

TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA
DELL'AUTOMAZIONE

ALGORITMI PER LA RIDUZIONE DEL MODELLO

RELATORE: PROF. ING. ETTORE FORNASINI

LAUREANDO: ANNA POLIDORO

8 OTTOBRE 2013

ANNO ACCADEMICO 2012-2013

Finito di scrivere il giorno 7 ottobre 2013 utilizzando L^AT_EX 2_ε

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

—
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

—
TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA
DELL'AUTOMAZIONE

ALGORITMI PER LA RIDUZIONE DEL MODELLO

RELATORE: PROF. ING. ETTORE FORNASINI

LAUREANDO: ANNA POLIDORO

ANNO ACCADEMICO 2012-2013

Indice

1	Sistemi continui	1
1.1	Rappresentazione dei sistemi e loro proprietà	1
1.1.1	Controllabilità e osservabilità	2
1.2	Norme e spazi	6
1.2.1	Norme di vettori e matrici	6
1.2.2	Spazi normati	7
1.2.3	Spazi di Hilbert	9
1.2.4	Spazi di Hardy H_2 e H_∞	11
1.3	Sistemi passatutto	14
2	Riduzione ottima del modello nel continuo	17
2.0.1	Operatore di Hankel	17
2.1	Valori singolari di Hankel e decomposizione di Schmidt	18
2.1.1	Norma di Hankel	20
2.2	Algoritmo nel caso subottimo	23
2.2.1	All-pass embedding	23
2.2.2	Calcolo di una soluzione nel caso subottimo	28
2.2.3	Calcolo delle soluzioni nel caso subottimo	29
2.3	Algoritmo nel caso ottimo	32
2.3.1	All-pass embedding nel caso ottimo	32
2.3.2	Calcolo di una soluzione nel caso ottimo	37
2.3.3	Calcolo dell'insieme delle soluzioni nel caso ottimo	38
2.3.4	Teorema di Nehari	42
2.4	Errore in \mathcal{L}_∞	43

2.4.1	Valori singolari di Hankel di sistemi con errore ottimale . .	43
2.4.2	Limite dell'errore	45
3	Riduzione ottima di modelli a tempo discreto	49
3.1	Segnali e sistemi nel discreto	49
3.2	Impostazione del problema	51
3.3	Calcolo della soluzione ottima	55
3.4	Calcolo delle soluzioni ottime	66
3.5	Norma \mathcal{L}_∞ dell'errore di approssimazione	71
	Bibliografia	75

Sommario

Un modello di ordine elevato può rappresentare in linea di principio un sistema dinamico con elevata precisione, tuttavia può comportare gravi problemi di calcolo. Al fine di ottenere un ragionevole compromesso tra accuratezza e complessità computazionale, si cerca, quando possibile, di diminuire tale ordine utilizzando opportuni algoritmi di riduzione. In questa trattazione si analizzerà nel dettaglio il problema di riduzione ottima del modello mediante norma di Hankel, studiando la sua risoluzione dapprima nel continuo e successivamente nel discreto.

Introduzione

Il problema della riduzione del modello costituisce da sempre una tematica di notevole interesse nel settore dell'ingegneria del controllo. Tuttavia, mentre fino a qualche decennio fa, tale approssimazione si basava su intuizioni di carattere prettamente fisico, recentemente invece il suo studio si basa su tecniche automatizzate che sono ancor oggi oggetto di ricerca. In letteratura esistono vari algoritmi finalizzati alla risoluzione del problema. Nel caso ad esempio della riduzione di tipo bilanciato il criterio di eliminazione degli stati è di tipo strutturale, ovvero vengono scartati quei modi che risultano essere difficilmente raggiungibili e osservabili. Al fine di individuare cosa sia effettivamente trascurabile, tale tecnica opera una scalatura, ovvero una sorta di adimensionalizzazione del sistema, che permette di apprezzare le grandezze in termini relativi e non assoluti (bilanciamento).

La tecnica risolutiva analizzata in questa tesi si basa sulla minimizzazione della norma dell'errore che si commette quando la matrice di trasferimento del sistema viene approssimata con un'altra avente grado di McMillan inferiore. Detto in termini più rigorosi: data una $\mathbf{W}(s)$ con grado di McMillan n e fissato un intero positivo $r < n$, l'algoritmo di riduzione ottima del modello tramite norma di Hankel consiste nel trovare una matrice di trasferimento $\hat{\mathbf{W}}$ avente grado di McMillan r che minimizzi $\left\| \mathbf{W}(s) - \hat{\mathbf{W}}(s) \right\|_H$ e quindi che differisca il meno possibile (in norma di Hankel) dalla matrice di trasferimento originaria.

Per risolvere il problema si utilizza dunque la norma di Hankel, ovvero la norma indotta associata all'operatore di Hankel $\Gamma_{\mathbf{w}}$. Quest'ultimo è un operatore di tipo predittivo che ha la proprietà di mappare segnali di ingresso nulli per tempi positivi nelle corrispondenti successioni di uscita ristrette ai soli tempi positivi. Le proprietà della norma di maggiore interesse ai fini dell'algoritmo sono

essenzialmente tre:

- nell'ipotesi che la realizzazione di $\mathbf{W}(s)$ sia minima, i valori singolari di Hankel si ottengono a partire dalla conoscenza degli autovalori del sistema e dei gramiani di controllabilità \mathcal{W} e di osservabilità \mathcal{V}
- la norma di Hankel risulta essere limitata superiormente dalla norma infinito e dunque si ha che $\|\mathbf{W}\|_H \leq \|\mathbf{W}\|_\infty = \|\mathbf{W} - \mathbf{J}\|_\infty$ per ogni funzione di trasferimento di tipo anticausale $\mathbf{J}(s)$. Infatti, nel caso di sistemi anticausali $(\mathbf{J}u)(t)$ è nulla per $t > 0$ e dunque l'uscita di $\mathbf{W}(s)$ non viene in alcun modo influenzata
- il limite inferiore dell'errore di approssimazione in norma di Hankel è costituito dall' $r + 1$ -esimo valore singolare di Hankel, $\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}\| \geq \sigma_{r+1}$

L'algoritmo risolutivo si basa su un procedimento di all-pass embedding dell'errore, motivato dal seguente fatto: si suppone di poter determinare una $\hat{\mathbf{W}}(s)$ approssimante ed una funzione anticausale $\mathbf{J}(s)$ tali che il sistema $\gamma^{-1}(\mathbf{W}(s) - \hat{\mathbf{W}}(s) - \mathbf{J}(s))$ sia di tipo passatutto e dove γ rappresenta uno scalare. Il fatto che $\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J}\|_\infty = \gamma$ comporta, in base alle disuguaglianze riportate in precedenza, che $\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}\|_H \leq \|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J}\|_\infty = \gamma$ da cui $\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}\|_H \leq \gamma$.

La soluzione del problema, ovvero la determinazione delle migliori funzioni approssimanti $\hat{\mathbf{W}}$ in norma di Hankel, viene fornita ponendosi in due diverse situazioni:

1. si considera $\sigma_r > \gamma > \sigma_{r+1}$ ottenendo $\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}\| < \gamma \rightarrow$ *caso subottimo*
2. si considera $\gamma = \sigma_{r+1}$ ottenendo $\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}\| \leq \sigma_{r+1} \rightarrow$ *caso ottimo*

Nel caso subottimo con $\gamma \neq \sigma_i$, $i = 0, \dots, n$ si costruisce un sistema aumentato $\mathbf{W}_a(s)$ e si determina la realizzazione di $\mathbf{P}_a(s)$ imponendo che la funzione di trasferimento dell'errore $\Delta_a(s) = \mathbf{W}_a(s) - \mathbf{P}_a(s)$ sia di tipo passatutto, ovvero $\tilde{\Delta}_a \Delta_a = \gamma^2 I$. La $\mathbf{P}_a(s)$ così ottenuta, priva di poli sull'asse immaginario e dotata esattamente di r poli nel semipiano sinistro, viene utilizzata per il calcolo delle funzioni di trasferimento approssimanti subottime di $\hat{\mathbf{W}}(s)$. Una soluzione

$\hat{\mathbf{W}}(s)$ si calcola semplicemente selezionando una qualunque parte stabile della sottomatrice $\mathbf{P}_{a11}(s) \in \mathcal{RL}_\infty$, dove con il termine stabile si intende una qualsiasi matrice $\hat{\mathbf{W}}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ tale che $\mathbf{P}_{a11}(s) - \hat{\mathbf{W}}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-$ risulti essere anticausale. L'insieme di tutte le possibili soluzioni $\hat{\mathbf{W}}(s)$ si ottiene, invece, selezionando la parte stabile delle matrici $\mathbf{R}(s)$ prodotte da una trasformazione lineare fratta del tipo $\mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}_a, \mathbf{U})$ in cui il parametro $\mathbf{U}(s)$ deve soddisfare il vincolo $\|\mathbf{U}\|_\infty < \gamma^{-1}$.

Nel caso ottimo con $\gamma = \sigma_{r+1}$, è necessario rivedere la costruzione del sistema aumentato le cui dimensioni sono inferiori rispetto a quelle ottenute nella situazione precedente. Si ha inoltre che la matrice di trasferimento $\mathbf{P}_a(s)$ non risulta più essere quadrata. Nonostante ciò la mappa lineare fratta fornisce ancora tutte le matrici di trasferimento $\mathbf{R}(s)$ dalle quali è possibile ottenere la $\hat{\mathbf{W}}(s)$ cercata selezionandone una qualsiasi parte stabile.

A completamento dell'algoritmo, ci si chiede se alla minimizzazione dell'errore secondo la norma di Hankel corrisponda una buona approssimazione in norma infinito. In questo caso l'errore che si commette approssimando $\mathbf{W}(s)$ con $\hat{\mathbf{W}}(s)$ avente grado di McMillan pari ad r , non supera la somma dei valori singolari di Hankel di $\mathbf{W}(s)$ che risultano essere strettamente più piccoli di σ_r .

Per quanto riguarda l'algoritmo nel discreto, esso segue esattamente lo stesso procedimento di all-pass embedding dell'errore utilizzato nella soluzione a tempo continuo.

Capitolo 1

Sistemi continui

In questo capitolo introduttivo si fanno alcuni richiami riguardo alle proprietà strutturali dei sistemi soffermandosi in particolare sui concetti di controllabilità, osservabilità e stabilità. Si introduce inoltre il concetto di norma vettoriale per poi analizzare le caratteristiche dei principali spazi normati di cui verrà fatto uso nel corso della trattazione.

1.1 Rappresentazione dei sistemi e loro proprietà

I sistemi invarianti descritti da equazioni differenziali lineari possono essere rappresentati tramite le seguenti equazioni in spazio di stato:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \quad (1.1.1)$$

$$y(t) = Hx(t) + Du(t) \quad (1.1.2)$$

dove $u(t) \in \mathbb{R}^m$ è il vettore degli ingressi, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ è il vettore di stato e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ è il vettore delle uscite. Inoltre si suppone che le matrici F , G , H , D siano reali di dimensioni rispettivamente $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$, $p \times m$.

Nell'ipotesi che l'ingresso $u(\cdot)$, definito sull'intervallo $[0, +\infty)$, sia trasformabile secondo Laplace

$$\mathcal{L}(u(t)) = U(s)$$

all'equazione differenziale 1.1.1, corrisponde l'equazione algebrica

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

dove con $X(s)$ si fa riferimento alla trasformata del vettore $x(t)$ sull'intervallo $[0, +\infty)$. Se $Y(s)$ rappresenta la trasformata dell'uscita $y(t)$, alla 1.1.2 si associa

$$Y(s) = HX(s) + DU(s)$$

Si può così ricavare l'espressione

$$X(s) = (sI - F)^{-1}x_0 + (sI - F)^{-1}GU(s) \quad (1.1.3)$$

Analogamente per l'uscita si ottiene

$$Y(s) = H(sI - F)^{-1}x_0 + [H(sI - F)^{-1}G + D]U(s) \quad (1.1.4)$$

dove il primo addendo costituisce l'uscita in evoluzione libera, mentre il secondo quella in evoluzione forzata. La matrice $p \times m$

$$\mathbf{W}(s) = H(sI - F)^{-1}G + D \quad (1.1.5)$$

rappresenta la matrice di trasferimento del sistema.

1.1.1 Controllabilità e osservabilità

Definizione 1.1. Il sistema o la coppia (F, G) è controllabile se per ogni coppia di stati (x_0, x_f) esiste un ingresso $u(t)$ in grado di portare il sistema dal valore iniziale x_0 al valore finale x_f .

Teorema 1.1.1. [1]

I seguenti fatti sono equivalenti

i) la coppia (F, G) è controllabile

ii) la matrice

$$\mathcal{W}_C(t) := \int_0^t e^{F\sigma}GG^T e^{F^T\sigma} d\sigma \quad (1.1.6)$$

è definita positivo per ogni $t > 0$

iii) la matrice di raggiungibilità

$$R = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ovvero $\text{rank}(R) = n$

iv) la matrice

$$\begin{bmatrix} F - \lambda_i I & G \end{bmatrix}$$

ha rango di riga pieno per ogni λ_i di F

Definizione 1.2. Un sistema si dice stabile se tutti gli autovalori della matrice di stato F si trovano nel semipiano aperto sinistro, i.e., $Re(\lambda_i(F)) < 0$ dove λ_i rappresentano gli autovalori di F .

Teorema 1.1.2. [1] I seguenti fatti si equivalgono

i) la coppia (F, G) è stabilizzabile

ii) la matrice $\begin{bmatrix} F - \lambda_i I & G \end{bmatrix}$ ha rango di riga pieno per tutti gli autovalori λ_i tali che $Re(\lambda_i) \geq 0$

iii) esiste una matrice di retroazione K tale che $F + GK$ è stabile

Definizione 1.3. Il sistema o la coppia (F, H) è osservabile se per ogni $t_1 > 0$, lo stato iniziale $x(0) = x_0$ può essere determinato dalla storia passata di dell'ingresso $u(t)$ e dell'uscita $y(t)$ nell'intervallo $[0, t_1]$.

Teorema 1.1.3. [1] I seguenti fatti sono equivalenti

i) la coppia (F, H) è osservabile

ii) la matrice

$$\mathcal{V}_t := \int_0^t e^{F^T \sigma} H^T H e^{F \sigma} d\sigma \quad (1.1.7)$$

è definita positiva per ogni $t > 0$

iii) la matrice di osservabilità

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

ha rango di colonna pieno, i.e., $rank(O) = n$

iv) la matrice

$$\begin{bmatrix} F - \lambda_i I \\ H \end{bmatrix}$$

ha rango di colonna pieno per ogni autovalore λ_i di F

Definizione 1.4. Il sistema o la coppia (F, H) si dice rivelabile se esiste una matrice L tale che $F + LH$ è stabile.

Teorema 1.1.4. [1] I seguenti fatti si equivalgono

i) la coppia (F, H) è rivelabile

ii) la matrice

$$\begin{bmatrix} F - \lambda_i \\ H \end{bmatrix}$$

ha rango di colonna pieno per ogni autovalore $\lambda_i : \operatorname{Re}(\lambda_i) \geq 0$

iii) esiste una matrice L tale che $F + LH$ sia stabile

Equazioni di Lyapunov

Spesso risulta più semplice testare la stabilità, l'osservabilità e la stabilità di un sistema in modo indiretto, ovvero sfruttando le equazioni di Lyapunov.

Lemma 1.1.5. [1] Sia data l'equazione di Lyapunov

$$F^T X + X F + Q = 0 \quad (1.1.8)$$

nell'ipotesi che la matrice di stato del sistema F sia stabile, valgono i seguenti fatti:

i) $X = \int_0^\infty e^{F^T t} Q e^{F t} dt$

ii) si ha che $X > 0$ se $Q > 0$ e $X \geq 0$ se $Q \geq 0$

iii) se $Q \geq 0$, allora la coppia (Q, F) risulta essere osservabile se e solo se $X > 0$

Dalla proposizione (iii) discende che, data una matrice F stabile, una coppia (F, H) è osservabile se e solo se la soluzione associata all'equazione di Lyapunov

$$F^T \mathcal{W} + \mathcal{W}F + H^T H = 0 \quad (1.1.9)$$

è definita positiva. Tale soluzione prende il nome di gramiano di osservabilità. In modo analogo, la coppia (F, G) è controllabile se e solo se la soluzione dell'equazione di Lyapunov

$$F\mathcal{V} + \mathcal{V}F^T + GG^T = 0 \quad (1.1.10)$$

è definita positiva. Tale soluzione viene detta gramiano di controllabilità.

