)$ (figura 2.18c).

Poi poniamo $\Gamma'_n = \Gamma'_{n-1} \cup P'$ e definiamo il piano-isomorfismo γ_n da Γ_n a Γ'_n in modo naturale. Estendiamo f in modo che $f(q_n) = \gamma_n(q_n)$. Se $p_n \in B$ consideriamo il quadrato più largo con lati verticali ed orizzontali contenuto in $\overline{\text{int}}(J)$, che ha p_n come punto centrale. In questo quadrato disegniamo un nuovo quadrato contenente p_n con lati verticali ed orizzontali ciascuno dei quali dista $< \frac{1}{n}$ dai lati del primo quadrato.

All'interno del nuovo quadrato disegniamo linee verticali ed orizzontali in modo che p_n stia sia su una linea verticale sia su una linea orizzontale e in modo che tutte le regioni nel quadrato abbiano diametro $< \frac{1}{n}$.

Indichiamo con H_n l'unione di Γ_{n-1} con i nuovi segmenti di linea retta orizzontali e verticali, eventualmente insieme ad un arco poligonale aggiuntivo in $\overline{\text{int}}(J)$ per rendere H_n 2-connesso e $H_n \setminus J$ connesso. Dal Lemma 1.1.9, H_n può essere ottenuto da Γ_{n-1} aggiungendo successivamente cammini nelle facce.

Aggiungiamo i cammini corrispondenti a Γ'_{n-1} e otteniamo un grafo H'_n, che è piano-isomorfo a H_n (figura 2.18d.

Poi aggiungiamo a H'_n linee verticali in ed orizzontali in $\overline{\text{int}}(J')$ in modo che il grafo risultante non abbia regioni (limitate) di diametro $\geq \frac{1}{2n}$. Se necessario, spostiamo e incliniamo leggermente alcune delle linee in modo che intersechino J' solo in $f(A)$ e in modo che tutte le regioni delimitate abbiano diametro $< \frac{1}{n}$ e in modo che ciascuna delle nuove linee abbia solo un'intersezione finita con H'_n.

Questo estende H'_n in un grafo che denotiamo con Γ'_n. Invocando ancora il Lemma 1.1.9, aggiungiamo ad H_n archi poligonali in modo da ottenere un grafo Γ_n piano-isomorfo a Γ'_n (figura 2.18e).

Poi estendiamo f in modo che sia definito su $J \cup V(\Gamma_n)$ e coincida con l'isomorfismo di piano g_n su $V(\Gamma_n)$.

In questo modo f è una mappa iniettiva definita su $F = J \cup V(\Gamma_0) \cup V(\Gamma_1) \cup \dots$ e con immagine $J' \cup V(\Gamma'_0) \cup V(\Gamma'_1) \cup \dots$. Per costruzione, questi insiemi sono densi in $\overline{\text{int}}(J)$ e $\overline{\text{int}}(J')$, rispettivamente.

Estendiamo ora f a tutto $\text{int}(J)$. Se p è un punto in $\text{int}(J)$ su cui f non è ancora definita, allora consideriamo una sequenza $q_0, q_1, \dots$ convergente a p e formata da punti in $V(\Gamma_0) \cup V(\Gamma_1) \cup \dots$. Mostreremo che $f(q_0), f(q_1), \dots$ converge e porremo $f(p)$ come il limite.

Sia d la distanza da p a J e sia p_n un punto di B di distanza $< \frac{d}{3}$ da p. Allora p è all'interno del maggior quadrato in $\overline{\text{int}}(J)$ che ha p_n come punto centrale ed anche all'interno di quello che abbiamo chiamato il nuovo quadrato se n è sufficientemente grande.

Per costruzione di Γ_n e Γ'_n segue che Γ_n ha un ciclo S tale che $p \in \text{int}(S)$ e tale che sia S che γ_i sono in dischi di raggio $< \frac{1}{n}$. Poiché f mappa $F \cap \text{int}(S)$ in $\text{int}(\gamma_n(S))$ e $F \cap \overline{\text{ext}}(S)$ in $\overline{\text{ext}}(\gamma_n(S))$, segue in particolare che la sequenza $f(q_m), f(q_{m+1}), \dots$ è in $\text{int}(\gamma_n(S))$ per qualche m. Poiché n può essere scelto arbitrariamente grande, $f(q_0), f(q_1), \dots$ è una successione di Cauchy e quindi convergente. Segue che f è ben definita.

Inoltre, utilizzando la notazione sopra, f mappa $\text{int}(S)$ in $\text{int}(\gamma_n(S))$. Quindi f è continua in $\text{int}(J)$.

Poiché $V(\Gamma'_0) \cup V(\Gamma'_1)$ è denso in $\text{int}(J')$, lo stesso argomento mostra che f mappa $\text{int}(J)$ su $\text{int}(J')$, che f è iniettiva e che f^{-1} è continua su $\text{int}(J')$.

Resta da dimostrare che f è continua su J (allora anche f^{-1} è continua poiché $\overline{\text{int}}(J)$ è compatto). Per dimostrarlo è sufficiente considerare una sequenza $q_0, q_1, \dots$ di punti in $\text{int}(J)$ che converge a q su J e mostrare poi che $f(q_0), f(q_1), \dots$ converge a $f(q)$.

Supponiamo per assurdo che questo non sia il caso. Poiché $\overline{\text{int}}(J')$ è compatto, possiamo assumere (considerando una sottosuccessione appropriata, se necessario) che $\lim_{n\to\infty} f(q_n) = q' \neq f(q)$. Poiché f^{-1} è continua su $\text{int}(J')$, q' è su J'. Poiché A è denso in J, $f(A)$ è denso in J' e quindi ciascuno dei due archi su J' da q' a $f(q)$ contiene un punto $f(p_i)$ e $f(p_j)$, rispettivamente, in $f(A)$. Per qualche n, Γ_n ha un cammino P da p_i a p_j avendo in comune solo p_i e p_j con J. Dal Lemma 2.3.7, P separa $\text{int}(J)$ in due regioni. Queste due regioni vengono mappate sulle due regioni distinte di $\text{int}(J') \setminus \gamma_n(P)$. Una di queste contiene quasi tutti i $f(q_n)$ mentre l'altra ha $f(q)$ sul suo bordo, ma non il bordo comune ad entrambe le regioni. Quindi non possiamo avere $\lim_{n\to\infty} f(q_n) = q'$. Questa contraddizione mostra che f ha l'estensione appropriata a $\text{int}(J)$ (figura 2.18f).

