

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"
Corso di Laurea Triennale in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Sistemi Vincolati e Simmetrie di Gauge

Candidato:
Marco Rigobello

Relatore:
Dott. Roberto Volpato

Anno Accademico 2016–2017

Indice

Introduzione	v
Notazione e Lista dei Simboli	vii
1 Sistemi Hamiltoniani Vincolati	1
1.1 Imposizione dei Vincoli	1
1.1A Vincoli Primari e Condizioni di Regolarità	1
1.1B Evoluzione Temporale	2
1.1C Vincoli Secondari e Condizioni di Consistenza	3
1.1D Restrizioni sulle Variabili Ausiliarie	5
1.1E Hamiltoniana Totale	5
1.2 Sistemi Hamiltoniani da Sistemi Lagrangiani di Gauge	7
1.2A Insorgenza dei Vincoli	7
1.2B Definizione dell'Hamiltoniana Canonica	8
1.2C Equivalenza delle Equazioni del Moto	9
1.3 Funzioni di Prima e Seconda Classe	10
1.3A Vincoli di Seconda Classe: Parentesi di Dirac	10
2 Invarianza di Gauge	13
2.1 Trasformazioni di Gauge nel Formalismo Hamiltoniano	14
2.1A Trasformazioni di Gauge come Trasformazioni Canoniche	15
2.1B Generatore di Trasformazioni di Gauge Infinitesime	16
2.1C Congettura di Dirac e Hamiltoniana Estesa	18
2.1D Inequivalenza delle Trattazioni e Trasformazioni di Gauge Puntuali	20
2.2 Osservabili Fisiche Classiche Hamiltoniane	22
2.2A Sottoalgebra delle Funzioni Invarianti di Gauge	22
2.2B Restrizione alla Superficie dei Vincoli	22
2.3 Gauge-Fixing	23
2.3A Richieste sulle Condizioni di Gauge	23
2.3B Conversione dei Vincoli	24
2.3C Conteggio dei Gradi di Libertà	24
3 Generalizzazione a Teorie di Campo	25
4 Formulazione Canonica dell'Elettrodinamica Classica	27
4.1 Elettromagnetismo Puro	27
4.1A Hamiltoniana Canonica e Vincoli	28
4.1B Invarianza di Gauge	29
4.2 Elettrodinamica di una Carica non Relativistica	30
4.2A Equazioni del Moto	32
4.2B Invarianza di Gauge	33
Bibliografia	37

Introduzione

Una *teoria di gauge* è una descrizione “ridondante” di un sistema fisico [14]. Essa fa uso di un numero sovrabbondante di variabili per descrivere le configurazioni assunte dal sistema. In altre parole i gradi di libertà matematici, ossia il numero di variabili usate, sono in numero maggiore dei gradi di libertà fisici, i.e. delle quantità che è necessario misurare per determinare completamente lo stato del sistema. Tipicamente le teorie di gauge emergono quale conseguenza di un’arbitrarietà nella scelta di un “sistema di riferimento”. Diversi valori delle variabili usate per descrivere il sistema relativi a diversi “sistemi di riferimento” possono rappresentare la medesima configurazione fisica. Una scelta diversa può esser fatta ad ogni istante temporale e così un tratto distintivo delle teorie di gauge è che nelle soluzioni delle equazioni del moto compaiono *funzioni arbitrarie del tempo* e, nel caso di teorie di campo, dello spazio [14]. La scelta più naturale in questi casi parrebbe quella di fissare convenzionalmente il “sistema di riferimento”. Questa operazione, detta *gauge-fixing*, può però risultare sconveniente: potrebbe rompere importanti simmetrie o invarianze manifeste¹; altre volte essa è addirittura inattuabile globalmente per via di inconvenienti noti come *ostruzioni di Gribov* [14, 18]. Nella moderna fisica teorica le teorie di gauge rivestono un’importanza fondamentale e la loro diffusione si apprezza già a livello classico: le teorie classiche dell’elettromagnetismo, della meccanica relativistica di una particella puntiforme e della gravitazione sono teorie di gauge. Per questo è di grande rilevanza sviluppare un formalismo che ne consenta lo studio in tutta generalità e che rimandi il più possibile la necessità di fissare una gauge.

Prima dell’introduzione dell’*integrale sui cammini* di Feynman [2, 3], basato sulla lagrangiana, l’unico modo di quantizzare una teoria era quello di passare per il formalismo hamiltoniano e sostituire le variabili dinamiche con operatori e la parentesi di Poisson con un commutatore. Per questa ragione storicamente la trattazione hamiltoniana delle teorie di gauge ha rivestito una significativa importanza. Dalla discussione seguente emergerà che ogni qual volta una teoria ammette dell’arbitrarietà nelle soluzioni delle equazioni del moto, le variabili canoniche della sua trattazione hamiltoniana non risultano tutte indipendenti. Esse dovranno soddisfare delle relazioni che le vincolano ad appartenere ad una sottovarietà dello spazio delle fasi [14]. La teoria hamiltoniana usuale non è in grado di trattare un simile sistema. Proprio allo scopo di fornire un approccio sistematico alla quantizzazione delle teorie di gauge, nel 1930 Rosenfeld pubblicò un articolo precursore della teoria dei *sistemi hamiltoniani vincolati* [1, 25], teoria che ha poi acquisito importanza a sé. Una ventina d’anni dopo i contenuti dell’articolo di Rosenfeld furono riscoperti ed espansi da Anderson e Bergmann [4, 6] e da Dirac [5, 8]. Anche dopo l’introduzione dell’*integrale sui cammini*, il formalismo hamiltoniano continua ad essere alla base di diversi approcci alternativi alla *quantizzazione delle teorie di gauge*. In ordine storico i primi furono l’uso dello *spazio delle fasi ridotto* e il *metodo di Dirac* [14, 18].

¹ Si pensi all’invarianza di Lorentz e alla gauge di Coulomb in Elettromagnetismo [22, p. 136].

Lo scopo di questa tesi è quello di studiare la trattazione hamiltoniana di una teoria di gauge classica, fornendo l'impalcatura su cui i vari metodi di quantizzazione canonica sono stati sviluppati. L'organizzazione logica e tipografica dei contenuti è essenzialmente la seguente.

Sistemi Hamiltoniani Vincolati Il primo capitolo è volto a fornire una descrizione sufficientemente approfondita della teoria dei *sistemi hamiltoniani vincolati*. Un principio variazionale e l'introduzione di alcune *variabili ausiliarie* consentiranno di imporre il rispetto dei vincoli e contemporaneamente di ricavare il corrispondente vincolato delle classiche equazioni del moto hamiltoniane. Si mostrerà inoltre che tali variabili ausiliarie incorporano l'arbitrarietà della teoria di gauge originaria. Quest'arbitrarietà può essere isolata ed esplicitata tramite una riorganizzazione dei vincoli che si realizza nella definizione dell'*hamiltoniana totale* (§1.1). La discussione dei rapporti del formalismo hamiltoniano vincolato con la corrispondente formulazione lagrangiana mostrerà come l'introduzione delle variabili ausiliarie consenta di verificare l'equivalenza fra le due trattazioni ed in particolare fra le rispettive equazioni del moto (§1.2). La distinzione fra vincoli di *prima classe* e di *seconda classe* (§1.3) consentirà infine, fra le altre cose, di introdurre una versione modificata della parentesi di Poisson: la *parentesi di Dirac* che svolge un ruolo fondamentale in alcuni approcci alla quantizzazione.

Invarianza di Gauge Al secondo capitolo si studieranno alcuni tratti generali delle teorie di gauge. Si darà una descrizione generale del concetto *invarianza di gauge* nella visione di Bergmann e Anderson: si vedrà che le *osservabili fisiche* sono rappresentate, nel caso più generale, da *funzionali delle traiettorie* nello spazio delle configurazioni; e che le descrizioni fisicamente equivalenti del sistema sono legate da *trasformazioni di gauge*, ovvero trasformazioni che mappano soluzioni delle equazioni del moto in soluzioni equivalenti. Nel caso specifico della trattazione hamiltoniana si mostrerà come dall'arbitrarietà delle variabili ausiliarie di un sistema hamiltoniano vincolato sia possibile ricavare espressioni esplicite per le trasformazioni di gauge del sistema. Si presenterà poi, seguendo Dirac, una visione alternativa e complementare dell'invarianza di gauge. Si otterranno conformemente ad essa le trasformazioni fra descrizioni equivalenti del sistema. In merito a queste ultime, dette *trasformazioni di gauge puntuali*, si enuncerà l'assunzione che va sotto il nome di *congettura di Dirac*. Si confronterà la visione di Anderson e Bergmann con quella di Dirac determinando sotto quali condizioni esse risultino equivalenti (§2.1). Si discuterà più in dettaglio della rappresentazione delle osservabili nel formalismo hamiltoniano (§2.2). Infine si daranno alcune informazioni circa le procedure di gauge-fixing e il suo legame con il *conteggio dei gradi di libertà* (§2.3).

Applicazioni Senza particolari pretese di completezza, al capitolo terzo saranno introdotti alcuni strumenti matematici indispensabili allo studio delle teorie hamiltoniane di campo. Al quarto capitolo se ne farà uso per discutere due applicazioni della teoria sviluppata: l'elettromagnetismo (§4.1) e l'elettrodinamica classica non relativistica (§4.2). L'obiettivo principale del capitolo è quello di mettere a confronto le differenti nozioni di trasformazioni di gauge sviluppate da Anderson-Bergmann e da Dirac. Inoltre esso fornisce esempi di applicazione della maggior parte dei concetti sviluppati nei capitoli precedenti: si individueranno vincoli e hamiltoniana totale di ciascun sistema a partire solamente dalla rispettiva lagrangiana. Si determinerà l'azione delle trasformazioni di gauge di Anderson-Bergmann sulle osservabili fisiche confrontandola con quella delle trasformazioni di gauge puntuali di Dirac.

Notazione e Lista dei Simboli

Nei capitoli dal primo al terzo si utilizza la convenzione di Einstein per le sommatorie. Altre convenzioni saranno specificate ove introdotte. Per facilitare la lettura si riporta una tabella dei principali simboli usati.

F, G	variabili dinamiche hamiltoniane: funzioni delle variabili canoniche (q, p) ed eventualmente del tempo;
H, H_T, H', H_E	hamiltoniana canonica, totale, di prima classe ed estesa; in carattere calligrafico densità della relativa hamiltoniana in teoria di campo
ψ_l, v^l, pfcc	vincoli primari di prima classe, relativi moltiplicatori e loro combinazioni con coefficienti dipendenti dalle (q, p) ; $l = 1, \dots, L$
γ_a, w^a, fc	analogo per vincoli di prima classe; $a = 1, \dots, A$
$\phi_{m_1}, u^{m_1}, \Sigma_1$	vincoli primari, relativi moltiplicatori e luogo degli zeri; $m_1 = 1, \dots, M_1$
ϕ_m, u^m, Σ	analogo per vincoli generici; $m = 1, \dots, M = M_1 + M_2 + \dots$
χ_b, w^b, Σ_χ	analogo per vincoli di seconda classe; $b = A + 1, \dots, M = A + B$
\approx	uguaglianza debole fra funzioni dello spazio delle fasi; l'uguaglianza esatta vale solo superficie dei vincoli Σ
\simeq	uguaglianza debole fra funzioni dello spazio delle fasi e fra i loro differenziali
$\{ \cdot, \cdot \}$	parentesi di Poisson
$\{ \cdot, \cdot \}^*$	parentesi di Dirac
Γ	traiettoria dinamica; nello spazio delle configurazioni, degli atti di moto o delle fasi a seconda del contesto
$\mathcal{G}, \mathcal{G}_L, \mathcal{G}_H$	trasformazioni di gauge fra traiettorie nello spazio delle configurazioni, degli atti di moto, delle fasi rispettivamente
$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k$	generatore di trasformazioni di gauge infinitesime e suoi termini; $K = 1, \dots, K$

Capitolo 1

Sistemi Hamiltoniani Vincolati

Un sistema hamiltoniano vincolato è un sistema hamiltoniano le cui variabili canoniche non sono tutte fra loro indipendenti, bensì devono soddisfare delle relazioni o vincoli che restringono il loro dominio ad un sottoinsieme dello spazio delle fasi. Il formalismo hamiltoniano tradizionale richiede alcune modifiche allo scopo di poter trattare un sistema vincolato. Il presente capitolo è incentrato sull'individuazione di tali modifiche e delle conseguenze che esse comportano nelle relazioni fra i formalismi hamiltoniano e lagrangiano. La trattazione si rifà perlopiù al manuale di Henneaux e Teitelboim [14] e alla prima parte di [20].

1.1 Imposizione dei Vincoli

L'introduzione dei vincoli avviene attraverso diversi passaggi: la verifica di alcune condizioni di regolarità (§1.1A), una prima determinazione dell'evoluzione temporale (§1.1B) del sistema e la conseguente imposizione di alcune condizioni di consistenza (§1.1C) e (§1.1D), che porta a una versione finale delle equazioni del moto (§1.1E).

1.1A Vincoli Primari e Condizioni di Regolarità

Si consideri un sistema hamiltoniano vincolato in cui si impone che le variabili canoniche $(q, p) \in \mathbb{R}^{2N}$ appartengano al luogo degli zeri $\Sigma_1 \subseteq \mathbb{R}^{2N}$ di alcune funzioni differenziabili

$$\phi_{m_1}(q, p) = 0, \quad m_1 = 1, \dots, M_1. \quad (1.1)$$

Le ϕ_{m_1} sono dette *vincoli primari* e Σ_1 *superficie dei vincoli primari*.

Si suppone che Σ_1 ammetta un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di aperti di \mathbb{R}^{2N} su ciascuno dei quali un sottoinsieme $\phi_1^\alpha, \dots, \phi_{M_1}^\alpha$ di \hat{M}_1 vincoli primari sia tale che

- (i) $\{(\phi_1^\alpha, \dots, \phi_{M_1}^\alpha) = 0\} \cap U_\alpha = \Sigma_1 \cap U_\alpha$, cioè non appena i vincoli di tale sottoinsieme sono imposti, i restanti sono automaticamente soddisfatti;
- (ii) zero è un valore regolare della restrizione a U_α di $(\phi_1^\alpha, \dots, \phi_{M_1}^\alpha)$, ossia il differenziale di $(\phi_1^\alpha, \dots, \phi_{M_1}^\alpha)$ è suriettivo (ha rango \hat{M}_1) in $\Sigma_1 \cap U_\alpha$.

Queste richieste prendono il nome di *condizioni di regolarità* sui vincoli. In particolare esse assicurano che ogni punto di Σ_1 possiede un intorno $U \subset \mathbb{R}^{2N}$ tale che $\Sigma_1 \cap U$ è insieme di livello di un valore regolare di un'applicazione $C^\infty(U, \mathbb{R}^{\hat{M}_1})$, condizione sufficiente affinché la superficie dei vincoli primari sia una sottovarietà differenziale inclusa topologicamente (embedded) nello spazio delle fasi [17, Corollary 8.10 e Lemma 8.1]. Un risultato [14, Theorem 1.1] di validità generale che sarà utile in seguito è il seguente: se Z è sottovarietà di una varietà X espressa tramite dei vincoli Φ_i soddisfacenti le precedenti condizioni di regolarità, allora qualsiasi $f \in C^\infty(X)$ nulla su Z può essere scritta $f = f^i \Phi_i$ per opportune $f^i \in C^\infty(X)$.

Se $\hat{M}_1 = M_1$ i vincoli sono detti *irriducibili*. Al contrario, quando le ϕ_{m_1} non sono tutte indipendenti, si parla di vincoli *riducibili*. Localmente è sempre possibile ignorare i vincoli dipendenti senza perdere alcuna informazione, tuttavia una separazione globale fra vincoli indipendenti e dipendenti non è in generale possibile. È pertanto opportuno sviluppare un formalismo in grado di trattare sia il caso riducibile che quello non riducibile e che sia invariante sotto l'aggiunta o la rimozione di vincoli globalmente conseguenti. Nonostante ciò nella presente trattazione, ai fini di alleggerire la notazione, si considererà solo il caso irriducibile.