Lemma 1.1.6. *Si ipotizzi che X sia la soluzione dell'equazione di Lyapunov, allora*

- i) $Re(\lambda_i)(F) \leq 0$ se $X > 0$ e $Q \geq 0$
- ii) F è stabile se $X > 0$ e $Q > 0$
- iii) F è stabile se $X \geq 0$, $Q \geq 0$ e la coppia (F, Q) risulta essere rivelabile

Dimostrazione.

□

Realizzazione in spazio di stato per matrici di trasferimento

Si ipotizzi che la matrice di trasferimento $\mathbf{W}(s)$ sia propria, una sua realizzazione è data dalla quadrupla matriciale (F, G, H, D) tale che

$$\mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} F & G \\ H & D \end{bmatrix}$$

Definizione 1.5. Una realizzazione in spazio di stato $\Sigma = (F, G, H, D)$ di $\mathbf{W}(s)$ si dice minima se per ogni altra realizzazione $\Sigma' = (F', G', H', D')$ si verifica che

$$\dim(\Sigma) \leq \dim(\Sigma')$$

Teorema 1.1.7. *Una realizzazione è minima se e solo se la coppia (F, G) è controllabile e la coppia (F, H) è osservabile*

Il grado di McMillan di una matrice di trasferimento coincide con la dimensione di una realizzazione minima di $G(s)$

1.2 Norme e spazi

1.2.1 Norme di vettori e matrici

Dato uno spazio vettoriale X , si definisce norma su X e la si indica con $\|\cdot\|$, una funzione a valori reali che soddisfa le seguenti proprietà:

- i) $\|x\| \geq 0$
- ii) $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$
- iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, per ogni scalare α
- iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

per ogni $x, y \in X$.

Si consideri $x \in \mathbb{C}^n$. La norma p si definisce come

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \text{ con } 1 \leq p \leq \infty$$

Nei casi particolari in cui $p = 1, 2, \infty$ si ha

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \\ \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \end{aligned}$$

La norma rappresenta dunque un'astrazione e un'estensione del concetto di lunghezza tridimensionale nello spazio euclideo. Analogamente, nel caso si tratti di matrici, si possono introdurre le seguenti norme.

Sia $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$, allora la norma indotta da un vettore in norma p si definisce come

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

Nei casi particolari in cui $p = 1, 2, \infty$ le corrispondenti norme matriciali indotte sono

$$\begin{aligned}\|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{somma di colonna}) \\ \|A\|_2 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} \\ \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{somma di riga})\end{aligned}$$

Le norme matriciali indotte da un vettore in norma p vengono anche dette norme p indotte. Dal momento che la matrice A può essere vista come una mappa dallo spazio vettoriale \mathbb{C}^n dotato di norma $\|\cdot\|_p$ nello spazio vettoriale \mathbb{C}^m anch'esso dotato di norma p , le norme indotte possono essere interpretate come amplificazioni dei guadagni ingresso-uscita.

Un altro tipo di norma matriciale molto utilizzata è la *norma di Frobenius* che si definisce come

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{Traccia}(A^*A)}$$

Si noti che essa non rappresenta una norma indotta.

1.2.2 Spazi normati

Sia V uno spazio vettoriale in \mathbb{C} (o in \mathbb{R}) e sia $\|\cdot\|$ la norma definita su V . Allora V è uno spazio normato.

Una successione di vettori $\{x_n\}$ appartenente ad uno spazio normato V è detta di *Cauchy* se $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$. Essa inoltre si dice convergente a $x \in V$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. Uno spazio normato è detto *completo* se ogni successione di Cauchy in V risulta essere convergente in V . Uno spazio normato completo prende il nome di *spazio di Banach*.

A seguire alcuni esempi di spazi di Banach:

- $l_p[0, \infty)$ con $1 \leq p < \infty$:

Per ogni $1 \leq p < \infty$, lo spazio $l_p[0, \infty)$ è formato da tutte le successioni di vettori $x = (x_0, x_1, \dots)$ tali che $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p < \infty$. La norma associata si

definisce come

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

- $l_{\infty} [0, \infty)$:

lo spazio $l_{\infty} [0, \infty)$ è formato da tutte le successioni di vettori limitate e la norma associata è data da

$$\|x\|_{\infty} = \sup_i |x_i|$$

- $\mathcal{L}_p(I)$ con $1 \leq p \leq \infty$:

Per ogni $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{L}_p(I)$ è formato da tutte le funzioni misurabili di Lebesgue $x(t)$ definite sull'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ tali che

$$\|x\|_p = \left(\int_I |x(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty, \text{ con } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|x(t)\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} |x(t)|$$

Alcuni di questi spazi, ad esempio $\mathcal{L}_2(-\infty, 0]$, $\mathcal{L}_2[0, 0)$, $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$, verranno descritti più approfonditamente in seguito.

Si noti che se ogni componente o ogni funzione rappresenta essa stessa un vettore o una matrice, allora si può ricavare lo spazio di Banach corrispondente sostituendo al valore assoluto di ogni componente o funzione la sua norma. Ad esempio, si consideri uno spazio vettoriale con tutte le sequenze nella seguente forma

$$x = (x_0, x_1, \dots)$$

dove ciascuna componente x_i rappresenta una matrice di dimensioni $k \times m$ i cui elementi sono tutti limitati. Allora x_i risulta essere limitato in qualunque norma matriciale e lo spazio vettoriale diventa uno spazio di Banach se viene definita la seguente norma:

$$\|x\|_{\infty} = \sup_i \phi_i(x_i)$$

in cui $\phi_i(x_i) = \|x_i\|$ rappresenta una qualunque norma matriciale. Quest'ultimo spazio viene dunque denotato con l_{∞} .

Siano V_1, V_2 due spazi vettoriali e sia T un operatore da $S \subset V_1$ in V_2 . Tale operatore si dice lineare se per ogni coppia di vettori $x_1, x_2 \in S$ e per ogni coppia di scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vale la seguente relazione:

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha(Tx_1) + \beta(Tx_2)$$

Definizione 1.6. Due spazi normati V_1, V_2 si dicono linearmente isometrici ($V_1 \cong V_2$) se esiste un operatore lineare di V_1 su V_2 tale che

$$\|Tx\| = \|x\|$$

per ogni $x \in V_1$. In questo caso la mappa T prende il nome di isomorfismo isometrico

1.2.3 Spazi di Hilbert

Il prodotto interno fra vettori definiti su uno spazio euclideo in \mathbb{C}^n è dato da:

$$\langle x, y \rangle = y^* x = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad \forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Si considera ora l'estensione del prodotto interno su \mathbb{C}^n ad uno spazio vettoriale.

Definizione 1.7. Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{C} . Un prodotto interno su V a valori in \mathbb{C} ,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

tale che

- $\langle \alpha y + \beta z, x \rangle = \alpha \langle y, x \rangle + \beta \langle z, x \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\langle x, x \rangle > 0$ se $x \neq 0$

Due vettori x, y appartenenti ad uno spazio dotato di prodotto interno sono ortogonali, $x \perp y$, se il loro prodotto interno è nullo, ovvero se $\langle x, y \rangle = 0$

Uno spazio di Hilbert costituisce uno spazio completo avente norma indotta dal suo prodotto interno. Lo spazio di Hilbert è anche uno spazio di Banach.

Seguono alcuni esempi di spazi di Hilbert:

- $l_2(-\infty, \infty)$:

lo spazio $l_2(-\infty, \infty)$ è formato da tutte le successioni di vettori reali o complessi a quadrato sommabili

$$x = (\dots x_{-1}, 0, x_1 \dots)$$

i.e.

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$$

dove il prodotto interno è definito nel seguente modo

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \bar{y}_i$$

con $x, y \in l_2(-\infty, \infty)$. I sottospazi $l_2(-\infty, 0)$, $l_2[0, \infty)$ di $l_2(-\infty, \infty)$ vengono definiti in modo simile e sono rispettivamente $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1})$ e $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$.

- $\mathcal{L}_2(I)$ con $I \subset \mathbb{R}$:

lo spazio $\mathcal{L}_2(I)$ è formato da tutte le funzioni quadrato integrabili secondo Lebesgue definite sull'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e aventi prodotto interno definito nel seguente modo

$$\langle f, g \rangle = \int_I g(t)^* f(t) dt$$

con $f, g \in \mathcal{L}_2(I)$. Analogamente, se la funzione risulta essere a valori vettoriali o matriciali, il prodotto viene definito come

$$\langle f, g \rangle = \int_I \text{Traccia}[g(t)^* f(t)] dt$$

Alcuni spazi molto utilizzati sono $\mathcal{L}_2[0, \infty)$, $\mathcal{L}_2(-\infty, 0]$, $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$. Più precisamente:

- $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$:

spazio di Hilbert costituito da funzioni a valori matriciali in \mathbb{R} con prodotto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traccia} [g(t)^* f(t)] dt$$

$\mathcal{L}_{2+} = \mathcal{L}_2[0, \infty)$: sottospazio di $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ le cui funzioni sono nulle per $t < 0$

$\mathcal{L}_{2-} = \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$: sottospazio di $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ le cui funzioni sono nulle per $t > 0$

Siano $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ due spazi di Hilbert e si consideri $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ovvero lo spazio degli operatori lineari compatti da \mathcal{H}_1 in \mathcal{H}_2 . Ogni operatore $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ammette *decomposizione di Schmidt*, ovvero esistono delle basi di vettori ortonormali $\{v_i\}, \{w_i\}$ di \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 ed una successione di numeri complessi $\{\alpha_i\}$ con $\alpha_i \rightarrow 0$, tali che

$$Tu = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle u, v_i \rangle w_i \quad (1.2.11)$$

1.2.4 Spazi di Hardy H_2 e H_∞

Sia $S \subset \mathbb{C}$ un insieme aperto e sia $f(s)$ una funzione a valori complessi definita su S :

$$f(s) : S \rightarrow \mathbb{C}$$

La funzione $f(s)$ è analitica nel punto z_0 di S se risulta essere differenziabile in z_0 e in un suo intorno. Mentre si dice analitica in S se è analitica in ogni punto di S .

Vengono di seguito riportati alcuni spazi, frequentemente utilizzati, di funzioni di variabile complessa

- $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$:

lo spazio $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$ o, più semplicemente \mathcal{L}_2 , rappresenta uno spazio di Hilbert di funzioni a valori matriciali o scalari in $j\mathbb{R}$ ed è formato da funzioni matriciali complesse F tali che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Traccia} [F^*(j\omega)F(j\omega)] d\omega < \infty$$

risulta essere limitato.

Il prodotto interno associato a questo spazio di Hilbert viene definito come

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traccia} [G^*(j\omega)F(j\omega)] d\omega$$

con $F, G \in \mathcal{L}_2$ e la norma indotta dal prodotto interno è data da

$$\|F\|_2 = \sqrt{\langle F, F \rangle}$$

Ad esempio, l'insieme delle matrici di trasferimento razionali reali strettamente proprie, prive di poli sull'asse immaginario, formano un sottospazio non chiuso di $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$. Tale sottospazio viene denotato con $\mathcal{RL}_2(j\mathbb{R})$ o semplicemente con \mathcal{RL}_2 .

- Spazio \mathcal{H}_2 :

\mathcal{H}_2 è un sottospazio chiuso di $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$ costituito da funzioni matriciali $F(s)$ analitiche in $\text{Re}(s) > 0$ ovvero nel semipiano aperto sinistro. La norma associata viene definita come

$$\|F\|_2^2 = \sup_{\sigma > 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traccia} [F^*(\sigma + j\omega)F(\sigma + j\omega)] d\omega \right\}$$

Si può dimostrare che

$$\|F\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traccia} [F^*(j\omega)F(j\omega)] d\omega$$

Quindi è possibile calcolare la norma in \mathcal{H}_2 nello stesso modo in cui si computa quella in \mathcal{L}_2 .

Il sottospazio reale razionale di \mathcal{H}_2 che è formato da tutte le matrici di trasferimento strettamente proprie, reali razionali e stabili, viene denotato con \mathcal{RH}_2 .

- Spazio \mathcal{H}_2^\perp :

\mathcal{H}_2^\perp rappresenta il complemento ortogonale di \mathcal{H}_2 in \mathcal{L}_2 , ovvero il sottospazio chiuso delle funzioni in \mathcal{L}_2 che risultano essere analitiche nel semipiano aperto sinistro. Il sottospazio di \mathcal{H}_2 formato da tutte le matrici di trasferimento strettamente proprie e aventi tutti i poli nel semipiano aperto destro, viene indicato con \mathcal{RH}_2^\perp .

Importante sottolineare che gli spazi di \mathcal{L}_2 definiti nel dominio della frequenza possono essere messi in relazione con i corrispondenti spazi di \mathcal{L}_2 definiti nel tempo. Si ricorda che una funzione in \mathcal{L}_2 definita nel dominio del tempo, ammette trasformata di Laplace bilatera. Infatti, ricorrendo al teorema di Plancherel, è possibile dimostrare che la trasformata bilatera di Laplace costituisce un isomorfismo di tipo isometrico fra gli spazi di \mathcal{L}_2 definiti nel tempo e quelli definiti in frequenza:

$$\mathcal{L}_2(-\infty, \infty) \cong \mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$$

$$\mathcal{L}_2[0, \infty) \cong \mathcal{H}_2$$

$$\mathcal{L}_2(-\infty, 0] \cong \mathcal{H}_2^\perp$$

Da ciò consegue che se $g(t) \in \mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ e se la sua trasformata di Fourier (o di Laplace bilatera) è $G(j\omega) \in \mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$, allora

$$\|G\|_2 = \|g\|_2$$

Se si definisce poi la proiezione ortogonale

$$\Pi_+ = \mathcal{L}_2(-\infty, \infty) \mapsto \mathcal{L}_2[0, \infty)$$

tale che per ogni $f(t) \in \mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ si abbia $g(t) = \Pi_+ f(t)$ con

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

Analogamente, si definisce Π_- come la proiezione ortogonale da $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ su $\mathcal{L}_2(-\infty, 0]$.

Altre importanti classi di funzioni matriciali complesse sono quelle limitate sull'asse immaginario.

- $\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$, o semplicemente \mathcal{L}_∞ , rappresenta uno spazio di Banach di funzioni a valori matriciali che risultano essere limitate su $j\mathbb{R}$ e caratterizzate dalla norma:

$$\|F\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[F(j\omega)]$$

dove $\bar{\sigma}$ rappresenta il massimo valore singolare di F .

Lo spazio razionale di \mathcal{L}_∞ , denotato con $\mathcal{RL}_\infty(j\mathbb{R})$ o semplicemente con \mathcal{RL}_∞ , è formato da tutte quelle matrici di trasferimento razionali, proprie e prive di poli sull'asse immaginario.

- Spazio \mathcal{H}_∞ :

\mathcal{H}_∞ è un sottospazio chiuso di \mathcal{L}_∞ costituito da funzione analitiche nel semipiano aperto destro e limitate sull'asse immaginario. La norma \mathcal{H}_∞ viene definita nel modo seguente

$$\|F\|_\infty = \sup_{\operatorname{Re}(s)>0} \bar{\sigma}[F(s)] = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[F(j\omega)]$$

Si denota con \mathcal{RH}_∞ il sottospazio reale razionale di \mathcal{H}_∞ formato da tutte le matrici di trasferimento proprie, stabili, reali e razionali.

- Spazio \mathcal{H}_∞^- :

\mathcal{H}_∞^- rappresenta un sottospazio chiuso di \mathcal{L}_∞ costituito da quelle funzioni che risultano essere analitiche nel semipiano aperto sinistro e limitate sull'asse immaginario. La norma associata si definisce come

$$\|F\|_\infty = \sup_{\operatorname{Re}(s)<0} \bar{\sigma}[F(s)] = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[F(j\omega)]$$

Il sottospazio reale razionale di \mathcal{H}_∞^- viene denotato con \mathcal{RH}_∞^- ed è costituito da tutte le matrici di trasferimento razionali proprie aventi tutti i poli nel semipiano aperto destro.