Con argomenti simili, f può essere esteso a $\text{ext}(J)$. Sia T un quadrato di centro O e vertici A, B, C, D che contiene sia J che J'. Siano L_A, L_B, L_C, L_D i segmenti (di rette passanti per O da A, B, C e D rispettivamente a J. Sia p_i l'estremità di L_i su J e $p'_i = f(p_i)$,, per $i = A, B, C, D$. Siano L'_A e L'_C archi poligonali da p'_A ad A e da p'_C a C rispettivamente, tali che $L'_A \cap L'_C = \emptyset$ e L'_i abbia solo le sue estremità in comune con J' e T per $i = A, C$. Possiamo trovare un arco poligonale L'_B da p'_B a B o D tale che L'_B sia disgiunto da $L'_1 \cup L'_2$ e abbia solo le sue estremità in comune con J' e T. Dopo una riflessione di J' nella retta passante per A e C, se necessario, possiamo assumere che L'_B vada a B. Ora usiamo il metodo della prima parte della dimostrazione per estendere f ad un omeomorfismo di $\overline{\text{int}}(T)$ tale che f sia l'identità su T (figura 2.18g). Quindi f si estende ad un omeomorfismo di tutto il piano tale che f sia l'identità su $\text{ext}(T)$. □

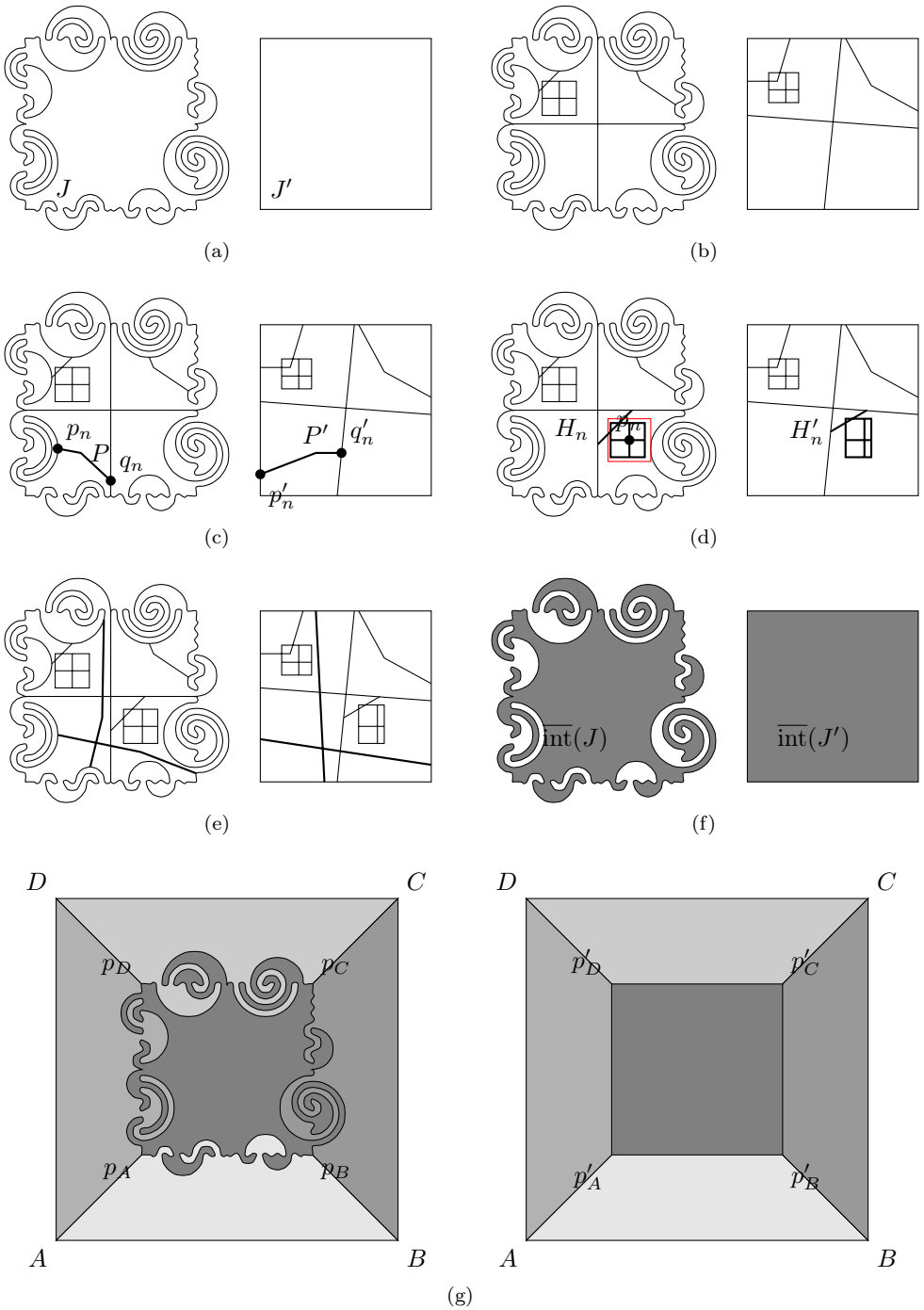


Figura 2.18: Diagrammi per la dimostrazione del Teorema 2.4.1

Se F è un insieme chiuso nel piano, allora diciamo che un punto p in F è *accessibile per archi* se, per ogni punto q in $\mathbb{C} \setminus F$, esiste un arco semplice da q a p che ha solo p in comune con F. Il Teorema di Jordan-Schönflies implica che ogni punto di una curva chiusa semplice è accessibile per archi. Abbiamo quindi la seguente estensione di parte del Teorema 2.3.6:

Teorema 2.4.2. *Se F è un insieme chiuso nel piano con almeno tre punti accessibili per archi, allora $\mathbb{C} \setminus F$ ha al più due regioni.*

Dimostrazione. Se p_1, p_2, p_3 sono accessibili per archi in F e q_1, q_2, q_3 appartengono a tre diverse regioni di $\mathbb{C} \setminus F$ allora otteniamo, come nel Teorema 2.3.6, un grafo planare isomorfo a $K_{3,3}$, con vertici $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$, una contraddizione del Lemma 2.2.3. □

Osservazione 2.4.3. Nel Teorema 2.4.2 "tre" non può essere sostituito con "due". Come controesempio, prendiamo F come collezione di archi semplici che connettono due punti fissi p, q, come in figura 2.19.

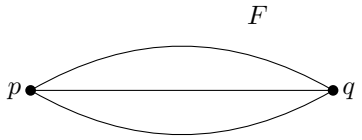


Figura 2.19: F ha due punti accessibili per archi ma separa $\mathbb{C}$ in tre regioni.

