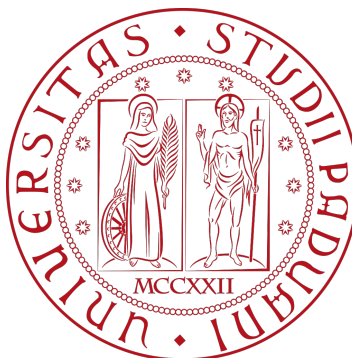


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

Corso di Laurea Triennale in Matematica



TESI DI LAUREA TRIENNALE

**DAL PROBLEMA DI
KAKEYA ALLA CONGETTURA DEL
MOLTIPLICATORE DEL DISCO**

Relatore:
Prof. Roberto Monti

Laureando:
Christian Gnes
Matricola 2110890

Anno Accademico 2025/2026

Indice

1	Riduzione del problema	7
1.1	Teorema di Interpolazione di Riesz-Thorin	7
1.2	Moltiplicatori di Fourier	10
1.3	Teorema di de Leeuw	11
2	Confutazione della congettura	15
2.1	La disuguaglianza fondamentale	15
2.2	Costruzione dell'insieme di Kakeya	17
2.3	La confutazione	20
3	Il Ponte	23
3.1	Il problema di Kakeya originale	23
3.2	Il futuro del problema	26

Sommario

In questa tesi di Laurea Triennale viene analizzato il problema di Kakeya in dimensione due e la sua profonda connessione con la congettura del moltiplicatore del disco. L'obiettivo centrale è illustrare lo stretto legame intrinseco tra i due problemi; in particolare, si mostra come la soluzione geometrica del problema di Kakeya permetta di confutare la congettura analitica del disco. Il lavoro è strutturato in tre parti. Nella prima sezione si esamina la riduzione della congettura del disco, mostrando come lo studio del problema in dimensione n possa essere ricondotto all'analisi bidimensionale. Nella seconda parte si procede alla confutazione effettiva della congettura attraverso la costruzione geometrica di un "insieme di Kakeya" di misura arbitrariamente piccola. Infine, l'opera si conclude mostrando come tale insieme risolva l'omonimo problema geometrico, evidenziando così una connessione tra due ambiti della matematica apparentemente distanti.

Introduzione

Il problema dell'ago di Kakeya è stato posto per la prima volta da Sōichi Kakeya nel 1917 e pone una domanda semplice, comprensibile anche da persone non familiari con la matematica, e all'apparenza anche fine a sé stessa, senza ulteriori applicazioni ad altre scienze o altri campi della matematica. La domanda che si pose Kakeya è la seguente: supponiamo di voler ruotare un segmento unitario (o un ago) di 180° e ci è permesso anche di traslarlo in modo continuo a nostro piacimento mentre compiamo la rotazione. L'ago dopo aver compiuto il movimento totale ha spazzato una certa area: qual è la minima area che può essere spazzata dall'ago con questo tipo di movimento? La superficie che viene spazzata viene chiamato *insieme di Kakeya*. Per esempio se si ruota un ago senza traslarlo questo spazza un cerchio, se il centro dell'ago lo si trasla lungo una certa circonferenza si può spazzare un deltoide, che ha area inferiore al cerchio. Kakeya credeva che il deltoide fosse la risposta al problema, tuttavia nel 1920 Besicovitch risolse un problema correlato che non richiede movimento continuo e nel 1928 dimostrò definitivamente che la misura degli insiemi di Kakeya non ha limite inferiore, ossia possono essere resi arbitrariamente piccoli e nel limite la loro area tende a zero. Se si desiderano maggiori dettagli storici si guardi la rassegna [Rut25], da cui ho anche preso molte informazioni appena esposte.

Il problema non fu di grande interesse per la comunità matematica in quegli anni, appariva come una semplice curiosità geometrica. Tuttavia nel 1971 Charles Fefferman pubblicò un articolo [Fef71] che fece emergere un ponte tra il problema dell'ago e un problema molto importante di analisi armonica, un campo della matematica che ha molte applicazioni in altre scienze ed ingegneria, ossia il problema del moltiplicatore del disco: ci si chiede se l'operatore T definito da $\widehat{Tf}(\xi) = \chi_B(\xi)\hat{f}(\xi)$, con B palla unitaria, è limitato. Se la risposta fosse sì per funzioni in $L^p(\mathbb{R}^n)$ allora potrebbe essere anche vero che $(\hat{f}\chi_{B_r}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} f$ aprendo la strada a nuove stime e approssimazioni, inoltre nella teoria dei segnali è l'equivalente di chiedersi se troncando le frequenze di una funzione in modo sferico produce distorsioni che non compromettono la ricostruzione della funzione originale. Se al posto della palla unitaria si usasse il cubo la congettura sarebbe vera, come si sapeva già da diversi anni, mentre con la palla è vera in modo ovvio per $p = 2$ grazie al teorema di Plancherel (o $n = 1$, perché in questo caso corrisponde al cubo). Quindi era logico pensare che fosse vera anche la congettura del moltiplicatore del disco, ma Fefferman dimostrò il contrario sfruttando una costruzione dell'insieme di Kakeya, instaurando così un ponte fra i due problemi, rendendoli così profondamente connessi.

In questa tesi esaminiamo in modo dettagliato come Feffermann confuta la congettura del moltiplicatore del disco, seguendo passo per passo il suo articolo [Fef71]. Ricostruiremo i passaggi ed i teoremi saltati e descriveremo la soluzione della congettura dell'ago di Kakeya originale mettendo in evidenza come i due problemi siano fondamentalmente intrecciati.

1 Riduzione del problema

1.1 Teorema di Interpolazione di Riesz-Thorin

Definiamo la trasformata di Fourier in questo modo:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$$

e $\check{f}$ come la sua inversa. Il primo passaggio che dobbiamo fare per confutare la congettura del disco è dimostrare il teorema di de Leeuw che permette di semplificare il problema ad uno più semplice in cui T ha come dominio funzioni in $L^p(\mathbb{R}^2)$ al posto di $L^p(\mathbb{R}^n)$. Si noti che il problema di Kakeya è stato posto proprio in dimensione 2. Per arrivare al risultato di de Leeuw è necessario il teorema di interpolazione di Riesz-Thorin. La tesi di laurea triennale di Oskar Nordenfons fornisce un percorso completo su come arrivare a dimostrarlo [Nor18]. Qui propongo i passaggi e le proposizioni principali necessarie a dimostrarlo e in generale lavoriamo su spazi di misura σ -finiti $(X, \mathcal{A}, \mu)$ anche se si può estendere a casi più generali.

TEOREMA 1.1.1 (Teorema delle tre linee di Hadamard). *Sia φ una funzione a valori complessi continua e limitata sulla striscia $0 \leq \Re(z) \leq 1$ e olomorfa all'interno della striscia. Siano $M_0, M_1 > 0$ tali che $|\varphi(z)| \leq M_0$ per $\Re(z) = 0$ e $|\varphi(z)| \leq M_1$ per $\Re(z) = 1$. Allora per $\Re(z) = t$ vale*

$$|\varphi(z)| \leq M_0^{1-t} M_1^t.$$

Dimostrazione. Definiamo per $\varepsilon > 0$ la funzione

$$\varphi_\varepsilon(z) = \varphi(z) M_0^{z-1} M_1^{-z} e^{\varepsilon z(z-1)}.$$

Per $y \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$|\varphi_\varepsilon(iy)| \leq M_0 M_0^{-1} |e^{\varepsilon iy(iy-1)}| = |e^{-\varepsilon y^2}| \leq 1$$

e

$$|\varphi_\varepsilon(1+iy)| \leq M_1 M_1^{-1} |e^{\varepsilon iy(iy+1)}| = |e^{-\varepsilon y^2}| \leq 1.$$

Inoltre esplicitando $z = x + iy$ si ha che $\lim_{y \rightarrow \infty} |\varphi_\varepsilon(x + iy)| = 0$. Allora possiamo scegliere un $A \in \mathbb{R}$ abbastanza grande tale che $|\varphi_\varepsilon(z)| \leq 1$ sul bordo del rettangolo definito da $0 \leq \Re(z) \leq 1$ e $-A \leq \Im(z) \leq A$. Il principio del modulo massimo afferma che qualsiasi funzione olomorfa su un aperto connesso limitato D il cui modulo ha un massimo locale (non necessariamente stretto) è una funzione costante su D . Questo garantisce o che la funzione è costante ≤ 1 in modulo per la presenza di un massimo per il suo modulo all'interno del rettangolo (essendo la funzione olomorfa all'interno e continua sul bordo) oppure che il suo massimo sta sul bordo del rettangolo, ma allora vale ancora che il modulo all'interno del rettangolo è ≤ 1 . Allora $|\varphi_\varepsilon(z)| \leq 1$ su tutta la striscia, basta prendere A abbastanza grande dato che la funzione tende a 0 per valori immaginari molto grandi. Allora per l'arbitrarietà di ε abbiamo che

$$|\varphi(x + iy)| M_0^{x-1} M_1^{-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |\varphi_\varepsilon(z)| \leq 1.$$

Riordinando questa disuguaglianza e usando t al posto di x abbiamo la tesi. $\square$

OSSERVAZIONE 1.1.2. Questo teorema può essere generalizzato utilizzando nelle ipotesi qualsiasi striscia verticale, è sufficiente applicare un'affinità.

D'ora in avanti useremo la seguente notazione. Sia $0 \leq \theta \leq 1$, definiamo p_θ , dopo aver fissato $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty$, tale che $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ e analogamente q_θ . Ricordiamo inoltre che per $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$ vale $\|f\|_{p_\theta} \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^\theta$ per qualsiasi θ .

PROPOSIZIONE 1.1.3. *Sia $f \in L^{p_\theta}$, allora f può essere espressa come $f = g + h$ dove $g \in L^{p_0}$ e $h \in L^{p_1}$.*

Dimostrazione. Siano $p_1 < \infty$ e $A = \{x \in X, |f(x)| > 1\}$. Allora scegliamo $g = f\chi_A$ e $h = f\chi_{A^c}$, dunque $f = g + h$. Notiamo che

$$|g(x)|^{p_0} = |f(x)|^{p_0}\chi_A \leq |f(x)|^{p_\theta}\chi_A \in L^1$$

perché $p_0 \leq p_\theta$ e $f(x) > 1$, e

$$|h(x)|^{p_1} = |f(x)|^{p_1}\chi_{A^c} \leq |f(x)|^{p_\theta}\chi_{A^c} \in L^1$$

perché $p_1 \geq p_\theta$ e $f(x) \leq 1$. Dunque come voluto $g \in L^{p_0}, h \in L^{p_1}$.