Definizione 1.8. Una matrice di trasferimento $W(s) \in \mathcal{H}_\infty^-$ viene detta anticausale.

La notazione relativa a \mathcal{L}_∞ risulta essere piuttosto ingannevole. Lo stesso simbolo viene infatti utilizzato con due diverse accezioni: nel dominio del tempo lo spazio \mathcal{L}_∞ viene impiegato per caratterizzare i segnali mentre in quello della frequenza fa riferimento a funzioni e operatori.

1.3 Sistemi passatutto

Si passa ora ad analizzare le proprietà di una specifica classe di sistemi che verranno impiegati per implementare l'algoritmo di riduzione del modello, ovvero quella dei sistemi passatutto. La matrice di trasferimento $\mathbf{W}(s)$ di un sistema di tipo all-pass è soddisfa la seguente relazione:

$$\widetilde{\mathbf{W}}(s)\mathbf{W}(s) = \gamma^2 I \quad (1.3.12)$$

dove $\widetilde{\mathbf{W}}(s)$ rappresenta la matrice trasposta coniugata di $\mathbf{W}(s)$ e γ è uno scalare. Riscaldando opportunamente le matrici di stato del sistema, è possibile riscrivere la (1.3.12) nel seguente modo

$$\widetilde{\mathbf{W}}(s)\mathbf{W}(s) = I$$

che rappresenta ancora un passatutto.

Infine, nel caso in cui il sistema passatutto oltreché essere iniettivo sia anche suriettivo, gli spazi \mathcal{S}_i risultano avere necessariamente la stessa dimensione e dunque si ha $\widetilde{\mathbf{W}}(s) = \mathbf{W}(s)^{-1}$. Ciò implica che $\mathbf{W}(s)\widetilde{\mathbf{W}}(s) = \gamma^2 I$.

Teorema 1.3.1 (Caratterizzazione dei sistemi all-pass). [2] *Data una realizzazione (F, G, H) non necessariamente stabile di un sistema all-pass si ha che*

1. *se (F, G, H) è completamente controllabile e osservabile si equivalgono i seguenti fatti:*

a) $\exists D$ tale che $\widetilde{\mathbf{W}}(s)\mathbf{W}(s) = \gamma^2 I$ con $\mathbf{W}(s) = H(sI - F)^{-1}G + D$

b) $\exists P, Q$ tali che

i) $P = P^T, Q = Q^T$

ii) $FP + PF^T + GG^T = 0$

iii) $F^T Q + QF + H^T H = 0$

iv) $PQ = \gamma^2 I$

2. *Se la parte (1b) risulta essere soddisfatta, allora esiste una matrice D che soddisfa le seguenti equazioni*

$$D^T D = \gamma^2 I$$

$$D^T H + G^T Q = 0$$

e tale matrice soddisferà anche la parte (1a) (si noti che non viene fatta l'ipotesi di controllabilità e osservabilità del sistema).

Per la dimostrazione del teorema si rimanda a [2].

Capitolo 2

Riduzione ottima del modello nel continuo

Data una $\mathbf{W} \in \mathcal{RH}_\infty$ con grado di McMillan n e fissato un intero positivo $r < n$, l'algoritmo di riduzione ottima del modello tramite norma di Hankel consiste nel trovare una matrice di trasferimento $\hat{\mathbf{W}} \in \mathcal{RH}_\infty$ avente grado di McMillan r che minimizzi $\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}\|_H$ e quindi che differisca il meno possibile (in norma di Hankel) dalla matrice di trasferimento originaria.

Prima di passare all'effettiva analisi del problema è necessario introdurre il concetto di norma di Hankel soffermandosi in particolare sul legame esistente tra i valori singolari di Hankel e la decomposizione di Schmidt.

2.0.1 Operatore di Hankel

Dicesi operatore di Hankel un operatore di tipo predittivo che mappa segnali di ingresso nulli per tempi positivi nelle corrispondenti successioni di uscita ristrette ai soli tempi positivi. Si supponga che $\mathbf{W} \in \mathcal{RH}_\infty$ rappresenti la matrice di trasferimento associata alla realizzazione minima (F, G, H, D) .

Se il vettore di ingresso $u \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ le uscite future si ottengono tramite l'integrale di convoluzione

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 H e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau, \quad t > 0$$

Per far sì che la mappa operi da $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ a $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ anziché da $\mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ a $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ si pone $v(t) = u(-t)$ ottenendo $y(t) = (\Gamma_{\mathbf{W}}v)(t)$ per $t > 0$.

$\Gamma_{\mathbf{W}} : \mathcal{L}_2[0, \infty) \mapsto \mathcal{L}_2[0, \infty)$ rappresenta dunque l'operatore di Hankel definito come

$$(\Gamma_{\mathbf{W}}v)(t) = \int_0^\infty H e^{F(t-\tau)} G v(\tau) d\tau.$$

Teorema 2.0.2. *Sia (F, G, H, D) una realizzazione minima e $\mathbf{W} = H(sI - F)^{-1}G + D$ la matrice di trasferimento ad essa associata allora $\text{rank}(\Gamma_{\mathbf{W}}) = n$ dove n rappresenta il grado di McMillan di \mathbf{W}*

Dimostrazione.

Si consideri $u \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$, allora $y(t) = H e^{Ft} x_0$, per $t > 0$ e con $x_0 = \int_{-\infty}^0 e^{-F\tau} u(\tau) d\tau$, per $t = 0$. Dunque al fine di determinare $\Gamma_{\mathbf{W}}v$ è sufficiente conoscere solamente lo stato x_0 raggiungibile pilotando il sistema mediante l'ingresso $u(t)$. Poiché la coppia (F, G) è controllabile, si ha che al variare di $u(t)$ su $\mathcal{L}_2(-\infty, 0]$, x_0 varia su \mathbb{R}^n . Essendo inoltre (F, H) osservabile si ha che, in corrispondenza a stati iniziali linearmente indipendenti, le uscite future sono ancora linearmente indipendenti. Quindi il numero di uscite linearmente indipendenti risulta essere pari ad n , ovvero coincidente con la dimensione di una realizzazione minima di \mathbf{W} . Si può dunque concludere che $\text{rank}(\Gamma_{\mathbf{W}}) = n$.

□

2.1 Valori singolari di Hankel e decomposizione di Schmidt

La decomposizione di Schmidt rappresenta la decomposizione ai valori singolari associata all'operatore di Hankel $\Gamma_{\mathbf{W}}$:

$$\Gamma_{\mathbf{W}}(u) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \langle u, v_i \rangle w_i$$

dove $v_i \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ e $w_i \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ sono insiemi di funzioni ortonormali. $\sigma_i > 0$ sono i valori singolari dell'operatore di Hankel e prendono il nome di valori singolari di Hankel associati a \mathbf{W} . Il valore di Hankel avente modulo massimo risulta

essere pari alla norma di Hankel, inoltre si suppone che i valori singolari di Hankel siano ordinati in ordine decrescente. La coppia (v_i, w_i) , corrispondente al valore singolare di Hankel σ_i prende il nome di coppia di Schmidt. Dall'ortogonalità dei v_i e dei w_i discende che

$$\Gamma_{\mathbf{W}}v_i = \sigma_i w_i \quad \text{e} \quad \tilde{\Gamma}_{\mathbf{W}}w_i = \sigma_i v_i \quad (2.1.1)$$

Si vogliono ora esprimere i valori singolari di Hankel e le relative coppie di Schmidt in funzione di una realizzazione minima (F, G, H, D) di \mathbf{W} .

Si ipotizzi che σ_i sia un valore singolare con v il corrispondente autovettore di $\tilde{\Gamma}_W \Gamma_W$ e σ ovvero $\tilde{\Gamma}_W \Gamma_W = \sigma^2 v$

Si abbia inoltre che $v(t) = G^T e^{F^T t} \mathcal{W}^{-1} x_0$. Allora

$$\begin{aligned} (\Gamma_W v)(t) &= H e^{Ft} \left(\int_0^\infty e^{F\tau} G G^T e^{F^T \tau} d\tau \right) \mathcal{W}^{-1} x_0 \\ &= H e^{Ft} x_0 \end{aligned}$$

dato che $\mathcal{W} = \int_0^\infty e^{F\tau} G G^T e^{F^T \tau} d\tau$. Allo stesso modo, se $w(t) = H e^{Ft} x_0$, allora

$$\begin{aligned} (\tilde{\Gamma}_W w)(t) &= \int_0^\infty G^T e^{F^T(t+\tau)} H^T w(\tau) d\tau = G^T e^{F^T t} \left(\int_0^\infty e^{F^T \tau} H^T H e^{F\tau} d\tau \right) x_0 \\ &= G^T e^{F^T t} \mathcal{V} x_0 \end{aligned}$$

Dunque $\tilde{\Gamma}_W \Gamma_W = \sigma^2 v$ se $\mathcal{V} x_0 = \sigma^2 \mathcal{W}^{-1} x_0$ e si può concludere che i valori singolari di Hankel σ_i di \mathbf{W} sono rispettivamente

$$\sigma_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}}(\mathcal{W}\mathcal{V}), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1.2)$$

Per determinare il vettore di Schmidt corrispondente a $\sigma_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}}(\mathcal{W}\mathcal{V})$, occorre scegliere un vettore $x_i \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathcal{V} x_i = \sigma_i^2 \mathcal{W}^{-1} x_i$ con la norma di x_i scalata in modo tale che $v_i(t) = G^T e^{F^T t} \mathcal{W}^{-1} x_i$ abbia norma $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ unitaria. Ora

$$\begin{aligned} \|v\|_2^2 &= x_i^T \left(\int_0^\infty e^{F\tau} G G^T e^{F^T \tau} d\tau \right) \mathcal{W}^{-1} x_i \\ &= x_i^T \mathcal{W}^{-1} x_i \\ &= \frac{x_i^T \mathcal{V} x_i}{\sigma_i^2} \end{aligned}$$

Quindi se $x_i \in \mathbb{R}^n$ soddisfa $\mathcal{W}\mathcal{V}x_i = \sigma_i^2 x_i$ e $x_i^T \mathcal{V}x_i = \sigma_i^2$, allora

$$v_i(t) = \sigma_i^{-2} G^T e^{F^T t} \mathcal{V}x_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$w_i(t) = \sigma_i^{-1} H e^{F t} x_i \quad i = 1, \dots, n$$

rappresenta la coppia di Schmidt corrispondente al valore singolare σ_i . La decomposizione di Schmidt (2.1.1) si ottiene dunque scegliendo un insieme di vettori ortogonali $x_i \in \mathbb{R}^n$ tali che $\mathcal{W}\mathcal{V}x_i = \sigma_i^2 x_i$ e $x_i^T \mathcal{V}x_i = \sigma_i^2$. Se la realizzazione minima (F, G, H, D) è anche bilanciata (def. 2.1), allora

$$\mathcal{W} = \mathcal{V} = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{bmatrix}$$

e $v_i = \sqrt{\sigma_i} e_i$, dove e_i rappresenta l' i -esimo vettore della base canonica.

Definizione 2.1. Una realizzazione (F, G, H) risulta essere bilanciata se la matrice di stato F è asintoticamente stabile e

$$F\Sigma + \Sigma F^T + GG^T = 0 \quad (2.1.3)$$

$$F^T \Sigma + \Sigma F + H^T H = 0 \quad (2.1.4)$$

dove

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 I_{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m I_{k_m} \end{bmatrix} \quad \sigma_i \neq \sigma_j, i \neq j \text{ e } \sigma_i > 0 \forall i \quad (2.1.5)$$

Si presti attenzione al fatto che $n = k_1 + \dots + k_m$ coincide col grado di McMillan della funzione di trasferimento associata alla realizzazione scelta.

2.1.1 Norma di Hankel

La norma di Hankel di un sistema è la norma indotta in \mathcal{L}_2 associata all'operatore di Hankel, ovvero:

$$\|\mathbf{W}\|_H = \bar{\sigma} \|\Gamma \mathbf{w}\|$$

dove $\bar{\sigma}$ rappresenta il massimo valore singolare dell'operatore di Hankel.

In base alla definizione di norma indotta, si ha che

$$\|\mathbf{W}\|_H^2 = \sup_{u \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0]} \left(\frac{\int_0^\infty y^T y dt}{\int_{-\infty}^0 u^T u dt} \right)$$

Dunque l'energia associata all'uscita futura risulta essere non inferiore al prodotto tra l'energia dell'ingresso ed il valore della norma.

Per calcolare tale norma si supponga che il vettore di ingresso $u \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$ porti nello stato x_0 . Da ciò segue che

$$\int_0^{\infty} y^T(t)y(t)dt = x_0^T \mathcal{V}x_0 \quad (2.1.6)$$

e

$$\int_{-\infty}^0 u^T(t)u(t)dt \geq x_0^T \mathcal{W}^{-1}x_0 \quad (2.1.7)$$

in cui \mathcal{W} e \mathcal{V} sono rispettivamente i grammiani di controllabilità e osservabilità che risolvono le equazioni di Lyapunov

$$F\mathcal{W} + \mathcal{W}F^T + GG^T = 0 \quad (2.1.8)$$

$$F^T\mathcal{V} + \mathcal{V}F + H^T H = 0 \quad (2.1.9)$$

In virtù del fatto che la coppia (F, G) è controllabile, la matrice \mathcal{W} risulta essere invertibile. Si ha dunque che $u = G^T e^{-F^T t} \mathcal{W}^{-1}x_0$ con u soddisfacente la relazione 2.1.7 col segno di uguaglianza. Dal ragionamento fatto si ricava che

$$\|\mathbf{W}\|_H^2 = \sup_{x_0} \frac{x_0^T \mathcal{V}x_0}{x_0^T \mathcal{W}^{-1}x_0} = \bar{\sigma}(\mathcal{W}\mathcal{V}) \quad (2.1.10)$$

dove l'ultima eguaglianza deriva dalla (2.1.2). La norma di Hankel è limitata superiormente dalla norma $\|\cdot\|_{\infty}$. Infatti, per ogni arbitraria unità di energia all'ingresso del sistema, $\|\mathbf{W}\|_H^2$ rappresenta il più piccolo limite superiore associato all'energia dell'uscita futura, mentre $\|\mathbf{W}\|_{\infty}^2$ costituisce il più piccolo limite superiore associato all'energia totale dell'uscita.

Da ciò discende un fatto interessante che verrà ripreso in seguito. Si noti, infatti, che se \mathbf{J} è un qualsiasi sistema anticausale e $u \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$, allora $(\mathbf{J}u)(t)$ risulta essere nulla per $t > 0$. Dunque l'azione del sistema anticausale non altera in alcun modo l'uscita futura e si può quindi scrivere la seguente disuguaglianza:

$$\|\mathbf{W}\|_H \leq \|\mathbf{W} - \mathbf{J}\|_{\infty} \quad (2.1.11)$$

soddisfatta per ogni sistema anticausale \mathbf{J} .

Il seguente lemma dimostra che il valore singolare $\sigma_{r+1}(\mathbf{W})$ coincide con il limite inferiore della norma di Hankel dell'errore che viene commesso quando si approssima \mathbf{W} con un sistema stabile avente grado di McMillan pari ad r . In seguito si proverà che tale limite può essere effettivamente raggiunto.