1.1B Evoluzione Temporale

L'obiettivo di questa trattazione è ovviamente quello di determinare la dinamica di un sistema hamiltoniano vincolato. L'evoluzione temporale può essere dedotta da una funzione hamiltoniana H tramite un principio variazionale come nel caso non vincolato ma, al fine di ottenere anche il rispetto dei vincoli primari fra le equazioni del moto, è necessario introdurre delle variabili ausiliarie u^{m_1} come moltiplicatori di Lagrange delle ϕ_{m_1} . Si postula allora che le equazioni del moto (classiche) che descrivono la dinamica del sistema siano date da¹

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^n p_n - H - u^{m_1} \phi_{m_1}) = 0 \quad (1.2)$$

sotto variazioni arbitrarie δq^n , δp_n , δu^{m_1} ; con δq^n che si annulla agli estremi di integrazione. Talvolta ci si riferirà all'hamiltoniana generica sopra introdotta con l'espressione hamiltoniana canonica per distinguerla dalle hamiltoniane (totale, di prima classe, estesa) introdotte nel seguito secondo precisi accorgimenti. Sviluppando la (1.2) si trova per δS

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ p_n \frac{d}{dt} \delta q^n + \dot{q}^n \delta p_n - \frac{\partial H}{\partial q^n} \delta q^n - \frac{\partial H}{\partial p_n} \delta p_n - \phi_{m_1} \delta u^{m_1} - u^{m_1} \frac{\partial \phi_{m_1}}{\partial q^n} \delta q^n - u^{m_1} \frac{\partial \phi_{m_1}}{\partial p_n} \delta p_n \right\} = \\ & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{d}{dt} (p_n \delta q^n) - \left(\dot{p}_n + \frac{\partial H}{\partial q^n} + u^{m_1} \frac{\partial \phi_{m_1}}{\partial p_n} \right) \delta q^n + \left(\dot{q}^n - \frac{\partial H}{\partial p_n} - u^{m_1} \frac{\partial \phi_{m_1}}{\partial p_n} \right) \delta p_n - \phi_{m_1} \delta u^{m_1} \right\} \end{aligned}$$

L'integrale della derivata temporale è nullo perché δq^n si annulla a t_1 e t_2 . Per l'arbitrarietà delle variazioni l'integrale degli altri termini si annulla se e solo se valgono le

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^{m_1} \frac{\partial \phi_{m_1}}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n} - u^{m_1} \frac{\partial \phi_{m_1}}{\partial q^n}, \quad \phi_{m_1}(q, p) = 0. \quad (1.3)$$

¹ Ovviamente la variabile di integrazione è il tempo e con le q^n, p_n, u^{m_1} che compaiono nell'integrale e nelle successive equazioni del moto si intendono funzioni del tempo che descrivono una traiettoria $t \mapsto (q, p, u)(t)$. Questo abuso di notazione comparirà anche nel seguito allo scopo di alleggerire la notazione.

Usando l'espressione delle \dot{q} e \dot{p} fornita in (1.3) si ricava l'equazione del moto per una generica variabile dinamica F , ovvero una funzione delle (q, p) ed eventualmente del tempo². Si ha

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q^n} \dot{q}^n + \frac{\partial F}{\partial p_n} \dot{p}_n = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} + u^{m_1} \{F, \phi_{m_1}\} \quad (1.4)$$

dove le $\{\cdot, \cdot\}$ sono le parentesi di Poisson, che sono definite da

$$\{F_1, F_2\} = \frac{\partial F_1}{\partial q^n} \frac{\partial F_2}{\partial p_n} - \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \frac{\partial F_2}{\partial q^n} \quad (1.5)$$

e soddisfano le proprietà

$$\begin{aligned} \{F_1 + F_2, F_3\} &= \{F_1, F_3\} + \{F_2, F_3\} && \text{(linearità)} \\ \{F_1, F_2\} &= -\{F_2, F_1\} && \text{(antisimmetria)} \\ \{F_1 F_2, F_3\} &= F_1 \{F_2, F_3\} + \{F_1, F_3\} F_2 && \text{(regola del prodotto)} \\ \{\{F_1, F_2\}, F_3\} + \{\{F_2, F_3\}, F_1\} + \{\{F_3, F_1\}, F_2\} &= 0. && \text{(identità di Jacobi)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

La presenza delle u^{m_1} in (1.4) sembrerebbe apportare un'indeterminazione all'evoluzione temporale delle variabili dinamiche. In effetti questo è quello che avviene anche se, come emergerà dalle prossime sezioni, a causa dell'ultima delle (1.3) non sempre tali variabili ausiliarie sono tutte arbitrarie. Infine, la presenza dei termini $u^{m_1} \phi_{m_1}$ nell'azione implica che hamiltoniane che differiscono per combinazioni lineari di vincoli primari generano la stessa dinamica: su Σ_1

$$\{F, H + \delta u^{m_1} \phi_{m_1}\} + u^{m_1} \{F, \phi_{m_1}\} = \{F, H\} + (\delta u^{m_1} + u^{m_1}) \{F, \phi_{m_1}\}. \quad (1.7)$$

Come si può vedere il cambio di hamiltoniana può essere riassorbito in una ridefinizione dei moltiplicatori u^{m_1} e rientra dunque nell'indeterminazione di cui si parlava sopra. Ricordando che un'arbitraria funzione nulla sulla superficie dei vincoli primari si scrive $f^{m_1} \phi_{m_1}$ si vede che l'osservazione precedente indica che l'hamiltoniana è definita univocamente solo sulla superficie dei vincoli primari Σ_1 e può essere estesa a piacere fuori da essa.

1.1C Vincoli Secondari e Condizioni di Consistenza

L'ultima delle (1.3) non esprime esplicitamente qualche variabile q, p o u o la sua evoluzione temporale. La validità della (1.3) lungo una soluzione di dati iniziali (\bar{q}, \bar{p}) equivale alle

$$\phi_{m_1}(\bar{q}, \bar{p}) = 0, \quad \dot{\phi}_{m_1}(q, p) = 0 \quad \forall (q, p) \in \Sigma_1. \quad (1.8)$$

Esplicitando $\dot{\phi}_{m_1}$ tramite la (1.4) si trova che, affinché i vincoli primari siano preservati dall'evoluzione temporale, è necessario che su Σ_1 valgano le *condizioni di consistenza*

$$\dot{\phi}_{m_1} = \{\phi_{m_1}, H\} + u^{m'_1} \{\phi_{m_1}, \phi_{m'_1}\} = 0. \quad (1.9)$$

² Questa è la rappresentazione standard delle grandezze fisiche in ambito hamiltoniano, anche se come si vedrà al secondo capitolo, non è necessariamente la più generale, né è garantito che a qualsiasi funzione di q, p e t corrisponda una grandezza effettivamente osservabile (§2.2). Ad ogni modo d'ora in avanti con variabile dinamica si intenderà una tale funzione, che in genere si assumerà indipendente dal tempo.

Quando (fissato un m_1) per ogni m'_1 vale $\{\phi_{m_1}, \phi_{m'_1}\} = 0$, la (1.9) è indipendente dalle variabili ausiliarie $u^{m'_1}$. Se è indipendente anche dai vincoli primari allora essa fornisce un nuovo vincolo sulle variabili canoniche

$$\phi_{m_2} = \{\phi_{m_1}, H\} = 0. \quad (1.10)$$

Gli M_2 vincoli ottenuti in questo modo sono detti *vincoli secondari*. Su di essi va a loro volta imposta una condizione di consistenza

$$\dot{\phi}_{m_2} = \{\phi_{m_2}, H\} + u^{m_1} \{\phi_{m_2}, \phi_{m_1}\} = 0, \quad m_1 = 1, \dots, M_1, \quad m_2 = M_1 + 1, \dots, M_1 + M_2$$

che se risulta indipendente dai vincoli già imposti e dalle u^{m_1} , genera un nuovo vincolo.

Si procede in modo iterato, imponendo condizioni di consistenza su ogni nuovo vincolo introdotto finché non si ottengono solo condizioni dipendenti dai vincoli già imposti o dalle variabili ausiliarie. Alla fine del processo si avranno M vincoli secondari

$$\phi_m = 0, \quad m = 1, \dots, M = M_1 + M_2 + \dots \quad (1.11)$$

che si richiede soddisfino tutti le proprietà di regolarità dei vincoli primari; in particolare definiranno anch'essi una sottovarietà $\Sigma \subseteq \Sigma_1$ detta *superficie (finale) dei vincoli*. Si assume infine che il rango della matrice antisimmetrica

$$C_{mm'} = \{\phi_m, \phi_{m'}\}, \quad m, m' = 1, \dots, M \quad (1.12)$$

sia costante sulla superficie dei vincoli.

L'algoritmo descritto sopra, detto *algoritmo di consistenza*, non è influenzato dalla scelta di una particolare hamiltoniana: esso genera gli stessi vincoli secondari se ad H si sostituisce $H + \delta u^{m_1} \phi_{m_1}$. Lo si vede prendendo $F = \phi_m$ nella (1.7) e ricordando che un nuovo vincolo è prodotto solo se $\{\phi_m, \phi_{m_1}\} = 0$, nel qual caso le due evoluzioni temporali coincidono.

Se due funzioni differenziabili F_1, F_2 dello spazio delle fasi coincidono sulla superficie dei vincoli Σ , si scriverà $F_1 \approx F_2$ e si dirà che le due funzioni sono *debolmente uguali*. Quando anche i loro differenziali coincidono sulla superficie dei vincoli si scriverà $F_1 \simeq F_2$. Ricordando un risultato enunciato in precedenza, un'uguaglianza debole è un'uguaglianza verificata a meno di combinazioni lineari di vincoli con coefficienti dipendenti da (q, p) , cioè termini $f^m \phi_m$. Banalmente $\phi_m \approx 0$ e in generale per una funzione debolmente nulla $Z \approx 0$ e F_1, F_2 qualsiasi si ha l'utile relazione

$$\{F_1, F_2 Z\} = F_2 \{F_1, Z\} + \{F_1, F_2 Z\} \approx F_2 \{F_1, Z\}. \quad (1.13)$$

È a questo punto opportuno osservare come la distinzione fra vincoli primari e non, sulla quale si è fino ad ora insistito, appaia alquanto arbitraria in ambito hamiltoniano: due sistemi caratterizzati dagli stessi vincoli sono del tutto equivalenti, indipendentemente dal fatto che questi siano insorti come primari o meno. Nonostante ciò, come si vedrà al §1.2 tale distinzione emerge in modo naturale quando si considerano sistemi hamiltoniani derivati da teorie lagrangiane di gauge. Inoltre l'ordine di imposizione dei vincoli ha ripercussioni sulle simmetrie di gauge del sistema, come discusso al secondo capitolo.

1.1D Restrizioni sulle Variabili Ausiliarie

Le condizioni di consistenza restanti sono quelle che includono le variabili ausiliarie. Queste corrispondono al sistema

$$\{\phi_m, H\} + u^{m_1} \{\phi_m, \phi_{m_1}\} \approx 0 \quad (1.14)$$

di M equazioni nelle M_1 incognite u^{m_1} con coefficienti dipendenti dalle variabili canoniche. Si consideri il caso non patologico in cui il sistema ammette soluzioni, la soluzione generale è della forma

$$u^{m_1} \approx U^{m_1} + v^l V_l^{m_1}, \quad l = 1, \dots, L = \text{null} \{\phi_m, \phi_{m_1}\} \leq M_1 \quad (1.15)$$

con U^{m_1} soluzione particolare di (1.14) e $V_l^{m_1}$ soluzioni del sistema omogeneo associato $V_l^{m_1} \{\phi_m, \phi_{m_1}\} \approx 0$, $\text{null} \{\phi_m, \phi_{m_1}\}$ dimensione del nucleo della matrice $\{\phi_m, \phi_{m_1}\}$. La (1.7) assicura che le soluzioni di (1.14) dipendano dall'hamiltoniana canonica scelta in modo da preservare l'azione, infatti usando come hamiltoniana $H + \delta u^{m_1} \phi_{m_1}$ le soluzioni divengono

$$u^{m_1} \approx U^{m_1} + v^l V_l^{m_1} - \delta u^{m_1}.$$

Le variabili ausiliarie libere sono così ridotte alle sole v^l .

1.1E Hamiltoniana Totale

La procedura seguita per l'imposizione dei vincoli è riassuntivamente la seguente

- (i) si introducono vincoli (primari) ϕ_{m_1} che soddisfano le condizioni di regolarità;
- (ii) si ricavano le equazioni del moto e il rispetto dei vincoli da un principio variazionale;
- (iii) si impongono condizioni di consistenza che generano nuovi vincoli (secondari) ϕ_m ;
- (iv) si impongono restrizioni sulle variabili ausiliarie $u^{m_1} \approx U^{m_1} + v^l V_l^{m_1}$.

Una volta completate queste operazioni la dinamica del sistema può essere descritta in una forma che renda manifesta la distinzione fra le variabili ausiliarie che è necessario fissare al fine di ottenere un'evoluzione temporale consistente con i vincoli, e quelle corrispondenti ai gradi di libertà residui v^l . A tal fine si introduce l'*hamiltoniana totale* H_T e altre due definizioni

$$H_T = H' + v^l \psi_l, \quad H' = H + U^{m_1} \phi_{m_1}, \quad \psi_l = V_l^{m_1} \phi_{m_1}. \quad (1.16)$$

L'hamiltoniana H' , detta di prima classe³, altro non è che una specifica scelta di hamiltoniana canonica, scelta che resta comunque non completamente determinata in quanto chiaramente le U^{m_1} sono fissate a meno di termini $v^l V_l^{m_1}$, l'hamiltoniana totale ha l'esatto scopo di mettere in evidenza questa indeterminazione residua.

Il principio variazionale (1.2) si scrive allora nella forma equivalente⁴

$$\delta S_T = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^n p_n - H' - v^l \psi_l) = 0, \quad \phi_m(\bar{q}, \bar{p}) = 0. \quad (1.17)$$

³ La ragione di questa nomenclatura sarà chiarita dal §1.3

⁴ (\bar{q}, \bar{p}) sono come al solito i dati iniziali.

Le equazioni del moto corrispondenti si ottengono allo stesso modo delle (1.3), risulta

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H'}{\partial p_n} + v^l \frac{\partial \psi_l}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H'}{\partial q^n} - v^l \frac{\partial \psi_l}{\partial q^n}, \quad \psi_l(q, p) = 0. \quad (1.18)$$

Per una variabile dinamica F qualsiasi, dunque

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H'\} + v^l \{F, \psi_l\} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_T\}. \quad (1.19)$$

Mostriamo che la (1.19) equivale alla (1.4). Espandendo H' si trova

$$\dot{F} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} + (U^{m_1} + v^l V_l^{m_1}) \{F, \phi_{m_1}\},$$

che coincide debolmente con la (1.4) a parte per il fatto che il sistema (1.14) è qui già risolto. Una conseguenza immediata è che $\dot{\phi}_m \approx 0$ automaticamente, dunque una volta imposta la validità dei vincoli ai dati iniziali come richiesto dalla (1.17), questi saranno rispettati a tutti i tempi. In particolare si vede che in questa descrizione della dinamica le $\psi_l = 0$ sono identità, non forniscono pertanto alcuna restrizione sui moltiplicatori v^l . A ciascuno di essi si potrà associare una funzione arbitraria delle variabili canoniche e del tempo $v^l(t; q, p)$. Dalla (1.19) risulta evidente che, a causa dell'arbitrarietà delle v^l , l'evoluzione temporale di una variabile dinamica non è completamente determinata noto lo stato iniziale del sistema. Le conseguenze dell'apparente ambiguità che questo comporta saranno discusse al secondo capitolo.

Si può dare un'interpretazione geometrica della procedura seguita. Si inizia con la superficie dei vincoli primari Σ_1 e un campo vettoriale (1.4) che descrive l'evoluzione temporale⁵

$$X = \{ \cdot, H \} + u^{m_1} \{ \cdot, \phi_{m_1} \},$$

in cui le variabili ausiliarie u^{m_1} sono libere. Al fine di accertarsi che il flusso di X resti all'interno di Σ_1 si determina la sottovarietà massimale $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$ sulla quale, per opportune scelte delle u^{m_1} , X è in ogni punto tangente a Σ_1 . Anche scelte opportunamente le u^{m_1} , qualora X non risultasse tangente anche a Σ_2 , seguendo il suo flusso a partire da un punto di Σ_2 è possibile abbandonare tale sottovarietà e di conseguenza uscire da Σ_1 . Per questa ragione si procede in modo iterato fino a che non si individua la sottovarietà massimale $\Sigma \subseteq \Sigma_1$ alla quale X può risultare ovunque tangente a patto di restringere opportunamente le u^{m_1} . La sottovarietà Σ è la superficie finale dei vincoli. A questo punto si determinano le restrizioni da imporre sulle variabili ausiliarie e si riscrive l'evoluzione temporale in una forma (1.19) che garantisce che tali restrizioni siano automaticamente soddisfatte, ovvero

$$X_T = \{ \cdot, H \} + v^l \{ \cdot, \psi_l \}.$$

Il procedimento termina qui, fornendo un nuovo operatore di evoluzione temporale X_T e una sottovarietà Σ di Σ_1 automaticamente preservata dal flusso di X_T per qualsiasi scelta delle v^l .

⁵ Si è omessa la derivazione temporale esplicita in quanto ininfluenza al fine di determinare l'evoluzione delle variabili canoniche (q, p) .

1.2 Sistemi Hamiltoniani da Sistemi Lagrangiani di Gauge

Per molte teorie fisiche la prima formulazione avanzata è quella lagrangiana. Ciò è vero anche per molte teorie di gauge, tuttavia il passaggio dalla trattazione lagrangiana alla trattazione hamiltoniana per una teoria di gauge presenta delle difficoltà che si concretizzano nell'introduzione di vincoli sulle variabili canoniche, e dunque nell'utilizzo del formalismo hamiltoniano vincolato. Il rapporto appena delineato fra teorie di gauge e sistemi hamiltoniani vincolati fa comprendere la rilevanza dei secondi. Inoltre fornisce un'importante verifica della validità dei risultati ottenuti alla precedente sezione, attraverso un confronto delle (1.4) con le equazioni del moto lagrangiane (§1.2C).