Sia ora $p_1 = \infty$, allora $\|h\|_\infty = \|f\chi_{A^c}\|_\infty \leq 1$ cioè $h \in L^\infty$. $\square$

OSSERVAZIONE 1.1.4. Da questa proposizione e per quanto ho ricordato prima possiamo riassumere i risultati in questo modo: $L^{p_0} \cap L^{p_1} \subseteq L^{p_\theta} \subseteq L^{p_0} + L^{p_1}$.

PROPOSIZIONE 1.1.5. *Lo spazio delle funzioni semplici integrabili è denso in L^p per $p < \infty$.*

Dimostrazione. Data una $f \in L^p$ esiste una successione di funzioni semplici integrabili $\{\varphi_k\}_k$ monotona crescente che tende puntualmente ad f . Se una funzione semplice è integrabile allora lo è per ogni p essendo una sommatoria finita. Dunque $|\varphi_k(x) - f(x)|^p \leq 2^p |f(x)|^p \in L^1, \forall k$ dato che $|\varphi_k(x)| \leq |f(x)|$. Allora si ha

$$\|\varphi_k - f\|_p^p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

per il teorema della convergenza dominata. $\square$

OSSERVAZIONE 1.1.6. Negli spazi di misura finita questa proposizione vale anche per $p = \infty$. Se non siamo in spazi di misura finita, posso considerare $f(x) = 1 \in L^\infty$ che è già una funzione semplice limitata, ma non è integrabile nel senso di Lebesgue.

Usando questi risultati siamo pronti a dimostrare il teorema principale.

TEOREMA 1.1.7 (Teorema di Interpolazione di Riesz-Thorin). *Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ spazi di misura σ -finiti. Siano $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$ e sia l'operatore $T : L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X) \rightarrow L^{q_0}(Y) + L^{q_1}(Y)$ lineare che mappa funzioni $L^{p_0}(X)$ in $L^{q_0}(Y)$ e funzioni $L^{p_1}(X)$ in $L^{q_1}(Y)$ in modo limitato cioè $\|Tf\|_{q_0} \leq \|T\|_{p_0, q_0} \|f\|_{p_0}$ e analogamente per p_1, q_1 . Allora $T : L^{p_\theta}(X) \rightarrow L^{q_\theta}(Y)$ è ben definito, limitato e soddisfa*

$$\|T\|_{p_\theta, q_\theta} \leq \|T\|_{p_0, q_0}^{1-\theta} \|T\|_{p_1, q_1}^\theta,$$

dove con la notazione $\|\cdot\|_{p_\theta, q_\theta}$ intendiamo la norma dell'operatore ristretto allo spazio $L^{p_\theta}(X)$ e che manda tali funzioni in $L^{q_\theta}(Y)$.

Dimostrazione. Se $p_0 = p_1$ allora $p_\theta = p_0 = p_1 = p$ e otteniamo

$$\|Tf\|_{q_\theta} \leq \|Tf\|_{q_0}^{1-\theta} \|Tf\|_{q_1}^\theta \leq \|T\|_{p_0, q_0}^{1-\theta} \|T\|_{p_1, q_1}^\theta \|f\|_{p_0} \|f\|_{p_1}$$

grazie al fatto che $Tf \in L^{q_0} \cap L^{q_1}$ ed abbiamo concluso. Se $\theta = 0$ o $\theta = 1$ il teorema è banale, quindi escludiamo questi casi.

Sia ora $p_0 < p_1$ e dunque $p_\theta \neq \infty$. Per ora dimostriamo la tesi per funzioni semplici integrabili, poi estendiamo il risultato per densità. Sia $f = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$ e $g = \sum_{k=1}^n b_k \chi_{B_k}$ funzioni semplici integrabili a valori complessi definite su X e Y rispettivamente. Allora abbiamo che $f \in L^r(X)$ e $g \in L^r(Y)$ per qualsiasi $r \in [1, \infty]$. Siccome stiamo lavorando su spazi di misura σ -finiti, possiamo normalizzare gli spazi in modo da avere $\|f\|_{p_\theta} = 1$ e $\|g\|_{q'_\theta} = 1$ e consideriamo $f, g \neq 0$ che è banale (dove con p' intendiamo l'esponente coniugato a p). Infatti basta prima supporre di lavorare su spazi di misura finita, riscalarli in modo appropriato, e poi usare questi per ricomporre gli spazi di misura σ -finiti. Riscriviamo i coefficienti in coordinate polari: $a_j = |a_j|e^{i\alpha_j}$ e $b_k = |b_k|e^{i\beta_k}$. Definiamo due nuove funzioni a variabile complessa:

$$u(z) = \frac{1-z}{p_0} + \frac{1}{p_1} \quad \text{e} \quad v(z) = \frac{1-z}{q_0} + \frac{1}{q_1}.$$

Si noti che per $z = \theta$ si ottiene $u(\theta) = \frac{1}{p_\theta}$ e $v(\theta) = \frac{1}{q_\theta}$. Adesso estendiamo le funzioni tramite l'inserimento di un parametro complesso z :

$$f_z = \sum_{j=1}^m |a_j|^{\frac{u(z)}{u(\theta)}} e^{i\alpha_j} \chi_{A_j} \quad \text{e} \quad g_z = \sum_{k=1}^n |b_k|^{\frac{1-v(z)}{1-v(\theta)}} e^{i\beta_k} \chi_{B_k}.$$

In questo modo $f_\theta = f$, $g_\theta = g$. Se $q_0 = q_1 = q_\theta = 1$ consideriamo $g_z = g$ e poi si faranno procedimenti simili con adattamenti minori.

Introduciamo ora la funzione

$$\Phi(z) = \int_Y T f_z(x) g_z(x) d\nu(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |a_j|^{\frac{u(z)}{u(\theta)}} |b_k|^{\frac{1-v(z)}{1-v(\theta)}} \gamma_{j,k},$$

dove $\gamma_{j,k} = e^{i(\alpha_j + \beta_k)} \int_Y T \chi_{A_j}(x) \chi_{B_k}(x) d\nu(x)$ sono costanti indipendenti da z . Allora $\Phi(z)$ è limitata sulla striscia $0 \leq \Re(z) \leq 1$ ed è intera. Il nostro obiettivo diventa usare il teorema delle tre linee di Hadamard sulla funzione $\Phi(z)$: sapendo che $\Phi(\theta + i0) = \int_Y T f(x) g(x) d\nu(x)$ per $\theta \in (0, 1)$ e applicando il modulo e il sup rispetto alle g (sapendo che $\|g\|_{q'_\theta} = 1$) otteniamo

$$\sup \left\{ \left| \int_Y T f(x) g(x) d\nu(x) \right|, g \text{ semplice integrabile} \right\} = \|Tf\|_{q_\theta} \leq \|T\|_{p_0, q_0}^{1-\theta} \|T\|_{p_1, q_1}^\theta.$$

Sapendo $\|f\|_{p_\theta} = 1$ è proprio quello che vogliamo dimostrare.

Verifichiamo le ipotesi del teorema di Hadamard: denominiamo $M_0 = \|T\|_{p_0, q_0}$, $M_1 = \|T\|_{p_1, q_1}$, queste due costanti devono dominare la funzione $\Phi(z)$ sui bordi della striscia $0 \leq \Re(z) \leq 1$. Facciamo dei conti:

$$u(iy) = \frac{1-iy}{p_0} + \frac{iy}{p_1} = \frac{1}{p_0} + iy \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} \right)$$

e calcoliamo

$$1 - v(iy) = 1 - \frac{1-iy}{q_0} - \frac{iy}{q_1} = \left(1 - \frac{1}{q_0} \right) - iy \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right).$$

Di conseguenza troviamo

$$|f_{iy}| = |f|^{\Re\left(\frac{u(iy)}{u(\theta)}\right)} = |f|^{\frac{p_\theta}{p_0}} \quad \text{e} \quad |g_{iy}| = |g|^{\Re\left(\frac{1-v(iy)}{1-v(\theta)}\right)} = |g|^{\frac{q'_\theta}{q'_0}}.$$

Utilizzando la disuguaglianza di Hölder e sfruttando l'ipotesi secondo cui T ristretta a L^{p_0} è limitata troviamo

$$|\Phi(iy)| \leq \|T f_{iy}\|_{q_0} \|g_{iy}\|_{q'_0} \leq \|T\|_{p_0, q_0} \|f_{iy}\|_{p_0} \|g_{iy}\|_{q'_0} = \|T\|_{p_0, q_0} \|f\|_{p_\theta}^{\frac{p_\theta}{p_0}} \|g\|_{q'_\theta}^{\frac{q'_\theta}{q'_0}} = \|T\|_{p_0, q_0}.$$

Ora facciamo gli stessi conti sul bordo destro della striscia:

$$u(1+iy) = \frac{1}{p_1} + iy \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} \right) \quad \text{e} \quad 1 - v(1+iy) = \left(1 - \frac{1}{q_1} \right) - iy \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right)$$

Di conseguenza otteniamo

$$|f_{1+iy}| = |f|^{\Re\left(\frac{u(1+iy)}{u(\theta)}\right)} = |f|^{\frac{p_\theta}{p_1}} \quad \text{e} \quad |g_{1+iy}| = |g|^{\Re\left(\frac{1-v(1+iy)}{1-v(\theta)}\right)} = |g|^{\frac{q'_\theta}{q'_1}}.$$

e utilizzando di nuovo Hölder con gli esponenti adatti abbiamo

$$|\Phi(1+iy)| \leq \|T f_{1+iy}\|_{q_1} \|g_{1+iy}\|_{q'_1} \leq \|T\|_{p_1, q_1} \|f_{1+iy}\|_{p_1} \|g_{1+iy}\|_{q'_1} = \|T\|_{p_1, q_1} \|f\|_{p_\theta}^{\frac{p_\theta}{p_1}} \|g\|_{q'_1}^{\frac{q'_\theta}{q'_1}} = \|T\|_{p_1, q_1}.$$

Ricordo che se $q_0 = q_1 = q_\theta = 1$ allora si impone $g_z = g$, si fanno gli stessi identici conti e si verifica ancora il Teorema 1.1.1 in modo del tutto analogo.