Teorema 2.4.4. *Siano Γ e Γ' due grafi tracciati planari 2-connessi tali che g è un omeomorfismo e isomorfismo planare di Γ in Γ'. Allora g può essere esteso a un omeomorfismo dell'intero piano.*

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione sul numero di archi di Γ. Se Γ è un ciclo, allora ci si riduce al Teorema 2.4.1. Altrimenti, segue dal Lemma che Γ ha un cammino P e un sottografo 2-connesso Γ_1 che contiene il ciclo esterno di Γ tale che Γ è ottenuto da Γ_1 con l'aggiunta di P in $\overline{\text{int}}(J)$ dove J delimita una faccia di Γ_1. Ora, applichiamo l'ipotesi induttiva prima a Γ_1 e poi ai due cicli di $c \cup P$ contenente P. □

La dimostrazione che daremo per l'esistenza di triangolazioni per superfici compatte userà ripetutamente il Teorema di Jordan-Schönflief e qualcuno potrebbe pensare che esista una dipendenza da questo Teorema. Tuttavia, in dimensione 3, sono ancora garantite le triangolazioni, sebbene non esista un analogo del Teorema Jordan-Schönflies. Vale a dire, le 3-varietà topologiche sono triangolabili ma un omeomorfismo tra due sfere immerse in $\mathbb{R}^3$ non è in generale estendibile all'intero spazio $\mathbb{R}^3$. Un famoso controesempio, illustrato nella figura 2.20, è la sfera di Alexander: pur essendo omeomorfa alla sfera standard $\mathbb{S}^2$ è contenuta nello spazio tridimensionale in modo differente.

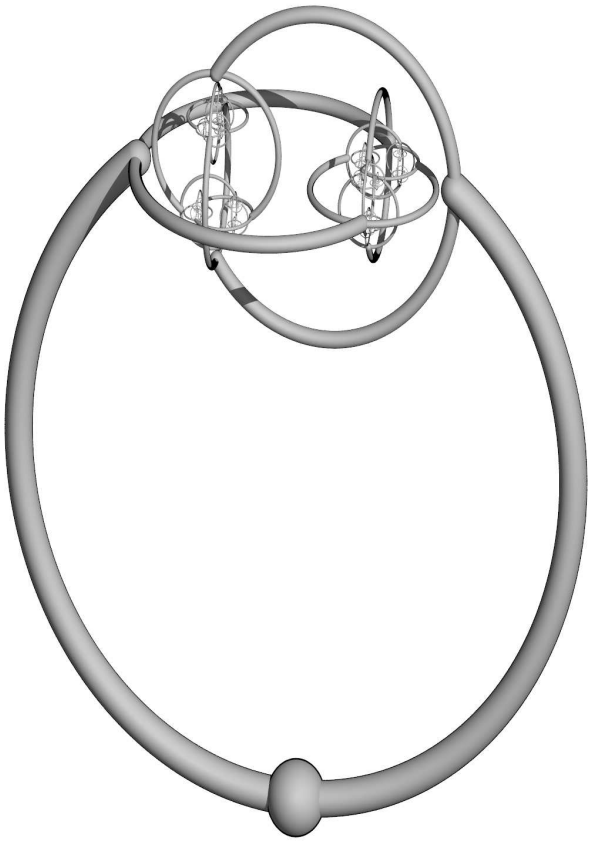


Figura 2.20: La sfera di Alexander.

Capitolo 3

Triangolazioni di superfici compatte

3.1 Dimostrazione dell'esistenza di triangolazioni per superfici compatte

Vogliamo dimostrare che ogni superficie compatta è omeomorfa ad un complesso geometrico.

Seguiremo la dimostrazione in Thomassen [Tho92], ma dovremo aggiungere alcuni dettagli, a cominciare dal seguente

Lemma 3.1.1. *Sia J una curva di Jordan e siano $A, B \subseteq \mathbb{C}$ due insiemi chiusi disgiunti (ad esempio anche A e B sono curve di Jordan e $B \subseteq int(A)$). Definiamo un segmento cattivo di J come un arco in J che unisce due punti $p, q \in A$ con tutti gli altri punti in $\mathbb{C} \setminus A$. Definiamo un segmento pessimo come un segmento cattivo che interseca B. Allora i segmenti pessimi sono in numero finito.*

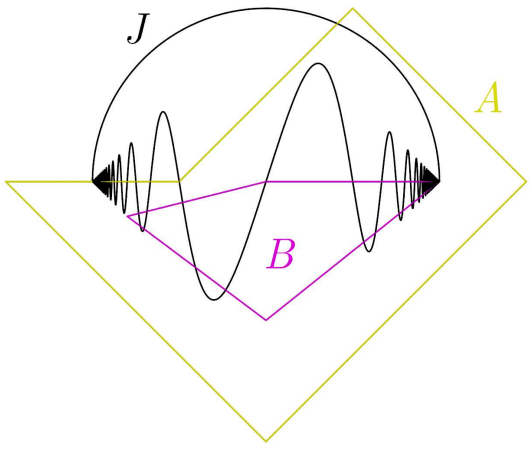


Figura 3.1: J ha infiniti segmenti cattivi ma solo due pessimi.

Dimostrazione. Associamo ad ogni punto $p \in J$ un intorno aperto U_p in J e connesso in modo che:

(i) se $p \in A$, allora $U_p \cap B = \emptyset$ e un insieme di questo tipo sarà detto cattivo;
(ii) se $p \in B$, allora $U_p \cap A = \emptyset$ e un inseme di questo tipo sarà detto pessimo;
(iii) altrimenti, $U_p \cap (A \cup B) = \emptyset$.

È possibile associare questi insiemi perché gli A, B, J sono chiusi. Gli insiemi $(U_p)_{p\in J}$ realizzano un ricoprimento aperto di J compatta, quindi esiste un sottoricoprimento finito formato da aperti $U_{p_1}, \dots, U_{p_n}$.

Osserviamo che ogni segmento pessimo contiene un insieme pessimo. Inoltre, se un segmento di J connette due segmenti cattivi, in particolare due pessimi, allora tale segmento interseca A. Quindi ogni insieme pessimo non può appartenere a due segmenti pessimi distinti. Ma allora il numero degli insiemi pessimi del sottoricoprimento è maggiore dei segmenti pessimi. Questo implica che i segmenti pessimi sono in numero finito. □

Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare il:

Teorema 3.1.2 (Radò, 1925)**.** *Ogni superficie compatta è triangolabile.*

Dimostrazione. Sia S una superficie compatta.

Per il Lemma 1.2.3, ogni punto $p \in S$ ammette un intorno aperto $U_p \subseteq S$ omeomorfo a un disco aperto $D(p) \subseteq \mathbb{C}$ attraverso un omeomorfismo, $\theta_p \colon U_p \to D(p)$.

In ognuno dei $D(p)$ disegnamo i bordi $Q_1(p), Q_2(p)$ e $Q_3(p)$ di tre quadrati in modo che si abbia $p \in \theta_p^{-1}(\mathrm{int}(Q_1(p))), Q_1(p) \subseteq \mathrm{int}(Q_3(p))$ e $Q_3(p) \subseteq \mathrm{int}(Q_2(p))$ (si veda la figura 3.2a).