1.2A Insorgenza dei Vincoli

Si consideri un sistema descritto da una lagrangiana $L(q, \dot{q})$. Le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \ddot{q}^{n'} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^{n'} \partial \dot{q}^n} \dot{q}^{n'} - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0 \quad (1.20)$$

possono essere messe in forma normale non appena la matrice

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \quad (1.21)$$

risulta invertibile. Se ciò avviene si può applicare il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni e, assegnate le condizioni contorno, le (1.20) ammettono una e una sola soluzione. In una teoria di gauge le equazioni del moto non determinano univocamente l'evoluzione temporale delle variabili (q, \dot{q}) , dunque la (1.21) non potrà essere invertibile. Nel seguito si supporrà comunque che essa abbia rango costante pari a $N - \hat{M}_1$.

Il passaggio alla formulazione hamiltoniana si effettua tramite

$$\mathcal{F}_L: (q^n, \dot{q}^n) \mapsto (q^n, p_n = \partial L / \partial \dot{q}^n), \quad (1.22)$$

che fornisce le coordinate canoniche (q, p) di un punto (q, \dot{q}) sullo spazio degli atti di moto.

Nella trattazione abituale la trasformazione (1.22) è un diffeomorfismo e l'equivalenza fra i formalismi hamiltoniano e lagrangiano è provata, ma nelle ipotesi precedenti ciò non avviene. La costanza del rango della (1.21) implica che \mathcal{F}_L sia una mappa di rango costante⁶ $2N - \hat{M}_1$. L'immagine di una tale mappa è una sottovarietà Σ_1 dello spazio delle fasi definibile tramite $M_1 \geq \hat{M}_1$ vincoli $\phi_{m_1} = 0$ che verificano le condizioni di regolarità §1.1A [17, Theorem 7.13]. Ne consegue che Σ_1 corrisponde alla superficie dei vincoli primari.

⁶ Con rango di una funzione in un punto si intende il rango del suo differenziale in quel punto.

1.2B Definizione dell'Hamiltoniana Canonica

L'hamiltoniana canonica $H(q, p)$ di un sistema derivato da un sistema lagrangiano si definisce a partire dall'integrale di Jacobi (energia lagrangiana) E_L richiedendo che per ogni (q, \dot{q})

$$H \circ \mathcal{F}_L(q, \dot{q}) = E_L(q, \dot{q}) := \dot{q}^n p_n(q, \dot{q}) - L(q, \dot{q}). \quad (1.23)$$

Se la (1.22) è un diffeomorfismo la (1.23) definisce univocamente l'hamiltoniana:

$$H(q, p) := (\dot{q}^n p_n - L) \circ \mathcal{F}_L^{-1}(q, p).$$

Nel caso in esame la non invertibilità della (1.22) fa sì che in generale vi siano più (q, \dot{q}) nell'antimmagine di un $(q, p) \in \Sigma_1$, più precisamente le fibre di \mathcal{F}_L costituiscono una foliazione dello spazio degli atti di moto. Chiaramente una funzione f_L delle (q, \dot{q}) può essere trasportata ad una funzione f_H sullo spazio delle fasi soddisfacente

$$f_H \circ \mathcal{F}_L = f_L \quad (1.24)$$

solo se f_L è costante sulle foglie della foliazione. Ciò avviene quando il differenziale di f_L è ovunque combinazione lineare dei differenziali dei vincoli che definiscono le foglie, ovvero⁷

$$df_L = a_n dq^n + b^n dp_n. \quad (1.25)$$

In tal caso f_H è univocamente determinata da (1.24) sull'immagine Σ_1 di \mathcal{F}_L , ma può essere estesa arbitrariamente fuori da essa [16].

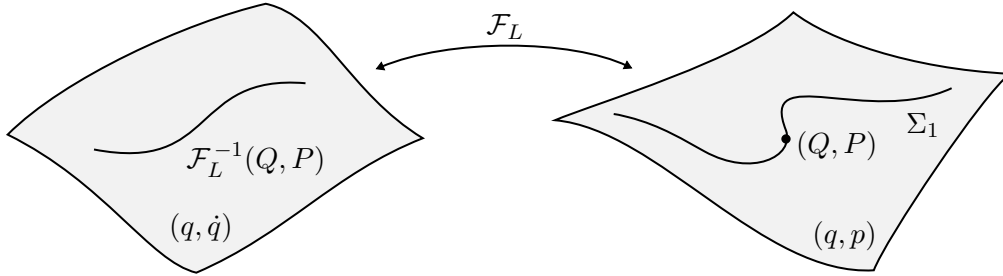


Figura 1.1: non invertibilità di \mathcal{F}_L . Una funzione di (q, \dot{q}) è trasportabile a una funzione di (q, p) solo se è costante sulle fibre $\mathcal{F}_L^{-1}(Q, P)$.

Si verifica immediatamente che l'integrale di Jacobi soddisfa la condizione (1.25)

$$dE_L = p_n dq^n + \dot{q}^n dp_n - \frac{\partial L}{\partial q^n} dq^n - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} d\dot{q}^n = \dot{q}^n dp_n - \frac{\partial L}{\partial q^n} dq^n,$$

è perciò in modo naturale una funzione delle sole (q, p) sulla superficie dei vincoli Σ_1 .

Come apparirà chiaramente al quarto capitolo, per determinare concretamente un'espressione dell'hamiltoniana canonica si cerca di esprimere l'integrale di Jacobi in una forma in cui le velocità lagrangiane compaiano solo come argomenti delle funzioni che definiscono i momenti coniugati. L'ultimo calcolo assicura che ciò è possibile.

⁷ Si tenga a mente che nelle equazioni che seguono le dp_n sono forme differenziali sullo spazio delle (q, \dot{q}) .

1.2C Equivalenza delle Equazioni del Moto

Appurato che è possibile definire una hamiltoniana H soddisfacente la (1.23) e ricordando che qualsiasi funzione nulla su Σ_1 si scrive $u^{m_1}\phi_{m_1}$ si ha

$$(H + u^{m_1}\phi_{m_1}) \circ \mathcal{F}_L(q, \dot{q}) = E_L(q, \dot{q}), \quad (1.26)$$

in accordo con il fatto che l'hamiltoniana canonica risulta definita univocamente solo sulla superficie dei vincoli, vale a dire a meno di combinazioni lineari dei vincoli stessi.

Differenziando l'equazione (1.26) ed eliminando i termini nulli si trova

$$\left[\left(\frac{\partial H}{\partial q^n} + u^{m_1} \frac{\partial \phi_{m_1}}{\partial q^n} \right) \circ \mathcal{F}_L \right] dq^n + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p_n} + u^{m_1} \frac{\partial \phi_{m_1}}{\partial p_n} \right) \circ \mathcal{F}_L \right] dp_n = \dot{q}^n dp_n - \frac{\partial L}{\partial q^n} dq^n,$$

che, usando le equazioni di Eulero-Lagrange (1.20), implica

$$\dot{q}^n = \left(\frac{\partial H}{\partial p_n} + u^{m_1} \frac{\partial \phi_{m_1}}{\partial p_n} \right) \circ \mathcal{F}_L, \quad \dot{p}_n = \frac{\partial L}{\partial q^n} = \left(-\frac{\partial H}{\partial q^n} - u^{m_1} \frac{\partial \phi_{m_1}}{\partial q^n} \right) \circ \mathcal{F}_L. \quad (1.27)$$

Le u^{m_1} sono arbitrarie, in particolare si possono scegliere delle funzioni \hat{u}^{m_1} definite sullo spazio degli atti di moto e introdurre una versione modificata della (1.22)

$$\hat{\mathcal{F}}_L: (q^n, \dot{q}^n) \mapsto (q^n, p_n = \partial L / \partial \dot{q}^n(q, \dot{q}), u^{m_1} = \hat{u}^{m_1}(q, \dot{q})), \quad (1.28)$$

che per la prima delle (1.27) risulta invertibile. L'invertibilità è stata riottenuta al costo di aggiungere M_1 nuove variabili ausiliarie. Queste corrispondono esattamente ai moltiplicatori di Lagrange che erano stati introdotti al §1.1B al fine di garantire il rispetto dei vincoli primari.

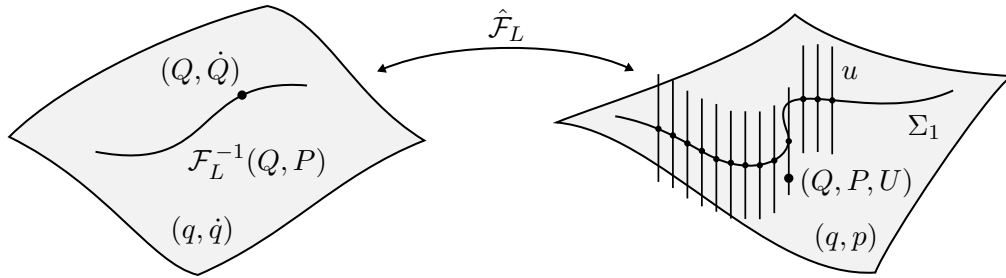


Figura 1.2: variabili ausiliarie u e invertibilità di $\hat{\mathcal{F}}_L$,
tramite essa (Q, \dot{Q}) e (Q, P, U) sono in corrispondenza biunivoca.

Le equazioni (1.27), ottenute usando le equazioni di Eulero-Lagrange, non sono altro che le (1.3) espresse rispetto alle (q, \dot{q}) . Questo fatto è estremamente importante perché costituisce una verifica dell'equivalenza fra le equazioni del moto hamiltoniane vincolate e lagrangiane.

1.3 Funzioni di Prima e Seconda Classe

Oltre alla classificazione dei vincoli in primari e secondari, introdotta da Bergmann [6], ne esiste un'altra, originariamente ideata da Dirac [5], che sarà utile nel seguito. Una funzione F delle variabili canoniche è detta di prima classe se la sua parentesi di Poisson con ogni vincolo si annulla debolmente

$$\{F, \phi_m\} \approx 0, \quad m = 1, \dots, M; \quad (1.29)$$

in caso contrario è detta di seconda classe.

La parentesi di Poisson di due funzioni di prima classe F, G è anch'essa di prima classe infatti sfruttando l'identità di Jacobi

$$\begin{aligned} \{\{F, G\}, \phi_m\} &= \{F, \{G, \phi_m\}\} - \{G, \{F, \phi_m\}\} \\ &= \{F, g_m^{m'} \phi_{m'}\} - \{G, f_m^{m'} \phi_{m'}\} \\ &= g_m^{m'} \{F, \phi_{m'}\} + \{F, g_m^{m'}\} \phi_{m'} - f_m^{m'} \{G, \phi_{m'}\} - \{G, f_m^{m'}\} \phi_{m'} \\ &\approx 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ricordando la (1.13) le ψ_l e H' in (1.16) risultano prima classe per costruzione.

La distinzione fra prima e seconda classe è particolarmente utile nella sua applicazione ai vincoli. Supporremo nella discussione seguente che i vincoli siano irriducibili. Se B è il rango della $C_{mm'}$ definita in (1.12), tramite una matrice invertibile $\Lambda_m^{m'}$ è possibile ridefinire i vincoli $\phi_m \mapsto \Lambda_m^{m'} \phi_{m'}$ in modo tale che i primi $A = M - B$ vincoli γ_a siano di prima classe e i restanti χ_b ($b = A + 1, \dots, M$) di seconda classe⁸. In questo nuovo sistema di vincoli

$$C_{mm'} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{bb'} \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

con $C_{bb'}$ invertibile sulla superficie dei vincoli; anche se di seguito si assumerà di più, ovvero che i vincoli di seconda classe siano tali che $\det C_{bb'} \neq 0$ non appena $\chi_b = 0$ per ogni $b = A + 1, \dots, M$. L'invertibilità di $C_{bb'}$ unita all'antisimmetria implica che i vincoli di seconda classe siano in numero pari.

1.3A Vincoli di Seconda Classe: Parentesi di Dirac

Al secondo capitolo si vedrà che, oltre a fornire delle relazioni fra le variabili canoniche, i vincoli di prima classe svolgono un ruolo chiave nella generazione delle simmetrie di gauge di un sistema vincolato. Al contrario, si può già anticipare che i vincoli di seconda classe non possono essere ammessi come generatori di trasformazioni di gauge infinitesime in quanto la trasformazione associata non preserverebbe i vincoli:

$$\{\phi_m, \chi_b\} \not\approx 0$$

per almeno un ϕ_m . I vincoli di seconda classe hanno il solo ruolo di esprimere relazioni fra le diverse variabili canoniche. Queste relazioni divengono identità non appena la dinamica del sistema viene specificata tramite una versione modificata delle parentesi di Poisson.

⁸ Si tratta di determinare una base del nucleo di $C_{mm'}$ e completarla a una base di \mathbb{R}^M per poi usare i vettori di quest'ultima base come righe di $\Lambda_m^{m'}$ [14].

Come si discuterà più approfonditamente al §2.2, a causa dei vincoli, il valore di una funzione delle (q, p) fuori dalla superficie dei vincoli Σ non è fisicamente rilevante. Pertanto si vorrebbe che la nuova parentesi, introdotta posteriormente all'imposizione dei vincoli, ne inducesse in modo naturale una su funzioni definite su Σ . Come emergerà al §2.2B questo non è in generale fattibile, quello che si ottiene facilmente è invece un'operazione di parentesi fra funzioni sulla superficie Σ_χ dei vincoli di seconda classe $\{\chi_b = 0\}$. Quest'ultima svolgerà un ruolo centrale nella discussione seguente, dunque in questo paragrafo con uguaglianza debole si intenderà un'uguaglianza che vale su tutta Σ_χ e non solo su Σ , ossia un'uguaglianza a meno di combinazioni dei soli vincoli di seconda classe.

Date due funzioni $\tilde{F}, \tilde{G} \in C^\infty(\Sigma_\chi)$ sembra naturale definire la loro parentesi come la restrizione a Σ_χ della parentesi di Poisson di due funzioni $F, G \in C^\infty(\Omega)$ coincidenti con \tilde{F} e \tilde{G} su Σ_χ . Questa definizione non è però consistente poiché dipende dalla scelta delle rappresentanti. Una possibile soluzione è di prendere per \tilde{F} una rappresentante F^* tale che

$$\{F^*, \chi_b\} \approx 0 \quad b = A + 1, \dots, M; \quad (1.32)$$

ricordando che qualsiasi rappresentante di \tilde{G} si scrive nella forma $G + g^b \chi_b$ si conclude che la restrizione di $\{F^*, G\}$ a Σ_χ è indipendente dal rappresentante scelto. Sviluppando la (1.32)

$$\{F^*, \chi_b\} = \{F + f^{b'} \chi_{b'}, \chi_b\} \approx \{F, \chi_b\} + f^{b'} \{\chi_{b'}, \chi_b\} = \{F, \chi_b\} + f^{b'} C_{b'b} \approx 0$$

che per l'invertibilità di $C_{b'b}$ ammette un'unica soluzione su Σ_χ :

$$f^{b'} \approx -\{F, \chi_b\} C^{bb'} \quad (1.33)$$

dove $C^{bb'}$ è l'inversa di $C_{bb'}$. Sviluppando $\{F^*, G\}$ si trova

$$\{F^*, G\} \approx \{F, G\} + f^{b'} \{\chi_{b'}, G\} \approx \{F, G\} - \{F, \chi_b\} C^{bb'} \{\chi_{b'}, G\}.$$

Si definisce allora la *parentesi di Dirac* di due funzioni F, G dello spazio delle fasi come

$$\{F, G\}^* := \{F, G\} - \{F, \chi_b\} C^{bb'} \{\chi_{b'}, G\}. \quad (1.34)$$

Per costruzione le parentesi di Dirac definiscono in modo naturale delle parentesi su Σ_χ , infatti

$$F_1 \approx F_2 \quad \Rightarrow \quad \{F_1, G\}^* = \{F_2, G\}^*. \quad (1.35)$$

Le parentesi di Dirac soddisfano proprietà analoghe a quelle (1.6) delle parentesi di Poisson: antisimmetria, linearità, regola del prodotto e identità di Jacobi. Inoltre si ha

$$\{F, \chi_b\}^* = 0, \quad (1.36a)$$

$$\{F_1, F_2\}^* \approx \{F_1, F_2\} \quad \text{con } F_1 \text{ di prima classe,} \quad (1.36b)$$

in particolare la (1.36b) vale per $F_1 = \gamma_a$ vincolo di prima classe.