Abbiamo verificato le ipotesi del teorema delle tre linee di Hadamard e allora si trova la tesi come descritto prima. Manca da estendere il caso in cui $f \in L^{p_\theta}$, $1 \leq p_0 < p_\theta < p_1 \leq \infty$ (gli altri casi li abbiamo già visti all'inizio della dimostrazione). Sfruttiamo la densità delle funzioni semplici integrabili negli spazi L^p , $p \neq \infty$. Prendiamo una successione monotona di funzioni semplici integrabili f_n che tende a f in norma L^p , poi come abbiamo fatto nella Proposizione 1.1.3 decomponiamo $f = g + h$ e $f_n = g_n + h_n$, dove consideriamo $g_n, g \in L^{p_0}$ e $h_n, h \in L^{p_1}$. Ovviamente anche g_n, h_n tendono a g, h in norma L^{p_0} e L^{p_1} dato che anche g_n e h_n sono due successioni monotone limitate superiormente da g e h : si usa dunque la convergenza dominata. Se $p_1 = \infty$ è fondamentale che stiamo lavorando su spazi di misura σ -finiti: grazie a questo possiamo suddividere lo spazio e le funzioni, troncandole, in spazi di misura finita, e qui vale ancora la densità di funzioni semplici integrabili in L^∞ . Quindi abbiamo

$$\|Tg_n - Tg\|_{q_0} \leq \|T\|_{p_0, q_0} \|g_n - g\|_{p_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{e} \quad \|Th_n - Th\|_{q_1} \leq \|T\|_{p_1, q_1} \|h_n - h\|_{p_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ricordiamo che se una successione di funzioni converge in p -norma allora esiste una sottosuccessione che converge puntualmente quasi ovunque. Applichiamo questo e troviamo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Tg_{n_k}(x) = Tg(x) \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} Th_{n_k}(x) = Th(x)$$

quasi ovunque. Ma allora vale anche

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Tf_{n_k}(x) = Tf(x) \text{ quasi ovunque.}$$

Infine utilizzando il lemma di Fatou otteniamo

$$\|Tf\|_{q_\theta} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|Tf_{n_k}\|_{q_\theta} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|T\|_{p_0, q_0}^{1-\theta} \|T\|_{p_1, q_1}^\theta \|f_{n_k}\|_{p_\theta} = \|T\|_{p_0, q_0}^{1-\theta} \|T\|_{p_1, q_1}^\theta \|f\|_{p_\theta}.$$

OSSERVAZIONE 1.1.8. Una delle più importanti conseguenze di questo teorema è la cosiddetta disuguaglianza di Hausdorff-Young: sapendo che l'operatore trasformata di Fourier manda funzioni L^1 in L^∞ e L^2 in se stesso in modo limitato, stimando le norme operatoriali otteniamo che questo si può estendere in modo che mandi funzioni L^p a L^q con p, q coniugati, $p \in [1, 2]$ e vale $\|\hat{f}\|_q \leq \|f\|_p$. $\square$

1.2 Moltiplicatori di Fourier

DEFINIZIONE 1.2.1. Un *moltiplicatore di Fourier* è una funzione misurabile ed essenzialmente limitata $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $T_m : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ per un p fissato, l'operatore moltiplicatore definito da $\widehat{T_m f}(\xi) := m(\xi) \hat{f}(\xi)$, è limitato. Definiamo inoltre $|m|_p = \|T_m\|$ la norma di m come la norma operatoriale di T_m .

Da tale definizione si può ricavare la caratterizzazione che permette di dimostrare la tesi di de Leeuw. Questa viene dimostrata nell'articolo [dL65, Lemma 2.1]. Nello stesso articolo è data la definizione originale dei moltiplicatori di Fourier: $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ è un moltiplicatore di Fourier se $m \cdot \widehat{L^p(\mathbb{R}^n)} \subseteq \widehat{L^p(\mathbb{R}^n)}$, cioè se m moltiplicato per la trasformata di una funzione in $L^p(\mathbb{R}^n)$ è ancora una trasformata di una funzione $L^p(\mathbb{R}^n)$. Poi si dimostra che l'operatore associato è limitato.

Di seguito presenterò una dimostrazione alternativa della caratterizzazione dei moltiplicatori di Fourier.

PROPOSIZIONE 1.2.2 (Caratterizzazione dei moltiplicatori di Fourier). *La funzione $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ misurabile e limitata è moltiplicatore di Fourier su $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \neq 1, \infty$ se e solo se esiste un $C \geq 0$ tale che per ogni $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} m(x) \hat{f}(x) \hat{g}(-x) dx \right| \leq C \|f\|_p \|g\|_q,$$

dove p e q sono Hölder coniugati e la costante C migliore è $|m|_p$.

Dimostrazione. ($\implies$) Dimostriamo prima la seguente identità valida per $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(-x)dx.$$

Ciò deriva da Fubini-Tonelli:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{2\pi i\xi \cdot x} d\xi \right) g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)g(x)e^{2\pi i\xi \cdot x} d\xi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{2\pi i\xi \cdot x} dx \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-2\pi i(-\xi) \cdot x} dx \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\hat{g}(-\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Sfruttando questa uguaglianza e la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} m(x)\hat{f}(x)\hat{g}(-x)dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{T_m f}(x)\hat{g}(-x)dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} T_m f(x)g(x)dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |T_m f(x)||g(x)|dx \leq \|T_m f\|_p \|g\|_q \leq \|T_m\| \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Sostituendo $\|m\|_p = \|T_m\|$ si ottiene la tesi.

($\Leftarrow$) Dato che

$$\|f\|_p = \sup_{\substack{\|g\|_q \leq 1 \\ g \in L^q(\mathbb{R}^n)}} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \right| \right\}$$

allora si ha

$$\begin{aligned} \|T_m f\|_p &= \sup_{\substack{\|g\|_q \leq 1 \\ g \in L^q(\mathbb{R}^n)}} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} T_m f(x)g(x)dx \right| \right\} = \sup_{\substack{\|g\|_q \leq 1 \\ g \in L^q(\mathbb{R}^n)}} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{T_m f}(x)\hat{g}(-x)dx \right| \right\} \\ &\leq \sup_{\substack{\|g\|_q \leq 1 \\ g \in L^q(\mathbb{R}^n)}} \{ C\|f\|_p \|g\|_q \} = C\|f\|_p. \end{aligned}$$

Dunque T_m è limitata e di conseguenza m è un moltiplicatore di Fourier. Si noti che per ipotesi f e g sono in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, per estendere al caso generale in cui $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ sfruttiamo la densità. Dimostriamo che se un operatore è limitato su $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ allora lo è su tutto $L^p(\mathbb{R}^n)$: basta prendere $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione di funzioni in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tendente a f in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Dunque si ha

$$\|T_m f\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_m f_n\|_p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C\|f_n\|_p = C\|f\|_p.$$

Qui occorre l'ipotesi $p \neq 1, \infty$, dato che in caso contrario la densità delle funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ cadrebbe. $\square$

OSSERVAZIONE 1.2.3. L'implicazione ($\implies$) vale per qualsiasi p dato che non è necessario usare il teorema di densità.

1.3 Teorema di de Leeuw

Il teorema principale di questa sezione viene dimostrato nell'articolo di Jodeit [Jod71]. Prima di passare alla dimostrazione è necessario capire come sono effettivamente fatti gli operatori T_m nel caso $p = 1$ e una loro proprietà.

PROPOSIZIONE 1.3.1. *Sia $p = 1$. Sia m moltiplicatore di Fourier, allora m è la trasformata di Fourier di una funzione $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ che chiameremo nucleo, vale a dire $m = \hat{K}$. Inoltre $T_m f(x) = (f * K)(x)$ e $\|T_m\| = \|K\|_1$*

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione che $m = \hat{K}$ con $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$. L'esistenza di K non è ovvia; il fatto che $m = \hat{K}$ è una delle proprietà fondamentali dei moltiplicatori di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^n)$ come espresso all'inizio dell'articolo [dL65]. Per una dimostrazione rigorosa e più generale, si guardi il testo di Rudin [Rud62, Teorema 3.8.3]. Ora assumiamo che K esiste, dunque abbiamo:

$$\begin{aligned} T_m f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} K(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy \right) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(y) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot (x-y)} d\xi dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) K(y) dy = (f * K)(x). \end{aligned}$$

Si noti che alla terza uguaglianza si è usato Fubini-Tonelli, ciò è fattibile grazie al fatto che $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e supponendo che $\hat{f}$ è a decadimento rapido (per esempio se f è una funzione test). Il caso generale $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si trova usando una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni test che convergono ad f in norma L^1 per densità:

$$\|(f * K) - (f_n * K)\|_1 = \|(f - f_n) * K\|_1 \leq \|f_n - f\|_1 \|K\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dunque la norma della differenza delle convoluzioni tende a 0, quindi c'è sottosuccessione che converge puntualmente ossia $T_m f_{n_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_m f(x)$ e così definiamo l'estensione a tutto lo spazio.

Per trovare la norma operatoriale facciamo una doppia disuguaglianza:

$$\|T_m f\|_1 = \|f * K\|_1 \leq \|f\|_1 \|K\|_1$$

e si applica il $\sup_{\|f\|_1 \leq 1}$. Per la disuguaglianza opposta compiano una regolarizzazione tramite l'uso di una approssimazione all'identità $\chi_\varepsilon(x)$ che, ricordo, il suo integrale vale uno. Allora si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|K * \chi_\varepsilon - K\|_1 = 0 \implies \|K\|_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|K * \chi_\varepsilon\|_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|T_m \chi_\varepsilon\|_1 \leq \|T_m\|_1$$

e così abbiamo concluso. $\square$

TEOREMA 1.3.2 (Teorema di de Leeuw). *Sia $m(x, y)$ un moltiplicatore di Fourier per funzioni in $L^p(\mathbb{R}^{i+j})$ dove $(x, y) \in \mathbb{R}^{i+j}$ e $i + j = n$. Allora per q.o. x , $m_x(y) := m(x, y)$ è un moltiplicatore di Fourier per funzioni in $L^p(\mathbb{R}^i)$ e $|m_x|_p \leq |m|_p$. In particolare la restrizione è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}^i$ tale che (x, y) è punto di Lebesgue di m per q.o. $y \in \mathbb{R}^j$.*

Dimostrazione. Per dualità degli spazi $L^p(\mathbb{R}^n)$ basta dimostrare il teorema per $1 \leq p \leq 2$.

Se $p = 2$ abbiamo che m è moltiplicatore di Fourier se e solo se m è limitata, ciò segue dal teorema di Plancherel:

$$\|T_m f\|_2 = \|\widehat{T_m f}\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |m(x) \hat{f}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|m\|_\infty \|\hat{f}\|_2 = \|m\|_\infty \|f\|_2 < \infty.$$

La tesi segue dal fatto che se una funzione $m(x, y)$ è limitata lo è necessariamente la sua sezione $m_x(y)$ per quasi ogni x . Inoltre abbiamo anche scoperto che $\|m\|_\infty = |m|_2$.