Lemma 2.1.1. *Sia $\mathbf{W} \in \mathcal{RH}_\infty$ con grado di McMillan n e siano $\sigma_1 \dots \sigma_n$ i valori singolari di Hankel ad essa associati. Si consideri inoltre $\hat{\mathbf{W}} \in \mathcal{RH}_\infty$ con grado di McMillan inferiore o uguale a $r < n$. Da ciò segue che*

$$\left\| \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} \right\|_H \geq \sigma_{r+1} \quad (2.1.12)$$

Dimostrazione. Siano (v_i, w_i) , $i = 1 \dots n$ le coppie di Schmidt di \mathbf{W} e si considerino ingressi del tipo

$$v = \sum_{i=1}^{r+1} \beta_i v_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{r+1} \beta_i = 1$$

Poiché, in base a quanto già dimostrato nel teorema (2.0.2), il rango di $\Gamma_{\hat{\mathbf{W}}}$ è al più pari ad r e, dal momento che $v_1 \dots v_{r+1}$ costituiscono uno spazio di dimensione $r+1$, è possibile scegliere β_i non tutti nulli tali per cui $\Gamma_{\hat{\mathbf{W}}} v = 0$. In corrispondenza all'ingresso scelto si ha

$$\begin{aligned} \|(\Gamma_{\mathbf{W}} - \Gamma_{\hat{\mathbf{W}}}) v\|_2^2 &= \|\Gamma_{\mathbf{W}} v\|_2^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{r+1} \beta_i \sigma_i w_i \right\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^{r+1} \beta_i^2 \sigma_i^2 \geq \sigma_{r+1}^2 \sum_{i=1}^{r+1} \beta_i^2 = \sigma_{r+1}^2 \|v\|_2^2 \end{aligned}$$

Si è dunque provato che $\|(\Gamma_{\mathbf{W}} - \Gamma_{\hat{\mathbf{W}}}) v\|_2 \geq \sigma_{r+1}$ □

Poiché la norma infinito risulta sempre essere maggiore di quella di Hankel, dal lemma (2.1.1), segue che ogni funzione di trasferimento approssimante $\hat{\mathbf{W}} \in \mathcal{RH}_\infty$, avente grado di McMillan non superiore ad r , soddisfa la seguente disuguaglianza:

$$\left\| \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} \right\|_\infty \geq \sigma_{r+1}(\mathbf{W}) \quad (2.1.13)$$

Ecco allora che anche il valore singolare σ_{r+1} rappresenta un limite inferiore della norma infinito dell'errore che si commette approssimando \mathbf{W} con $\hat{\mathbf{W}}$.

2.2 Algoritmo nel caso subottimo

Per trovare la funzione di trasferimento $\hat{\mathbf{W}}$ che meglio approssima \mathbf{W} secondo la norma di Hankel, occorre costruire un sistema di tipo passatutto le cui dimensioni siano maggiori di quelle del sistema di partenza (embedding). A motivo di ciò si supponga che di poter determinare una funzione di trasferimento approssimante $\hat{\mathbf{W}} \in \mathcal{RH}_\infty$ con grado di McMillan pari ad r ed un sistema anticausale \mathbf{J} tali che $\gamma^{-1}(\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J})$ sia di tipo passatutto. Allora dev'essere $\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J}\|_\infty = \gamma$ e in virtù della disuguaglianza (2.1.11) si ottiene che $\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}\|_H \leq \gamma$.

Si farà vedere che tale processo di *embedding* può essere effettuato per ogni valore $\sigma_r(\mathbf{W}) > \gamma > \sigma_{r+1}(\mathbf{W})$, dimostrando così che il limite trovato nel lemma (2.1.1) rappresenta l'estremo inferiore dell'errore (caso subottimo). Successivamente si mostrerà che tale estremo può essere effettivamente raggiunto costituendo dunque un minimo.

2.2.1 All-pass embedding

Sia (F, G, H, D) una realizzazione minima della funzione di trasferimento $\mathbf{W}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ avente dimensioni $p \times m$ e si costruisca la matrice aumentata $\mathbf{W}_a(s)$ in cui non vengono momentaneamente fissate le dimensioni dei blocchi nulli:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_a(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{W}(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c|cc} F & G & 0 \\ \hline H & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} F & G_a \\ \hline H_a & D_a \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Si sfrutti ora il teorema (1.3.1) per trovare una funzione di trasferimento $\mathbf{P}_a(s)$ tale che l'errore associato sia rappresentato da un sistema passatutto

$$\Delta_a(s) = \mathbf{W}_a(s) - \mathbf{P}_a(s) \quad (2.2.15)$$

e dunque soddisfi la condizione

$$\tilde{\Delta}_a(s)\Delta_a(s) = \gamma^2 I \quad (2.2.16)$$

Se poi $(\hat{F}, \hat{G}, \hat{H}, \hat{D})$ è una realizzazione di $\mathbf{P}_a(s)$, la rappresentazione in spazio di stato dell'errore è data da

$$\Delta_a(s) = \left[\begin{array}{cc|c} F & 0 & G_a \\ 0 & \hat{F} & \hat{G} \\ \hline H_a & -\hat{H} & D_a - \hat{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} F_{\Delta_a} & G_{\Delta_a} \\ \hline H_{\Delta_a} & D_{\Delta_a} \end{array} \right] \quad (2.2.17)$$

Sulla base dunque del teorema (1.3.1), l'errore soddisfa la relazione (2.2.16) se e solo se esistono P_{Δ_a} e Q_{Δ_a} simmetriche, tali che

$$F_{\Delta_a} P_{\Delta_a} + P_{\Delta_a} F_{\Delta_a}^T + G_{\Delta_a} G_{\Delta_a}^T = 0 \quad (2.2.18)$$

$$F_{\Delta_a}^T Q_{\Delta_a} + Q_{\Delta_a} F_{\Delta_a} + H_{\Delta_a}^T H_{\Delta_a} = 0 \quad (2.2.19)$$

$$P_{\Delta_a} Q_{\Delta_a} = \gamma^2 I \quad (2.2.20)$$

e D_{Δ_a} risolve le seguenti equazioni

$$D_{\Delta_a}^T H_{\Delta_a} + G_{\Delta_a}^T Q_{\Delta_a} = 0 \quad (2.2.21)$$

$$D_{\Delta_a}^T D_{\Delta_a} = \gamma^2 I \quad (2.2.22)$$

L'obiettivo consiste nel trovare le matrici \hat{F} , \hat{G} , \hat{H} , \hat{D} e la matrici P_{Δ_a} e Q_{Δ_a} che soddisfino le equazioni del passatutto.

A tal fine è necessario innanzitutto trovare una relazione tra Q_{Δ_a} , definita dalla (2.2.19), e P_{Δ_a} soluzione della (2.2.18). Si premoltiplica la (2.2.18) per Q_{Δ_a} e la si postmoltiplica per $Q_{\Delta_a}^T$. Sottraendo l'equazione ottenuta dalla (2.2.19) moltiplicata per γ^2 e servendosi della (2.2.21), si perviene all'espressione che lega le due matrici Q_{Δ_a} e P_{Δ_a}

$$Q_{\Delta_a} F_{\Delta_a} (\gamma^2 I - P_{\Delta_a} Q_{\Delta_a}) + (\gamma^2 I - Q_{\Delta_a} P_{\Delta_a}) F_{\Delta_a}^T Q_{\Delta_a} + H_{\Delta_a}^T (\gamma^2 I - D_{\Delta_a} D_{\Delta_a}^T) H_{\Delta_a} = 0 \quad (2.2.23)$$

Si fissano quindi le dimensioni dei blocchi nulli della matrice di trasferimento associata al sistema aumentato (2.2.14) in modo tale da rendere le matrici D_a e D_{Δ_a} quadrate. Scelta D_{Δ_a} di dimensioni $(p+m) \times (m+p)$, poiché essa deve soddisfare la (2.2.22), dev'essere

$$\gamma^{-2} D_{\Delta_a}^T = D_{\Delta_a}^{-1}$$

Da quest'ultimo vincolo discende che $\gamma^{-1}D_{\Delta_a}$ dev'essere una matrice ortogonale di dimensioni $(p+m) \times (m+p)$. Ciò consente di semplificare la (2.2.23)

$$Q_{\Delta_a}F_{\Delta_a}(\gamma^2I - P_{\Delta_a}Q_{\Delta_a}) + (\gamma^2I - Q_{\Delta_a}P_{\Delta_a})F_{\Delta_a}^TQ_{\Delta_a} = 0 \quad (2.2.24)$$

che risulta essere soddisfatta per $P_{\Delta_a}Q_{\Delta_a} = \gamma^2I$. Sfruttando quest'ultimo vincolo e le equazioni (2.2.18) e (2.2.19), si vuole cercare di esprimere le matrici P_{Δ_a} e Q_{Δ_a} in funzione dei gramiani di controllabilità e di osservabilità di $\mathbf{W}(s)$, rispettivamente \mathcal{W} e \mathcal{V} .

Si riscrivano le equazioni (2.2.18) e (2.2.19) in forma partizionata

$$\begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & \hat{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^T & 0 \\ 0 & \hat{F}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_a \\ \hat{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_a^T & \hat{G}^T \end{bmatrix} = 0 \quad (2.2.25)$$

$$\begin{bmatrix} F^T & 0 \\ 0 & \hat{F}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & \hat{F} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_a^T \\ -\hat{H}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_a & -\hat{H} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.2.26)$$

Le equazioni relative ai blocchi (1, 1) delle (2.2.25) e (2.2.26) sono

$$FP_{11} + P_{11}F^T + G_aG_a^T = 0$$

e

$$F^TQ_{11} + Q_{11}F + H_a^TH_a = 0$$

Poiché F è per ipotesi asintoticamente stabile, dev'essere $P_{11} = \mathcal{W}$ e $Q_{11} = \mathcal{V}$.

Ecco allora che le matrici P_{Δ_a} e Q_{Δ_a} devono avere la seguente forma:

$$P_{\Delta_a} = \begin{bmatrix} \mathcal{W} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \quad Q_{\Delta_a} = \begin{bmatrix} \mathcal{V} & Q_{21}^T \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (2.2.27)$$

Ora dal blocco-(1, 1) della (2.2.20), si ricava che $P_{12}Q_{21} = \gamma^2I - \mathcal{W}\mathcal{V}$. Dato che si sta considerando il caso subottimo in cui

$$\gamma \neq \sigma_i(\mathbf{W}(s)), \quad i = 1 \dots n, \quad (2.2.28)$$

risulta chiaro che, poiché γ^2 non è un autovalore di $\mathcal{W}\mathcal{V}$, la matrice $P_{12}Q_{21}$ deve avere rango pari ad n . Ne consegue che la dimensione di \hat{F} dev'essere almeno pari

ad n . Volendo far in modo che $\mathbf{P}_a(s)$ abbia il minor grado di McMillan possibile, si fissa ad n la dimensione di \hat{F} . Questo implica che le sottomatrici P_{12} e Q_{21} siano quadrate e non singolari. Inoltre, il fatto che la base associata alla realizzazione di $\mathbf{P}_a(s)$ possa essere scelta in modo arbitrario, consente di scalare la matrice P_{12} in modo tale che essa sia la matrice identità. Posto infine $M = \mathcal{V}\mathcal{W} - \gamma^2 I$, le matrici P_{Δ_a} e Q_{Δ_a} possono essere riscritte come segue:

$$P_{\Delta_a} = \begin{bmatrix} \mathcal{W} & I \\ I & M^{-1}\mathcal{V} \end{bmatrix} \quad Q_{\Delta_a} = \begin{bmatrix} \mathcal{V} & -M \\ -M^T & \mathcal{W}M \end{bmatrix}$$

Si è così nelle condizioni di poter determinare le matrici incognite \hat{F} , \hat{G} , \hat{H} , \hat{D} della realizzazione di $\mathbf{P}_a(s)$.

Dalla (2.2.21) si ricava

$$D_{\Delta_a}^T \begin{bmatrix} H_a & -\hat{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{\Delta_a}^T & \hat{G}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V} & -M \\ -M^T & \mathcal{W}M \end{bmatrix} = 0 \quad (2.2.29)$$

Considerando i blocchi in posizione (1, 1), si ottiene l'equazione:

$$D_{\Delta_a}^T H_a + G_a^T \mathcal{V} - \hat{G}^T M^T = 0$$

che, trasponendo tutte le matrici, diventa

$$H_a^T D_{\Delta_a} + \mathcal{V}G_a - M\hat{G} = 0$$

da quest'ultima equazione si ottiene l'espressione relativa a \hat{G} , ovvero

$$\hat{G} = -M^{-1}(\mathcal{V}G_a + H_a^T D_{\Delta_a}) \quad (2.2.30)$$

Premoltiplicando la (2.2.21) per D_{Δ_a} e postmoltiplicandola per \mathcal{W}_{Δ_a} si ottiene

$$D_{\Delta_a} D_{\Delta_a}^T \begin{bmatrix} H_a & -\hat{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W} & I \\ I & M^{-1}\mathcal{V} \end{bmatrix} + D_{\Delta_a} \begin{bmatrix} G_{\Delta_a}^T & \hat{G}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V} & -M \\ -M^T & \mathcal{W}M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W} & I \\ I & M^{-1}\mathcal{V} \end{bmatrix} = 0$$

considerando quindi i blocchi in posizione (1, 1) si ricava la seguente equazione

$$D_{\Delta_a} D_{\Delta_a}^T (H_a \mathcal{W} - \hat{H}) + D_{\Delta_a} G_{\Delta_a}^T (\mathcal{W}_{\Delta_a} Q_{\Delta_a} - M) = 0$$

ricorrendo inoltre alla (2.2.22) e all'espressione relativa ad M , ovvero $M = \mathcal{W}_{\Delta_a} Q_{\Delta_a} - \gamma^2 I$, si riscrive l'equazione nel seguente modo

$$\gamma^2 I (H_a \mathcal{W} - \hat{H}) + \gamma^2 I D_{\Delta_a} G_{\Delta_a}^T = 0$$

ovvero

$$(H_a \mathcal{W} - \hat{H}) + D_{\Delta_a} G_{\Delta_a}^T = 0$$

da cui è possibile ricavare l'espressione di \hat{H}

$$\hat{H} = D_{\Delta_a} G_a^T + H_a \mathcal{W} \quad (2.2.31)$$

Si riscriva quindi la (2.2.18):

$$\begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & \hat{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W} & I \\ I & M^{-1}\mathcal{V} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{W} & I \\ I & M^{-1}\mathcal{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^T & 0 \\ 0 & \hat{F}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{\Delta_a} \\ \hat{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{\Delta_a}^T & \hat{G}^T \end{bmatrix} = 0$$

Limitandosi ai blocchi in posizione (1, 2), si ottiene l'equazione

$$F + \hat{F}^T + G_a \hat{G}^T = 0$$

da cui, dopo aver trasposto tutte le matrici, si ricava la seguente espressione di \hat{F}

$$\hat{F} = -F^T - \hat{G} G_a^T \quad (2.2.32)$$

Infine si riporta la (2.2.19)

$$\begin{bmatrix} F^T & 0 \\ 0 & \hat{F}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V} & -M \\ -M^T & \mathcal{W}M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{V} & -M \\ -M^T & \mathcal{W}M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & \hat{F} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{\Delta_a}^T \\ -\hat{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{\Delta_a} & -\hat{H} \end{bmatrix} = 0$$

dai blocchi in posizione (1, 2) deriva l'equazione

$$-F^T M - M \hat{F} - H_a^T \hat{H} = 0$$

che fornisce una seconda possibile espressione per \hat{F}

$$\hat{F} = -M^{-1}(F^T M + H_a^T \hat{H}) \quad (2.2.33)$$

Si può provare che la realizzazione $(\hat{F}, \hat{G}, \hat{H}, \hat{D})$ è minima, tuttavia la dimostrazione di questo fatto non viene qui riportata [3].

La costruzione del sistema aumentato viene completata scegliendo \hat{D} in modo tale che sia rispettato il fatto che la $\gamma^{-1} D_{\Delta_a}$ costituisce una matrice ortogonale di dimensioni $(p+m) \times (m+p)$. Si ha dunque che

$$\begin{bmatrix} D & \gamma I_p \\ \gamma I_m & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.34)$$

2.2.2 Calcolo di una soluzione nel caso subottimo

Prima di poter risolvere il problema in modo effettivo è necessario mettere in luce alcune proprietà che caratterizzano il modello aumentato costruito nel precedente paragrafo.