La trattazione che si sta sviluppando usa le parentesi di Poisson al fine di separare vincoli di prima e seconda classe. Anche se non sarà la via intrapresa in seguito, compiuta questa distinzione è possibile accantonare le parentesi di Poisson e sostituirle con le parentesi di Dirac, tramite le quali è possibile scrivere tutte le equazioni del formalismo. Ad esempio in base alla proprietà (1.36b) la (1.19) può essere riscritta per mezzo delle parentesi di Dirac.

Capitolo 2

Invarianza di Gauge

Una teoria di gauge è una descrizione di un sistema che fa uso di gradi di libertà ridondanti [14]. Siano $\{x^n\}_{n=1,\dots,N}$ le variabili introdotte per individuare le configurazioni del sistema¹. In una teoria di gauge diversi valori delle $\{x^n\}$ possono corrispondere allo stesso stato fisico e diverse soluzioni delle equazioni del moto di tali variabili possono corrispondere alla stessa evoluzione fisica del sistema. Le *trasformazioni di gauge* del sistema sono funzioni \mathcal{G} dello spazio delle traiettorie $\{\Gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N : I \subseteq \mathbb{R}\}$ in sé, che mappano una soluzione Γ in un'altra soluzione $\tilde{\Gamma}$ fisicamente equivalente², definita sullo stesso intervallo temporale. Le \mathcal{G} costituiscono un gruppo di Lie detto *gruppo di gauge* del sistema. Poiché le trasformazioni di gauge preservano le entità fisicamente misurabili si parla di *invarianza di gauge* o *simmetria di gauge*. In particolare, se la teoria è formulata mediante un principio variazionale $\delta S = 0$ allora l'azione S dovrà essere invariante (a meno di termini di bordo) sotto trasformazioni di gauge:

$$S(\Gamma) = S(\mathcal{G}(\Gamma)) + b(t_1, t_2, \Gamma(t_1), \Gamma(t_2)), \quad (2.1)$$

per qualche b e per ogni traiettoria $\Gamma:]t_1, t_2[\mapsto \mathbb{R}^N$.

Una conseguenza diretta di queste osservazioni è che in una teoria di gauge non tutte le $\{x^n\}$ o, più in generale, non tutti i funzionali delle traiettorie corrisponderanno a grandezze fisicamente osservabili. Per definizione di trasformazione di gauge un funzionale \mathcal{F} delle traiettorie del sistema potrà corrispondere a un'osservabile fisica solo se

$$\mathcal{F}(\Gamma) = \mathcal{F}(\tilde{\Gamma}) \quad (2.2)$$

non appena Γ e $\tilde{\Gamma}$ sono soluzioni legate da una trasformazione di gauge; le implicazioni specifiche di questa richiesta nel formalismo hamiltoniano verranno analizzate al §2.2.

Le trasformazioni di gauge per un sistema lagrangiano possono essere specificate mediante diffeomorfismi dipendenti dal tempo che coinvolgono le coordinate lagrangiane

$$\mathcal{G}_L : (t; q, \dot{q}) \mapsto (Q, \dot{Q}) = \mathcal{G}_L(t; q, \dot{q}).$$

¹ La definizione di “configurazione del sistema” può variare a seconda di cosa si consideri facente parte dell'informazione istantanea sul sistema. Si possono ad esempio identificare le x^n con le q^n , con le (q^n, \dot{q}^n) o con le (q^n, p_n) hamiltoniane. Di seguito si partirà dal primo caso e poi ci si specializzerà ai restanti due.

² Questa è la definizione usuale [1, 4, 6, 9, 12, 20] e coincide con quella impiegata fra gli altri da Rosenfeld, Anderson e Bergmann. In ambito hamiltoniano esiste una visione alternativa, sviluppata da Dirac [5, 8] e adottata da [14], che si focalizza sui singoli stati piuttosto che sulle traiettorie e sarà trattata al §2.1C.

La \mathcal{G} corrispondente si ottiene componendo una traiettoria con la trasformazione delle q fornita da \mathcal{G}_L . Affinché una \mathcal{G}_L e la \mathcal{G} associata siano compatibili, lungo le traiettorie Γ la trasformazione delle \dot{q} data da \mathcal{G}_L deve coincidere con la variazione della velocità della traiettoria a seguito dell'applicazione di \mathcal{G} , ossia:

$$\left(\mathcal{G}(\Gamma), \frac{d}{dt}\mathcal{G}(\Gamma)\right)(t) = \mathcal{G}_L\left(t; \Gamma(t), \frac{d}{dt}\Gamma(t)\right). \quad (2.3)$$

Ne consegue che la trasformazione delle velocità generalizzate \dot{q} è completamente determinata una volta assegnata la trasformazione delle coordinate generalizzate³.

In questo contesto l'invarianza (2.1) dell'azione (lagrangiana) si esprime

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\Gamma(t), \dot{\Gamma}(t), t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathcal{G}_L(t; \Gamma(t), \dot{\Gamma}(t)), t) dt + b(t_1, t_2, \Gamma(t_1), \Gamma(t_2)), \quad (2.4)$$

per ogni traiettoria $\Gamma:]t_1, t_2[\mapsto \mathbb{R}^N$. La (2.4) equivale alla richiesta che le trasformazioni di gauge alterino la lagrangiana al più per una derivata temporale totale:

$$L(\mathcal{G}_L(t; q, \dot{q}), t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}\Lambda(q, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial\Lambda}{\partial q^n}(q, t)\dot{q}^n + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}(q, t), \quad (2.5)$$

di qualche Λ funzione del tempo e delle coordinate generalizzate. In tal modo l'azione viene modificata al più per un termine di bordo uguale per ogni traiettoria fra due estremi fissati e le equazioni di Eulero-Lagrange che ne derivano restano invariate.

2.1 Trasformazioni di Gauge nel Formalismo Hamiltoniano

In ambito hamiltoniano l'equivalente delle \mathcal{G}_L sarà una trasformazione \mathcal{G}_H delle (q, p) dipendente dal tempo, che rispetta le equazioni di Hamilton. Analogamente al caso lagrangiano la \mathcal{G} corrispondente si ottiene a partire dalla trasformazione delle q fornita da \mathcal{G}_H .

È un fatto noto [24] che una trasformazione di gauge di un sistema lagrangiano corrisponda a una trasformazione canonica del sistema hamiltoniano associato. Più precisamente, nelle notazioni della (2.5), ad ogni t la trasformazione

$$(q^n, p_n) \mapsto (Q^n, P_n) = (q^n, p_n + \partial\Lambda/\partial q^n(q, t))$$

è canonica. Tuttavia la trattazione sviluppata al precedente capitolo ha mostrato che ogni sistema hamiltoniano vincolato, e di conseguenza ogni sistema hamiltoniano derivato da un sistema lagrangiano di gauge, presenta gradi di libertà ridondanti che si manifestano nelle funzioni arbitrarie v^l introdotte al §1.1D. Le prossime sezioni saranno volte a ricavare le trasformazioni di gauge corrispondenti a questa arbitrarietà in un contesto puramente hamiltoniano.

Nella sezione §1.1E si era osservato che proprio a causa dell'arbitrarietà delle funzioni v^l l'evoluzione temporale di una variabile dinamica è soggetta a un certo grado di indeterminazione. Questa indeterminazione è ciò che nella prossima sezione consentirà di estrapolare dal formalismo hamiltoniano una forma esplicita per le trasformazioni di gauge di un sistema vincolato.

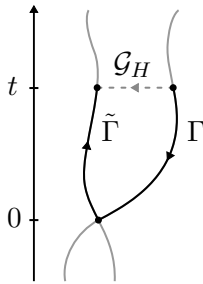
³ \mathcal{G}_L non è altro che il sollevamento di quest'ultima al fibrato tangente dello spazio delle configurazioni.

Prima di entrare nel merito si ribadisce che la suddetta indeterminazione, che ovviamente riguarda anche le variabili canoniche, non va interpretata come un difetto di predittività della teoria; bensì come una manifestazione della ridondanza di informazione contenuta nelle (q, p) e di conseguenza nelle loro funzioni. Non vi è corrispondenza biunivoca fra i punti dello spazio delle fasi e gli stati fisici: le variabili canoniche specificano completamente uno stato fisico, ma a questo possono corrispondere più valori delle prime.

2.1A Trasformazioni di Gauge come Trasformazioni Canoniche

Si sia risolta completamente l'imposizione dei vincoli e si siano determinate le funzioni H' e ψ_l . Si compiano due scelte qualsiasi, v^l e $\tilde{v}^l = v^l + \delta v^l$, per le funzioni arbitrarie e si costruiscano le relative hamiltoniane totali dipendenti dal tempo. Esse potranno determinare differenti evoluzioni di una variabile dinamica F a partire da uno stesso stato iniziale. Le trasformazioni di gauge di un sistema hamiltoniano vincolato possono allora essere concepite come le trasformazioni delle variabili dinamiche dipendenti dal tempo t , ottenute seguendo a ritroso il flusso di fase Φ_H di H per un tempo t e poi avanzando secondo quello di \tilde{H} per lo stesso tempo t , cioè

$$F \mapsto \tilde{F} = \mathcal{G}_H^*(t)F = F \circ \mathcal{G}_H(t) = F \circ \Phi_{0,t}^{\tilde{H}} \circ \left(\Phi_{0,t}^H\right)^{-1} = F \circ \Phi_{0,t}^{\tilde{H}} \circ \Phi_{t,0}^H. \quad (2.6)$$



Un primo segno di possibile compatibilità fra le trattazioni hamiltoniana e lagrangiana è che anche secondo questa definizione le trasformazioni di gauge sono canoniche. Le \mathcal{G}_H sono tutte e sole le trasformazioni tali che per ogni (q, p) esistano due soluzioni delle equazioni del moto Γ e $\tilde{\Gamma}$ uscenti da uno stesso punto tali che

$$\mathcal{G}_H(t; q, p) = \tilde{\Gamma}(t) \quad \text{e} \quad (q, p) = \Gamma(t) \quad \text{per qualche } t. \quad (2.7)$$

Che le \mathcal{G}_H soddisfino detta proprietà è evidente per costruzione, il viceversa, ossia che ogni trasformazione soddisfacente (2.7) corrisponda ad una \mathcal{G}_H , discende dall'arbitrarietà di δv^l oltre che dall'indipendenza dal tempo di H' .

Si osservi che l'arbitrarietà delle funzioni v^l e \tilde{v}^l fa sì che non sia in alcun modo restrittivo scegliere $t = 0$ come istante di "diramazione" dei flussi; scegliere un altro istante di "diramazione" equivale a traslare la dipendenza temporale di tali funzioni.

Siano $X = \{\cdot, H\}$ e $\tilde{X} = \{\cdot, \tilde{H}\}$ i campi vettoriali hamiltoniani dipendenti dal tempo associati ad H e \tilde{H} . I flussi nella (2.6) possono essere riscritti per mezzo dello sviluppo [7, 13]

$$\Phi_{t_1, t_0}^H = \lim_{N \rightarrow \infty} \{ \exp(\epsilon X_{N\epsilon+t_0}) \cdots \exp(\epsilon X_{\epsilon+t_0}) \exp(\epsilon X_{t_0}) \} \quad \text{con } \epsilon = (t_1 - t_0)/N \quad (2.8)$$

e dell'analogo per \tilde{H} . Sulla superficie dei vincoli è univocamente definita un'hamiltoniana indipendente dal tempo, quindi dati due tempi t, s qualsiasi, H_t, H_s, \tilde{H}_t e \tilde{H}_s sono funzioni di prima classe debolmente uguali, pertanto differiscono solo per combinazioni lineari dei vincoli di prima classe. Segue che le loro parentesi di Poisson così come le parentesi di Lie fra i campi vettoriali hamiltoniani associati X_t, X_s, \tilde{X}_t e \tilde{X}_s si annullano sulla superficie dei vincoli⁴.

⁴ Si sono usate le identità:

$$\begin{aligned} \{F_1, F_2\} &= \{F_1, F_2 - F_1\} \quad \text{per le parentesi di Poisson,} \\ [\{ \cdot, F_1 \}, \{ \cdot, F_2 \}] &= [\{F_1, F_2\}, \cdot] \quad \text{per le parentesi di Lie.} \end{aligned}$$

Adoperando la (2.8) e questi risultati, la (2.6) diviene

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \exp \left[t/N (\tilde{X}_t - X_t + \dots + \tilde{X}_{t/N} - X_{t/N} + \tilde{X}_0 - X_0) \right] \right\} F \\ &= \exp \left[\int_0^t (\tilde{X}_\tau - X_\tau) d\tau \right] F \\ &= \exp \left[\left\{ \cdot, \int_0^t (\tilde{H}_\tau - H_\tau) d\tau \right\} \right] F.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Si considerino hamiltoniane che ad ogni tempo differiscono per un infinitesimo in un intorno della superficie dei vincoli, ossia δv^l infinitesime. Allora la (2.9) può essere espansa al primo ordine in δv^l fornendo la trasformazione canonica infinitesima

$$\delta F(t) = \tilde{F}(t) - F = \left\{ F, \int_0^t (\tilde{H}_\tau - H_\tau) d\tau \right\} = \{F, \mathfrak{g}(t; \cdot)\};\tag{2.10}$$

la $\mathfrak{g}(t; q, p)$ introdotta all'ultimo passaggio è detta *generatore canonico della trasformazione di gauge infinitesima* e include implicitamente il parametro infinitesimo della trasformazione. Un'importante informazione sulla struttura del generatore di gauge \mathfrak{g} si ricava osservando che la differenza fra le due hamiltoniane a tempi generici che compare nella (2.10) viene calcolata lungo la soluzione da trasformare. Pertanto se la si vuole sviluppare in serie nei tempi, le sue derivate temporali saranno specificate dall'operatore di evoluzione temporale (1.4). Risulta

$$\frac{d}{dt}(\delta v^l \psi_l) = \text{pfcc} + \delta v^l \{\psi_l, H'\} + v^l \delta v^l \{\psi_l, \psi_{l'}\},\tag{2.11}$$

in cui pfcc indica una combinazione lineare di vincoli primari di prima classe, mentre gli ultimi termini possono in generale contenere vincoli secondari con coefficienti che dipendono da δv^l . Tramite i termini di ordine superiore a zero⁵ dello sviluppo in serie, i vincoli secondari entrano nell'espressione della differenza fra le due hamiltoniane non appena $t \neq 0$ [23]. Ci si aspetta pertanto che anch'essi abbiano un ruolo nella generazione delle trasformazioni di gauge. Ciò sarà confermato dall'analisi svolta al prossimo paragrafo, che fornirà anche un'espressione più esplicita per il legame esistente fra i coefficienti dei vincoli primari e secondari.

2.1B Generatore di Trasformazioni di Gauge Infinitesime

Si vuole ora individuare alcune proprietà che caratterizzano il generatore canonico delle trasformazioni di gauge infinitesime \mathfrak{g} , a tal fine torna utile la (2.7). Nelle notazioni del paragrafo precedente essa afferma che data una \mathfrak{g} qualsiasi esistono Γ e $\tilde{\Gamma}$, curve integrali uscenti da uno stesso punto dei campi vettoriali hamiltoniani X e \tilde{X} , tali che per qualsiasi variabile dinamica F al primo ordine in δv^l valga

$$\{F, \mathfrak{g}(t)\}|_{\Gamma(t)} = \delta F(t)|_{\Gamma(t)} = F|_{\tilde{\Gamma}(t)} - F|_{\Gamma(t)}.\tag{2.12}$$

Innanzitutto è chiaro che per costruzione una trasformazione di gauge non può violare i vincoli, pertanto scegliendo $F = \phi_m$ si ha che ad ogni t deve valere

$$\{\phi_m, \mathfrak{g}(t)\} \approx 0$$

per ogni $m = 1, \dots, M$; che dice esattamente che $\mathfrak{g}(t)$ dev'essere di prima classe ad ogni t .

⁵ Che diventa primo ordine in seguito all'integrazione.