Sia $p = 1$. Usando le proprietà stabilite alla proposizione precedente otteniamo, usando Fubini-Tonelli (K è integrabile):

$$m(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} K(\xi, \eta) e^{-2\pi i (\xi \cdot x + \eta \cdot y)} d\xi d\eta = \int_{\mathbb{R}^j} \left(\int_{\mathbb{R}^i} K(\xi, \eta) e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\xi \right) e^{-2\pi i \eta \cdot y} d\eta$$

e denoto l'integrale interno come $R_x(\eta)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^j} R_x(\eta) e^{-2\pi i \eta \cdot y} d\eta = m_x(y).$$

Allora abbiamo

$$|m_x|_1 = \|R_x\|_1 = \int_{\mathbb{R}^j} \left| \int_{\mathbb{R}^i} K(\xi, \eta) e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\xi \right| d\eta \leq \int_{\mathbb{R}^j} \int_{\mathbb{R}^i} |K(\xi, \eta)| d\eta d\xi = \|K\|_1 = |m|_1 < \infty,$$

per quasi ogni x .

Sia $1 < p < 2$ e supponiamo per ora m continua, questo permette di lavorare sulle sezioni di m senza che nessuna sezione m_x valga infinito perché se m è continua limitatezza e limitatezza essenziale corrispondono.

Sfruttiamo la caratterizzazione dei moltiplicatori di Fourier su m e abbiamo che per F, G funzioni test vale

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} m(x, y) \hat{F}(x, y) \hat{G}(-x, -y) dx \right| \leq C \|F\|_p \|G\|_q.$$

Adesso scegliamo $F(x, y) = f(x)\varphi(y)$, $G(x, y) = g(x)\psi(y)$ con $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^i)$, $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^j)$. Si osservi che grazie al fatto che possiamo separare le variabili vale $\|F\|_p = \|f\|_p \|\varphi\|_p$, $\hat{F} = \hat{f}\hat{\varphi}$ e analogo per $G(x, y)$. Allora usando Fubini-Tonelli (l'integranda ha integrale finito):

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} m(x, y) \hat{f}(x) \hat{\varphi}(y) \hat{g}(-x) \hat{\psi}(-y) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^i} \left(\int_{\mathbb{R}^j} m_x(y) \hat{\varphi}(y) \hat{\psi}(-y) dy \right) \hat{f}(x) \hat{g}(-x) dx \right| \\ &\leq \|m\|_p \|f\|_p \|\varphi\|_p \|g\|_q \|\psi\|_q = (\|m\|_p \|\varphi\|_p \|\psi\|_q) \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Sia $I(x)$ l'integrale interno, allora per la caratterizzazione si ha che questo è un moltiplicatore di Fourier e $|I|_p \leq \|m\|_p \|\varphi\|_p \|\psi\|_q$.

Osserviamo che per p, q coniugati si ha $\|m\|_p = \|m\|_q$ grazie al fatto che il duale di uno spazio L^p è isometrico allo spazio L^q . Allora usando il Teorema di Riesz-Thorin si ha $\|m\|_\infty = \|m\|_2 \leq \|m\|_p^{\frac{1}{2}} \|m\|_q^{\frac{1}{2}} = \|m\|_p$. Applicando ciò ad $I(x)$ troviamo $|I(x)| \leq \|I\|_\infty \leq \|I\|_p \leq \|m\|_p \|\varphi\|_p \|\psi\|_q$. Ma questa è la caratterizzazione dei moltiplicatori di Fourier per m_x se scriviamo $|I(x)|$ per intero. Di conseguenza vale anche $\|m_x\|_p \leq \|m\|_p$ come voluto.

Caso generale: regolarizziamo m . Sia $Q_\varepsilon = [\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]^n$ l'epsilon-cubo e sia $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \chi_{Q_\varepsilon}(x)$ un' approssimazione all'identità (quindi il suo integrale vale uno). Allora $m_\varepsilon = m * K_\varepsilon$ è una regolarizzazione e dunque ci si rifà al caso in cui m è continua appena vista: infatti $\|m_\varepsilon\|_p \leq \|m\|_p$ ed è moltiplicatore di Fourier. Verifichiamolo usando Fubini:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} m_\varepsilon(x) \hat{f}(x) \hat{g}(-x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} m(x-z) K_\varepsilon(z) dz \right) \hat{f}(x) \hat{g}(-x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} m(x-z) \hat{f}(x) \hat{g}(-x) dx \right) dz \right| \leq \|m\|_p \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Ricordo che $(f * K_\varepsilon)(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(x)$ per ogni x punto di Lebesgue. Dunque per (x, y) punto di Lebesgue e per quasi ogni y vale $(m_\varepsilon)_x(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} m_x(y)$. Concludo usando il teorema di convergenza dominata sapendo che m_ε è limitata e usando quello che abbiamo trovato nel caso continuo:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} m_x(y) \hat{f}(y) \hat{g}(-y) dy \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (m_\varepsilon)_x(y) \hat{f}(y) \hat{g}(-y) dy \right| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|(m_\varepsilon)_x\|_p \|f\|_p \|g\|_q = \|m_x\|_p \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

Possiamo concludere la sezione traendo le conclusioni: è sufficiente dimostrare che la congettura del moltiplicatore del disco è falsa in dimensione 2. Infatti, grazie all'ultimo teorema, se T operatore della congettura non è moltiplicatore di Fourier in dimensione due non può esserlo in qualsiasi dimensione superiore, cioè non è limitato. Inoltre per dualità degli spazi $L^p(\mathbb{R}^n)$ si può semplificare ulteriormente la dimostrazione poiché basta considerare il caso $p > 2$. Il caso $p = 2$ è l'unico in cui la congettura è vera grazie al fatto che la trasformata di Fourier è un'isometria per il teorema di Plancherel.

2 Confutazione della congettura

L'obiettivo di questa sezione è arrivare alla confutazione della congettura del moltiplicatore del disco. A questo scopo verranno dimostrati alcuni lemmi veri solo nel caso in cui assumiamo la congettura sia vera, il secondo dei quali ci fornirà una disuguaglianza che ci permetterà di arrivare ad un assurdo grazie alla costruzione di un insieme di Kakeya.

2.1 La disuguaglianza fondamentale

Per assurdo assumiamo che $\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$ dove T è l'operatore definito nella congettura del disco, $\widehat{Tf}(x) = \chi_B(x)\hat{f}(x)$ con B palla unitaria, con $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $p \neq 2$. Prima di dimostrare la disuguaglianza fondamentale ci serve un lemma dovuto a Zygmund [Zyg59, p. 224].

LEMMA 2.1.1. *Sia T un operatore lineare limitato su $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ cioè $\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$, $C \geq 0$. Allora se $f_1, \dots, f_N, \dots \in L^p(\mathbb{R}^n)$ vale la disuguaglianza*

$$\|(\sum_{j=1}^{\infty} |Tf_j(x)|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C\|(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p.$$

Dimostrazione. Per ora supponiamo di avere il caso più semplice dove abbiamo N funzioni reali $f_1, \dots, f_N$. Definisco $F(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)) \in \mathbb{R}^N$. Sia $u \in \mathbb{S}^{N-1}$ vettore della sfera unitaria immersa in $\mathbb{R}^N$. Sia

$$F_u(x) = \langle F(x), u \rangle = \sum_{j=1}^N f_j(x)u_j \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Ora usiamo la limitatezza di T :

$$\|TF_u\|_p \leq C\|F_u\|_p \iff \int_{\mathbb{R}^n} |\sum_{j=1}^N Tf_j(x)u_j|^p dx \leq C^p \int_{\mathbb{R}^n} |\sum_{j=1}^N f_j(x)u_j|^p dx.$$

Adesso integriamo entrambi i membri su $\mathbb{S}^{N-1}$ rispetto a u :

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\sum_{j=1}^N Tf_j(x)u_j|^p dx d\mathcal{H}^{N-1}(u) \leq C^p \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\sum_{j=1}^N f_j(x)u_j|^p dx d\mathcal{H}^{N-1}(u).$$

Usiamo Tonelli per scambiare l'ordine di integrazione e riscriviamo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\langle TF(x), u \rangle|^p d\mathcal{H}^{N-1}(u) dx \leq C^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\langle F(x), u \rangle|^p d\mathcal{H}^{N-1}(u) dx.$$

L'integranda è invariante per rotazioni: $|\langle F(x), u \rangle| = \|F(x)\| \|u\| |\cos(\alpha(F(x), u))|$. Ma $\|u\| = 1$, poniamo $v(x) = F(x)/\|F(x)\|$ e notiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\cos(\alpha(F(x), u))| d\mathcal{H}^{N-1}(u) &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\langle v(x), u \rangle| d\mathcal{H}^{N-1}(u) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\langle R(x)e, R(x)w \rangle| d\mathcal{H}^{N-1}(w) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\langle e, w \rangle| d\mathcal{H}^{N-1}(w) = M_N. \end{aligned}$$

Abbiamo sfruttato il fatto che $v(x) = R(x)e$ per un certo vettore unitario e arbitrario, con $R(x)$ matrice di rotazione, e poi abbiamo compiuto il cambio di variabili $w = R(x)u$. Dunque il valore dell'integrale dell'angolo α sulla sfera unitaria è indipendente da x e vale M_N . Allora riscrivendo la disuguaglianza iniziale e tirando fuori il valore dell'integrale interno otteniamo:

$$M_N^p \int_{\mathbb{R}^n} \|TF(x)\|^p dx \leq M_N^p C^p \int_{\mathbb{R}^n} \|F(x)\|^p dx,$$

cioè

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|TF(x)\|^p dx \leq C^p \int_{\mathbb{R}^n} \|F(x)\|^p dx,$$

e questa è esattamente la tesi.