Siccome S è compatta per ipotesi, esistono finiti punti, $p_1, \dots, p_n$, tali che

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \theta_{p_i}^{-1}(\mathrm{int}(Q_1(p_i))).$$

Possiamo suppore i $D(p_i)$ disgiunti nel piano. Se $U_{p_i} \cap U_{p_j} \neq \emptyset$, $1 \leq i, j \leq n$, indichiamo con $\theta_{ij} \colon \theta_{p_i}(U_{p_i} \cap U_{p_j}) \to \theta_{p_j}(U_{p_i} \cap U_{p_j})$ le mappe di transizione.

In ciò che segue lasceremo fissi $D(p_1), \dots, D(p_n)$, ma modificheremo gli omeomorfismi, θ_{p_i} e definiremo per induzione dei bordi $Q_4(p_i)$ di nuovi quadrati a partire dai $Q_3(p_i)$, in modo che

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \theta_{p_i}^{-1}(Q_4(p_i))$$

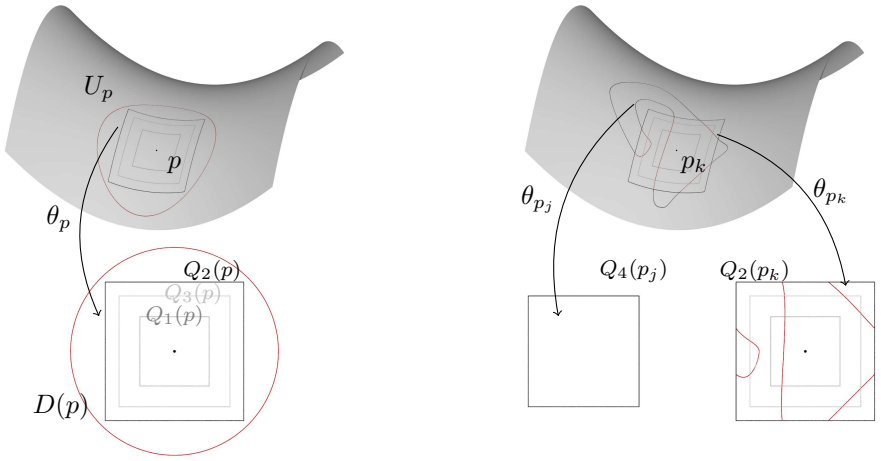
sia un grafo (finito) tracciato sulla superficie e che ogni regione di $S \setminus \Gamma$ sia omeomorfo ad un poligono.

Supponiamo, per induzione su k, che $Q_4(p_1), \dots, Q_4(p_{k-1})$ sono stati definiti tali che

$$\Gamma_{k-1} = \bigcup_{i=1}^{k-1} \theta_{p_i}^{-1}(Q_4(p_i))$$

sia un grafo (finito) tracciato su S. Concentriamoci su $Q_2(p_k)$.

In $\theta_{p_k}^{-1}(\overline{\mathrm{int}}(Q_2(p_k)))$ possono esserci sottoinsiemi connessi massimali (archi o curve chiuse semplici) di qualche $\theta_{p_j}^{-1}(Q_4(p_j))$, $1 \leq j \leq k-1$. Le immagini tramite θ_{p_k} di tali sottoinsiemi sono dette *segmenti cattivi dentro* $Q_2(p_k)$. Vogliamo fare in modo che ogni segmento cattivo dentro $Q_2(p_k)$ sia un arco (e non una curva chiusa semplice) che connette due punti distinti di $Q_2(p_k)$ (come in figura 3.2b).

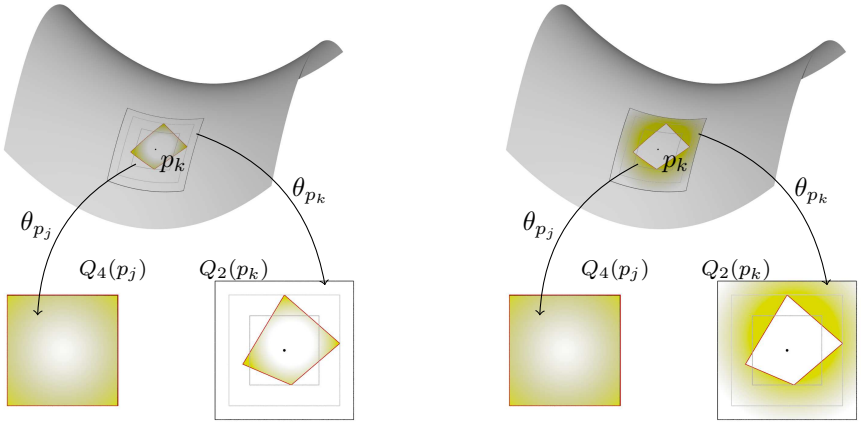


(a) (b)

Figura 3.2: Diagrammi per la dimostrazione del Teorema 3.1.2.

Discutiamo innanzitutto il caso in cui un segmento cattivo C dentro $Q_2(p_k)$ è interamente contenuto in $\overline{\text{int}}(Q_3(p_k))$. Ciò vuol dire che C è una curva chiusa semplice; in particolare $C = \theta_{jk}(Q_4(p_j))$ per qualche $1 \leq j \leq k-1$.

Se $\theta_{jk}(\text{int}(Q_4(p_j)) \subseteq \text{int}(Q_3(p_k))$ (si veda la figura 3.3a) allora osserviamo che $\theta_{jk}(\text{int}(Q_1(p_j)) \subseteq \theta_{jk}(\text{int}(Q_4(p_j)) \subseteq \text{int}(Q_3(p_k))$ e ridefiniamo $Q_4(p_j) = \emptyset$.



(a) (b)

Figura 3.3: Diagrammi per la dimostrazione del Teorema 3.1.2.

Altrimenti (figura 3.3b), S risulta essere omeomorfa ad una sfera. Infatti, in tal caso, $\theta_{p_j}^{-1}\overline{\text{int}}(Q_4(p_j))) \cup \theta_{p_k}^{-1}\overline{\text{int}}(Q_3(p_j)))$ è sia aperto che chiuso in S e per connessione $S = \theta_{p_j}^{-1}\overline{\text{int}}(Q_4(p_j))) \cup \theta_{p_k}^{-1}\overline{\text{int}}(Q_3(p_j)))$. Poi, $\theta_{p_j}^{-1}(Q_4(p_j))$ è omeomorfo a alla circonferenza $\{\,(x,y,z) \in \mathbb{S} \mid z = 0\,\}$. Grazie al Teorema 2.4.1 possiamo estendere questo omeomorfismo in modo che $\theta_{p_j}^{-1}\text{int}(Q_4(p_j)))$ venga mandato in $\{\,(x,y,z) \in \mathbb{S} \mid z > 0\,\}$

e $\theta_{p_k}^{-1}\text{int}(\theta_{jk}(Q_4(p_j)))$ in $\{\,(x,y,z) \in \mathbb{S} \mid z < 0\,\}$ (si veda la figura 3.4). Poiché la sfera è omeomorfa ad un tetraedro, abbiamo finito.