Più in generale una trasformazione di gauge manda soluzioni in soluzioni, dunque deve rispettare le equazioni del moto per qualsiasi variabile dinamica F . Derivando rispetto al tempo i termini di sinistra e di destra della (2.12) si trova

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{d}{dt} \left[\{F, \mathfrak{g}(t)\}|_{\Gamma(t)} \right] = \frac{\partial \{F, \mathfrak{g}(t)\}}{\partial t} \Big|_{\Gamma(t)} + X_t(\{F, \mathfrak{g}(t)\})|_{\Gamma(t)} \\ \text{RHS} &= \frac{d}{dt} \left[F|_{\tilde{\Gamma}(t)} \right] - \frac{d}{dt} \left[F|_{\Gamma(t)} \right] = \tilde{X}_t(F)|_{\tilde{\Gamma}(t)} - X_t(F)|_{\Gamma(t)} \end{aligned}$$

e sviluppando tramite l'identità di Jacobi, sempre al primo ordine si ha

$$\begin{aligned} \text{LHS} &\approx \frac{\partial \{F, \mathfrak{g}\}}{\partial t} \Big|_{\Gamma} + \{\{F, \mathfrak{g}\}, H\}|_{\Gamma} \approx \{F, \partial \mathfrak{g} / \partial t + \{\mathfrak{g}, H\}\}|_{\Gamma} + \{\{F, H\}, \mathfrak{g}\}|_{\Gamma} , \\ \text{RHS} &\approx \{F, H\}|_{\tilde{\Gamma}} + \delta v^l \{F, \psi_l\}|_{\tilde{\Gamma}} - \{F, H\}|_{\Gamma} \approx \{\{F, H\}, \mathfrak{g}\}|_{\Gamma} + \delta v^l \{F, \psi_l\}|_{\Gamma} . \end{aligned}$$

Eguagliando le due espressioni trovate si ottiene

$$\{F, \partial \mathfrak{g} / \partial t + \{\mathfrak{g}, H\} - \delta v^l \psi_l\}|_{\Gamma} \approx 0$$

che, poiché la variabile dinamica F è arbitraria e Γ può essere qualsiasi soluzione, implica⁶

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} + \{\mathfrak{g}, H' + v^l \psi_l\} - \delta v^l \psi_l \simeq 0 .$$

Ricordando infine che anche le v^l e le δv^l sono arbitrarie, per ogni istante t devono valere

$$\mathfrak{g}(t) = \text{fc} , \quad \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t}(t) + \{\mathfrak{g}(t), H'\} \simeq \text{pfcc} , \quad \{\mathfrak{g}(t), \psi_l\} \simeq \text{pfcc} . \quad (2.13)$$

dove fc indica una qualunque funzione di prima classe, pfcc una combinazione lineare di vincoli primari di prima classe. Le (2.13) forniscono condizioni necessarie e sufficienti affinché una funzione \mathfrak{g} del tempo e delle variabili canoniche sia un generatore di trasformazioni di gauge infinitesime.

Si può vedere facilmente [12, Theorem 3] che se \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 sono generatori di gauge allora anche la loro parentesi di Poisson $\{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2\}$ soddisfa le (2.13) ed è pertanto generatore di gauge.

Si introduce infine l'assunzione [6, 9] che il generatore di gauge \mathfrak{g} si possa scrivere nella forma⁷

$$\mathfrak{g}(t; q, p) = \sum_{k=0}^K \mathfrak{g}_k(q, p) \xi^{[k]}(t) , \quad (2.14)$$

per qualche K finito. Sotto tale ipotesi le (2.13) equivalgono alle seguenti condizioni

$$\{\mathfrak{g}_k, \psi_l\} \simeq \text{pfcc} , \quad \{\mathfrak{g}_0, H'\} \simeq \text{pfcc} , \quad \mathfrak{g}_{k-1} \simeq \text{pfcc} - \{\mathfrak{g}_k, H'\} , \quad \mathfrak{g}_K \simeq \text{pfcc} , \quad (2.15)$$

che vanno applicate per iterazioni successive a partire da quella su \mathfrak{g}_K .

⁶ Al secondo membro si potrebbe avere una generica funzione κ del tempo, che tuttavia risulta facilmente eliminabile attraverso una innocua ridefinizione $\mathfrak{g}(t) \mapsto \mathfrak{g}(t) - \int_0^t \kappa(\tau) d\tau$.

⁷ Si tratta di una sorta di sviluppo polinomiale di Taylor nei tempi.

In base alla terza e alla quarta condizione, ogni \mathfrak{g}_k è un vincolo di prima classe. Per la seconda condizione la catena dei \mathfrak{g}_k si chiude quando, attraverso ripetute applicazioni di $\{\cdot, H'\}$ sui vincoli primari di prima classe, si produce un vincolo che sulla superficie dei vincoli primari è automaticamente preservato dall'evoluzione temporale.

Queste due annotazioni dicono esattamente che il numero di iterazioni da compiere è pari al numero di vincoli secondari di prima classe prodotti dall'algoritmo di consistenza. Come si vedrà con l'esempio dell'elettromagnetismo, qualora si decidesse di proseguire oltre si otterrebbero termini ridondanti nel generatore di gauge, senza nulla guadagnare in generalità. Una prova generale di questo fatto è fornita in [9]. In realtà vale di più, in [10] è mostrato che tale catena contiene tutti i vincoli di prima classe della teoria. Si tratta di un risultato molto importante perché permette di concludere che ogni vincolo di prima classe svolge un ruolo nella generazione delle trasformazioni di gauge.

2.1C Congettura di Dirac e Hamiltoniana Estesa

La forma (2.14) per le trasformazioni di gauge fu trovata da Anderson e Bergmann [6] ed è riproposta in molti lavori sulle teorie hamiltoniane di gauge, ad esempio [9, 12, 20, 23]. Una visione alternativa delle trasformazioni di gauge di un sistema hamiltoniano vincolato si ottiene seguendo Dirac [5] e sviluppando la (2.9) per tempi ϵ piccoli. Se ne ricavano trasformazioni canoniche infinitesime, parametrizzate non più dal tempo bensì dalle sole $\delta v^l|_{t=0}$, della forma

$$\delta F = \epsilon \{F, \delta v^l(0; \cdot) \psi_l\} \approx \epsilon \delta v^l|_{t=0} \{F, \psi_l\} . \quad (2.16)$$

In questa visuale il generatore di gauge \mathfrak{g} viene accantonato e sono direttamente i vincoli primari di prima classe ψ_l a generare le trasformazioni di gauge del sistema. A questo stato, la differenza più evidente rispetto alla trattazione sviluppata nelle precedenti sezioni è l'assenza dei vincoli di prima classe ma non primari, che compaiono in \mathfrak{g} ma non sono presenti nella (2.16). In effetti Dirac osserva che le ψ_l non esauriscono tutte le possibili trasformazioni di gauge: componendo trasformazioni del tipo (2.16) si mostra che anche $\{\psi_l, \psi_{l'}\}$ e $\{\psi_l, H'\}$ generano trasformazioni di gauge. Pur non essendo necessariamente vincoli primari, entrambe le suddette parentesi di Poisson restano combinazioni lineari di vincoli di prima classe. In base a ciò e in ottemperanza al proposito di rendere la trattazione indipendente dalla classificazione dei vincoli in primari e non (§1.1C), Dirac estende lo status di generatori di trasformazioni di gauge a tutti i vincoli di prima classe. Una qualsiasi trasformazione di gauge si scriverà

$$\delta F \approx w^a \{F, \gamma_a\} . \quad (2.17)$$

attraverso delle funzioni w^a arbitrarie. Questa assunzione, nota come *congettura di Dirac*, garantisce che tutti i vincoli di prima classe e non soltanto quelli primari abbiano un ruolo nella generazione delle trasformazioni di gauge, come avveniva con il generatore di gauge \mathfrak{g} . Inoltre assicura che anche secondo questa trattazione la parentesi di Poisson di due generatori di gauge sia anch'essa un generatore di gauge⁸.

Postulata la forma (2.17) per le trasformazioni di gauge, Dirac osserva che sovrapponendo alla dinamica descritta dall'hamiltoniana totale generiche trasformazioni di gauge si ottiene

$$\dot{F} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_T\} + \{F, w^a \gamma_a\} ,$$

⁸ Si ricordi che in base alla (1.30) la parentesi di Poisson di due funzioni di prima classe è di prima classe.

che fornisce un'equazione del moto indipendente dalla distinzione dei vincoli fra primari e secondari, cioè

$$\dot{F} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_E\}^* \quad (2.18)$$

in cui si è introdotta l'*hamiltoniana estesa*

$$H_E = H' + w^a \gamma_a . \quad (2.19)$$

Se (e solo se) le (2.17) vengono considerate trasformazioni di gauge ammissibili allora la (2.18) risulta fisicamente equivalente alla (1.19). Dirac sottolinea però come in questa forma l'equazione del moto abbia il pregio di rendere manifesta tutta la (presunta⁹) libertà di gauge della teoria, che non era evidente in un contesto puramente lagrangiano [8, p. 25].

La dinamica della (2.18) può essere derivata imponendo la stazionarietà dell'*azione estesa*

$$\delta S_E = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^n p_n - H' - u^m \phi_m) = 0 \quad (2.20)$$

che differisce dalla (1.2) per il fatto che vi compaiono tutti i vincoli e non solo quelli primari. Ripercorrendo i passaggi seguiti in §1.1B si vede facilmente che le equazioni del moto associate al principio variazionale (2.20) sono le (1.3) a parte per la sostituzione $m_1 \mapsto m$

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H'}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H'}{\partial q^n} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}, \quad \phi_m(q, p) = 0 . \quad (2.21)$$

Usando le espressioni di \dot{q} e \dot{p} si ha

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H'\} + u^m \{F, \phi_m\} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H' + u^m \phi_m\} . \quad (2.22)$$

Riformulando $\phi_m = 0$ in termini di condizioni sui dati iniziali (\bar{q}, \bar{p}) e della costanza di ϕ_m

$$\phi_m(\bar{q}, \bar{p}) = 0, \quad \dot{\phi}_m = \{\phi_m, H'\} + u^{m'} \{\phi_m, \phi_{m'}\} \approx 0 . \quad (2.23)$$

Tramite opportune combinazioni lineari si possono separare i vincoli di prima classe da quelli di seconda classe¹⁰ nella (2.20) e nelle equazioni del moto che ne derivano. La (2.23) diviene

$$\dot{\gamma}_a = \{\gamma_a, H'\} \approx 0, \quad \dot{\chi}_b = \{\chi_b, H'\} + w^{b'} C_{bb'} \approx 0,$$

ricordando che H' è di prima classe e che $C_{bb'}$ è invertibile si conclude che queste equazioni sono soddisfatte se e solo se si annullano tutti i moltiplicatori $w^{b'}$ dei vincoli secondari. Di conseguenza l'evoluzione temporale (2.22) può essere riscritta

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H'\} + w^a \{F, \gamma_a\} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H' + w^a \gamma_a\} \approx \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_E\}^* .$$

La discussione appena terminata permette infine di osservare che la dinamica del sistema può essere ottenuta anche da un principio variazionale in cui compaiono solo vincoli di prima classe, abbinato all'ovvia richiesta che i dati iniziali siano sulla superficie dei vincoli:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^n p_n - H' - w^a \gamma_a) = 0, \quad \phi_m(\bar{q}, \bar{p}) = 0 . \quad (2.24)$$

⁹ La ragione dell'enfasi posta sul fatto che quanto concluso dipenda dalla validità delle (2.17) come trasformazioni di gauge sarà chiara al prossimo paragrafo, quando tale validità sarà messa in discussione.

¹⁰ A tal fine si usano la matrice Λ introdotta al §1.3 e la sua inversa: definendo $w^m = u^{m'} (\Lambda^{-1})_{m'}^m$ si ha $u^m \phi_m = u^m (\Lambda^{-1})_m^{m'} \Lambda_{m'}^{m''} \phi_{m''} = u^m [(\Lambda^{-1})_m^a \gamma_a + (\Lambda^{-1})_m^b \chi_b] = w^a \gamma_a + w^b \chi_b$.

2.1D Inequivalenza delle Trattazioni e Trasformazioni di Gauge Puntuali

È di importanza fondamentale per lo sviluppo della teoria stabilire se le due concezioni delle trasformazioni di gauge presentate al §2.1A e al §2.1C sono o meno equivalenti.

I punti da esaminare sono essenzialmente due:

- (i) l'equivalenza della (2.16) alla (2.10), ovvero la validità dell'ipotesi di Dirac secondo la quale ogni vincolo primario di prima classe genera una trasformazione di gauge;
- (ii) l'equivalenza della (2.17) alla (2.16), ossia la validità della congettura di Dirac secondo la quale ogni vincolo di prima classe genera una trasformazione di gauge.

Sulla (ii) si sono spesi molti lavori, si può mostrarne la falsità studiando casi patologici, di interesse puramente formale, ad esempio si veda [21, Sezione 6.4]. Sotto assunzioni più forti relativamente alla regolarità della superficie dei vincoli, verificate nei casi di interesse fisico fino ad ora studiati, si dimostra [14, Sezione 3.3.2] la validità della congettura di Dirac.

Il problema più delicato riguarda la validità della (i). La conclusione a cui si giunge dipende dalla definizione di trasformazione di gauge adottata [12]. La definizione data a inizio capitolo tratta le trasformazioni di gauge come una corrispondenza fra traiettorie dinamiche. Essa consente di considerare come grandezze fisiche generici funzionali delle traiettorie. Per motivi pratici le espressioni esplicite delle trasformazioni di gauge in ambito hamiltoniano sono state scritte per mezzo di trasformazioni \mathcal{G}_H delle coordinate canoniche (q, p) , dipendenti dal tempo. La dipendenza temporale delle trasformazioni consentiva di calcolarne l'azione su di un'intera traiettoria, nonché sul valore assunto dai funzionali. Che il procedimento seguito al paragrafo §2.1A sia conforme a quanto appena descritto traspare chiaramente dalla (2.6), e la (2.10) non è altro che il suo sviluppo al prim'ordine senza ipotesi particolari. Al contrario la (2.16) è ottenuta come sviluppo per tempi piccoli della (2.6), non è pertanto una trasformazione dipendente dal tempo e non è evidente se e come essa possa fornire una trasformazione \mathcal{G}_H che mappa traiettorie in traiettorie. Ponendo

$$\mathcal{G}_H : \Gamma \mapsto \tilde{\Gamma} := \exp [\epsilon \{ \cdot, \delta v^l(0; \cdot) \psi_l \}] \circ \Gamma$$

si ottiene una trasformazione che non rispetta le equazioni del moto. Lo si vede sostituendo

$$\mathbf{g}(t) = \delta v^l(0; \cdot) \psi_l \quad \forall t$$

nella seconda delle (2.13), che forniscono condizioni necessarie e sufficienti affinché le equazioni del moto di una variabile dinamica siano rispettate da \mathbf{g} . Si ottiene

$$\text{pfcc} \simeq \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}(t) + \{ \mathbf{g}(t), H' \} = \{ \delta v^l(0; \cdot) \psi_l, H' \} \approx \delta v^l(0; \cdot) \{ \psi_l, H \} \approx \delta v^l(0; \cdot) V_l^{m_1} \dot{\phi}_{m_1},$$

ma in generale l'ultimo termine è debolmente uguale a combinazioni dei vincoli secondari e le (2.13) non sono quindi rispettate. Ovviamente quanto detto vale anche se si considerano generiche combinazioni di tutti i vincoli di prima classe con coefficienti ξ che possono dipendere anche dal tempo: il fatto che Γ sia una soluzione delle equazioni del moto in generale non implica che anche

$$\tilde{\Gamma} : t \mapsto \exp [\{ \cdot, \xi^a(t) \gamma_a \}] \circ \Gamma(t)$$

sia una soluzione delle stesse equazioni. Secondo la definizione di trasformazione di gauge finora adottata la congettura di Dirac risulta invalidata per effetto dell'erroneità delle sue ipotesi,

ovvero che combinazioni arbitrarie di vincoli primari di prima classe generino trasformazioni di gauge [20]. L'evoluzione temporale descritta dall'hamiltoniana estesa non è equivalente a quella descritta dall'hamiltoniana totale e quindi dalla lagrangiana. Questa inequivalenza è dovuta al fatto che nello sviluppo per tempi ϵ piccoli (2.16) si trascurano i termini di ordine superiore ad ϵ , nei quali fanno comparsa anche i vincoli secondari di prima classe, moltiplicati per coefficienti dipendenti da quelli che moltiplicano i vincoli primari, (2.11) e [23]. I vincoli primari di prima classe presi singolarmente non generano trasformazioni di gauge valide, è necessario che anche i vincoli secondari prendano parte alla trasformazione. Dirac si rese conto di ciò ed elaborò la sua congettura ma reintrodusse i vincoli secondari con coefficienti liberi, mentre nel generatore di gauge tali coefficienti sono legati a quelli dei vincoli primari.

Una definizione alternativa di trasformazione di gauge si focalizza sui singoli stati fisici e non sulle "storie". In un contesto hamiltoniano ciò equivale a considerare punti dello spazio delle fasi anziché le loro traiettorie¹¹. Per non creare confusione ci si riferirà a questa classe di trasformazioni usando l'espressione *trasformazioni di gauge puntuali*. Le trasformazioni di gauge puntuali sono tutte e sole le trasformazioni che mandano un punto (q, p) dello spazio delle fasi in un punto (Q, P) fisicamente equivalente, i.e. tale che esistano due soluzioni delle equazioni del moto legate da una trasformazione di gauge, passanti una per (q, p) e l'altra per (Q, P) , allo stesso istante temporale t [11, Definition 2.3.1]. Pur non specificando un'azione globale su di una traiettoria, le trasformazioni di gauge puntuali sono importanti perché permettono di determinare la struttura delle orbite di gauge. Un'espressione esplicita per la forma infinitesima di questo genere di trasformazioni può essere ottenuta dalla (2.10) scegliendo un t qualsiasi. All'istante t fissato i valori assunti dalla funzione ξ e dalle sue derivate possono essere fissati indipendentemente, dunque i coefficienti di ciascun termine \mathfrak{g}_k risultano indipendenti e i singoli \mathfrak{g}_k divengono generatori di trasformazioni di gauge puntuali [20]. Alla fine del paragrafo §2.1B si era osservato che da tali termini è possibile riottenere ciascun vincolo di prima classe. Si conclude allora che le trasformazioni di gauge puntuali sono generate da combinazioni arbitrarie (indipendenti dal tempo) di vincoli di prima classe (primari e non) [12], cioè sono le (2.17) che Dirac aveva ottenuto usando uno sviluppo al prim'ordine per tempi infinitesimi¹² delle trasformazioni di gauge fra soluzioni, e avanzando la sua congettura circa la reintroduzione dei vincoli secondari.