Estendiamo al caso generale. Se le f_j sono a valori complessi si separa la parte reale dalla parte immaginaria e al posto di lavorare su N funzioni lavoriamo su $2N$ funzioni reali. Se abbiamo una successione infinita di funzioni si impone il limite per N tendente a infinito e si usa il teorema di convergenza monotona. $\square$

LEMMA 2.1.2. *Sia $v_1, v_2, \dots$ una successione di vettori unitari in $\mathbb{R}^2$ e siano H_j i semi piani $\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, v_j \rangle \geq 0\}$. Sia $T_1, T_2, \dots$ la successione di operatori su $L^p(\mathbb{R}^2)$ definiti da $\widehat{T_j f}(\xi) = \chi_{H_j}(\xi) \hat{f}(\xi)$. Allora esiste un $C \geq 0$ tale che per qualsiasi successione di funzioni $f_1, f_2, \dots$ in $L^p(\mathbb{R}^2)$ vale la seguente disuguaglianza:*

$$\|(\sum_j |T_j f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C \|(\sum_j |f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p. \quad (\text{A})$$

Dimostrazione. L'idea è rimpiazzare T_j con un operatore più correlato al disco. Definiamo T_j^r a partire da $\widehat{T_j^r f}(\xi) = \chi_{D_j^r}(\xi) \hat{f}(\xi)$, dove D_j^r è il disco di raggio r e centro rv_j . D_j^r assomiglia molto a H_j per raggi grandi, cosicché ci possiamo aspettare che $T_j f(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} T_j^r f(x)$. Infatti, per $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, si nota che

$$|\widehat{T_j f}(\xi) - \widehat{T_j^r f}(\xi)| = |\chi_{H_j}(\xi) - \chi_{D_j^r}(\xi)| |\hat{f}(\xi)| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Infatti, fissato ξ , per $r > |\xi - rv_j| > |\xi| - r|v_j| = |\xi| - r$ cioè per $r > |\xi|/2$, la differenza delle funzioni caratteristiche vale zero. Per passare al limite degli operatori non trasformati si usa la convergenza dominata. Poi si passa al caso di f generica nel solito modo tramite densità. Infine il lemma di Fatou mostra che

$$\|(\sum_j |T_j f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \|(\sum_j |T_j^r f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p.$$

Allora per dimostrare (A) basta dimostrare che

$$\|(\sum_j |T_j^r f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C \|(\sum_j |f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p. \quad (\text{A}')$$

Facendo un cambio di variabile $x \rightarrow \frac{x}{r}$ possiamo assumere $r = 1$. Inoltre vale $T_j^1 f(x) = e^{2\pi i v_j \cdot x} T(e^{-2\pi i v_j \cdot y} f(y))$, infatti basta fare un cambio di variabile $\xi \rightarrow \xi - v_j$ notando che così D_j^1 diventa B :

$$\begin{aligned} T_j^1 f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot x} \chi_{D_j^1}(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi \cdot y} f(y) dy \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (\xi + v_j) \cdot x} \chi_B(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (\xi + v_j) \cdot y} f(y) dy \right) d\xi \\ &= e^{2\pi i v_j \cdot x} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi \cdot y} e^{-2\pi i \xi \cdot v_j} f(y) dy \right) d\xi = e^{2\pi i v_j \cdot x} T(e^{-2\pi i v_j \cdot y} f(y)). \end{aligned}$$

Allora la parte sinistra di (A') diventa

$$\|(\sum_j |e^{2\pi i v_j \cdot x} T(e^{-2\pi i v_j \cdot y} f_j(y))|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p = \|(\sum_j |T(e^{-2\pi i v_j \cdot y} f_j(y))|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p, \quad (\text{B})$$

e il problema diventa dominare (B) con $C \|(\sum_j |f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p$. Ciò è vero grazie al Lemma di Zygmund e concludiamo con

$$\|(\sum_j |T(e^{-2\pi i v_j \cdot y} f_j(y))|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C \|(\sum_j |e^{-2\pi i v_j \cdot y} f_j(y)|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p = C \|(\sum_j |f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p.$$

$\square$

2.2 Costruzione dell'insieme di Kakeya

Il nostro obiettivo ora consiste nell'ottenere una contraddizione con la disuguaglianza (A): se è falsa allora non può essere vera l'ipotesi secondo cui T è limitato, concludendo così la nostra tesi. A questo scopo è necessario costruire una parte di un insieme di Kakeya, quello che costruiremo noi si basa su una variante (quella di Schönberg) della costruzione originale di Besicovitch del 1928: questa costruzione appare nell'articolo di Cunningham [Cun71], si può anche vedere come venne utilizzato in una versione più complicata del problema di Kakeya in cui si richiedeva che l'ago doveva essere mosso in uno spazio limitato.

LEMMA 2.2.1. *Sia $\eta > 0$, un numero piccolo fissato. Allora esiste un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ e una collezione $\mathcal{R} = \{R_j\}_j$ di rettangoli disgiunti a due a due con le seguenti proprietà:*

1. *Almeno un decimo (in realtà va bene qualsiasi numero positivo più piccolo) dell'area di ogni $\tilde{R}_j$ è incluso in E . Gli $\tilde{R}_j$ sono due rettangoli congruenti ed adiacenti ad un R_j , condividendo due lati opposti, come in figura.*
2. $\mathcal{L}^2(E) \leq \eta \sum_j \mathcal{L}^2(R_j)$.

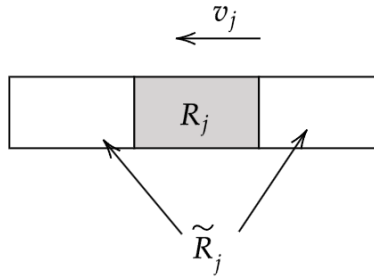


Figura 1: Struttura dei rettangoli costruiti nel lemma 2.2.1

Dimostrazione. Costruiremo l'insieme E tramite la costruzione iterativa di triangoli partendo da uno equilatero di altezza $h_0 = \sqrt{3}/2$ e base 1 (in realtà si può usare qualsiasi triangolo di partenza). Da questo triangolo iniziale, che chiamerò T_0 , costruisco un *germoglio*: fisso un'altezza $h_1 > h_0$, prolungo i lati obliqui ac e bc del triangolo fino a quando non raggiungono l'altezza h_1 , intersecandola in due punti a' e b' . Adesso partendo dal punto medio m della base, costruisco due linee ma' e mb' . Allora abbiamo ottenuto due triangoli $T_{1,1}$ e $T_{1,2}$ oltre ad un germoglio $G_{1,1}$. Ripeto questo procedimento sui triangoli $T_{1,1}$ e $T_{1,2}$ separatamente e poi itero N volte. Si usi la Figura 2 come riferimento. Quello che si ottiene viene chiamato *albero di Perron* dal nome del matematico che ha semplificato la costruzione originale di Besicovitch.

Allora l'insieme $E = \bigcup_{k=1}^{2^{N+1}} T_{N,k}$ è proprio l'insieme che cercavamo, più avanti vedremo che è anche la base di un insieme di Kakeya, inoltre si noti che possiamo riscrivere $E = T_0 \cup \bigcup_{k=1}^N \bigcup_{l=1}^{2^k} G_{k,l}$, così risulta unione disgiunta di insiemi e potremmo calcolarne l'area in modo più semplice. N e h_k possono essere aggiustati a nostro piacimento: imponiamo $h_k = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j} \sim \frac{\sqrt{3}}{2} \ln(k+1)$.

Adesso stimeremo l'area di E e vedremo che è finita per $N \rightarrow \infty$. Come visto prima, E è l'unione disgiunta del triangolo iniziale T_0 e dei germogli, dunque basta sommare delle stime per ognuna di queste aree, insieme alle spiegazioni che seguiranno, si faccia riferimento alla figura 3. Per stimare l'area di un germoglio $G_{k,l}$ (poi dai conti a venire stimeremo tutti i germogli al livello k con lo stesso valore) lo scomponiamo in quattro triangoli, due superiori T', T'' e due inferiori t', t'' . Hanno tutti base

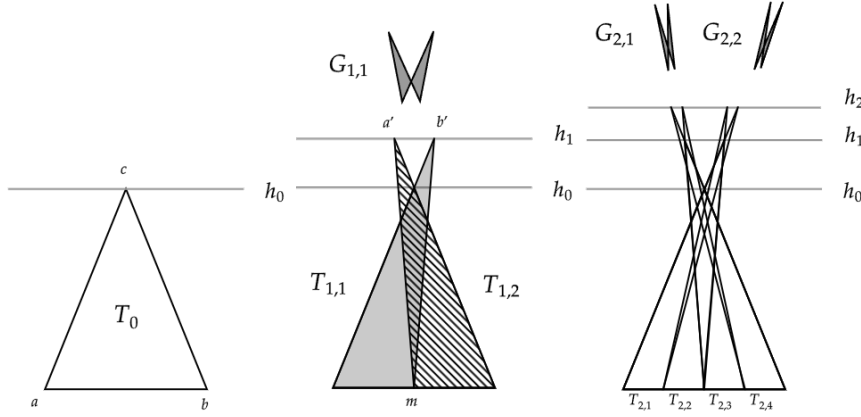


Figura 2: Due iterazioni per la costruzione dell'insieme E

b_k , quelli superiori hanno altezza $h_k - h_{k-1}$, che è maggiore dell'altezza dei triangoli inferiori come si intuisce dalla costruzione di E . b_k si trova per similitudine tra T' (o T'') e il triangolo $T_{k,j}$, per j corrispondente, di base $\sigma_k = 2^{-k}$. Dunque si ha $b_k = \frac{h_k - h_{k-1}}{h_k} \sigma_k \approx \frac{2^{-k}}{(k+1) \ln(k+1)}$. Allora

$$\mathcal{L}^2(T') = \mathcal{L}^2(T'') = \frac{1}{2} b_k (h_k - h_{k-1}) \approx \frac{2^{-(k+2)} \sqrt{3}}{(k+1)^2 \ln(k+1)}.$$

Allora sfruttando che un germoglio è formato dall'unione disgiunta di T', T'', t', t'' , $\mathcal{L}^2(T') \geq \mathcal{L}^2(t')$, $\mathcal{L}^2(T'') \geq \mathcal{L}^2(t'')$ e che $\mathcal{L}^2(T') = \mathcal{L}^2(T'')$ allora si ha

$$\mathcal{L}^2(G_{k,l}) \leq 4\mathcal{L}^2(T') \approx \frac{2^{-k} \sqrt{3}}{(k+1)^2 \ln(k+1)} \quad \forall l \in \{1, \dots, 2^k\}.$$

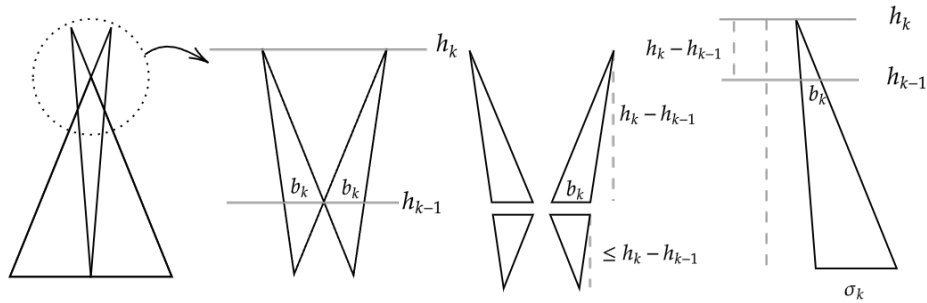


Figura 3: Scomposizione dei germogli e calcolo dell'area

Infine concludiamo il calcolo dell'area di E sommando l'area di tutti i germogli e T_0 , sapendo che all'altezza k ci sono esattamente 2^k germogli di area uguale:

$$\mathcal{L}^2(E) = \sum_{k=1}^N 2^k \mathcal{L}^2(G_{k,l}) + \mathcal{L}^2(T_0) \leq \sqrt{3} \sum_{k=1}^N \frac{1}{(k+1)^2 \ln(1+k)} + \frac{\sqrt{3}}{4} \leq \sqrt{3} \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4} \right),$$

dove in questi conti abbiamo stimato usando la serie di Basilea. Per alleggerire i passaggi successivi possiamo dire con certezza che $\mathcal{L}^2(E) \leq 5$.