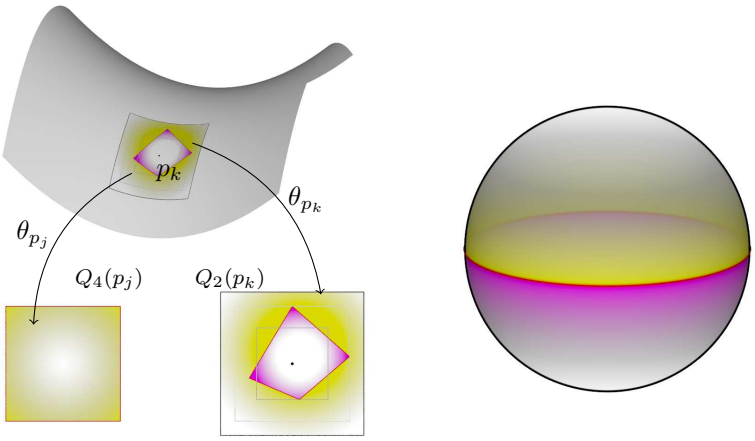


Figura 3.4: Diagrammi per la dimostrazione del Teorema 3.1.2.

Possiamo ora supporre che tutti i segmenti cattivi dentro $Q_2(p_k)$ hanno punti in $\overline{\text{int}}(Q_2(p_k)) \setminus \overline{\text{int}}(Q_3(p_k))$. Poiché i segmenti cattivi provengono da un numero finito di curve chiuse semplici, è sempre possibile supporre, a meno di contrarre il quadrangolo $Q_2(p_k)$, che siano archi che conntettono due punti distinti di $Q_2(p_k)$, come volevamo (si passi a figura 3.5a).

Diciamo che un segmento cattivo C dentro $Q_2(p_k)$ è *pessimo* se interseca $Q_3(p_k)$. Possono esserci infiniti segmenti cattivi ma solo finiti pessimi, per il Lemma 3.1.1. L'insieme dei segmenti pessimi dentro $Q_2(p_k)$ unito con $Q_2(p_k)$ definisce un grafo (finito) 2-connesso tracciato planare, G (figura 3.5b).

Attraverso il Lemma 1.1.9, possiamo ridisegnare G dentro $Q_2(p_k)$ in modo da ottenere un grafo, G', che è omeomorfo e planarmente isomorfo a G e tale che tutti gli archi di G' siano archi semplici poligonali (figura 3.5c).

A questo punto, applichiamo il Teorema 2.4.4 per estendere l'isomorfismo da G a G' a un omeomorfismo di $\overline{\text{int}}(Q_2(p_k))$ tenendo $Q_2(p_k)$ fisso. Così facendo, $Q_1(p_k)$ e ogni $\theta_{jk}(Q_1(p_j))$, dove j è un indice per il quale $Q_4(p_j)$ è diventato $\emptyset$ durante il passaggio k-esimo, si trasformano in curve chiuse semplici. Indichiamo l'unione di queste curve con Q_1' e l'unione dei loro interni con $\text{int}(Q_1')$. Anche $Q_3(p_k)$ si trasforma in una curva, che notiamo con Q_3'. Abbiamo che $\text{int}(Q_1') \subseteq \text{int}(Q_3')$ e $p_k \in \theta_{p_k}(\text{int}(Q_1')) \subseteq \theta_{p_k}(\text{int}(Q_3'))$ (figura 3.5d).

Affermiamo che esiste una curva poligonale semplice chiusa, Q_3'', in $\text{int}(Q_2(p_k))$ tale che $Q_1' \subseteq \text{int}(Q_3'')$ e che non interseca segmenti cattivi dentro $Q_2(p_k)$ se non quelli pessimi (che per costruzione ora sono archi poligonali.)

Una possibile costruzione per Q_3'' è la seguente: per ogni punto $q \in Q_3'$, sia $R(q)$ un quadrangolo di centro q tale che non interseca né Q_1' né cattivi segmenti che non siano pessimi. Prendiamo un ricoprimento finito (minimale) di Q_3' formato da alcuni di questi quadrangoli. L'unione di questi quadrangoli è un grafo 2-connesso planare, il cui ciclo esterno può assumere il ruolo Q_3'' (in figura 3.5e si veda parte di questa costruzione).

Il grafo $G' \cup Q_3''$ può venire ridisegnato in modo da rendere Q_3'' un quadrangolo che contiene al suo interno Q_1'. Usando ancora il Teorema 2.4.4 possiamo estendere questo

isomorfismo al piano. Se prendiamo Q_3'' come scelta di $Q_4(p_k)$ (figura 3.5f), allora

$$\Gamma_k = \bigcup_{i=1}^{k} \theta_{p_i}^{-1}(Q_4(p_i))$$

è un grafo (finito) tracciato su S. Il passo induttivo è stato provato.

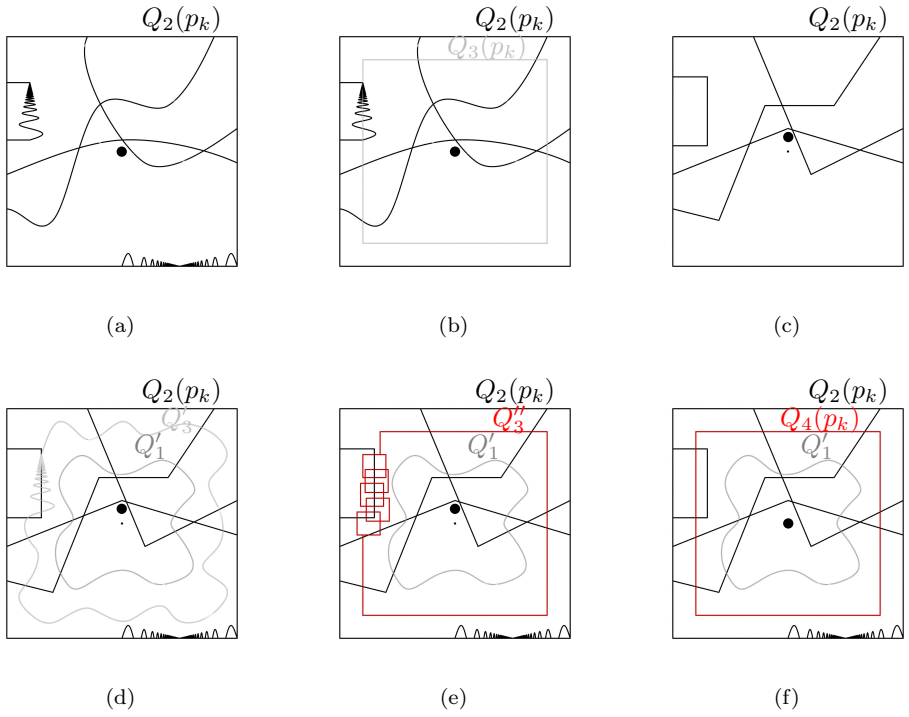


Figura 3.5: Diagrammi per la dimostrazione del Teorema 3.1.2

Ora, possiamo assumere che ci sono un numero finito di segmenti pessimi dentro ciascun $Q_2(p_k)$ e che questi segmenti sono archi poligonali semplici che formano un grafo 2-connesso tracciato planare.