Come emerge confrontando le espressioni (2.14)–(2.15) e (2.17), le trasformazioni di gauge puntuali rappresentano una classe più vasta delle trasformazioni di gauge delle traiettorie. Come conseguenza di ciò gli osservabili da esse preservati formano un insieme meno ampio rispetto a quello dei funzionali delle traiettorie soddisfacenti la (2.2). Si tratterà di un sottoinsieme dei funzionali esprimibili come una funzione delle (q, p) (ed eventualmente del tempo), cioè funzionali per i quali la dipendenza dall'evoluzione temporale delle traiettorie si arresta al prim'ordine. La descrizione di questa classe di funzioni sarà intrapresa alla prossima sezione.

¹¹ Mentre una traiettoria nello spazio delle configurazioni contiene la stessa informazione di una traiettoria nello spazio delle fasi o degli atti di moto, un singolo punto dello spazio degli atti di moto contiene ovviamente più informazione di uno sullo spazio delle configurazioni. Cosa si debba intendere con stato fisico dipende da quale sia il massimo ordine di derivazione temporale (delle variabili dello spazio delle configurazioni) inteso come facente parte dell'informazione istantanea sul sistema. Le teorie lagrangiana e hamiltoniana usuali sono teorie del primo ordine.

¹² In effetti per l'arbitrarietà delle δv^l non è in alcun modo restrittivo assumere t infinitesimo, ossia che la diramazione fra le due soluzioni avvenga a un'istante temporale che precede per un infinitesimo quello in cui il punto da trasformare è raggiunto.

2.2 Osservabili Fisiche Classiche Hamiltoniane

Si vuole ora studiare la caratterizzazione hamiltoniana delle osservabili fisiche. Come accennato a inizio capitolo e ribadito poco fa, la rappresentazione più generale di un'osservabile fisica è attuata mediante un funzionale delle traiettorie nello spazio delle configurazioni, che sia invariante sotto trasformazioni di gauge. Nonostante ciò, in questa sede, ci si limiterà a considerare le osservabili rappresentate da una funzione liscia delle sole coordinate canoniche¹³.

2.2A Sottoalgebra delle Funzioni Invarianti di Gauge

Appurato che in un sistema hamiltoniano vincolato diverse coordinate canoniche (q, p) possono corrispondere allo stesso stato, sorge il problema di determinare quali funzioni delle variabili canoniche siano ammissibili come grandezze fisiche. La corrispondenza fra generiche funzione (lisce) delle (q, p) e osservabili fisiche non è consistente in quanto potrebbe associare valori diversi di un'osservabile allo stesso stato fisico, qualora la funzione corrispondente non assumesse lo stesso valore su tutti i punti dello spazio delle fasi corrispondenti ad uno stesso stato fisico. Il problema è risolto se si associano a variabili dinamiche le sole funzioni costanti sulle orbite di gauge, che in base alla (2.17) sono tutte e sole le F che soddisfano

$$\{F, \gamma_a\}^* \approx 0. \quad (2.25)$$

Questa condizione altro non è che la specializzazione al caso di funzioni delle coordinate canoniche dell'invarianza di gauge per i funzionali delle traiettorie (2.2). Ricordando le proprietà (1.36a) essa equivale alla richiesta che F sia di prima classe rispetto alle parentesi di Dirac.

2.2B Restrizione alla Superficie dei Vincoli

Anche restringendosi alle funzioni invarianti di gauge resta un altro problema. La presenza dei vincoli suggerirebbe di considerare come variabili dinamiche le funzioni $C^\infty(\Sigma)$ sulla superficie vincolare al posto di quelle $C^\infty(\Omega)$ definite su tutto lo spazio delle fasi, il cui comportamento fuori dalla superficie dei vincoli parrebbe privo di significato fisico. Su $C^\infty(\Sigma)$ tuttavia non si ha una definizione immediata delle parentesi di (Poisson e) Dirac fra variabili dinamiche che sono ciò che attribuisce valore predittivo al formalismo. L'obiettivo di questo paragrafo è quello di colmare questa lacuna, rendendo peraltro la condizione di invarianza di gauge applicabile anche alle funzioni definite sulla superficie dei vincoli.

Siano $F_1, F_2 \in C^\infty(\Sigma)$ e \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 due funzioni $C^\infty(\Omega)$ tali che le loro restrizioni alla superficie dei vincoli coincidano con F_1 e F_2 rispettivamente. La definizione più naturale della parentesi di Dirac di F_1 e F_2 parrebbe

$$\{F_1, F_2\}^*_\Sigma := \{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2\}^*|_\Sigma. \quad (2.26)$$

Affinché sia ben posta questa definizione non deve dipendere dalla scelta di \tilde{F}_1 e \tilde{F}_2 . La più generica funzione dello spazio delle fasi la cui restrizione a Σ coincida con F_2 ha la forma

$$\tilde{F}_2 + \lambda^a \gamma_a + \eta^b \chi_b,$$

¹³ Ovvero quelle corrispondenti a funzionali del primo ordine delle traiettorie. Per semplificare la notazione, funzioni che esibiscono anche una dipendenza esplicita dal tempo non saranno di seguito considerate. L'estensione a tali funzioni è comunque immediata.

ne consegue che la definizione (2.26) è ben posta se e solo se

$$\{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2\}^* \approx \{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2 + \lambda^a \gamma_a + \eta^b \chi_b\}^* \approx \{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2\}^* + \lambda^a \{\tilde{F}_1, \gamma_a\}^* \iff \{\tilde{F}_1, \gamma_a\}^* \approx 0.$$

La condizione precedente è chiaramente indipendente dalla scelta di \tilde{F}_1 quindi permette di estendere alle funzioni sulla superficie dei vincoli il concetto di invarianza di gauge.

L'insieme \mathcal{O} delle funzioni $C^\infty(\Sigma)$ invarianti di gauge sarà chiamato *algebra delle osservabili*. Esso è infatti un'algebra di Lie rispetto alle parentesi di Dirac¹⁴ (2.26), e una sottoalgebra di $C^\infty(\Sigma)$ con la moltiplicazione puntuale infatti se $F_1, F_2 \in C^\infty(\Sigma)$, allora $\tilde{F}_1 \tilde{F}_2|_\Sigma = F_1 F_2$ e

$$\{\tilde{F}_1 \tilde{F}_2, \gamma_a\}^* = \tilde{F}_1 \{\tilde{F}_2, \gamma_a\}^* + \{\tilde{F}_1, \gamma_a\}^* \tilde{F}_2 \approx 0.$$

2.3 Gauge-Fixing

Come già osservato la libertà di gauge fa sì che vi possa essere più di un punto dello spazio delle fasi corrispondente allo stesso stato fisico. Talvolta può essere desiderabile eliminare questa ambiguità fissando una *gauge*, ossia imponendo ulteriori restrizioni

$$\rho_c(q, p) \approx 0 \tag{2.27}$$

alle variabili canoniche in modo che le restanti variabili indipendenti siano in corrispondenza biunivoca con gli stati del sistema. Queste restrizioni sono dette *condizioni di gauge*.

2.3A Richieste sulle Condizioni di Gauge

Geometricamente delle condizioni di gauge valide individuano una sottovarietà dello spazio delle fasi che interseca ciascuna orbita di gauge sulla superficie dei vincoli in uno e un solo punto. Può accadere che la struttura della superficie dei vincoli o delle orbite di gauge sia tale da non rendere possibile l'individuazione di condizioni di gauge valide. Queste problematiche, dette ostruzioni di Gribov, sono una delle ragioni per cui è utile sviluppare una trattazione che non richieda di fissare una gauge al fine di studiare la dinamica di un sistema di gauge.

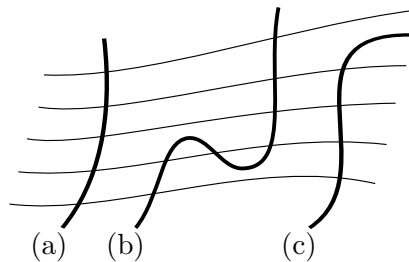


Figura 2.1: orbite di gauge (tratto sottile) e tre possibili condizioni di gauge (tratto spesso). Le (a) sono condizioni di gauge valide; le (b) sono incomplete: alcune orbite sono intersecate in più punti; le (c) inaccessibili: alcune orbite non sono intersecate in nessun punto.

¹⁴ D'ora in avanti si ometterà il pedice Σ .

Dato che ciascuna orbita di gauge costituisce una sottovarietà della superficie dei vincoli avente dimensione pari al numero A di vincoli di prima classe, una richiesta necessaria affinché delle condizioni di gauge (indipendenti) ρ_c risultino valide è che esse siano in numero A . Va sottolineato che questa non è in alcun modo una condizione sufficiente: quando ristrette a un'orbita di gauge alcune ρ_c potrebbero risultare impossibili da soddisfare, altre automaticamente soddisfatte. Dunque su certe orbite di gauge le ρ_c potrebbero non selezionare alcun punto (gauge *inaccessibile*) così come un continuo di punti (condizioni di gauge *incomplete*).

Un'altra richiesta che può aiutare a scartare delle condizioni di gauge incomplete è che non vi siano trasformazioni di gauge che preservano le condizioni di gauge, ovvero che

$$\delta w^a \{\rho_c, \gamma_a\} \approx 0 \iff \delta w^a = 0;$$

ciò avviene quando le parentesi di Poisson precedenti formano una matrice invertibile:

$$\det\{\rho_c, \gamma_a\} \neq 0. \quad (2.28)$$

2.3B Conversione dei Vincoli

La (2.28) implica che le ρ_c formino assieme alle γ_a una famiglia di vincoli di seconda classe¹⁵, pertanto dopo aver introdotto le condizioni di gauge non si hanno più vincoli di prima classe, questo rispecchia il fatto che non è più possibile effettuare alcuna trasformazione di gauge.

Si è così osservato che fissando una gauge tutti i vincoli di prima classe sono convertiti in vincoli di seconda classe. È vero anche il viceversa [14], cioè ogni famiglia di vincoli di seconda classe può essere pensata come il risultato dell'imposizione di una gauge, tuttavia non vi è un unico modo di passare a un sistema equivalente con soli vincoli di prima classe e generalmente ciò comporta l'introduzione di nuovi gradi di libertà. Ciononostante questo procedimento può risultare vantaggioso in quanto in assenza di vincoli di seconda classe le parentesi di Dirac coincidono con quelle di Poisson.

2.3C Conteggio dei Gradi di Libertà

Come mostrato nei paragrafi precedenti, il numero di gradi di libertà matematici utilizzati per descrivere un sistema può variare. Al contrario, se le trattazioni sono fisicamente equivalenti, il numero di gradi di libertà fisici dev'essere sempre lo stesso. Dopo l'imposizione di una gauge gli stati fisici sono in corrispondenza biunivoca con le variabili utilizzate per descriverli, pertanto i gradi di libertà fisici sono

$$2 \times \text{variabili canoniche} - \text{vincoli originari} - \text{condizioni di gauge}$$

$$=$$

$$2 \times \text{variabili canoniche} - 2 \times \text{vincoli di prima classe} - \text{vincoli di seconda classe}$$

In particolare, ricordando che i vincoli di seconda classe sono sempre in numero pari, i gradi di libertà di un sistema hamiltoniano vincolato sono sempre pari, come nel caso non vincolato.

¹⁵ Se almeno una di esse fosse di prima classe una riga o una colonna della matrice dovrebbe essere nulla.

Capitolo 3

Generalizzazione a Teorie di Campo

I concetti elaborati ai capitoli precedenti si generalizzano a teorie di campo, ovvero al caso in cui le variabili che descrivono le configurazioni del sistema sono funzioni scalari differenziabili definite su un qualche dominio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^D$ dello spazio fisico¹ e vincolate a soddisfare determinate condizioni al contorno. Per delle referenze circa gli argomenti trattati di seguito si vedano ad esempio le sezioni indicate in bibliografia di [15, 19] e i capitoli 3 e 5 di [22].

Formalmente una teoria di campo può essere pensata come il limite per gradi di libertà infiniti di una teoria discreta. In tale limite l'indice finito che parametrizza le variabili dello spazio delle configurazioni viene promosso a variabile continua². Corrispondentemente le variabili divengono campi, le sommatorie su di esse integrali e le derivate parziali derivate funzionali³. Simbolicamente:

$$n \in \{1, \dots, N\} \mapsto y \in \mathcal{D}, \quad x^n \mapsto \psi(y), \quad \sum_n \mapsto \int dy, \quad \partial \mapsto \delta.$$

L'evoluzione temporale in teoria di campo è determinata dalle traiettorie dei campi che si assume si possano sempre scrivere come funzioni differenziabili $\psi(y, t)$. Le osservabili fisiche saranno in generale funzionali di tali traiettorie mentre i parametri della teoria (eventualmente dipendenti dal tempo) saranno ora funzioni di $y \in \mathcal{D}$ oltre che del tempo. In base all'analogia formale appena descritta ci si aspetta che l'evoluzione temporale si possa dedurre da un principio di azione stazionaria e che, *mutatis mutandis*, i formalismi lagrangiano e hamiltoniano siano applicabili. Di seguito la generalizzazione di alcuni concetti particolarmente utili è illustrata più esplicitamente.

Nel caso hamiltoniano⁴ la generalizzazione si specializza sostituendo le variabili canoniche (q^n, p_n) con i campi e i relativi momenti coniugati (ψ^n, π_n) . Ne consegue che le variabili dinamiche hamiltoniane, ossia le funzioni delle variabili canoniche, divengono funzionali dei

¹ Il caso tipico è lo spazio tridimensionale euclideo $D = 3$.

² Ovviamente un ulteriore indice discreto è usato quando la teoria coinvolge più campi scalari o campi vettoriali.

³ Si assume che l'insieme a cui appartengono i campi sia uno spazio vettoriale e che gli operatori considerati siano tali che le loro derivate funzionali, valutate a valori qualsiasi dei campi, dipendano linearmente dalla variazione, ovvero siano funzionali lineari dei campi. Per tale ragione questi ultimi saranno spesso identificati con una funzione misurabile su \mathcal{D} .

⁴ Un procedimento speculare si applica al caso Lagrangiano non covariante.

campi e dei loro momenti coniugati. Ciò in particolare vale per la funzione hamiltoniana H che si assume esprimibile tramite una funzione densità di hamiltoniana come

$$H(t; \psi^n, \pi_n) = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{H}(t; y, \psi^n(y), \pi_n(y), d\psi^n(y)) dy .$$

La parentesi di Poisson di due funzionali F_1, F_2 di (ψ^n, π_n) è il funzionale definito da⁵

$$\{F_1, F_2\} := \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\delta F_1}{\delta \psi^n} \frac{\delta F_2}{\delta \pi_n} - \frac{\delta F_1}{\delta \pi_n} \frac{\delta F_2}{\delta \psi^n} \right) , \quad (3.1)$$

dove l'integrazione è estesa al dominio su cui sono definiti i campi.

Il generatore di gauge (2.14) si scrive ora tramite degli operatori \mathfrak{g}_k dei campi, nella forma:

$$\mathfrak{g}(\psi^n, \pi_n; t) = \sum_{k=0}^K \int_{\mathcal{D}} \mathfrak{g}_k(\psi^n, \pi_n) \xi^{[k]}(t, y) . \quad (3.2)$$

I gradi di libertà fisici di una teoria lagrangiana di campo corrispondono al numero di coppie di campi e relative derivate temporali che, dopo aver fissato una gauge, è necessario specificare al tempo iniziale al fine di determinare in modo univoco l'evoluzione dinamica del sistema [22, p. 133]. In analogia con questa definizione, il numero di gradi di libertà di una teoria hamiltoniana di campo è il numero di coppie di campi e relativi momenti coniugati che vanno specificate al tempo iniziale allo scopo di determinare univocamente l'evoluzione temporale, una volta fissata completamente la gauge.

⁵ Nell'integrazione si valuta ciascuna derivata funzionale sull'argomento di $\{F_1, F_2\}$ e i funzionali lineari delle variazioni così ottenuti vengono visti come funzioni misurabili, come menzionato in una nota precedente. Quando negli argomenti delle parentesi di Poisson compare un operatore O dei campi anziché un funzionale, con $\{O, F\}$ si intenderà il campo $y \mapsto \{\delta_y \circ O, F\}$.