Poli e zeri di $\mathbf{P}_a(s)$ nel semipiano sinistro

Si vuole provare che la dimensione del sottospazio asintoticamente stabile di \hat{F} coincide col numero di valori singolari di $\mathbf{W}(s)$ definiti in e aventi modulo maggiore di γ . Si supponga che X sia una base associata al sottospazio asintoticamente stabile di \hat{F} e sia $\hat{F}X = X\Lambda$. Si riporta la (2.2.18) in forma partizionata

$$\begin{bmatrix} F^T & 0 \\ 0 & \hat{F}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V} & -M \\ -M^T & \mathcal{W}M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{V} & -M \\ -M^T & \mathcal{W}M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & \hat{F} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_a^T \\ -\hat{H}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_a & -\hat{H} \end{bmatrix} = 0$$

Dall'analisi dei blocchi in posizione (2, 2) si ricava l'equazione

$$\mathcal{W}M\hat{F} + \hat{F}^T\mathcal{W}M + \hat{H}^T\hat{H} = 0 \quad (2.2.35)$$

Premoltiplicando quest'ultima equazione per X^T e postmoltiplicandola per X si ottiene:

$$(X^T\mathcal{W}MX)\Lambda + \Lambda^T(X^T\mathcal{W}MX) + (\hat{H}X)^T(\hat{H}X) = 0 \quad (2.2.36)$$

Poiché il blocco Λ è asintoticamente stabile, e la coppia $(\Lambda, \hat{H}X)$ è osservabile dal momento che risulta già esserlo la coppia (\hat{F}, \hat{H}) , si può concludere che $X^T\mathcal{W}MX$ è definita positiva. In modo analogo, se V rappresenta la base associata al sottospazio instabile di \hat{F} , allora si ha che $V^T\mathcal{W}MV$ è definita negativa.

Si considerano ora le situazioni limite in cui $\gamma > \sigma_1$ e $\gamma < \sigma_n$. Se $\gamma > \sigma_1$ si avrebbe che la matrice $\mathcal{W}M = \mathcal{W}(\mathcal{V}\mathcal{W} - \gamma^2 I)$ risulterebbe definita negativa in virtù della (2.1.2) e del fatto che σ_1 rappresenta il massimo valore singolare di Hankel di $\mathbf{W}(s)$. Per il teorema sulla stabilità di Lyapunov e da (2.2.35), si avrebbe dunque che tutti gli autovalori di \hat{F} si troverebbero nel semipiano destro aperto. Se invece $\gamma < \sigma_n$, dove σ_n rappresenta il minimo valore singolare di Hankel di $\mathbf{W}(s)$, $\mathcal{W}M$ sarebbe definita positiva e dunque, sempre per Lyapunov, la matrice \hat{F} risulterebbe essere asintoticamente stabile. Dunque nell'ipotesi considerata

in cui $\sigma_r(\mathbf{W}(s)) > \gamma > \sigma_{r+1}(\mathbf{W}(s))$, $r = 1 \dots n$ sulla base dello stesso ragionamento fatto per i casi limite, \mathcal{WM} risulta avere r autovalori positivi e $n - r$ negativi. Quindi \hat{F} risulta avere r autovalori nel semipiano aperto sinistro e $n - r$ nel semipiano aperto destro. Si denoti con $\mathcal{RH}_\infty^-(r)$ una matrice di trasferimento appartenente a \mathcal{RL}_∞ avente al più r poli nel semipiano aperto sinistro. Allora la condizione $\sigma_r(\mathbf{W}(s)) > \gamma > \sigma_{r+1}(\mathbf{W}(s))$ implica che $\mathbf{P}_a(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-(r)$.

La seconda proprietà riguarda invece gli zeri dei blocchi in posizione (1, 2) e (2, 1) di $\mathbf{P}_a(s)$. È possibile dimostrare che essi si collocano tutti nel semipiano aperto destro.

Il procedimento di all-pass embedding descritto nel paragrafo (2.2.1) e il lemma (2.1.1), portano al prossimo risultato che consente di trovare una soluzione del problema di riduzione del modello mediante norma di Hankel nel caso subottimo.

Teorema 2.2.1. *Se $\mathbf{W}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, allora esiste una $\hat{\mathbf{W}}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ avente grado di McMillan al più pari a r ed un sistema anticausale con funzione di trasferimento $\mathbf{J} \in \mathcal{H}_\infty^-$ tale che $\left\| \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J} \right\|_\infty < \gamma$ se e solo se $\gamma > \sigma_{r+1}(\mathbf{W})$*

Dimostrazione.

(\rightarrow) Se $\left\| \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J} \right\|_\infty < \gamma$, allora si ha che

$$\gamma > \left\| \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J} \right\|_\infty \geq \left\| \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} \right\|_H \geq \sigma_{r+1}(\mathbf{W})$$

in cui si sono sfruttate le disuguaglianze (2.1.11) e (2.1.12).

(\leftarrow) $\forall \gamma > \sigma_{r+1}(\mathbf{W})$, $\gamma \neq \sigma_i(\mathbf{W})$ la costruzione basata sul sistema passatutto (par. (2.3.1)) fornisce una matrice $\mathbf{P}_a(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-(r)$ tale da soddisfare $\left\| \mathbf{W}_a - \mathbf{P}_a \right\| = \gamma$. Il fatto che i blocchi $\mathbf{P}_{a12}(s)$ e $\mathbf{P}_{a21}(s)$ non presentino zeri sull'asse immaginario comporta che $\left\| \mathbf{W} - \mathbf{P}_{a11} \right\|_\infty < \gamma$. Si conclude quindi che $\hat{\mathbf{W}}(s)$ e $\mathbf{J}(s)$ si ottengono da una decomposizione di $\mathbf{P}_{a11}(s)$. \square

Per parte stabile di $\mathbf{P}_{a11}(s) \in \mathcal{RL}_\infty$ si intende qualsiasi $\hat{\mathbf{W}}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ tale che $\mathbf{P}_{a11}(s) - \hat{\mathbf{W}}(s) \in \mathcal{RL}_\infty$.

2.2.3 Calcolo delle soluzioni nel caso subottimo

Al fine di ricavare tutte le soluzioni relative al problema di approssimazione del modello, è necessario sfruttare alcuni risultati riguardanti le contrazioni lineari

fratte. Poiché l'argomento è piuttosto vasto e non risulta essere direttamente collegato con il problema affrontato in questo lavoro di tesi, se ne riportano solo i risultati di maggiore interesse [3].

Trasformazioni lineari fratte

Definizione 2.2. Contrazione

Una trasformazione lineare fratta (LFT) si presenta nella forma:

$$\mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}, \mathbf{K}) = \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{K}(I - \mathbf{P}_{22}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{21} \quad (2.2.37)$$

dove i blocchi \mathbf{P}_{ij} e \mathbf{K} rappresentano matrici di trasferimento. La LFT risulta essere ben definita se esiste l'inversa $(I - \mathbf{P}_{22}\mathbf{K})^{-1}$.

Definizione 2.3. Contrazione

Una mappa $\Sigma : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$, in cui \mathcal{S} rappresenta uno spazio di Banach, è una contrazione se la corrispondente norma indotta di Lipschitz risulta essere inferiore a 1, ovvero se esiste $\gamma < 1$ tale che

$$\|\Sigma v - \Sigma w\|_{\mathcal{S}} \leq \gamma \|v - w\|_{\mathcal{S}} \quad v, w \in \mathcal{S}$$

Il prossimi due teoremi, dei quali si fornisce solo l'enunciato, prendono in considerazione LFT coinvolgenti matrici di trasferimento nel caso in cui queste ultime rappresentino delle contrazioni.

Teorema 2.2.2. [3] *Si supponga che $\det(I - \mathbf{P}_{22}(\infty)\mathbf{K}(\infty)) \neq 0$*

- i) *se $\|\mathbf{P}\|_{\infty} \leq 1$, allora $\|\mathbf{K}\|_{\infty} \leq 1$ implica che $\|\mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}, \mathbf{K})\|_{\infty} \leq 1$*
- ii) *se $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{P} = I$, allora se $\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{K} = I$ si ha che $\tilde{\mathcal{F}}_\ell(\mathbf{P}, \mathbf{K})\mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}, \mathbf{K}) = I$*
- iii) *se $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{P} = I$ e $\|\mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}, \mathbf{K})\|_{\infty} < 1$ allora $\mathbf{P}_{21}(j\omega)$ ha rango di colonna pieno per ogni ω reale*
- iv) *Si ipotizzi che $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{P} = I$ e che il blocco $\mathbf{P}_{21}(j\omega)$ abbia rango di riga pieno per ogni ω reale. Allora*

1. $\|\mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}, \mathbf{K})\|_{\infty} \leq 1$ se e solo se $\|\mathbf{K}\|_{\infty} \leq 1$

2. se $\|\mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}, \mathbf{K})\|_\infty < 1$ allora $\|\mathbf{K}\|_\infty < 1$ e $\mathbf{P}_{21}(j\omega)$ è non singolare per ogni ω reale. Vale anche il viceversa
3. $\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{K} = I$ se e solo se $\tilde{\mathcal{F}}_\ell(\mathbf{P}, \mathbf{K})\mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}, \mathbf{K}) = I$
4. $\|\mathbf{K}\|_\infty > 1$ se e solo se $\|\mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}, \mathbf{K})\|_\infty > 1$

Teorema 2.2.3. [3] Si supponga che $\mathbf{P} \in \mathcal{RH}_\infty$, $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{P} = I$ e che $\mathbf{P}_{21}^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$. I seguenti fatti si equivalgono:

- i $\exists \mathbf{K} : \mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}, \mathbf{K})$ è ben definita, internamente stabile e $\|\mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}, \mathbf{K})\|_\infty < 1$
- ii $\mathbf{K} \in \mathcal{RH}_\infty$ e $\|\mathbf{K}\|_\infty < 1$

Il prossimo lemma generalizza questo risultato al caso in cui le matrici \mathbf{P} e \mathbf{K} presentino uno specifico numero di poli nel semipiano sinistro.

Lemma 2.2.4. [3] Si ipotizzi che \mathbf{P} abbia la seguente realizzazione in spazio di stato

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|cc} F & G_1 & G_2 \\ \hline H_1 & 0 & D_{12} \\ H_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right]$$

e si supponga inoltre che

- a) la matrice F abbia esattamente r autovalori nel semipiano aperto sinistro
- b) la matrice $F - G_2 D_{12}^{-1} H_1$ non abbia autovalori nel semipiano chiuso sinistro
- c) la matrice $F - G_1 D_{21}^{-1} H_2$ non abbia autovalori nel semipiano chiuso sinistro

Se \mathbf{K} ha realizzazione minima $(\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{D})$ e $\|\mathbf{P}_{22}\mathbf{K}\| < 1$, allora $\mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}, \mathbf{K})$ presenta $r + l$ poli nel semipiano aperto sinistro se e solo se \mathbf{K} ne possiede l nello stesso semipiano.

Si è ora in possesso degli strumenti per poter ricavare tutte le soluzioni relative al problema di riduzione del modello.

Teorema 2.2.5. Sia $\mathbf{W}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ e sia $\sigma_r(\mathbf{W}) > \gamma > \sigma_{r+1}(\mathbf{W})$.

Allora ogni matrice anticausale $\mathbf{R}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-(r)$ che soddisfa

$$\|\mathbf{W} - \mathbf{R}\|_\infty < \gamma \tag{2.2.38}$$

sono tutte e sole quelle esprimibili nella forma

$$\mathbf{R}(s) = \mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}_a, \mathbf{U}), \text{ per qualche } \mathbf{U}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-, \quad \|\mathbf{U}\|_\infty < \gamma^{-1} \quad (2.2.39)$$

con $\mathbf{P}_a(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-$ ottenuta mediante il processo di embedding.

Dimostrazione. Si supponga che $\mathbf{R}(s)$ sia una qualsiasi matrice soddisfacente la (2.3.43). Poiché i blocchi $\mathbf{P}_{a12}(s)$ e $\mathbf{P}_{a21}(s)$ risultano essere non singolari sull'asse immaginario e $\mathbf{P}_{a22}(\infty) = 0$, allora per il punto *i*) del teorema (2.2.2) esiste $\mathbf{U} \in \mathcal{RL}_\infty^-$ tale che $\mathbf{R}(s) = \mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}_a, \mathbf{U})$. Da ciò segue che

$$\mathbf{W}(s) - \mathbf{R}(s) = \mathcal{F}_\ell(\mathbf{W}_a - \mathbf{P}_a, \mathbf{U}) = \mathcal{F}_\ell(\Delta_a, \mathbf{U}), \quad \text{dove } \gamma^{-1}\Delta_a(s) \text{ è un passatutto.}$$

Dal punto *iv*) – 2. del teorema (2.2.2) segue immediatamente che $\|\mathbf{U}\|_\infty < \gamma^{-1}$. Se inoltre $\mathbf{R}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-(r)$, sulla base delle proprietà della matrice $\mathbf{P}_a(s)$ dimostrate in precedenza (se $\sigma_r(\mathbf{W}) > \gamma > \sigma_{r+1}(\mathbf{W}) \longrightarrow \mathbf{P}_a(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-(r)$), e del teorema (2.2.4) si può concludere che $\mathbf{U}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-$.

Viceversa, se $\mathbf{R}(s)$ soddisfa la (2.2.39), dai teoremi (2.2.2) e (2.2.4) discende subito la (2.3.43). \square

Tutte le soluzioni $\hat{\mathbf{W}}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ aventi grado al più pari ad r e soddisfacenti $\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}\|_H < \gamma$ si ottengono selezionando una qualunque parte stabile della matrice $\mathbf{R}(s) \in \mathcal{RH}_\infty(r)$ risultante dalla (2.2.39).

2.3 Algoritmo nel caso ottimo

Si passi dunque a considerare il caso ottimo in cui $\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}\|_H = \sigma_{r+1}(\mathbf{W})$. Per dimostrare che l'estremo inferiore alla norma di Hankel dell'errore può essere effettivamente raggiunto, è necessario modificare la costruzione del modello aumentato ricavata nel paragrafo (2.2.1).

2.3.1 All-pass embedding nel caso ottimo

Si riprenda il ragionamento del paragrafo (2.2.1) e questa volta, anziché ipotizzare $\gamma \neq \sigma_i(\mathbf{W}(s))$, con $i = 1 \dots n$, si suppone che

$$\gamma = \sigma_{r+1}(\mathbf{W}) \quad (2.3.40)$$

dove il valore singolare di Hankel $\sigma_{r+1}(\mathbf{W})$ ha molteplicità pari a k . Dal momento che γ^2 risulta dunque essere autovalore con molteplicità k di $\mathcal{W}\mathcal{V}$, si ha che la matrice $P_{12}Q_{21} = \gamma^2 I - \mathcal{W}\mathcal{V}$ deve avere necessariamente rango pari a $n - k$. Si ricorda che la matrice di trasferimento del sistema aumentato è rispettivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_a(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{W}(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c|cc} F & G & 0 \\ \hline H & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} F & G_a \\ \hline H_a & D_a \end{array} \right] \end{aligned}$$

mentre quella dell'errore è

$$\Delta_a(s) = \left[\begin{array}{cc|c} F & 0 & G_a \\ 0 & \hat{F} & \hat{G} \\ \hline H_a & -\hat{H} & D_a - \hat{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} F_{\Delta_a} & G_{\Delta_a} \\ \hline H_{\Delta_a} & D_{\Delta_a} \end{array} \right] \quad (2.3.41)$$

Ricorrendo ad un'opportuna realizzazione bilanciata di \mathbf{W}_a è possibile portare i gramiani di controllabilità \mathcal{W} e di osservabilità \mathcal{V} di $\mathbf{W}(s)$ (e di $\mathbf{W}_a(s)$) nella seguente forma:

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 & 0 \\ 0 & \sigma_{r+1} I_k \end{bmatrix} \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 & 0 \\ 0 & \sigma_{r+1} I_k \end{bmatrix} \quad (2.3.42)$$

Una volta fissata ad $n - k$ la dimensione della matrice \hat{F} , appartenente alla realizzazione di $\mathbf{P}_a(s)$, si ha che le matrici P_{12} e Q_{21} , che si ricorda essere le sottomatrici di P_{Δ_a} e Q_{Δ_a} (2.2.27), risultano avere rango di riga e colonna pieni. La base associata alla realizzazione di $\mathbf{P}_a(s)$ viene scelta in modo da ottenere

$$P_{12} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.3.43)$$

. Per ricavare la nuova struttura delle matrici P_{Δ_a} e Q_{Δ_a} , oltre alle matrici \mathcal{W} e \mathcal{V} in (2.3.42), si utilizza la forma partizionata (2.2.27) di P_{Δ_a} e di Q_{Δ_a} , ovvero

$$P_{\Delta_a} = \begin{bmatrix} \mathcal{W} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \quad Q_{\Delta_a} = \begin{bmatrix} \mathcal{V} & Q_{21}^T \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