L'unione $\bigcup_{i=1}^{n} \theta_{p_i}^{-1}(Q_4(p_i))$ può essere concepito come un grafo, Γ, disegnato su S.

Ricordiamo che i $\theta_{p_i}^{-1}(\text{int}(Q_1(p_i)))$ formano un ricoprimento di S e osserviamo che, per ogni i, $\theta_{p_i}^{-1}(\text{int}(Q_1(p_i))) \subseteq \theta_{p_i}^{-1}(\text{int}(Q_4(p_j)))$ per qualche j ($j \neq i$ in generale perché può essere che $Q_4(p_i) = \emptyset$). Dunque, ogni componente connessa di $S \setminus \Gamma$ è delimitata da un ciclo in Γ che possiamo pensare come l'immagine di una poligonale P all'interno di qualche $Q_2(p_j)$ tramite $\theta_{p_j}^{-1}$. Per ogni componente connessa scegliamo una sola di tali poligonali, che denotiamo con $P_1, \ldots, P_l$.

A questo punto è facile ricondursi all'esempio 1.2.6 a pagina 10.

Per questo, disegniamo per ognuna di queste P_i una poligonale $P_i' \subseteq \mathbb{C}$ con lati di lunghezza 1, in modo che i vertici di P_i' corrispondano ai vertici di P_i e che i $\overline{\text{int}}(P_i')$ siano mutualmente disgiunti, con $i = 1, \ldots, l$.

Dopo un'identificazione appropriata dei lati delle poligonali P_i', costruita in modo che corrispondano ai bordi delle componenti connesse di $S \setminus \Gamma$, otteniamo una superficie S'. L'unione dei lati delle poligonali P_i' modulo identificazione è un grafo Γ' tracciato

su S' che è isomorfo a Γ. L'isomorfismo di Γ in Γ' può essere esteso a un omeomorfismo, f, dell'insieme di punti di Γ su S sull'insieme di punti di Γ' su S'.

In particolare, la restrizione di f a $\theta_{p_j}^{-1}(P_i)$, con P_i un ciclo del tipo sopra menzionato, è un omeomorfismo su P_i'. Per il Teorema 2.4.1, f può essere esteso a un omeomorfismo di $\theta_{p_j}^{-1}(\overline{\text{int}}(P_i))$ a $\overline{\text{int}}(P_i)$. Questo definisce un omeomorfismo di S su S'

Ci rimane da dimostrare che S' è triangolabile.

Per ogni poligonale P_i' scegliamo un punto $v_i \in \text{int}(P_i'), i = 1, \ldots, l$.

Per costruire una triangolazione introduciamo un complesso astratto $\mathcal{K}$ di dimensione 2. I vertici corrispondono ai vertici delle poligonali P' modulo identificazione e ai punti v_i. Le facce unodimensionali di $\mathcal{K}$ corrispondono ai lati delle poligonali modulo identificazione e ai segmenti di estremi v, c_i, dove v è un vertice della poligonale P_i'. Infine, le facce bidimensionali di $\mathcal{K}$ corrispondono ai triangoli di vertici v, w, c_i, con v, w due vertici consecutivi della poligonale P_i'. Per costruzione, la realizzazione geometrica di $\mathcal{K}$ è omeomorfa a S' e il nostro teorema è dimostrato.

□

Osservazione 3.1.3. La stessa dimostrazione può essere adattata a superfici con bordo. Se S è una superficie con bordo ∂S, si considera il suo doppio $D(S)$ e si costuisce una triangolazione procedendo in modo da poter aggiungere al grafo Γ l'immagine di ∂S, che è composta da una unione disgiunta di curve chiuse semplici.

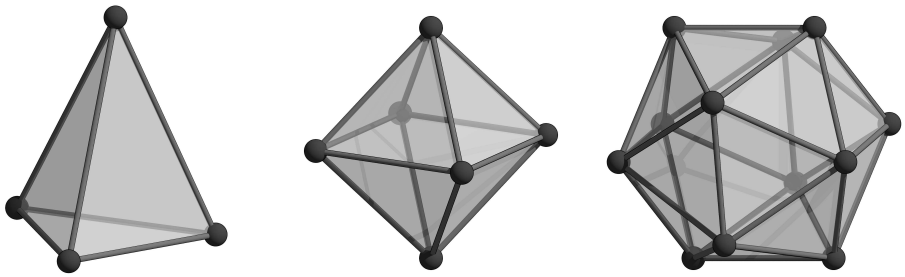
3.2 Esempi e applicazioni

3.2.1 Triangolazioni di superfici classiche

Vediamo la costruzione di alcune triangolazioni per alcune superfici classiche, anche con bordo.

Poiché un complesso con tre vertici non può essere nulla di più che un triangolo, i poliedri omeomorfi a qualche superficie dovranno avere almeno quattro vertici.

Con quattro vertici si definisce un tetraedro, la cui superficie è un poliedro omeomorfo alla sfera. Altre ovvie triangolazioni per la sfera sono dalle superfici di altri due noti solidi platonici: l'ottaedro e l'icosaedro. Sono rappresentati in figura 3.6.

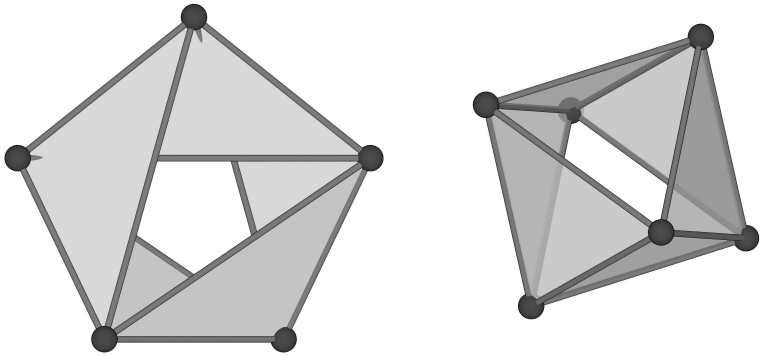


(a) Tetraedro (b) Ottaedro (c) Icosaedro

Figura 3.6: Tre solidi platonici.