Capitolo 4

Formulazione Canonica dell'Elettrodinamica Classica

Con quest'ultimo capitolo si intende fornire un esempio di applicazione delle nozioni finora sviluppate. L'elettromagnetismo e l'elettrodinamica di una particella puntiforme costituiscono il prototipo di teoria classica di gauge. Di seguito sono illustrate le basi della loro trattazione nel formalismo hamiltoniano vincolato. Particolare attenzione è volta all'individuazione delle relative trasformazioni di gauge.

La segnatura della metrica è $(+, -, -, -)$ e saranno adottate le unità di Lorentz–Heaviside. La convenzione di segni del quadripotenziale e del tensore elettromagnetico seguita è:

$$(A_\mu) = (-\varphi \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3), \quad (F_{\mu\nu}) = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ +E_1 & 0 & +B_3 & -B_2 \\ +E_2 & -B_3 & 0 & +B_1 \\ +E_3 & +B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nel formalismo hamiltoniano i campi A_μ e $F_{\mu\nu}$ sono da intendersi come funzioni dello spazio tridimensionale e non dello spaziotempo; gli integrali sono tutti estesi a tale dominio. L'evoluzione temporale determina gli usuali campi sullo spaziotempo. Si assume sempre che i campi soddisfino opportune condizioni al contorno, in particolare che le $F_{\mu\nu}$ si annullino adeguatamente all'infinito spaziale. Si è mantenuta la notazione quadridimensionale per un più facile confronto con la trattazione covariante lagrangiana.

4.1 Elettromagnetismo Puro

Nella trattazione lagrangiana si considera il quadripotenziale A_μ come campo dinamico e si introducono la lagrangiana e la densità di lagrangiana

$$L_{\text{em}} = \int \mathcal{L}_{\text{em}}, \quad \mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.1)$$

Come noto il campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ e, di conseguenza, la densità di lagrangiana, risultano invarianti sotto le trasformazioni di gauge del quadripotenziale

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda. \quad (4.2)$$

4.1A Hamiltoniana Canonica e Vincoli

Il passaggio alla trattazione hamiltoniana avviene determinando i momenti coniugati

$$\Pi^\mu = \frac{\delta L_{\text{em}}}{\delta(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu}, \quad (4.3)$$

che come atteso forniscono immediatamente un vincolo primario

$$\phi_1 = \Pi^0 = 0. \quad (4.4)$$

Ne deriva la non invertibilità della trasformazione (1.22)

$$(A_\mu, \dot{A}_\mu) \longmapsto (A_\mu, \Pi^\mu = (0, -F^{0i})), \quad (4.5)$$

infatti $\dot{A}_i = \Pi^i + \partial_i A_0$, ma \dot{A}_0 non è specificata dalle coordinate canoniche.

La densità di energia lagrangiana è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{em}} &= \dot{A}_\mu \Pi^\mu - \mathcal{L}_{\text{em}} \\ &= \sum_i \left[F_{0i} \Pi^i + \partial_i A_0 \Pi^i + \frac{1}{4} (F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0} + F_{ij} F^{ij}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_i (\Pi^i)^2 + \frac{1}{4} \sum_{ij} (F_{ij})^2 + \sum_i \partial_i A_0 \Pi^i. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Poiché, come previsto, tutte le grandezze che vi compaiono sono esprimibili tramite i campi A_μ e Π^μ , la (4.6) fornisce anche una densità di hamiltoniana canonica \mathcal{H}_{em} soddisfacente (1.23) e l'evoluzione temporale risulta specificata da $H_{\text{em}} = \int \mathcal{H}_{\text{em}}$ tramite la (1.4).

A questo punto l'invertibilità della transizione dalla formulazione lagrangiana a quella hamiltoniana può essere recuperata usando le (1.27)–(1.28) e scegliendo $\hat{u}^1(A_\mu, \dot{A}_\mu) = \dot{A}_0$.

Inoltre l'evoluzione temporale di ϕ_1 fornisce la legge di Gauss come vincolo secondario:

$$\phi_2 = \dot{\phi}_1 = \{\Pi^0, H_{\text{em}}\} + u^1 \{\Pi^0, \phi_1\} = \sum \partial_i \Pi^i = - \sum \partial_i E_i = 0. \quad (4.7)$$

L'algoritmo di consistenza termina qui: $\dot{\phi}_2 = 0$, infatti per qualsiasi funzione spalmante ξ

$$\begin{aligned} \int \xi \dot{\phi}_2 &= \left\{ \int \xi \sum \partial_i \Pi^i, H_{\text{em}} \right\} = \int \sum_i \left[- \frac{\delta (\int \xi \partial_i \Pi^i)}{\delta \Pi^i} \frac{\delta H_{\text{em}}}{\delta A_i} \right] \\ &= \sum_i \left[\frac{\delta (\int \partial_i \xi \Pi^i - \int \partial_i (\xi \Pi^i))}{\delta \Pi^i} \frac{\delta H_{\text{em}}}{\delta A_i} \right] = \int \sum_i \left[\partial_i \xi \sum_j \partial_j F^{ij} \right] \\ &= \int \sum_{ij} \partial_i \xi \partial_j F^{ij} = \int \left[\sum_{ij} \partial_i (\xi \partial_j F^{ij}) - \xi \partial_i \partial_j F^{ij} \right] = 0. \end{aligned}$$

Evidentemente

$$\{\phi_1, \phi_2\} = \left\{ \Pi^0, \sum \partial_i \Pi^i \right\} = 0$$

ovunque, pertanto entrambi i vincoli sono di prima classe e il moltiplicatore u^1 del vincolo primario di prima classe $\phi_1 = \Pi^0$ risulta libero. L'hamiltoniana totale si otterrà allora semplicemente aggiungendo a quella canonica un termine $\int u^1 \phi_1$.

4.1B Invarianza di Gauge

Si vuole ora trovare un generatore di gauge per l'elettromagnetismo della forma (3.2). L'algoritmo di consistenza ha prodotto un solo vincolo secondario quindi $K = 1$. Usando le ultime due delle (2.15) e ricordando che l'unico vincolo primario a disposizione è Π^0 si trova

$$\mathfrak{g}_1 = a\Pi^0, \quad \mathfrak{g}_0 = b\Pi^0 - a\{\Pi^0, H_{\text{em}}\} = b\Pi^0 - a \sum \partial_i \Pi^i$$

che soddisfano anche le restanti richieste non appena $b = 0$. Dunque

$$\mathfrak{g}_{\text{em}} = \int (-\epsilon \sum \partial_i \Pi^i + \dot{\epsilon} \Pi^0). \quad (4.8)$$

Si noti che, come anticipato, anche se si fosse lasciato K generico e si avesse continuato ad iterare l'algoritmo che produce i \mathfrak{g}_k , non si sarebbero ottenuti generatori di gauge più generali. Una generica catena di \mathfrak{g}_k per l'elettromagnetismo ha la forma

$$\mathfrak{g}_K = a_K \phi_1, \quad \mathfrak{g}_{K-1} = a_{K-1} \phi_1 - a_K \phi_2, \quad \dots, \quad \mathfrak{g}_k = a_k \phi_1 - a_k \phi_2, \quad \dots, \quad \mathfrak{g}_0 = -a_1 \phi_2.$$

Raccogliendo i termini che moltiplicano lo stesso vincolo, il generatore di gauge si scrive

$$\sum_{k=1}^K a_k \int (\zeta^{[k]} \phi_1 - \zeta^{[k-1]} \phi_2).$$

L'equivalenza con (4.8) è provata se in quest'ultimo si sostituisce: $\epsilon = a_1 \zeta + a_2 \dot{\zeta} + a_3 \ddot{\zeta} + \dots$.

Come si vede facilmente \mathfrak{g}_{em} genera la solita trasformazione (4.2) del quadripotenziale

$$\delta A_\mu = \{A_\mu, \mathfrak{g}_{\text{em}}\} = \delta_\mu^0 \left\{ A_0, \int \dot{\epsilon} \Pi^0 \right\} + \delta_\mu^i \left\{ A_i, \int \partial_i \epsilon \Pi^i \right\} = \partial_\mu \epsilon. \quad (4.9)$$

Al contrario, usando entrambi i vincoli di prima classe spalmati con delle funzioni dello spazio (ed eventualmente del tempo) ξ^1, ξ^2 indipendenti, si possono generare le trasformazioni

$$\delta(\cdot) = \left\{ \cdot, \int (\xi^1 \phi_1 + \xi^2 \phi_2) \right\} = \left\{ \cdot, \int \left[\xi^1 \Pi^0 + \xi^2 \left(\sum \partial_i \Pi^i \right) \right] \right\}, \quad (4.10)$$

La loro azione sulle variabili canoniche risulta

$$\delta A_\mu = \delta_\mu^0 \xi^1 - \delta_\mu^i \partial_i \xi^2, \quad \delta \Pi^\mu = 0. \quad (4.11)$$

Nota la trasformazione del potenziale vettore si ricava quella del tensore elettromagnetico, ma occorre prestare attenzione alla procedura seguita. A tal fine è indispensabile chiarire alcune sottigliezze riguardanti la relazione fra il quadripotenziale e il tensore elettromagnetico. Ricordando che nella formulazione hamiltoniana tali campi sono definiti sullo spazio tridimensionale e che $F_{\mu\nu}$ dipende anche dalle derivate temporali di A_μ , si deduce che il tensore elettromagnetico può essere visto come un funzionale delle traiettorie del quadripotenziale. In tale ottica ci si attende che le trasformazioni che preservano il funzionale $F_{\mu\nu}$ siano solo quelle determinate dal generatore di gauge (4.8). Ciò nonostante la dipendenza del tensore elettromagnetico dalla "storia" di A_μ si manifesta solo tramite una dipendenza temporale al prim'ordine, ne consegue che ad ogni istante di tempo esso è esprimibile in termini dei soli campi (A_μ, Π^μ) valutati a tale istante. Da questa prospettiva ci si attende che esprimendo $F_{\mu\nu}$ in termini di A_μ e Π^μ esso risulti invariante anche sotto le trasformazioni di gauge puntuali.

Usando la definizione di tensore elettromagnetico data a inizio capitolo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, nella quale compaiono anche le derivate temporali del quadripotenziale, si ha

$$\delta F_{\mu\nu} = \delta_{[\nu}^0 \partial_{\mu]} \xi^1 - \delta_{[\nu}^i \partial_{\mu]} \partial_i \xi^2,$$

che può essere riscritta nella forma più utile

$$\delta F_{ij} = \xi^2,_{[ij]} = 0, \quad \delta F_{i0} = \partial_i(\xi^1 + \partial_0 \xi^2). \quad (4.12)$$

Il campo magnetico è invariante mentre il campo elettrico è preservato solo se

$$\xi^1(t, y) = -\xi^2(t, y) + \kappa(t), \quad (4.13)$$

per qualche funzione κ del solo tempo, ininfluenza in quanto ponendo $\epsilon = -\xi^2 + \int_0^t \kappa(\tau) d\tau$ nelle (4.9) si ritrovano le (4.11) soggette alla condizione (4.13).

In termini dei campi e dei momenti coniugati la definizione del campo magnetico F_{ij} non cambia, mentre il campo elettrico è dato da $F_{i0} = E_i = -\Pi^i$. Si vede immediatamente che entrambi sono preservati da tutte le trasformazioni (4.10) come atteso.

I risultati ottenuti sono concordi con le previsioni, il generatore di gauge \mathfrak{g}_{em} preserva $F_{\mu\nu}$ scritto sia come funzionale delle soluzioni per A_μ che come funzione (operatore) dei campi e dei momenti coniugati. I vincoli di prima classe presi indipendentemente non rispettano l'evoluzione temporale e dunque si possono applicare solo al secondo caso.

Vi è un'ambiguità nella scelta del rappresentante del campo elettrico. La definizione tramite le derivate del quadripotenziale è quella comunemente impiegata e parrebbe anche quella più fondamentale. Il significato fisico e della derivata temporale lungo una traiettoria nello spazio delle fasi è chiaro, ed è facile darne una definizione operativa. Ci si aspetta pertanto che anche in ambito hamiltoniano il "vettore velocità" di una traiettoria trasformata di gauge continui a coincidere con la definizione di \dot{q} fornita dalle equazioni di Hamilton. Questa richiesta pone delle restrizioni alle trasformazioni ammissibili come trasformazioni di gauge [23]. Le trasformazioni di gauge puntuali ne risultano escluse, esse in generale rispettano solo le \dot{q} espresse come funzioni delle variabili canoniche tramite le equazioni di Hamilton. Per rendere più evidenti le conseguenze di questo fatto si può introdurre nel campo elettromagnetico una carica di prova e studiarne il comportamento tramite le equazioni del moto hamiltoniane.

4.2 Elettrodinamica di una Carica non Relativistica

La lagrangiana dell'elettrodinamica di una particella non relativistica con carica elettrica e si ottiene aggiungendo a quella (4.1) dell'elettromagnetismo puro un termine cinetico per la particella carica libera e uno di interazione fra i campi e la carica:

$$\begin{aligned} L_{\text{ed}} &= L_{\text{free}} + L_{\text{int}} + \int \mathcal{L}_{\text{em}} \\ &= \frac{1}{2} m \sum_i (\dot{x}^i)^2 + e A_0(x) + e \sum_i \dot{x}^i A_i(x) + \int \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]; \end{aligned} \quad (4.14)$$

si ricordi che A_0 è l'opposto del potenziale scalare φ . Le trasformazioni di gauge sono

$$A_\mu \longmapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad p_i \longmapsto p_i + e \partial_i \Lambda. \quad (4.15)$$

I momenti coniugati sono

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}^i + eA_i(x), \quad \Pi^\mu = \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu}. \quad (4.16)$$

I gradi di libertà relativi alla particella non causano problemi di invertibilità della (1.22), si ha solo un vincolo primario che coincide con quello dell'elettromagnetismo puro

$$\phi_1 = \Pi^0 = 0. \quad (4.17)$$

Anche in questo caso l'integrale di Jacobi risulta esprimibile in termini delle variabili canoniche. L'hamiltoniana canonica risultante è la somma di quella dei campi fornita da (4.6), e quella della carica puntiforme ottenuta per sostituzione minimale:

$$\begin{aligned} H_{\text{ed}} &= H_{\text{free}} + H_{\text{int}} + \int \mathcal{H}_{\text{em}} \\ &= \frac{1}{2m} \sum_i [p_i - eA_i(x)]^2 - eA_0(x) \\ &\quad + \int \left[\frac{1}{2} \sum_i (\Pi^i)^2 + \frac{1}{4} \sum_{ij} (F_{ij})^2 + \sum_i \partial_i A_0 \Pi^i \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Imponendo la condizione di consistenza (1.9) su ϕ_1 si ottiene il vincolo secondario

$$\phi_2 = \dot{\phi}_1 = \{ \Pi^0, H_{\text{ed}} \} + u^1 \{ \Pi^0, \phi_1 \} = e\delta_x^3 + \sum \partial_i \Pi^i = 0. \quad (4.19)$$

Come per l'elettromagnetismo puro $\dot{\phi}_2 = 0$, infatti usando una funzione spalmante ξ si trova

$$\begin{aligned} \int \xi \dot{\phi}_2 &= \left\{ e\xi(x) + \int \xi \sum \partial_i \Pi^i, H_{\text{ed}} \right\} \\ &= \sum_i \left[\frac{\delta e\xi(x)}{\delta x^i} \frac{\partial H_{\text{ed}}}{\partial p_i} - \frac{\delta \left(\int \xi \partial_i \Pi^i \right)}{\delta \Pi^i} \frac{\delta H_{\text{ed}}}{\delta A_i} \right] \\ &= \int \sum_i \left[\left(e \partial_i \xi \delta_x^3 \right) \frac{1}{m} (p_i - eA_i(x)) - (-\partial_i \xi) \left(\sum_j \partial_j F^{ij} - \frac{e}{m} (p_i - eA_i) \delta_x^3 \right) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entrambi i vincoli sono di prima classe: la loro parentesi di Poisson si annulla ovunque come nel caso dell'elettromagnetismo puro

$$\{ \phi_1, \phi_2 \} = \left\{ \Pi^0, e\delta_x^3 + \sum \partial_i \Pi^i \right\} = 0. \quad (4.20)$$

Non si ha infine alcuna restrizione sulla variabile ausiliaria u^1 associata a $\phi_1 = \Pi^0$.

Ne consegue che, anche nel caso dell'elettrodinamica, l'hamiltoniana totale si ottiene semplicemente aggiungendo all'hamiltoniana canonica il termine $\int u^1 \phi_1$.