Allora, tenendo anche in considerazione la (2.3.43), l'equazione del vincolo $\mathcal{P}_{\Delta_a} Q_{\Delta_a} = \gamma^2 I$ (2.2.20) diviene

$$P_{\Delta_a} Q_{\Delta_a} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 & 0 & I \\ 0 & \gamma I_k & 0 \\ I & 0 & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 & 0 & \alpha \\ 0 & \gamma I_k & \beta \\ \alpha^T & \beta^T & Q_{22} \end{bmatrix} = \gamma^2 I$$

Dal prodotto della prima riga per la prima colonna si ricava l'equazione

$$\mathcal{W}_1 \mathcal{V}_1 + \alpha = \gamma^2 I_{n-k}$$

da cui

$$-\alpha = \mathcal{W}_1 \mathcal{V}_1 - \gamma^2 I_{n-k} := M_1$$

dal prodotto dell'ultima riga per la seconda colonna, si ottiene

$$P_{22} \beta^T = 0$$

ovvero $\beta = 0$ il prodotto della prima riga per l'ultima colonna fornisce

$$\mathcal{W}_1 \alpha + Q_{22} = 0$$

da cui

$$Q_{22} = -\mathcal{W}_1 \alpha = \mathcal{W}_1 M_1$$

e infine dal prodotto tra l'ultima riga e la prima colonna si ottiene l'equazione

$$\mathcal{V}_1 + P_{22} \alpha^T = 0$$

che fornisce

$$P_{22} = M_1^{-1} \mathcal{V}_1$$

Sfruttando le espressioni ottenute per α , β , P_{22} e Q_{22} , le matrici \mathcal{P}_{Δ_a} e \mathcal{Q}_{Δ_a} assumono la seguente forma

$$\mathcal{P}_{\Delta_a} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 & 0 & I \\ 0 & \gamma I & 0 \\ I & 0 & M_1^{-1} \mathcal{V}_1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q}_{\Delta_a} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 & 0 & -M_1 \\ 0 & \gamma I & 0 \\ -M_1^T & 0 & \mathcal{W}_1 M_1 \end{bmatrix} \quad (2.3.44)$$

Dopo aver partizionato F , G , H conformemente ai gramiani \mathcal{W} e \mathcal{V} , ottenendo

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.45)$$

si possono dunque ricavare le matrici incognite \hat{F} , \hat{G} , \hat{H} .

Per il calcolo di \hat{G} si ricorre all'equazione (2.2.21), ovvero

$$D_{\Delta_a}^T H_{\Delta_a} + G_{\Delta_a}^T Q_{\Delta_a} = 0$$

che, riscritta in forma partizionata, diventa

$$D_{\Delta_a}^T \left[\begin{array}{cc|c} H_1 & H_2 & -\hat{H} \\ \hline 0 & 0 & \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc|c} G_1^T & G_2^T & \hat{G}^T \\ \hline 0 & 0 & \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_1 & 0 & -M_1 \\ 0 & \gamma I & 0 \\ \hline -M_1^T & 0 & \mathcal{W}_1 M_1 \end{array} \right] = 0 \quad (2.3.46)$$

Dall'analisi del blocco (1,1) si ottiene l'equazione

$$D_{\Delta_a}^T \left[\begin{array}{c} H_1 \\ 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} G_1^T \\ 0 \end{array} \right] \mathcal{V}_1 - \hat{G}^T M_1^T = 0$$

che, una volta trasposta, fornisce

$$\left[H_1^T \quad 0 \right] D_{\Delta_a} + \mathcal{V}_1 \left[G_1 \quad 0 \right] - M_1 \hat{G} = 0$$

da cui si ricava l'espressione relativa a \hat{G}

$$\hat{G} = M_1^{-1} \left(\left[H_1^T \quad 0 \right] D_{\Delta_a} + \mathcal{V}_1 \left[G_1 \quad 0 \right] \right)$$

Premoltiplicando la (2.2.21) per D_{Δ_a} e postmoltiplicandola per P_{Δ_a} si ottiene la seguente espressione

$$D_{\Delta_a} (D_{\Delta_a}^T H_{\Delta_a} + G_{\Delta_a}^T Q_{\Delta_a}) P_{\Delta_a} = 0$$

che, sfruttando le relazioni $\mathcal{P}_{\Delta_a} Q_{\Delta_a} = \gamma^2 I$ e $D_{\Delta_a}^T D_{\Delta_a} = \gamma^2 I$ diviene

$$H_{\Delta_a} P_{\Delta_a} + D_{\Delta_a} G_{\Delta_a}^T = 0$$

Quest'ultima, riscritta in forma partizionata, fornisce

$$\left[\begin{array}{cc|c} H_1 & H_2 & -\hat{H} \\ \hline 0 & 0 & \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{W}_1 & 0 & I \\ 0 & \gamma I & 0 \\ \hline I & 0 & M_1^{-1} \mathcal{V}_1 \end{array} \right] + D_{\Delta_a} \left[\begin{array}{cc|c} G_1^T & G_2^T & \hat{G}^T \\ \hline 0 & 0 & \end{array} \right] = 0$$

Focalizzandosi quindi sul blocco in posizione (1,1), si ricava l'equazione

$$\left[\begin{array}{c} H_1 \\ 0 \end{array} \right] \mathcal{W}_1 - \hat{H} + D_{\Delta_a} \left[\begin{array}{c} G_1^T \\ 0 \end{array} \right] = 0$$

da cui si ottiene l'espressione relativa ad \hat{H}

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{W}_1 + D_{\Delta_a} \begin{bmatrix} G_1^T \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al fine di ricavare \hat{F} si riscrive l'equazione $F_{\Delta_a}^T Q_{\Delta_a} + Q_{\Delta_a} F_{\Delta_a} + H_{\Delta_a}^T H_{\Delta_a} = 0$ (2.2.19) in forma partizionata

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{11}^T & F_{21}^T & 0 \\ F_{12}^T & F_{22}^T & 0 \\ 0 & 0 & \hat{F}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 & 0 & -M_1 \\ 0 & \gamma I & 0 \\ -M_1^T & 0 & \mathcal{W}_1 M_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 & 0 & -M_1 \\ 0 & \gamma I & 0 \\ -M_1^T & 0 & \mathcal{W}_1 M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{F} \end{bmatrix} + \\ + \frac{\begin{bmatrix} H_1^T & 0 \\ H_2^T & 0 \\ -H^T \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \hat{H} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

Dall'analisi del blocco (1, 3) si ottiene l'equazione

$$-F_{11}^T M_1 - M_1 \hat{F} - \begin{bmatrix} H_1^T & 0 \end{bmatrix} \hat{H} = 0$$

che fornisce

$$\hat{F} = -M_1^{-1} (F_{11}^T M_1 + \begin{bmatrix} H_1^T & 0 \end{bmatrix} \hat{H})$$

Dall'equazione $F_{\Delta_a} P_{\Delta_a} + P_{\Delta_a} F_{\Delta_a}^T + G_{\Delta_a} G_{\Delta_a}^T = 0$ (2.2.18) viene ricavata una seconda espressione per \hat{F} . Si riscrive dunque la (2.2.18) in forma partizionata, ovvero

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 & 0 & I \\ 0 & \gamma I & 0 \\ I & 0 & M_1^{-1} \mathcal{V}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 & 0 & I \\ 0 & \gamma I & 0 \\ I & 0 & M_1^{-1} \mathcal{V}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11}^T & F_{21}^T & 0 \\ F_{12}^T & F_{22}^T & 0 \\ 0 & 0 & \hat{F}^T \end{bmatrix} + \\ + \frac{\begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ G_2 & 0 \\ \hat{G} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} G_1^T & G_2^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} G_1^T & G_2^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \hat{G}^T = 0 \end{aligned} \quad (2.3.48)$$

Questa volta si sceglie l'equazione associata ai blocchi in posizione (3, 1) da cui è immediato ottenere l'espressione di \hat{F} desiderata:

$$\hat{F} = -F_{11}^T - \hat{G} \begin{bmatrix} G_1^T \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per quanto concerne il calcolo della matrice D_{Δ_a} , si nota che essa oltre a dover rispettare il vincolo (2.2.22) ovvero $D_{\Delta_a}^T D_{\Delta_a} = \gamma^2 I$, deve anche soddisfare la seguente equazione

$$\begin{bmatrix} H_2^T & 0 \end{bmatrix} D_{\Delta_a} + \gamma \begin{bmatrix} G_2 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.3.49)$$

quest'ultima ricavata dal blocco in posizione (1, 2) della (2.3.46). Dai blocchi in posizione (2, 2) di (2.3.47) e (2.3.48), si ottiene inoltre la relazione $G_2 G_2^T = H_2^T H_2$ che viene sfruttata dal prossimo lemma (di cui non viene riportata la prova) per completare la procedura di determinazione della matrice D_{Δ_a} .

Lemma 2.3.1. [3] *Si supponga che le matrici $G_2 \in \mathfrak{R}^{k \times m}$ e $H_2 \in \mathfrak{R}^{p \times k}$ soddisfino $G_2 G_2^T = H_2^T H_2$ e sia $\ell = \text{rank}(G_2 G_2^T)$. Allora esiste una matrice D_{Δ_a} di dimensioni $(p + m - \ell) \times (m + p - \ell)$ soddisfacente la (2.2.22) e la (2.3.49). Inoltre si ha che il blocco in posizione (2, 2) di D_{Δ_a} avente dimensioni pari a $(m - \ell) \times (p - \ell)$ può essere scelto in modo da risultare nullo.*

Sono state dunque fissate le dimensioni del sistema aumentato e la costruzione della matrice $\mathbf{P}_a(s)$ risulta essere completa. Volendo fare un confronto con quanto ottenuto nel caso subottimo, si nota che, nella nuova configurazione, i modelli di stato in forma aumentata presentano ℓ righe in meno, con $1 \leq \ell \leq \min(k, m, p)$.

2.3.2 Calcolo di una soluzione nel caso ottimo

Per il calcolo di una soluzione del problema all'ottimo, si segue esattamente lo stesso ragionamento condotto nel caso subottimo. Considerazioni del tutto analoghe a quelle effettuate nel caso subottimo mostrano che il numero di autovalori stabili della matrice \hat{F} coincide col numero di autovalori positivi di $\mathcal{W}_1 M_1$, ovvero l'ammontare dei poli della matrice $\mathbf{P}_a(s)$ nel semipiano aperto sinistro coincide col numero dei valori singolari di Hankel di $\mathbf{W}(s)$ aventi modulo maggiore di $\gamma = \sigma_{r+1}(\mathbf{W})$.

Teorema 2.3.2.

Sia $\mathbf{W}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ allora esiste una matrice $\hat{\mathbf{W}}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ avente grado di McMillan al più pari ad r e un sistema anticausale $\mathbf{J}(s) \in \mathcal{H}_\infty^-$ tali che $\left\| \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J} \right\|_\infty \leq \gamma$ se e solo se $\gamma \geq \sigma_{r+1}(\mathbf{W})$

Dimostrazione. (\rightarrow) Se $\left\| \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J} \right\|_{\infty} \leq \gamma$, allora

$$\gamma \geq \left\| \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J} \right\|_{\infty} \geq \left\| \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} \right\|_H \geq \sigma_{r+1}(\mathbf{W})$$

(\leftarrow) Viceversa se $\gamma = \sigma_{r+1}(\mathbf{W})$ allora si ha che la matrice $\mathbf{P}_a(s) \in \mathcal{RH}_{\infty}^{-}(r)$ ricavata soddisfa $\left\| \mathbf{W}_a - \mathbf{P}_a \right\|_{\infty} = \gamma$. Facendo in modo che $\hat{\mathbf{W}}(s)$ sia una qualunque porzione stabile di $\mathbf{P}_{a11}(s)$ e, scegliendo $\mathbf{J}(s) = \mathbf{P}_{a11}(s) - \mathbf{W}(s)$, si ottiene $\left\| \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J} \right\|_{\infty} \leq \gamma$ \square

Una soluzione del problema si ottiene infine selezionando una qualunque parte stabile di $\mathbf{P}_{a11}(s)$.

2.3.3 Calcolo dell'insieme delle soluzioni nel caso ottimo

Il calcolo dell'insieme delle soluzioni risulta essere assai più ostico e laborioso del corrispettivo subottimo. Le difficoltà derivano dal fatto che, non essendo più le sottomatrici $\mathbf{P}_{a12}(s)$ e $\mathbf{P}_{a21}(s)$ quadrate, la mappa lineare fratta $\mathcal{F}_{\ell}(\mathbf{P}_a, \mathbf{U})$ non copre tutto $\mathcal{RH}_{\infty}^{-}(r)$. Nonostante ciò si dimostrerà che essa riesce ancora a fornire tutte le soluzioni. La prova si fonda essenzialmente su tre fatti:

1) rango sottomatrici $\mathbf{P}_{a12}(s)$ e $\mathbf{P}_{a21}(s)$

Come è già stato provato, la realizzazione in spazio di stato di $\mathbf{P}_a(s)$ si presenta nella forma:

$$\mathbf{P}_a(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{F} & \hat{G}_1 & \hat{G}_2 \\ \hline \hat{H}_1 & D & \gamma I_p \\ \hat{H}_2 & \gamma I_m & 0 \end{array} \right]$$

Utilizzando le definizioni delle matrici fornite nel paragrafo (2.3.1) relativo alla costruzione del modello aumentato, è possibile pervenire alle seguenti fattorizzazioni

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc} \hat{F} - \lambda I & \hat{G}_1 \\ \hat{H}_2 & \hat{D}_{21} \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc} -F_{11}^T - \lambda I & \hat{G}_1 \\ 0 & \hat{D}_{21} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ -G_1^T & 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} \hat{F} - \lambda I & \hat{G}_2 \\ \hat{H}_1 & \hat{D}_{12} \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc} I & -M_1^{-1} H_1^T \\ 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} -M_1^{-1} A_{11}^T M_1 - \lambda I & 0 & \\ & \hat{H}_1 & \hat{D}_{12} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Per le proprietà delle realizzazioni bilanciate si ha che la sottomatrice F_{11} risulta essere asintoticamente stabile [3]. Si può dunque concludere che $\mathbf{P}_{a12}(s)$ e $\mathbf{P}_{a21}(s)$ presentano rispettivamente rango di colonna e di riga pieno, ma non in corrispondenza degli autovalori di $-F_{11}$.

2) caratterizzazione degli scarti degli errori di sistema

Lemma 2.3.3. *Si consideri una funzione di trasferimento $\mathbf{W}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ avente valori singolari di Hankel σ_j .*

Si supponga inoltre che l'ingresso

$$u(t) = \begin{cases} v_j(-t) & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} \quad (2.3.50)$$

dove v_j rappresenta il vettore di Schmidt associato ad ogni valore singolare di Hankel $\sigma_j = \sigma_{r+1}$. Se $\mathbf{P}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-(r)$ e

$$\|\mathbf{W} - \mathbf{P}\|_\infty \leq \sigma_{r+1} \quad (2.3.51)$$

allora

$$(\mathbf{W} - \mathbf{P})u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sigma_{r+1}w_j(t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.3.52)$$

che trasformata secondo Laplace diventa

$$(\mathbf{W} - \mathbf{P})v_j(-s) = \sigma_{r+1}w_j(s)$$

Dimostrazione. Si ponga $\Delta_a(s) = (\mathbf{W}(s) - \mathbf{P}(s))$ e si scinda l'uscita corrispondente $y = \Delta_a u$ nella sua parte causale $y_+ \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ e anticausale $y_- \in \mathcal{L}(-\infty, 0]$. Per le (2.1.11) e (2.3.51), si ha che, qualsiasi porzione della matrice $\mathbf{P}(s)$, costituisce un'approssimazione ottima in norma di Hankel di grado r della funzione di trasferimento matriciale $\mathbf{W}(s)$. Poiché inoltre y_+ dipende solo dalla parte stabile di \mathbf{P} , grazie al lemma (2.1.1), è possibile concludere che $y_+ = \sigma_{r+1}w_j$. Inoltre, da $\|u\|_2 = 1$ e $\|\Delta_a\|_\infty \leq \sigma_{r+1}$ discende che

$$\sigma_{r+1}^2 \geq \|y\|_2^2 = \|y_-\|_2^2 + \|y_+\|_2^2 = \|y_-\|_2^2 + \sigma_{r+1}^2$$

da cui risulta evidente che $y_- = 0$ □

Applicando il lemma (2.3.3) al sistema aumentato $\mathbf{W}_a(s)$ e, considerando $\mathbf{P}_a(s)$ al posto di $\mathbf{P}(s)$, si giunge alle seguenti espressioni

$$\Delta_a(s)V_a(-s) = \sigma_{r+1}\mathbf{W}_a(s) \quad (2.3.53)$$

$$\widetilde{\Delta}_a\mathbf{W}_a(-s) = \sigma_{r+1}V_a(s) \quad (2.3.54)$$

dove

$$V_a(s) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{r+1}}}G_a^T(sI - F^T)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_a(s) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{r+1}}}H_a^T(sI - F)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_k \end{bmatrix}$$

sono le trasformate di Laplace delle coppie di vettori di Schmidt associate ai valori singolari di Hankel che risultano essere pari a $\sigma_{r+1}(\mathbf{W}(s))$.