Partendo dal grafo K_5 e scegliendo apportunamente i vertici per generare i triangoli, si ottiene un complesso euclideo omeomorfo al nastro di Möbius, rappresentato nella figura 3.7a.

Nella figura 3.7b è rappresentato invece un complesso euclideo con 6 vertici omeomorfo al cilindro.

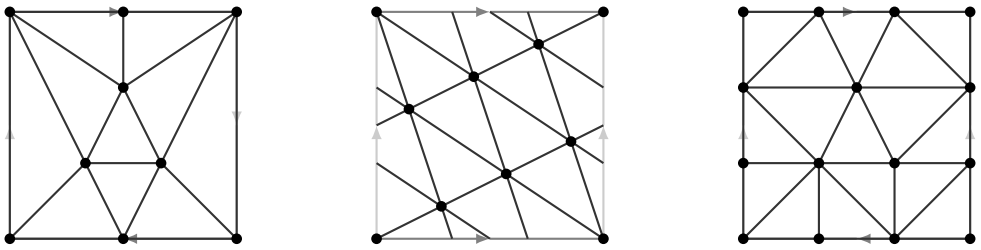


(a) (b)

Figura 3.7: Complessi geometrici omeomorfi al nastro di Möbius o al cilindro.

Con 6 vertici si può anche ottenere un poliedro omeomorfo al piano proiettivo, il cui 1-scheletro è un grafo detto K_6, realizzato in figura 3.8a.

Infine, nelle figure 3.8b e 3.8c sono rappresentate delle triangolazioni per il toro e per l'otre di Klein, rispettivamentie con 7 e 8 vertici.



(a) (b) (c)

Figura 3.8: Rappresentazioni di triangolazioni.

Sia S una superficie chiusa e sia $h : |K| \to S$ una triangolazione di S. Come possiamo aspettarci, K ha alcune proprietà molto interessanti. Ha dimensione 2; è connesso nel senso che due qualsiasi dei suoi vertici possono essere collegati da un cammino di spigoli; ogni suo spigolo è una faccia di esattamente due triangoli; infine ogni vertice giace in almeno tre triangoli che si uniscono formando un cono con vertice il vertice dato e base una curva chiusa semplice poligonale. Un complesso con queste quattro proprietà sarà chiamato una *superficie combinatoria*.

Ora che ci è garantita una triangolazione per ogni superficie compatta, il loro studio si riduce allo studio delle superfici combinatorie. Questo ci permette di definire alcune nozioni fondamentali, quali l'orientabilità e la caratteristica di Eulero-Poincarè.

Per i prossimi paragrafi ho impiegato [Arm83].

3.2.2 Superfici orientabili e non orientabili

La figura 3.9 mostra cosa accade ad un piccolo cerchio, al quale abbiamo assegnato una orientazione, tracciato su un nastro di Möbius quando viene spostato attorno alla circonferenza centrale. Dopo un giro il cerchio ha cambiato orientazione. Da questa osservazione è possibile trarre un primo modo per formalizzare l'idea di "superficie orientata":

Definizione 3.2.1. Le superfici che contengono un nastro di Möbius sono dette *non orientabili*. Una superficie che non contiene un nastro di Möbius è chiamata *orientabile*.

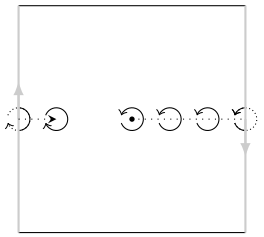


Figura 3.9: Un cerchio orientato percorre un giro nel nastro di Möbius.

Possiamo ottenere una definizione equivalente sfruttando il fatto che le nostre superfici sono triangolabili. Ci sono due modi di orientare un triangolo e possono essere specificate sia disegnando delle frecce sul triangolo, sia, se vogliamo essere precisi, ordinando appropriatamente i vertici v_0, v_1, v_2 del triangolo. Naturalmente, se scegliamo l'ordinamento $v_0v_1v_2$ per specificare una particolare orientazione, anche le permutazioni cicliche $v_2v_0v_1$ e $v_1v_2v_0$ rappresentano la stessa orientazione.

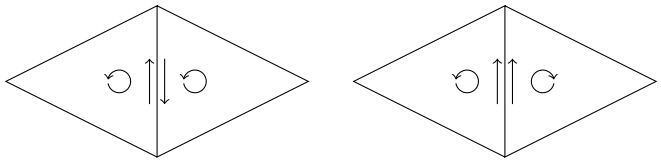
Questa idea funziona per simplessi di qualsiasi dimensione. Sia A un simplesso generico e consideriamo equivalenti due ordinamenti dei suoi vertici se differiscono per una permutazione pari. Ci sono esattamente due classi di equivalenza, ciascuna delle quali è chiamata un'orientazione di A [1]. Supponiamo ora di aver scelto un'orientazione per A ordinando i suoi vertici in un certo modo, diciamo come $v_0v_1 \dots v_k$, e sia B la faccia di A determinata eliminando v_i. Allora i vertici di B ereditano una orientazione da quella di A. Affinché questa orientazione sia ben definita, cioè a meno di permutazioni pari, dobbiamo distinguere due casi: se i è pari, l'orientazione di B specificata da questo ordinamento è chiamata l'orientazione indotta da A; se i è dispari, prendiamo l'altra orientazione di B come indotta da A.

Il caso più semplice è il verso dato a ciascun lato di un triangolo da una scelta di orientazione del triangolo.

Definizione 3.2.2. Una superficie combinatoria K si dice *orientabile* se è possibile orientare tutti i triangoli di K in maniera compatibile, cioè in modo tale che due triangoli adiacenti inducano sempre orientazioni opposte sul loro lato comune (si veda la figura 3.10).

Se S è una superficie compatta che può essere triangolata da una superficie combinatoria orientabile, si può mostrare che qualsiasi altra superficie combinatoria che

[1] A meno che A non sia un vertice: naturalmente, un vertice può essere orientato in un solo modo, ma non si dice.



(a) Orientazioni compatibili. (b) Orientazioni non compatibili.

Figura 3.10: Orientazioni di una coppia di triangoli adiacenti.

triangola S deve essere anch'essa orientabile; in questo caso, diremo che S è *orientabile*, altrimenti *non orientabile*.

Si può dimostrare che le definizioni 3.2.1 e 3.2.2 sono equivalenti e segue immediatamente che l'orientabilità è una proprietà topologica.