Passiamo alla costruzione dei rettangoli R_j , per capirne la struttura si osservi la figura 4. Fissiamo un k con cui lavoreremo e osserviamo solo i triangoli $T_{k,j}$. Denotiamo con $I_j \subseteq [0, 1]$ l'intervallo diadico (ossia $I_j = [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}]$ di lunghezza 2^{-k}) su cui è costruito il triangolo $T_{k,j}$ e segniamo con P_j il vertice superiore. Prolunghiamo i lati obliqui e in modo parallelo al lato più esterno costruiamo il rettangolo R_j associato a I_j con un lato lungo h_k e l'altro in modo che tocchi l'altro prolungamento, di conseguenza avrà lunghezza simile a quella di I_j (ad essere precisi la misura del lato corto di R_j dipenderà dalla lunghezza di I_j in modo direttamente proporzionale e una costante moltiplicativa dipendente dall'angolo presente in P_j). Inoltre qualsiasi disposizione di R_j all'interno del triangolo $P_j A_j B_j$ soddisfa la tesi. Adesso definiamo $\mathcal{R} = \{R_j : I_j = [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}], j \in \{1, \dots, 2^k\}\}$.

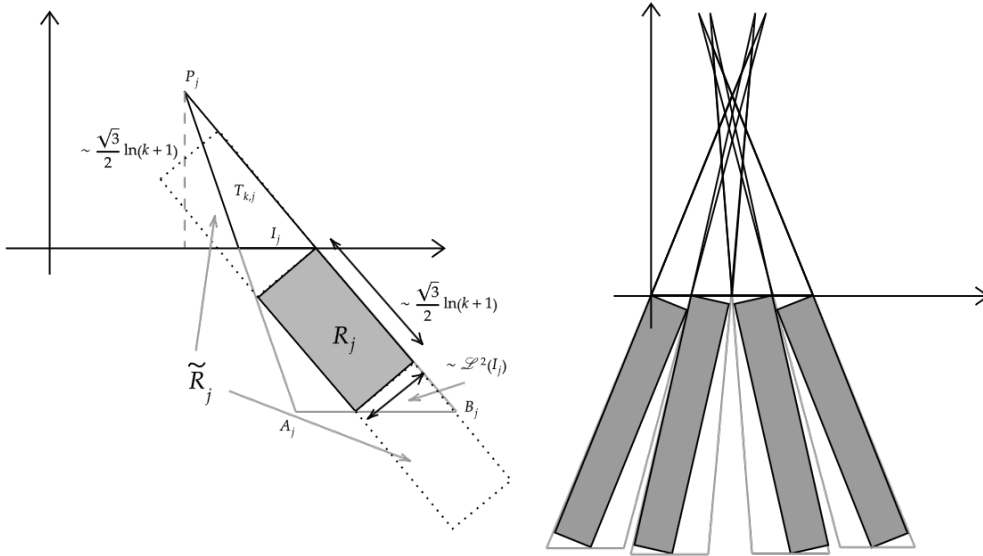


Figura 4: Costruzione dei rettangoli R_j e rappresentazione sull'insieme E con $k = 2$

Ora basta verificare la tesi: il punto (1) è ovvio dalla figura dato che $T_{k,j} \subseteq E$. Per il punto (2) fissiamo η , e vediamo che la somma delle aree dei rettangoli (che hanno tutti la stessa area e sono 2^k) vale

$$\sum_{j=1}^{2^k} \mathcal{L}^2(R_j) \approx 2^k \frac{\sqrt{3}}{2} \ln(k+1) 2^{-k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln(k+1).$$

Prima avevamo trovato che l'area di E era limitata da 5, per qualsiasi N , allora mi basta prendere k abbastanza grande tale che $\mathcal{L}^2(E) \leq 5 \leq \eta \frac{\sqrt{3}}{2} \ln(k+1)$.

Manca solo da dimostrare che i rettangoli sono disgiunti a due a due, a questo scopo basta mostrare che per ogni triangolo $T_{k,j}$ la parte del triangolo $P_j A_j B_j$ che giace sotto l'asse x (vale a dire $T_{k,j} \setminus P_j A_j B_j$) siano disgiunte a due a due per ogni j . Dalla figura 4 risulta evidente: segue dal fatto che se un certo I_j sta a sinistra di un I_h allora il vertice P_j sta a destra di P_h , di conseguenza il triangolo $P_j A_j B_j$ è più inclinato rispetto a $P_h A_h B_h$ e quindi al di sotto dell'asse x non si intersecano e tanto meno i rettangoli corrispondenti. Quindi basterà dimostrare il seguente fatto.

LEMMA 2.2.2. *Siano I e I' due intervalli diadici contenuti in $[0, 1]$, se I giace a sinistra di I' allora P sta a destra di P'*

Dimostrazione. Per ogni triangolo T definiamo $\tilde{T}$ come in figura 5.0 e facciamo tre ragionamenti che vengono visualizzati nella stessa figura. Per essere precisi si possono sempre usare argomenti che vanno a guardare come cambiano i coefficienti angolari (ossia l'inclinazione) delle semirette.

1. Se $I' \subseteq I$ allora $\tilde{T}' \subseteq \tilde{T}$: nel caso base in cui I' è una metà di I è ovvio dalla figura 5.1, il caso generale si ottiene allora per induzione.
2. Se I e I' sono due metà di un intervallo diadico e per esempio I sta a sinistra di I' , allora $\tilde{T}'$ sta a sinistra di $\tilde{T}$ e sono disgiunti (figura 5.2)
3. Il punto (2) si applica anche nel caso in cui I e I' sono intervalli diadici generici, basta sfruttare il punto (2) iterativamente, prendendo la metà opportuna di ogni intervallo, e il punto (1) per affermare che $\tilde{T}$ e $\tilde{T}'$ restano disgiunti essendo contenuti in insiemi generati da intervalli disgiunti.

La tesi segue dal punto (3) e dal fatto che $P \in \tilde{T}$ □

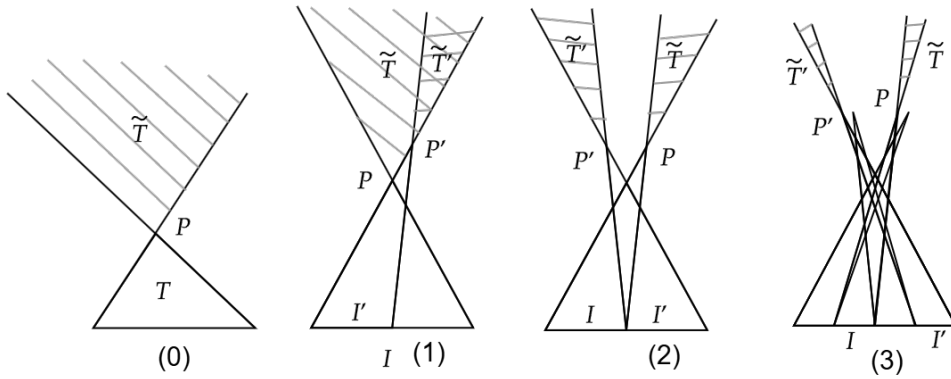


Figura 5: Visualizzazione della dimostrazione che i rettangoli sono disgiunti

Questo conclude la dimostrazione del lemma 2.2.1. dato che in rettangoli sono anche disgiunti. □

2.3 La confutazione

Possiamo finalmente tirare le conclusioni e confutare la congettura contraddicendo (A) impostando nel lemma $f_j = \chi_{R_j}$ e v_j vettori unitari paralleli ai lati lunghi degli R_j . Prima facciamo una stima mostrando $|T_j f_j(x)| \geq 1/10 \forall x \in \tilde{R}_j$ (al posto di un decimo va bene qualsiasi numero positivo). Supponiamo che R_j sia centrato nell'origine e sia $R_j = [-a, a] \times [-b, b]$ con $a > b > 0$, allora $v_j = (1, 0)$ e $H_j = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Di conseguenza $\tilde{R}_j = [-3a, -a] \times [-b, b] \cup [a, 3a] \times [-b, b]$. In questo modo semplifichiamo molto i conti e tutti i casi alternativi si ottengono per rotazione e traslazione. Nei seguenti conti sfrutterò la nota trasformata della funzione caratteristica su un rettangolo e le formule di Werner.

$$\begin{aligned}
T_j f_j(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i x \cdot \xi} \chi_{H_j}(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i \xi \cdot y} \chi_{R_j}(y) dy \right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} e^{2\pi i x \cdot \xi} \left(\int_{[-a, a] \times [-b, b]} e^{2\pi i \xi \cdot y} dy \right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} e^{2\pi i x \cdot \xi} \frac{\sin(2\pi \xi_1 a)}{\pi \xi_1} \frac{\sin(2\pi \xi_2 b)}{\pi \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x_2 \cdot \xi_2} \frac{\sin(2\pi \xi_2 b)}{\pi \xi_2} d\xi_2 \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{2\pi i x_1 \cdot \xi_1} \frac{\sin(2\pi \xi_1 a)}{\pi \xi_1} d\xi_1 \right) \\
&= \chi_{[-b, b]}(x_2) \left(\int_0^{+\infty} \cos(2\pi x_1 \xi_1) \frac{\sin(2\pi \xi_2 b)}{\pi \xi_2} d\xi_1 + i \int_0^{+\infty} \sin(2\pi x_1 \xi_1) \frac{\sin(2\pi \xi_2 b)}{\pi \xi_2} d\xi_1 \right).
\end{aligned}$$

Nomino $I(x_1)$ l'integrale rimanente da calcolare, ora usiamo le formule di Werner e troverò nella sua parte reale l'integrale di Dirichlet:

$$\Re(I(x_1)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi(a+x_1)\xi_1) + \sin(2\pi(a-x_1)\xi_1)}{\xi_1} d\xi_1 = \frac{1}{4} [\operatorname{sgn}(a+x_1) + \operatorname{sgn}(a-x_1)].$$

Questa vale 0 per $|x_1| > a$, $1/4$ se $|x_1| = a$ e $1/2$ altrimenti. Mentre nella parte immaginaria si ottiene un integrale di Frullani, il quale ha una formula risolutiva: si veda [AdR90].

$$\Im(I(x_1)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\pi(a-x_1)\xi_1) - \cos(2\pi(a+x_1)\xi_1)}{\xi_1} d\xi_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{a+x_1}{a-x_1} \right|.$$

A noi interessa il caso in cui $x \in \tilde{R}_j$ cioè $a < |x_1| < 3a$ e $-b < x_2 < b$. Allora applicando il modulo e considerando questo dominio per le x abbiamo

$$|T_j f_j(x)| = \chi_{[-b, b]}(x_2) \sqrt{\Re(I(x_1))^2 + \Im(I(x_1))^2} = \frac{1}{2\pi} \left| \ln \left| \frac{a+x_1}{a-x_1} \right| \right|.$$

Per $a < |x_1| < 3a$ questa funzione è decrescente e imponendo $x_1 = 3a$ ho e $|T_j f_j(3a, x_2)| = \frac{\ln(2)}{2\pi} \geq \frac{1}{10}$ e dunque anche su tutto $\tilde{R}_j$.