3) risultato della trasformazione lineare fratta

Lemma 2.3.4. *Sia $\mathbf{P}(s)$ una matrice opportunamente partizionata*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}(s) & \mathbf{P}_{12}(s) \\ \mathbf{P}_{21}(s) & \mathbf{P}_{22}(s) \end{bmatrix}$$

in cui le dimensioni di ciascun blocco sono rispettivamente:

$$\mathbf{P}_{11}(s), p_1 \times m_1,$$

$$\mathbf{P}_{12}(s), p_1 \times m_2$$

$$\mathbf{P}_{21}(s), p_2 \times m_1$$

$$\mathbf{P}_{22}(s), p_2 \times m_2$$

con $p_1 \geq m_2$ e $m_1 \geq p_2$ e si consideri una matrice di trasferimento razionale \mathbf{Y} di dimensioni $p_1 \times m_1$. Si supponga inoltre che la sottomatrice $\mathbf{P}_{12}(s)$ ammetta inversa sinistra $\mathbf{P}_{12}^S(s)$ che $\mathbf{P}_{21}(s)$ abbia inversa destra $\mathbf{P}_{21}^D(s)$ ed infine che $\mathbf{P}_{22}(\infty) = 0$.

Allora, in corrispondenza ad un'opportuna matrice Ψ , si ha che

$$\mathbf{Y} = \mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}, \Psi) \quad (2.3.55)$$

se e solo se esistono due matrici razionali $\mathbf{Z}(s)$ con $\text{rank}(\mathbf{Z}) \geq p_1 - m_2$ e $\mathbf{N}(s)$ con $\text{rank}(\mathbf{N}) \geq m_1 - p_2$, tali che

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(s) - \mathbf{P}_{11}(s) & \mathbf{P}_{12}(s) \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(s) - \mathbf{P}_{11}(s) \\ \mathbf{P}_{21}(s) \end{bmatrix} \mathbf{N}(s) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.56)$$

Dimostrazione.

(\rightarrow) Le ipotesi fatte su $\mathbf{P}_{12}(s)$ e $\mathbf{P}_{21}(s)$ assicurano l'esistenza di una matrice $\mathbf{Z}(s)$ con $\text{rank}(\mathbf{Z}(s)) \geq p_1 - m_2$ e una matrice $\mathbf{N}(s)$ con $\text{rank}(\mathbf{N}(s)) \geq m_1 - p_2$ tali che $\mathbf{Z}(s)\mathbf{P}_{12}(s) = 0$ e $\mathbf{P}_{21}(s)\mathbf{N}(s) = 0$. In corrispondenza a $\mathbf{Z}(s)$ ed $\mathbf{N}(s)$, qualsiasi matrice $\mathbf{Y}(s)$ generata dalla (2.3.55) soddisfa le (2.3.56) dal momento che $\mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}(s), \Psi) = \mathbf{P}_{11}(s) + \mathbf{P}_{12}(s)(I - \mathbf{P}_{22}(s)\Psi)^{-1}\mathbf{P}_{21}(s)$. Il fatto che $\mathbf{P}_{22}(\infty) = 0$ assicura che $\mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}, \Psi)$ è propria.

(\leftarrow) Viceversa, se esistono le matrici $\mathbf{Z}(s)$ ed $\mathbf{N}(s)$, è possibile scegliere un'inversa destra $\mathbf{Z}^D(s)$ e un'inversa sinistra $\mathbf{N}^S(s)$ tali che

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{12}^S(s) \\ \mathbf{Z}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{12}(s) & \mathbf{Z}^D(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{m_2} & 0 \\ 0 & I_{p_1 - m_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{21}(s) \\ \mathbf{N}^S(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{21}^D(s) & \mathbf{N}(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{p_2} & 0 \\ 0 & I_{m_1 - p_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(s) - \mathbf{P}_{11}(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{12}(s) & \mathbf{Z}^D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{12}^S(s) \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} (\mathbf{Y}(s) - \mathbf{P}_{11}(s)) \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{21}^D(s) & \mathbf{N}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{21}(s) \\ \mathbf{N}^S(s) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}_{12}(s)\mathbf{P}_{12}^S(s)(\mathbf{Y}(s) - \mathbf{P}_{11}(s))\mathbf{P}_{21}^D(s)\mathbf{P}_{21}(s) \end{aligned}$$

in cui si è sfruttato il fatto che $\mathbf{Z}(s)(\mathbf{Y}(s) - \mathbf{P}_{11}(s))\mathbf{N}(s) = 0$. Definendo poi le matrici $\mathbf{X}(s) = \mathbf{P}_{12}^S(s)(\mathbf{Y}(s) - \mathbf{P}_{11}(s))\mathbf{P}_{21}^D(s)$ e $\Psi = \mathbf{X}(s)(I + \mathbf{P}_{22}(s)\mathbf{X})^{-1}(s)$, che è propria dal momento che $\mathbf{P}_{22}(\infty) = 0$, la (2.3.55) risulta essere soddisfatta. \square

È ora possibile determinare l'insieme delle soluzioni ottime del problema.

Teorema 2.3.5.

Sia $\mathbf{W}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ e si consideri $\gamma : \sigma_r > \gamma = \sigma_{r+1}(\mathbf{W}(s))$.

Allora ogni $\mathbf{R}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-(r)$ che soddisfa

$$\|\mathbf{W} - \mathbf{R}\|_\infty \leq \gamma$$

è generata da

$$\mathbf{R}(s) = \mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}_a, \mathbf{U}), \quad \mathbf{U}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-, \quad \|\mathbf{U}\|_\infty \leq \sigma_{r+1}^{-1} \quad (2.3.57)$$

Dove $\mathbf{P}_a(s)$ rappresenta la matrice costruita nel paragrafo (2.3.1) nell'ipotesi che $\gamma = \sigma_{r+1}$.

Dimostrazione.

(\rightarrow) Si consideri $\mathbf{R}(s)$ fornita dalla (2.3.57). Allora dal teorema (2.2.2) unitamente al fatto che $\Delta_a(s)$ rappresenta un passatutto, deriva che $\|\mathbf{W} - \mathbf{R}\|_\infty \leq \gamma$. Mentre dal lemma (2.2.4) e dalle proprietà delle sottomatrici $\mathbf{P}_{a12}(s)$ e $\mathbf{P}_{a21}(s)$ discende che $\mathbf{R}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-(r)$.

(\leftarrow) Viceversa, se $\mathbf{R}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-(r)$ e vale la disuguaglianza $\|\mathbf{W} - \mathbf{R}\|_\infty \leq \gamma$, allora i lemmi (2.3.4) e (2.3.3) dimostrano che deve esistere una matrice razionale propria $\mathbf{U}(s)$ tale che $\mathbf{R}(s) = \mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}_a, \mathbf{U})$. Poiché $\mathbf{P}_{a22}(\infty) = 0$, si ha che $\det(I - \mathbf{P}_{a22}\mathbf{U})(\infty) = 1$, mentre dal teorema (2.2.2) discende che $\|\mathbf{U}\|_\infty \leq \sigma_{r+1}^{-1}(\mathbf{W})$. Infine per provare che $\mathbf{U}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-$, si ricorre al lemma (2.2.4) ed alle proprietà riguardanti il rango delle sottomatrici $\mathbf{P}_{a12}(s)$ e $\mathbf{P}_{a21}(s)$. \square

Nel caso ottimo le dimensioni di $\mathbf{P}_a(s)$ scendono da $(p+m) \times (p+m)$ a $(p+m-\ell) \times (p+m-\ell)$. Di conseguenza anche le dimensioni del parametro $\mathbf{U}(s)$ diminuiscono conformemente passando da $p \times m$ a $(p-\ell) \times (m-\ell)$.

2.3.4 Teorema di Nehari

Si supponga che $\mathbf{W}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$. Allora

$$\|\mathbf{W}\|_H = \sup_{\mathbf{J} \in \mathcal{RH}_\infty^-} \|\mathbf{W} - \mathbf{J}\|_\infty$$

Ogni $\mathbf{J}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-$ tale che $\|\mathbf{W} - \mathbf{J}\|_\infty = \sigma_1(\mathbf{W})$ è generata da

$$\mathbf{J}(s) = \mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}_a, \mathbf{U}), \quad \mathbf{U} \in \mathcal{RH}_\infty^-, \quad \|\mathbf{U}\|_\infty \leq \sigma_1^{-1}(\mathbf{W}) \quad (2.3.58)$$

dove $\mathbf{P}_a(s)$ rappresenta la matrice costruita nel paragrafo (2.3.1) nell'ipotesi che $\gamma = \sigma_1(\mathbf{W}(s))$.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal teorema (2.3.5) ponendo $r = 0$ \square

2.4 Errore in \mathcal{L}_∞

Dal momento che i modelli di ordine ridotto vengono spesso utilizzati in problemi di controllo robusto, è necessario chiedersi se alla minimizzazione dell'errore secondo la norma di Hankel corrisponda una buona approssimazione in norma infinito.

Il legame fra i due tipi di norma è fornito dal Teorema di Nehari, il quale afferma che esiste una qualche $\mathbf{J}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^-$ tale che

$$\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}\|_H = \|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J}\|_\infty$$

da cui deriva

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}\|_\infty &= \|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J} + \mathbf{J}\|_\infty \\ &\leq \|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J}\|_\infty + \|\mathbf{J}\|_\infty \\ &= \|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}\|_H + \|\mathbf{J}\|_\infty \end{aligned} \quad (2.4.59)$$

Dato che il problema di minimizzare $\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}\|_H$ è già stato investigato, rimane solo da stabilire la grandezza di $\|\mathbf{J}\|_\infty$. Si pone $\mathbf{J}(\infty) = 0$ e, dalle proprietà relative ai sistemi bilanciati, è risaputo che $\|\mathbf{J}\|_\infty = \|\tilde{\mathbf{J}}\|_\infty$ non risulta essere maggiore del doppio della somma dei valori singolari di Hankel associati a $\tilde{\mathbf{J}}(s)$.

2.4.1 Valori singolari di Hankel di sistemi con errore ottimale

Il miglioramento che si ottiene sul limite dell'errore deriva dalle proprietà dei valori singolari di Hankel dei sistemi passatutto. Queste verranno utilizzate per stabilire un legame tra i valori singolari di $\hat{\mathbf{W}}(s)$ e di $\tilde{\mathbf{J}}_a(s)$.

Lemma 2.4.1.

Si supponga che $\Sigma = \begin{bmatrix} F & G \\ H & D \end{bmatrix}$ sia quadrata e soddisfi le equazioni dei sistemi passatutto del teorema (1.3.1). Si ipotizzi altresì che F di dimensioni $(n_1 + n_2) \times$

$(n_1 + n_2)$ abbia n_1 autovalori nel semipiano aperto sinistro e n_2 autovalori nel semipiano aperto destro, con $n_1 > n_2$. Se $\Sigma = \mathbf{W}(s) + \mathbf{J}(s)$ con $\mathbf{W}(s), \tilde{\mathbf{J}}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, allora

$$\sigma_i(\mathbf{W}(s)) = \begin{cases} 1 & i = 1, \dots, n_1 - n_2 \\ \sigma_{i-(n_1-n_2)}(\tilde{\mathbf{J}}(s)) & i = n_1 - n_2 + 1, \dots, n_1 \end{cases} \quad (2.4.60)$$

Dimostrazione. Tramite un opportuno cambiamento di base, si porti Σ nella seguente forma

$$\Sigma = \left[\begin{array}{cc|c} F_1 & 0 & G_1 \\ 0 & F_2 & G_2 \\ \hline H_1 & H_2 & D \end{array} \right]$$

dove F_1 e F_2 rappresentano rispettivamente i sottosistemi stabile e instabile di F . Quindi per qualche matrice X si ha che

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} F_1 & G_1 \\ H_1 & D - X \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} F_2 & G_2 \\ H_2 & X \end{bmatrix}$$

Siano \mathcal{W} e \mathcal{V} i grammiani di controllabilità e di osservabilità di Σ e siano essi partizionati nel seguente modo

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{W}_2 \\ \mathcal{W}_2^T & \mathcal{W}_3 \end{bmatrix} \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 & \mathcal{V}_2^T \\ \mathcal{V}_2 & \mathcal{V}_3 \end{bmatrix}$$

Poiché $\mathcal{W}\mathcal{V} = I$, $\mathcal{W}_1\mathcal{V}_1 = I - \mathcal{W}_2\mathcal{V}_2$ e dato che $\mathcal{V}\mathcal{W} = I$, $\mathcal{V}_2\mathcal{W}_2 = I - \mathcal{V}_3\mathcal{W}_3$ si ha

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - \mathcal{W}_1\mathcal{V}_1) &= \det(\lambda I - (I - \mathcal{W}_2\mathcal{V}_2)) \\ &= \det((\lambda - 1)I + \mathcal{W}_2\mathcal{V}_2) \\ &= (\lambda - 1)^{n_1-n_2} \det((\lambda - 1)I + \mathcal{V}_2\mathcal{W}_2) \\ &= (\lambda - 1)^{n_1-n_2} \det(\lambda I - \mathcal{V}_3\mathcal{W}_3) \end{aligned} \quad (2.4.61)$$

Il risultato segue da $\sigma_i^2(\mathbf{W}(s)) = \lambda_i(\mathcal{W}_1\mathcal{V}_1)$ e $\sigma_i^2(\tilde{\mathbf{J}}) = \lambda_i(\mathcal{W}_3\mathcal{V}_3)$ \square

Il lemma precedente viene applicato al caso di un sistema con errore ottimale.

Lemma 2.4.2.