Possiamo dunque dividere le superfici in due classi: le orientabili, a cui appartengono la sfera e il toro (e il cilindro estendendo la definizione a superfici con bordo) e le non orientabili, a cui appartengono il piano proiettivo e l'otre di Klein (ed ovviamente il nastro di Möbius). L'orientabilita di una superficie ha implicazioni nella possibilità di immergere una superficie nello spazio tridimensionale: le superfici orientabili (senza bordo) sono infatti esattamente quelle che possono essere rappresentatate in $\mathbb{R}^3$ senza autointersezioni (si ritorni ad esempio alla figura 1.8).

Passiamo ora alla trattazione di due invarianti topologici.

3.2.3 La caratteristica di Eulero-Poincaré e il genere di una superficie compatta

Abbiamo visto nelle formule (2.1) e (2.2) che per alcuni grafi è definita una costante: $2 = v - a + f$, con v, a, f rispettivamente il numero di vertici, archi e facce del grafo.

Guardando alle triangolazioni sopra proposte per la sfera, ci si accorge che tutte le volte $v - a + f = 2$. Si può dimostrare che vale per ogni triangolazione della sfera e la costante 2 viene detta *caratteristica di Eulero-Poincaré* della sfera. Questo concetto può essere esteso a tutte le superfici:

Definizione 3.2.3. Data una superficie compatta S e un complesso geometrico ad essa omeomorfo, la *caratteristica di Eulero-Poincaré* di S è l'intero

$$\chi(S) = v - a + t,$$

con v, a, t rispettivamente il numero di vertici, di archi e di triangoli del complesso.

La caratteristica di Eulero-Poincaré di una superficie S è ben definita. Si può mostrare infatti che $\chi(S)$ non dipende dalla triangolazione scelta, ma solo dalla superficie S.

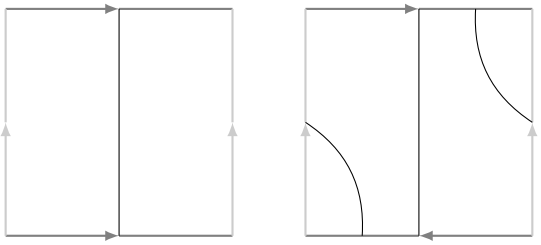
Rappresenta dunque un invariante topologico per le superfici compatte.

Osservazione 3.2.4. Naturalmente la definizione funziona anche per una superficie con bordo e risulta che $\chi(D(S)) = 2\chi(S)$: raddoppiano il numero di vertici, archi e triangoli ma nel quoziente un certo numero di archi e lo stesso numero di vertici scompaiono. Poiché v ed a nella definizione di χ hanno segni opposti, ciò non influenza il risultato.

Esiste un altro invariante topologico per le superfici compatte.

Definizione 3.2.5. Il *genere* di una superficie compatta senza bordo S è il massimo numero di curve semplici chiuse disgiunte che possono essere disegnate sulla superficie senza separarla in due componenti connesse distinte. Il genere di una superficie compatta S viene indicato con $g(S)$. Se S è una superficie con bordo, il suo genere è quello di $D(S)$.

Ad esempio, nel piano ogni curva chiusa semplice separa il piano per il Teorema della curva di Jordan; lo stesso accade nella sfera, dunque il suo genere è 0. Poiché la sfera è il doppio del disco chiuso, anche quest'ultimo ha genere 0. È invece possibile trovare curve chiuse semplici che non separano la superficie nel caso del toro (si veda la figura 3.11a) e dell'otre di Klein (figura 3.11b).



(a) (b)

Figura 3.11: Curve chiuse semplici tracciate in una superficie senza separarla in due componenti connesse.

Il genere di una superficie S risulta legato alla caratteristica di Eulero-Poincaré, si può mostrare infatti che:

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g(S) & \text{se } S \text{ è orientabile;} \\ 2 - g(S) & \text{se } S \text{ è non orientabile.} \end{cases}$$

Dalle triangolazioni proposte sopra si ottiene la seguente tabella:

Superficie S	Componenti connesse del bordo	Orientabile	$\chi(S)$	$g(S)$
Sfera	0	Sì	2	0
Toro	0	Sì	0	1
Piano proiettivo	0	No	1	1
Otre di Klein	0	No	0	2
Quadrato	1	Sì	1	0
Cilindro	2	Sì	0	1
Nastro di Möbius	1	No	0	2

Esiste un Teorema di classificazione per le superfici compatte, che fa uso della nozione di orientabilità e della caratteristica di Eulero-Poincaré e quindi anche del genere; ci fermiamo qui.

Bibliografia

[Ale32] Pavel S. Aleksandrov. *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*. Springer Berlin, Heidelberg, 1932.

[Arm83] Mark A. Armstrong. *Basic Topology*. 1ª ed. Undergraduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 1983.

[Kur30] Casimir Kuratowski. «Sur le problème des courbes gauches en topologie». In: *Fundamenta mathematicae* 15.1 (1930), pp. 271–283.

[La 03] Michael La Croix. *Approaches to the Enumerative Theory of Meanders*. 23 Set. 2003. URL: `https://www.math.uwaterloo.ca/~malacroi/Latex/Meanders.pdf`.

[Lee00] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. 1ª ed. Vol. 202. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 2000.

[Man14] Ciprian Manolescu. «Triangulations of Manifolds». In: *Notices of the International Consortium of Chinese Mathematicians* 2.2 (dic. 2014), pp. 21–23.

[MT01] Bojan Mohar e Carsten Thomassen. *Graphs on Surfaces*. Baltimore e London: Johns Hopkins University Press, 2001.

[Rad25] Tibor Radó. «Über den Begriff der Riemannschen Fläche». In: *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 2.2 (10 gen. 1925), pp. 101–121.

[Ric12] David S. Richeson. *Euler's gem: the polyhedron formula and the birth of topology*. Princeton University Press, 2012.

[RS82] Colin P. Rourke e Brian J. Sanderson. *Introduction to Piecewise-Linear Topology*. Springer Study Edition. Berlin, Heidelberg: Springer, 1982.

[Sau18] Manfred Sauter. «How twisted can a Jordan curve be?» In: *Ulmer Seminare 2016/2017: Funktionalanalysis und Differentialgleichungen, Abschlussband mit Dreizeilenbeweisen und offenen Problemen*. Vol. 20. Ulmer Seminare. Institute of Applied Analysis, Ulm University, 2018, pp. 133–140.

[Sch16] Rich Schwartz. *The Polygonal Jordan Curve Theorem*. 2016. URL: `https://www.math.brown.edu/~res/M123/jc.pdf`.

[Tho92] Carsten Thomassen. «The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces». In: *The American Mathematical Monthly* 99.2 (feb. 1992), pp. 116–130.

[Wey13] Hermann Weyl. *Die Idee der Riemannschen Fläche*. 1ª ed. Leipzig und Berlin Teubner, 1913.