TEOREMA 2.3.1 (Soluzione della Congettura). *Sia T operatore definito come nella congettura del moltiplicatore del disco. T non è limitato.*

Dimostrazione. Sia E definito come nel lemma 2.2.1. e come fatto fino adesso supponiamo per assurdo $\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$ e prendiamo $f_j = \chi_{R_j}$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_E \left(\sum_j |T_j f_j(x)|^2 \right) dx &= \sum_j \int_E |T_j f_j(x)|^2 dx \geq \frac{1}{100} \sum_j \mathcal{L}^2(E \cap \tilde{R}_j) \\
&\geq \frac{1}{1000} \sum_j \mathcal{L}^2(\tilde{R}_j) = \frac{1}{500} \sum_j \mathcal{L}^2(R_j).
\end{aligned}$$

dove ho usato la stima trovata prima, il primo punto del lemma 2.2.1 e il fatto la misura di un $\tilde{R}_j$ è il doppio di un R_j . D'altra parte usando la disuguaglianza di Hölder con $\frac{p}{2}$ e il suo coniugato $\frac{p}{p-2}$, la disuguaglianza (A) e la proprietà (2) del lemma 2.2.1 troviamo:

$$\begin{aligned}
\int_E \left(\sum_j |T_j f_j(x)|^2 \right) dx &\leq \mathcal{L}^2(E)^{\frac{p-2}{p}} \left\| \left(\sum_j |T_j f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^2 \leq C \mathcal{L}^2(E)^{\frac{p-2}{p}} \left\| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^2 \\
&= C \mathcal{L}^2(E)^{\frac{p-2}{p}} \left(\sum_j \mathcal{L}^2(R_j) \right)^{\frac{2}{p}} \leq C \eta^{\frac{p-2}{p}} \sum_j \mathcal{L}^2(R_j).
\end{aligned}$$

Allora prendendo η abbastanza piccolo queste due disuguaglianze si contraddicono, concludendo che T non può essere limitata. $\square$

3 Il Ponte

Vediamo ora come l'insieme E costruito prima risolveva la congettura di Kakeya, trovando un insieme di misura arbitrariamente piccola che contiene un segmento di lunghezza uno in ogni direzione. Poi viene corretto in modo da permettere che questo segmento venga traslato in modo continuo, cioè senza necessità di dover compiere dei salti fra le varie direzioni.

3.1 Il problema di Kakeya originale

Facciamo prima delle osservazioni che ci permettono di capire come minimizzare l'area spazzata: il segmento non ha spessore, dunque se lo si muove in modo parallelo al suo orientamento non si spazza nessuna area. Invece se ruota l'ago attorno a un suo estremo esso spazza un settore circolare, l'unico parametro che influisce sull'area di questo settore è l'angolo di rotazione, inoltre se quest'angolo è molto piccolo il settore circolare è ben approssimabile con un triangolo. Mettendo insieme questi due movimenti si può spostare l'ago in due posizioni diverse e parallele facendo un movimento a "Z", chiamato *giunti di Pàl* (si guardi la figura 6). Si noti anche che più la traslazione è lunga minore è l'area dei settori circolari spazzati. Questo trucco ci sarà utile più avanti. Ultima osservazione: per ridurre l'area spazzata sfruttiamo che se l'ago passa di nuovo su una superficie su cui è già passata allora questa non viene conteggiata nuovamente, l'area spazzata rimane la stessa di prima, quindi il nostro obiettivo sarà cercare di ri-spazzare la stessa superficie il più possibile, in modo che l'area aumenti il meno possibile ogni volta che l'ago viene ruotato.

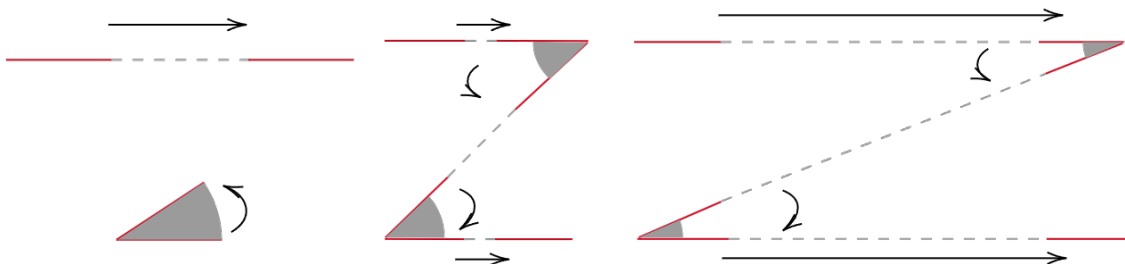


Figura 6: Visualizzazione dei giunti di Pàl, l'area in grigio è l'area spazzata (nella figura centrale e a destra sono rimpicciolite)

Adesso ritorniamo all'insieme E che ricordo è un albero di Perron, interpretiamolo in un modo alternativo. Al posto di pensare di costruire l'insieme E come un insieme che continua ad aumentare in altezza continuando a germogliare, costruiamo un albero di Perron leggermente diverso, come venne fatto da Schönberg: la soluzione al problema di Kakeya venne nel 1928 da parte di Besicovitch, nel 1929 fu migliorata la dimostrazione da Perron grazie ai suoi alberi, successivamente fu ancora leggermente modificata da Schönberg, noi appunto guarderemo questo. I dettagli e i conti si possono trovare in questo articolo [Bes63].

Per ora supponiamo di voler ruotare l'ago solo di 60° , dunque immaginiamo di posizionare l'ago (nella figura 7 appare in rosso) con un estremo in cima ad un triangolo equilatero di altezza 1 (proprio come siamo partiti per costruire l'insieme E , solo riscaldato) e di farlo ruotare usando quel vertice come pivot, allora l'ago spazza quasi tutta l'area di quel triangolo (in realtà spazza un settore circolare leggermente più piccolo, ma come vedremo in seguito non avrà importanza). Precedentemente avevo fatto notare come ripassare su un'area su cui si è già passato non aumenta l'area spazzata, allora sfruttiamo questo fatto scomponendo il triangolo equilatero in un numero di triangoli pari ad una potenza di due, come in figura 7, li sovrapponiamo a due a due, e ripetiamo il processo di sovrapposizione finché non otteniamo un albero di Perron unico. In questo modo abbiamo ottenuto un insieme di area molto più

piccola ma che contiene ancora tutte le orientazioni che aveva compiuto l'ago nel triangolo equilatero originale. Tuttavia, non è più possibile ruotare e traslare l'ago in quell'insieme in modo continuo, ora sistemiamo questo problema.

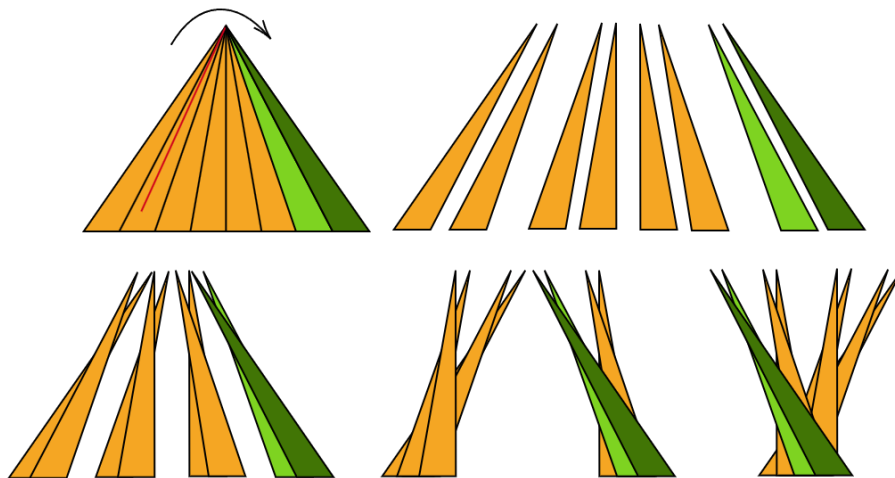


Figura 7: Costruzione dell'albero di Perron come fatto da Schönberg

Ora sfruttiamo questo albero per ruotarci l'ago al suo interno. Notiamo che i lati segnati in azzurro, come in realtà in ogni coppia di germogli, sono paralleli dato che originalmente era un lato che avevano in comune (questa proprietà è mancante nell'insieme E), dunque gli angoli presenti ai vertici superiori in totale formano ancora 60° e per passare da un vertice a quello che lo affianca basta compiere il trucco visto precedentemente, ossia i giunti di Pål. Dunque l'albero di Perron viene percorso in questo modo dall'ago (si guardi la figura 8): si parte dal vertice più a sinistra con un estremo dell'ago su di esso, lo si ruota usando il vertice come pivot fino ad aver spazzato quel triangolo (se ci sono molti triangoli, l'area spazzata tende a corrispondere al triangolo poiché l'angolo di rotazione diminuisce sempre di più e il settore circolare tende al triangolo). Poi si usa il trucco di Pål per passare da un vertice all'altro e, come già visto, più i giunti di Pål sono lunghi meno sarà l'area spazzata in questo movimento, facendola anche tendere a 0 se ammettiamo di avere spazio infinito in cui muoverci. Ora si itera questo processo per ogni triangolo.

Dopo aver percorso tutto l'albero l'ago è ruotato di 60° , dunque per farlo ruotare di 360° (o 180° come richiedeva il problema), basta aggiungere altri cinque alberi di Perron e fare in modo che l'ago passi da un albero all'altro usando ancora i giunti di Pål. L'insieme di Kakeya che si ottiene è circa il seguente se il triangolo equilatero iniziale lo si suddivide in otto triangoli (non tutti i movimenti di Pål sono visualizzati).