4.2A Equazioni del Moto

Equazioni di Hamilton Giacché l'unica variabile ausiliaria introdotta è libera le equazioni di Hamilton (1.3) e (1.18) coincidono. Per la particella si trova

$$\dot{x}^i = \frac{1}{m} [p_i - eA_i(x)] , \quad \dot{p}_i = e \partial_i A_0(x) + \frac{e}{m} \sum_j [p_j - eA_j(x)] \partial_i A_j(x) ; \quad (4.21)$$

mentre quelle del campo elettromagnetico sono

$$\dot{A}_0 = u^1 \text{ (arbitraria)} , \quad \dot{\Pi}^0 = e \delta_x^3 + \sum_j \partial_j \Pi^j \approx 0 , \quad (4.22)$$

$$\dot{A}_i = \Pi^i + \partial_i A_0 , \quad \dot{\Pi}^i = \frac{e}{m} (p_i - eA_i) \delta_x^3 - \sum_j \partial_j F^{ij} . \quad (4.23)$$

Equazioni di Eulero-Lagrange Dalle (4.21)–(4.23) si possono riottenere le equazioni di Eulero-Lagrange che saranno equazioni del secondo ordine per le variabili x^i, A_μ . A tale scopo si derivano rispetto al tempo le equazioni di Hamilton per tali variabili e si usano le restanti per eliminare la dipendenza dai momenti coniugati. Per la carica si ha

$$\begin{aligned} \ddot{x}^i &= \frac{1}{m} \left[\dot{p}_i - e \dot{A}_i(x) - e \sum_j \dot{x}^j \partial_j A_i(x) \right] \\ &= \frac{e}{m} \left[\partial_i A_0(x) + \sum_j \dot{x}^j \partial_i A_j(x) - \dot{A}_i(x) - \sum_j \dot{x}^j \partial_j A_i(x) \right] , \end{aligned}$$

che fornisce l'espressione della forza di Lorentz

$$m \ddot{x}(t) = e \left[(\partial_i A_0 - \dot{A}_i)(t, x) + \sum_j \dot{x}^j(t) F_{ij}(t, x) \right] . \quad (4.24)$$

Per i campi il vincolo secondario fornisce la legge di Gauss

$$\sum_j \partial_j (\partial_j A_0 - \dot{A}_j)(t, y) = e \delta^3(y - x(t)) . \quad (4.25)$$

Infine dalle equazioni del moto (4.23) si ottiene

$$\ddot{A}_i = \dot{\Pi}^i + \partial_i \dot{A}_0 = \frac{e}{m} (p_i - eA_i) \delta_x^3 - \sum_j \partial_j F^{ij} + \partial_i \dot{A}_0 ,$$

che equivale alla legge di Ampère-Maxwell

$$- (\partial_i \dot{A}_0 - \ddot{A}_i)(t, y) + \sum_j \partial_j F_{ij}(t, y) = e \dot{x}^i \delta^3(y - x(t)) . \quad (4.26)$$

Si sono così riottenute le equazioni dell'elettrodinamica nella loro forma più familiare, come equazioni del secondo ordine che determinano le traiettorie dinamiche $t \mapsto (x^i(t), A_\mu(t))$ nello spazio delle configurazioni. Non si sono sostituite le derivate temporali del quadripotenziale con componenti del tensore elettromagnetico per evidenziarne la natura di equazioni del secondo ordine in A_μ e non creare ambiguità su quale definizione di $F_{i0} = E_i$ adoperare.

4.2B Invarianza di Gauge

Il generatore di gauge si ricava come per l'elettromagnetismo puro. In questo caso risulta

$$\mathfrak{g}_{\text{ed}} = \int \left[-\epsilon \left(e \delta_x^3 + \sum \partial_i \Pi^i \right) + \dot{\epsilon} \Pi^0 \right] = -e \epsilon(\cdot, x) + \int \left[-\epsilon \sum \partial_i \Pi^i + \dot{\epsilon} \Pi^0 \right]. \quad (4.27)$$

È questo il luogo adatto per un'annotazione circa il rapporto fra la struttura dell'hamiltoniana totale e il generatore di gauge. Usando la prima delle (4.22) e le condizioni al contorno sul tensore elettromagnetico l'hamiltoniana totale si può mettere nella forma

$$\frac{1}{2m} \sum_i [p_i - e A_i(x)]^2 - e A_0(x) + \int \left[\frac{1}{2} \sum_i (\Pi^i)^2 + \frac{1}{4} \sum_{ij} (F_{ij})^2 - A_0 \sum_i \partial_i \Pi^i + \dot{A}_0 \Pi^0 \right].$$

Si vede che gli ultimi due termini della parte relativa ai campi corrispondono esattamente al generatore di gauge in cui come parametro ϵ si è presa la funzione arbitraria A_0 . Questo fatto ha validità generale [9] ed è una chiara conferma che le trasformazioni di gauge date da \mathfrak{g}_{ed} corrispondono precisamente a quelle seguite comparando i flussi di due differenti hamiltoniane totali che differiscano solo per le funzioni arbitrarie. In particolare esso conferma che nell'evoluzione data dall'hamiltoniana totale è già riconosciuto il ruolo dei vincoli secondari di prima classe e non è necessario aggiungerli a mano come fatto da Dirac nella sua hamiltoniana estesa. Ancora più importante è il fatto che nell'hamiltoniana totale così come nel generatore di gauge i vincoli secondari compaiono con coefficienti dipendenti da quelli che moltiplicano i vincoli primari (i primi sono le primitive rispetto al tempo dei secondi). La discrepanza fra la trattazione di Bergmann e quella di Dirac si origina proprio dal fatto che in quest'ultima i coefficienti che moltiplicano i vincoli di prima classe sono presi tutti arbitrari e indipendenti. Questa maggiore arbitarietà è quella che fa sì che le trasformazioni di gauge puntuali non rispettino necessariamente le equazioni del moto [23], come ci si appresta ora a verificare per il caso dell'elettrodinamica.

Come per l'elettromagnetismo, \mathfrak{g}_{ed} produce la solita trasformazione del quadripotenziale

$$\delta A_\mu = \{A_\mu, \mathfrak{g}_{\text{ed}}\} = \partial_\mu \epsilon, \quad \delta \Pi^\mu = \{\Pi^\mu, \mathfrak{g}_{\text{ed}}\} = 0, \quad (4.28)$$

che lascia immutato il tensore elettromagnetico; mentre per la carica di prova si trova

$$\delta x^i = \{x^i, \mathfrak{g}_{\text{ed}}\} = 0, \quad \delta p_i = \{p_i, \mathfrak{g}_{\text{ed}}\} = e \partial_i \epsilon(\cdot, x), \quad (4.29)$$

in accordo con la definizione del momento coniugato (4.16). Tramite il generatore di gauge \mathfrak{g}_{ed} si ritrova così tutta e sola la libertà di gauge lagrangiana.

Al contrario, usando i vincoli di prima classe spalmati con le solite ξ^1, ξ^2 indipendenti, si ha

$$\delta(\cdot) = \left\{ \cdot, \int (\xi^1 \phi_1 + \xi^2 \phi_2) \right\} = \left\{ \cdot, \int \left[\xi^1 \Pi^0 + \xi^2 \left(e \delta_x^3 + \sum \partial_i \Pi^i \right) \right] \right\}. \quad (4.30)$$

Le trasformazioni delle variabili canoniche che ne derivano sono

$$\delta A_\mu = \delta_\mu^0 \xi^1 - \delta_\mu^i \partial_i \xi^2, \quad \delta \Pi^\mu = 0, \quad \delta x^i = 0, \quad \delta p_i = -e \partial_i \xi^2(\cdot, x). \quad (4.31)$$

Come fatto nella sezione precedente la trasformazione del tensore elettromagnetico inteso come funzionale delle traiettorie di A_μ può essere riscritta nella forma

$$\delta F_{ij} = \xi^2_{,[ij]} = 0, \quad \delta F_{i0} = \partial_i(\xi^1 + \partial_0 \xi^2), \quad (4.32)$$

mentre si ricorda che $F_{\mu\nu}(t)$ scritto in termini di $A_\mu(t)$ e $\Pi^\mu(t)$ risulta invariante ad ogni t .

Inserendo quanto trovato nelle equazioni del moto hamiltoniane (4.21)–(4.23) si vede che esse sono rispettate dalle trasformazioni di gauge (4.28)–(4.29) indotte da \mathfrak{g}_{ed} . L'unica equazione per cui la verifica non è immediata è quella per \dot{p}_i , ma un facile calcolo mostra che ciò avviene:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{d}{dt}[p_i + e \partial_i \epsilon(\cdot, x)] = \dot{p}_i + e \partial_i \left[\partial_0 + \sum \dot{x}^j \partial_j \right] \epsilon(\cdot, x); \\ \text{RHS} &= e \partial_i (A_0(x) + \partial_0 \epsilon(\cdot, x)) + \frac{e}{m} \sum_j [p_j - e A_j(x)] \partial_i [A_j(x) + \partial_j \epsilon(\cdot, x)] \\ &= e \partial_i A_0(x) + \frac{e}{m} \sum_j [p_j - e A_j(x)] \partial_i A_j(x) + e \partial_i \left[\partial_0 + \sum \dot{x}^j \partial_j \right] \epsilon(\cdot, x). \end{aligned}$$

Viceversa, sostituendo le trasformazioni di gauge puntuali (4.31) nella stessa equazione si ha

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{d}{dt}[p_i - e \partial_i \xi^2(\cdot, x)] = \dot{p}_i - e \partial_i \left[\partial_0 + \sum \dot{x}^j \partial_j \right] \xi^2(\cdot, x); \\ \text{RHS} &= e \partial_i [A_0(x) + \xi^1(\cdot, x)] + \frac{e}{m} \sum_j [p_j - e A_j(x)] \partial_i [A_j(x) - \partial_j \xi^2(\cdot, x)] \\ &= e \partial_i A_0(x) + \frac{e}{m} \sum_j [p_j - e A_j(x)] \partial_i A_j(x) + e \partial_i \left[\xi^1 + \sum \dot{x}^j \partial_j \xi^2(\cdot, x) \right]. \end{aligned}$$

Dunque in generale essa è violata dalle trasformazioni di gauge puntuali, a meno che queste non soddisfino la (4.13). Lo stesso avviene per l'equazione del moto di A_i . Questo significa che, come preannunciato, usando le trasformazioni di gauge puntuali per trasformare una soluzione in generale si ottiene una traiettoria che non è più soluzione delle equazioni del moto. Ciononostante ci si aspetta che tutte le quantità esprimibili come funzioni di A_μ e Π^μ siano preservate. Questa verifica nel caso di \dot{x}^i e \dot{A}_μ è immediata, anche se ha poca rilevanza in quanto le equazioni del moto diventano per esse mere definizioni.

Ripetendo la sostituzione usando questa volta le equazioni di Eulero-Lagrange, la differenza di comportamento fra le due classi di trasformazioni diviene ancora più tangibile. Nelle (4.24)–(4.26) il quadripotenziale e le sue derivate compaiono solo in combinazioni che esprimono i campi elettrico e magnetico. Come mostrato in precedenza le trasformazioni di gauge (4.28)–(4.29) prodotte da \mathfrak{g}_{ed} lasciano immutato il campo elettromagnetico, preservano dunque tutte e tre le equazioni. Al contrario, si è visto che le trasformazioni di gauge puntuali (4.31)–(4.32) modificano il campo elettrico se questo viene espresso come funzionale delle traiettorie di A_μ .

La trasformazione del campo elettrico ha, come prevedibile, conseguenze catastrofiche:

- (i) la forza di Lorentz (4.24) viene modificata. Calcolando l'accelerazione della carica a partire dalla sua traiettoria¹ $t \mapsto x^i(t)$ essa risulta comportarsi come se risentisse di un campo elettrico fantasma $\partial_i(\xi^1 + \partial_0\xi^2)$, apparso a causa della trasformazione di gauge.
- (ii) La legge di Gauss (4.25) risulta violata. La divergenza del campo elettrico calcolato a partire dalla traiettoria trasformata di A_μ vale $\sum_j \partial_j^2(\xi^1 + \partial_0\xi^2)$.
- (iii) Nella legge di Ampère-Maxwell (4.26) compare una nuova corrente di spostamento.

L'analisi svolta conferma le predizioni del paragrafo §2.1D e mostra come le trasformazioni di gauge puntuali appaiano inopportune se usate per trasformare intere soluzioni. Esse fanno perdere alle "velocità" delle traiettorie nello spazio delle fasi l'abituale significato fisico. Di conseguenza la proiezione di tali traiettorie spazio delle configurazioni non rappresenta più una traiettoria fisicamente sensata. L'informazione contenuta nella traiettoria fisica è recuperata usando i momenti coniugati per *definire* le velocità, ma è evidente la confusione che un tale procedimento produce.

¹ Ossia non a partire da espressioni che inglobino i momenti coniugati

Bibliografia

- [1] L. Rosenfeld, “Zur quantelung der wellenfelder”, *Annalen der Physik* **397**, 113–152 (1930) [10.1002/andp.19303970107](#).
- [2] P. A. M. Dirac, “The lagrangian in quantum mechanics”, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion* **3**, 64–72 (1933).
- [3] R. P. Feynman, “Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics”, *Review of Modern Physics* **20**, 367–387 (1948) [10.1103/RevModPhys.20.367](#).
- [4] P. G. Bergmann, “Non-linear field theories”, *Physical Review (Series I)* **75**, 680–685 (1949) [10.1103/PhysRev.75.680](#).
- [5] P. A. M. Dirac, “Generalized hamiltonian dynamics”, *Canadian Journal of Mathematics* **2**, 129–148 (1950) [10.4153/CJM-1950-012-1](#).
- [6] J. L. Anderson e P. G. Bergmann, “Constraints in covariant field theories”, *Physical Review (Series I)* **83**, 1018–1025 (1951) [10.1103/PhysRev.83.1018](#).
- [7] R. P. Feynman, “An operator calculus having applications in quantum electrodynamics”, *Physical Review (Series I)* **84**, 108–128 (1951) [10.1103/PhysRev.84.108](#).
- [8] P. A. M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, Yeshiva University Press (1964).
- [9] L. Castellani, “Symmetries in constrained hamiltonian systems”, *Annals of Physics* **143**, 357–371 (1982) [10.1016/0003-4916\(82\)90031-8](#).
- [10] C. Batlle, J. Gomis, J. M. Pons e N. Roman-Roy, “Equivalence between the lagrangian and hamiltonian formalism for constrained systems”, *Journal of Mathematical Physics* **27**, 2953–2962 (1986) [10.1063/1.527274](#).
- [11] M. Bergvelt e E. D. Kerf, “The hamiltonian structure of Yang-Mills theories and instantons I”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **139** (1986) [10.1016/0378-4371\(86\)90007-5](#).
- [12] X. Gràcia e J. M. Pons, “Gauge generators, Dirac’s conjecture, and degrees of freedom for constrained systems”, *Annals of Physics* **187**, 355–368 (1988) [10.1016/0003-4916\(88\)90153-4](#).
- [13] A. Posilicano, “A lie group structure on the space of time-dependent vector fields”, *Monatshefte für Mathematik* **105**, 287–293 (1988) [10.1007/BF01318805](#).

- [14] C. Teitelboim e M. Henneaux, *Quantization of gauge systems* (Princeton University Press, 1992).
- [15] W. Greiner e J. Reinhardt, *Field quantization* (Springer Berlin Heidelberg, 1996) cap. 2, pp. 31–54, 10.1007/978-3-642-61485-9.
- [16] X. Gràcia e J. M. Pons, “Singular Lagrangians: some geometric structures along the Legendre map”, *Journal of Physics A Mathematical General* **34**, 3047–3070 (2001) 10.1088/0305-4470/34/14/311, arXiv:math-ph/0009038 [math-ph].
- [17] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics (Springer-Verlag, 2002), 10.1007/978-0-387-21752-9.
- [18] J. Earman, “Tracking down gauge: an ode to the constrained hamiltonian formalism”, in *Symmetries in physics: philosophical reflections*, a cura di K. Brading e E. Castellani (Cambridge University Press, 2003), pp. 140–62.
- [19] V. Barone, *Relatività. principi e applicazioni*, Programma di matematica e fisica (Bollati Boringhieri, 2004) cap. 10.
- [20] J. M. Pons, “On Dirac’s incomplete analysis of gauge transformations”, *Studies In History and Philosophy of Science Part B: Studies In History and Philosophy of Modern Physics* **B36**, 491–518 (2005) 10.1016/j.shpsb.2005.04.004, arXiv:physics/0409076 [physics].
- [21] H. Rothe e K. Rothe, *Classical and quantum dynamics of constrained hamiltonian systems*, World Scientific lecture notes in physics (World Scientific, 2010), 10.1142/9789814299657.
- [22] K. Lechner, *Elettrodinamica classica*, UNITEXT (Springer Milan, 2014), 10.1007/978-88-470-5211-6.
- [23] J. B. Pitts, “A first class constraint generates not a gauge transformation, but a bad physical change: the case of electromagnetism”, *Annals of Physics* **351**, 382–406 (2014) 10.1016/j.aop.2014.08.014, arXiv:1310.2756 [gr-qc].
- [24] Z. K. Silagadze, “Gauge transformations are canonical transformations, redux”, *ArXiv e-prints* (2014), arXiv:1409.0692 [physics.class-ph].
- [25] D. Salisbury e K. Sundermeyer, “Léon Rosenfeld’s general theory of constrained Hamiltonian dynamics”, *European Physical Journal H* **42**, 23–61 (2017) 10.1140/epjh/e2016-70042-7, arXiv:1606.06076.