Manca solo una cosa: è possibile rendere questo insieme piccolo quanto si vuole aumentando il numero di suddivisioni del triangolo iniziale? La risposta è sì: l'area spazzata nei movimenti di Pål tende a zero aumentando le distanze percorse, dunque non pongono nessun problema, rimane da studiare l'albero di Perron (che adesso chiamiamo A) ma avendo già visto che l'insieme E ha area limitata nonostante continui ad aumentare in altezza germogliando sempre di più allora la soluzione è semplice. Possiamo costruire A in un modo analogo di germogliamento esattamente come abbiamo fatto con E , è sufficiente ridefinire come germoglia, al posto di usare la suddivisione del triangolo equilatero. Si vede con conti identici che anche A ha area limitata per i germogli che aumentano ad infinito. Allora supponiamo di avere l'ago lungo quanto l'altezza di A che ricordo era h_N se facciamo germogliare il triangolo di partenza N volte, e h_N tende a infinito per $N \rightarrow \infty$. Allora A può essere ancora utilizzato per muovere l'ago esattamente come abbiamo fatto con l'albero di Perron, solo in scala più grande. Adesso facciamo un riscaldamento: dilatiamo lo spazio in modo che h_N diventi 1 (e così anche l'ago),

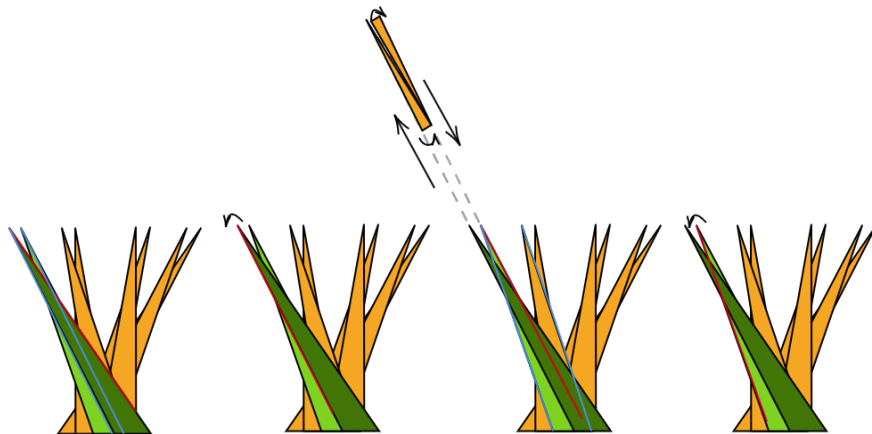


Figura 8: Visualizzazione dei lati paralleli in blu e del movimento dell'ago in rosso. In alto vi sono due settori circolari spazzati dal movimento di Pàl

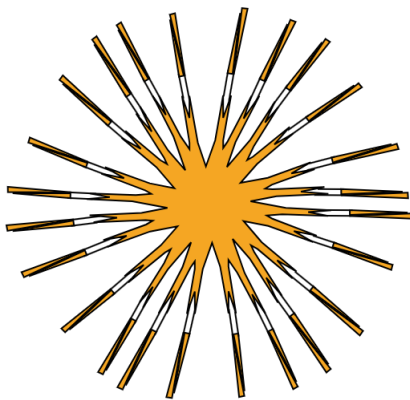


Figura 9: Insieme di Kakeya con una suddivisione del triangolo equilatero in 8 parti

ma così anche tutto l'area di A viene rimpicciolita: se per $h_N \rightarrow \infty$ l'area di A era limitata, allora compiendo questa dilatazione possiamo far tendere la sua area a zero (infatti un'area varia in modo lineare rispetto alla dilatazione degli assi). In altre parole, se vogliamo trovare un insieme di Kakeya come A di area ε basta prendere N sufficientemente grande e creare un albero di Perron con 2^N triangoli in cui suddividiamo il triangolo iniziale.

Da un punto di vista intuitivo, se suddividiamo il triangolo equilatero in molti triangoli e svolgiamo il processo di sovrapposizione, i triangoli si sovrappongono sempre di più, rappresentando così una minore area spazzata dall'ago. Inoltre si sovrappongono alla base, ma questa diminuisce sempre di più poiché dipende da quanto piccoli sono i triangoli (cioè in quanti ne suddividiamo). Quindi il “centro di massa” dell'insieme di Kakeya, dove ci sono più sovrapposizioni, si rimpicciolisce sempre di più, e ci sono sovrapposizioni anche verso i vertici, più si va verso di essi meno i germogli si sovrappongono, ma allo stesso tempo l'area dei germogli tende a zero più in alto sono.

Notiamo una cosa per concludere: questo insieme non è semplicemente connesso, l'articolo di Cunningham [Cun71] citato precedentemente propone un insieme di Kakeya semplicemente connesso, racchiuso in un cerchio di diametro $2 + \varepsilon$ e che comunque la sua area non ha limite inferiore maggiore di zero. Quello che abbiamo costruito noi è possibilmente il più facile che si poteva fare ma non ha

proprietà topologiche significative. Se si è curiosi, il più piccolo insieme di Keakeya convesso che si possa costruire è il triangolo equilatero.

3.2 Il futuro del problema

Il problema di Keakeya nacque come uno degli infiniti problemi di matematica che una persona si può porre per pura curiosità, senza assolutamente nessuna prospettiva: potrebbe essere molto semplice oppure molto difficile, e soprattutto non sembrava potesse portare a nessun tipo di grande scoperta matematica. Eppure, come ho provato ad evidenziare nella mia tesi, nascondeva un collegamento nascosto con la teoria dei moltiplicatori di Fourier: siccome si può costruire un insieme di Keakeya di misura arbitrariamente piccola allora la congettura del moltiplicatore del disco è falsa, cioè la soluzione di una congettura implica l'altra, questo è il ponte che si è venuto a creare.

In seguito alla pubblicazione dell'articolo rivoluzionario di Fefferman la congettura di Keakeya divenne uno dei più importanti problemi aperti correlati all'analisi armonica. Infatti col tempo venne riformulato in modo da poter essere interpretato in qualsiasi dimensione: *Si definisce insieme di Keakeya un insieme che contiene un segmento unitario in ogni direzione. Allora un insieme di Keakeya in $\mathbb{R}^n$ ha dimensione di Hausdorff esattamente n .* In altre parole un insieme di Keakeya di misura nulla (nel caso in dimensione 2 visto da noi, si fa tendere $N \rightarrow \infty$ e si ottiene un frattale) è uno dei più grandi insiemi di misura nulla che si possa costruire all'interno di $\mathbb{R}^n$. Per studiare questi insiemi al posto di usare segmenti si ricorre a "tubi" ossia cilindri di raggio δ e lunghezza 1, poi si cerca di capirne le configurazioni possibili, quanto si intersecano e molte altre proprietà che in dimensione due non hanno significato perché banalmente due rette si intersecano sempre

Si è costruita una catena di congetture nel campo dell'analisi armonica, una più forte dell'altra. Se fosse falsa una delle congetture, allora devono essere false tutte le congetture successive. Alla base di queste vi sta esattamente la congettura di Keakeya in dimensione n : se questa cade, allora tutte le congetture di questa catena falliscono. Fra queste all'inizio della catena abbiamo il problema della restrizione: è possibile restringere la trasformata di una funzione (che a priori è definita quasi ovunque) in L^p in modo naturale ad una sfera (domanda legittima, dato che la sfera ha misura nulla)? Proprio come nel problema del moltiplicatore del disco, il fatto che la sfera abbia curvatura influenza il risultato (ricordiamo che la congettura del disco è falsa, ma se sostituiamo il disco con un cubo allora è vera). Più avanti nella catena si trova la congettura di Bochner-Riesz: siccome la congettura del disco è falsa ci chiediamo se possiamo rafforzare le ipotesi, quindi al posto di prendere una funzione caratteristica sul disco si considera una funzione di troncamento liscia (cioè C^∞), appunto l'operatore di Bochner-Riesz. Alla fine della catena vi è la congettura della regolarizzazione locale (local smoothing conjecture), forse la più importante per la fisica: immaginiamo di avere molte onde che viaggiano nel tempo. Facendo una foto possono esserci momenti e punti in cui vi è forte interferenza costruttiva e quindi grande energia concentrata, però la nostra intuizione ci dice che facendo la media su tutti i tempi non si dovrebbero ottenere picchi di energia perché nella maggior parte dei casi le onde stanno disperse, la congettura quindi ci chiede se la nostra intuizione ha ragione e le onde in matematica hanno un comportamento simile a quello che ci aspettiamo nella realtà. Possiamo reinterpretarlo anche nella meccanica quantistica: i pacchetti d'onda hanno domini rettangolari per il principio di indeterminazione di Heisenberg (possiamo immaginare un asse del dominio come lo spazio e l'altro come le frequenze, che è legata alla quantità di moto), ma i rettangoli ricordano molto i tubi di Keakeya mostrando che c'è una forte correlazione.

Si può quindi dire che la congettura di Keakeya ha un ruolo fondamentale nel comprendere meglio una varietà di comportamenti delle onde e della trasformata di Fourier, aprendo anche la strada ad applicazioni nella teoria dei segnali e nella fisica moderna. I progressi per risolvere la congettura sembrano anche che continuano ad arrivare abbastanza velocemente tanto che a febbraio 2025 è stato dimostrato essere vero il caso in dimensione tre grazie agli sforzi di Hong Wang e Joshua Zahl, resi possibili solo grazie a tutte le precedenti scoperte nel campo da parte di Thomas Wolff, Terence Tao, Larry Guth, Jean Bourgain e molti altri. Adesso si sta studiando il caso in dimensione quattro,

che pone sfide ancora più significative data la presenza di più configurazioni spaziali per i tubi, ma nonostante questo si crede che la congettura sia ancora vera almeno se sottoposta a qualche ulteriore ipotesi. Questo problema è un enorme sforzo collettivo che mostra come nella matematica moderna è fondamentale la collaborazione di matematici specializzati nei campi più disparati per ottenere spesso i risultati più sorprendenti.

Riferimenti bibliografici

- [AdR90] Juan Arias de Reyna. On the theorem of Frullani. *American Mathematical Society*, 109, No.1:pp. 165–175, 1990.
- [Bes63] Abram Besicovitch. The Kakeya problem. *Mathematical Association of America*, 70, No.7:pp. 697–706, 1963.
- [Cun71] F. Cunningham, Jr. The kakeya problem for simply connected and star-shaped sets. *American Mathematical Monthly*, 78, No.2:pp. 114–129, 1971.
- [dL65] Karel de Leeuw. On L^p multipliers. *Annals of Mathematics*, 81, No.2:364–379, 1965.
- [Fef71] Charles Fefferman. The multiplier problem for the ball. *Annals of Mathematics*, 94, No.2:pp. 330–336, 1971.
- [Jod71] Max Jodeit, Jr. A note on fourier multipliers. *American Mathematical Society*, 27, No.2:pp. 423–424, 1971.
- [Nor18] Oskar Nordenfons. The Riesz-Thorin interpolation theorem. Bachelor’s degree, Umeå University, 2018.
- [Rud62] Walter Rudin. *Fourier Analysis on Groups*. Wiley Interscience, 1962.
- [Rut25] Alex Rutar. The Kakeya conjecture in three dimensions. 2025.
- [Zyg59] Antoni Zygmund. *Trigonometric Series*, volume 2. Cambridge University Press, 1959.