Si supponga $\sigma_r(\mathbf{W}(s)) > \sigma_{r+1}(\mathbf{W}(s))$ e si considerino le matrici $\mathbf{W}_a(s)$ e $\mathbf{P}_a(s)$

nella forma ricavata nel paragrafo (2.3.1). Si abbia inoltre $\mathbf{P}_a(s) = \hat{\mathbf{W}}_a(s) + \mathbf{J}_a(s)$ con $\hat{\mathbf{W}}_a(s), \tilde{\mathbf{J}}_a(s) \in \mathcal{RH}_\infty$. Allora

$$\sigma_i(\mathbf{W}_a(s) - \hat{\mathbf{W}}_a(s)) = \sigma_{r+1}(\mathbf{W}_a(s)) \quad i = 1, \dots, 2r + k \quad (2.4.62)$$

$$\sigma_i(\tilde{\mathbf{J}}_a(s)) = \sigma_{1+2r+k}(\mathbf{W}_a(s) - \hat{\mathbf{W}}_a(s)) \quad i = 1, \dots, n - r \quad (2.4.63)$$

$$\leq \sigma_{i+r+k}(\mathbf{W}_a(s)) \quad i = 1, \dots, n - r - k \quad (2.4.64)$$

Dimostrazione. La costruzione di $\Delta_a(s) = \mathbf{W}_a(s) - \mathbf{P}_a(s)$ assicura che $\gamma^{-1}\Delta_a$ soddisfi le equazioni dei sistemi passatutto del teorema (1.3.1), con $\gamma = \sigma_{r+1}(\mathbf{W}_a(s))$. Inoltre $F_{\Delta_a}(s)$ è una matrice $(2n - k) \times (2n - k)$ dimensionale avente $n + r$ autovalori nel semipiano aperto sinistro e $n - r - k$ autovalori nel semipiano aperto destro. Applicando il lemma (2.4.1) al sistema $\gamma^{-1}\Delta_a(s)$, si ricavano le equazioni (2.4.62) e (2.4.63). La disuguaglianza (2.4.64) deriva dal teorema (2.3.2) per ogni $j \geq r + 1$

$$\begin{aligned} \sigma_j(\mathbf{W}_a(s) - \hat{\mathbf{W}}_a(s)) &= \sup_{\mathbf{K}_1 \in \mathcal{RH}_\infty(j-1)} \left\| \mathbf{W}_a - \hat{\mathbf{W}}_a - \mathbf{K}_1 \right\|_\infty \\ &\leq \sup_{\mathbf{K}_2 \in \mathcal{RH}_\infty(j-r-1)} \left\| \mathbf{W}_a - \mathbf{K}_2 \right\|_\infty \\ &= \sigma_{j-r}(\mathbf{W}_a(s)) \end{aligned} \quad (2.4.65)$$

□

2.4.2 Limite dell'errore

Lemma 2.4.3. *Se $\mathbf{W}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ esiste una matrice costante D_0 tale che $\|\mathbf{W} - D_0\|_\infty$ risulta essere inferiore o uguale della somma dei valori singolari di Hankel di $\mathbf{W}(s)$.*

Dimostrazione. Si ponga $\gamma = \sigma_n$ e si costruisca la corrispondente matrice $\mathbf{P}_a(s) \in \mathcal{RH}_\infty$. Il sistema $\mathbf{P}_a(s)$ ha grado di McMillan pari a $n - k_1$, dove k_1 rappresenta la molteplicità di σ_n e $\|\mathbf{W}_a - \mathbf{P}_a\| = \sigma_n$. Inoltre i valori singolari di $\mathbf{P}_a(s)$ coincidono con i $\sigma_i(\mathbf{W})$ dato che

$$\begin{aligned} \sigma_i^2(\mathbf{R}(s)) &= \lambda_i(\mathcal{W}_1 M_1 (M_1)^{-1} Q_1) \\ &= \lambda_i(\mathcal{W}_1 \mathcal{V}_1) \\ &= \sigma_i^2(\mathbf{W}(s)) \quad i = 1, \dots, n - k_1 \end{aligned} \quad (2.4.66)$$

con \mathcal{W}_1 , \mathcal{V}_1 e M_1 definite in (2.3.1).

Si pone quindi $\gamma = \sigma_{n-k_1}$ e si costruisce la corrispondente forma approssimata di $\mathbf{P}_a(s)$ con un errore pari a σ_{n-k_1} , grado $n - k_1 - k_2$ e valori singolari di Hankel σ_i , $i = 1, \dots, n - k_1 - k_2$ dove k_2 è la molteplicità di σ_{n-k_1} . Tale procedimento viene iterato fino ad ottenere una $\tilde{D}_a(s)$ costante e si definisce D_0 associandole il blocco in posizione (1, 1) di $\tilde{D}_a(s)$ avente dimensioni $p \times m$. \square

Si può ora procedere con la prova del risultato principale

Teorema 2.4.4.

Sia $\mathbf{W}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ con valori singolari σ_i e sia r tale che $\sigma_r > \sigma_{r+1}$. Allora esiste una funzione di trasferimento approssimante $\hat{\mathbf{W}}(s)$, con grado di McMillan pari a r , tale che $\left\| \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} \right\|_\infty$ risulta essere inferiore o uguale alla somma dei valori singolari di Hankel di $\mathbf{W}(s)$ più piccoli in senso stretto di σ_r .

Se tutti il valori singolari di Hankel più piccoli di σ_r sono distinti, allora

$$\left\| \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} \right\|_\infty \leq \sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n$$

Dimostrazione. Si ponga $\gamma = \sigma_{r+1}$ e si costruisca la corrispondente $\mathbf{P}_a(s)$. Mediante un opportuno cambiamento di base, si suddivida $\mathbf{P}_a(s)$ nei sottosistemi stabile e instabile in modo tale che risulti $\mathbf{P}_a(s) = \hat{\mathbf{W}}_a(s) + \mathbf{J}_a(s)$ con $\hat{\mathbf{W}}_a(s)$ avente grado di McMillan pari ad r . In corrispondenza di questa costruzione si ha

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{W}_a - \hat{\mathbf{W}}_a \right\|_\infty &= \left\| \mathbf{W}_a - \mathbf{P}_a + \mathbf{J}_a \right\|_\infty \\ &\leq \left\| \mathbf{W}_a - \mathbf{P}_a \right\|_\infty + \left\| \mathbf{J}_a \right\|_\infty \\ &= \sigma_{r+1} + \left\| \mathbf{J}_a \right\|_\infty \end{aligned} \tag{2.4.67}$$

\square

Per il lemma (2.4.2) i valori singolari di Hankel di $\tilde{\mathbf{J}}_a(s)$ sono inferiori o uguali ai valori singolari di Hankel di $\mathbf{W}_a(s)$ che risultano essere più piccoli in senso stretto di σ_{r+1} . Si può usare il procedimento descritto nel lemma (2.4.4) per scegliere $\hat{D} = \hat{\mathbf{W}}(\infty)$ in modo che $\left\| \mathbf{J}_a \right\|_\infty$ non superi la somma dei valori singolari di Hankel di $\mathbf{W}(s)$ che sono strettamente più piccoli di σ_{r+1} . Da ciò segue che a sua volta $\left\| \mathbf{W}_a - \hat{\mathbf{W}}_a \right\|_\infty$ non eccede la somma dei valori singolari di $\mathbf{W}(s)$ che

risultano essere più piccoli di σ_r . Si sceglie infine di identificare con $\hat{\mathbf{W}}(s)$ il blocco in posizione (1, 1) di $\hat{\mathbf{W}}_a(s)$.

Capitolo 3

Riduzione ottima di modelli a tempo discreto

Mentre il problema di riduzione ottima del modello nel continuo risale agli anni '80 [2], la sua trasposizione ai modelli in spazio di stato nel discreto risulta essere piuttosto recente [4], [5].

Prima di procedere ad illustrare nel dettaglio la risoluzione del problema, si fa brevemente cenno ad alcuni risultati significativi concernenti le proprietà dei segnali e dei sistemi a tempo discreto.

3.1 Segnali e sistemi nel discreto

Sia consideri la sequenza di segnali $\{s_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ dove t rappresenta l'indicatore del tempo. La norma ℓ_2 si definisce come

$$\|s\|_2 = \sqrt{\sum_{t=-\infty}^{\infty} \|s_t\|^2}$$

e lo spazio dei segnali ad essa associato, avente energia finita, è dato da

$$\ell_2 := \{s : \|s\|_2 < \infty\} \tag{3.1.1}$$

Si considerino quindi gli insiemi

$$\ell_{2+} = \{s \in \ell_2 : s_t = 0 \forall t < 0\} \quad \ell_{2-} = \{s \in \ell_2 : s_t = 0 \forall t \geq 0\}$$

ℓ_{2+} e ℓ_{2-} sono sottospazi di ℓ_2 e si ha che $\ell_2 = \ell_{2+} \oplus \ell_{2-}$. Infine si definiscono i proiettori ortogonali π_+ e π_- con

$$\pi_+ (\{s_t\}_{t=-\infty}^{\infty}) = \{s_t\}_{t=0}^{\infty} \in \ell_{2+} \quad \pi_- (\{s_t\}_{t=1}^{\infty}) = \{s_{-t}\}_{t=0}^{\infty} \in \ell_{2-}$$

Sia $S(\omega)$ la trasformata di Fourier a tempo discreto di $s \in \ell_2$, ovvero

$$S(\omega) = \hat{s}(e^{j\omega}) := \sum_{t=-\infty}^{\infty} s_t e^{-j\omega t}$$

L'insieme delle trasformate dei segnali $s \in \ell_2$ forma lo spazio \mathcal{L}_2 e per ogni $S \in \mathcal{L}_2$ si ha

$$\|S\|_2 := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S(\omega)|^2 d\omega} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S^T(\omega) S(\omega) d\omega} < \infty$$

Dalla ben nota identità di Parseval discende che $\|S\|_2 = \|s\|_2$.

Vale inoltre che

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{2+} \oplus \mathcal{L}_{2-}$$

Come fatto in precedenza, si definiscono i proiettori ortogonali Π_+ e Π_-

$$\Pi_+ [S(\omega)] = \sum_{t=0}^{\infty} s_t e^{-j\omega t} \in \mathcal{L}_{2+} \quad \Pi_- [S(\omega)] = \sum_{t=1}^{\infty} s_{-t} e^{j\omega t} \in \mathcal{L}_{2-}$$

Un sistema tempo invariante \mathbf{A} con m ingressi e p uscite può essere interpretato come un operatore lineare limitato e soddisfa la relazione ingresso-uscita $y = \mathbf{A}u$.

Si denoti con $\mathbf{A}(z)$ la trasformata zeta di \mathbf{A} .

Allora

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \text{ess sup}_{0 \leq \omega \leq 2\pi} \sigma_{\max}(\mathbf{A}(e^{j\omega})) = \sup_{\|u\|_2=1} \|\mathbf{A}u\|_2 \quad (3.1.2)$$

dove σ_{\max} rappresenta il massimo valore singolare. L'insieme di tali $\mathbf{A}(z)$ con $\|\mathbf{A}\|_{\infty} < \infty$ costituisce lo spazio \mathcal{L}_{∞} . In questo caso l'operatore di Hankel $\Gamma_{\mathbf{A}}$ associato a $\mathbf{A}(z)$ può essere convenientemente definito nel seguente modo

$$Y = \Gamma_{\mathbf{A}} U = \Pi_- [\mathbf{A}(z)U(z)] \in \mathcal{L}_{2-}^p, \quad U \in \mathcal{L}_{2+}^m \quad (3.1.3)$$

Quindi $\Gamma_{\mathbf{A}}$ è un operatore lineare da \mathcal{L}_{2+}^m a \mathcal{L}_{2-}^p e si ha che $\|\Gamma_{\mathbf{A}}\| \leq \|\mathbf{A}\|_{\infty}$ [6].

La (3.1.3) risulta essere equivalente alla seguente equazione matriciale

$$\begin{bmatrix} y(-1) \\ y(-2) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \dots \\ a_{-2} & a_{-3} & \dots & \dots \\ a_{-3} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3.1.4)$$

dove $\{a_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ rappresenta la risposta impulsiva di \mathbf{A} , mentre $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ e $\{y_{-t}\}_{t=1}^{\infty}$ sono le antitrasformate zeta di $U(z)$ e $Y(z)$. Si vuole far notare che la matrice di Hankel $H_{\mathbf{A}}$ dipende dalla sola parte anticausale della risposta impulsiva di \mathbf{A} e che il rango di $H_{\mathbf{A}}$ coincide con il grado della parte anticausale di $\mathbf{A}(z)$ [7].

3.2 Impostazione del problema

Si consideri la funzione di trasferimento matriciale strettamente causale e stabile $\mathbf{W}(z)$ avente grado di McMillan pari a n e dimensioni $p \times m$. Essa ammette espansione in serie di potenze

$$\mathbf{W}(z) = \sum_{t=1}^{\infty} w_t z^{-t}, \quad \mathbf{W}(z^{-1}) = \sum_{t=1}^{\infty} w_t z^t$$

Perciò $\mathbf{A}(z) = \mathbf{W}(z^{-1})$ risulta essere anticausale e stabile ed avere lo stesso grado di McMillan di $\mathbf{W}(z)$.

L'algoritmo di approssimazione ottima in norma di Hankel, che verrà illustrato, determina una $\hat{\mathbf{A}}(z)$ la cui parte anticausale abbia grado di McMillan pari a $r < n$ e tale che $\|\Gamma_A - \Gamma_{\hat{A}}\|$ sia minimizzata. Infine assegna a $\hat{\mathbf{W}}(z)$ la parte causale e stabile di $\hat{\mathbf{A}}(z^{-1})$.

Come già fatto nel caso continuo, si stabilisce un legame tra la decomposizione di Schmidt e i valori singolari della matrice di Hankel. Si supponga che questi ultimi siano organizzati in ordine decrescente e se ne consideri l' $(r+1)$ -esimo, σ_{r+1} . Siano inoltre u_{r+1} e v_{r+1} i vettori sinistro e destro associati all' $(r+1)$ -esimo valore singolare. Allora si ha

$$H_{\mathbf{A}} v_{r+1} = \sigma_{r+1} u_{r+1} \quad H_{\mathbf{A}}^T u_{r+1} = \sigma_{r+1} v_{r+1} \quad u_{r+1}^T u_{r+1} = v_{r+1}^T v_{r+1} = 1 \quad (3.2.5)$$

Inoltre siano $u_{r+1}(i)$ e $v_{r+1}(i)$ le componenti i -esime di u_{r+1} e v_{r+1} rispettivamente. Allora $Y(z) = \sigma_{r+1}U_{r+1}(z)$ e $X(z) = V_{r+1}(z)$ soddisfano la (3.1.3) con

$$U_{r+1}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} u_{r+1}(i)z^i \in \mathcal{L}_{2-}^p \quad V_{r+1}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} v_{r+1}(i)z^{-(i-1)} \in \mathcal{L}_{2+}^m \quad (3.2.6)$$

Se σ_{r+1} ha molteplicità $k > 1$ allora si ha che

$$\Gamma_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} V_{r+1} & \dots & V_{r+k} \end{bmatrix} = \sigma_{r+1} \begin{bmatrix} U_{r+1} & \dots & U_{r+k} \end{bmatrix}$$

in virtù dell'equivalenza fra (3.1.3) e (3.2.5).

Si può dimostrare [8] che tale relazione può essere riscritta nel seguente modo

$$(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}) \begin{bmatrix} V_{r+1} & \dots & V_{r+k} \end{bmatrix} = \sigma_{r+1} \begin{bmatrix} U_{r+1} & \dots & U_{r+k} \end{bmatrix} \quad (3.2.7)$$

Nonostante dunque i valori singolari σ_i comportino una decomposizione ai valori singolari associata ad una matrice di Hankel avente dimensione illimitata, essi possono essere ugualmente ottenuti con calcoli basati su matrici di dimensione finita.

Si consideri ora il sistema in forma discreta:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

dove F è una matrice quadrata di dimensioni $n \times n$ mentre G e H hanno dimensioni $n \times m$ e $p \times n$ rispettivamente. Sia $\mathbf{W}(z) = H(zI - F)^{-1}G$ la matrice di trasferimento associata al sistema e si supponga inoltre che la realizzazione (F, G, H) sia minima. Allora le ipotesi di stabilità e di causalità di $\mathbf{W}(z)$ implicano che le equazioni di Lyapunov

$$\mathcal{W} - F\mathcal{W}F^T = GG^T \quad (3.2.9)$$

$$Q - F^T Q F = H^T H \quad (3.2.10)$$

ammettano soluzioni $\mathcal{W} > 0$ e $Q > 0$. Si verifica inoltre che

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(Q\mathcal{W})} = \sqrt{\lambda_i(\mathcal{W}Q)}$$

Sia $\mu_i \in \Re^n$ l'autovettore di $\mathcal{W}Q$ corrispondente a σ_i

$$\mathcal{W}Q\mu_i = \sigma_i^2 \mu_i \quad (3.2.11)$$

Si definisca inoltre $\nu_i = \sigma_i^{-1}Q\mu_i$. Allora per $1 \leq i \leq n$

$$\mathcal{W}\nu_i = \sigma_i\mu_i \quad Q\mu_i = \sigma_i\nu_i \quad (3.2.12)$$

Da cui si ricava l'equazione duale della (3.2.11)

$$Q\mathcal{W}\nu_i = \sigma_i^2\nu_i \quad (3.2.13)$$

Si definiscano ora i seguenti vettori

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} \nu_r & \dots & \nu_{r+k} \end{bmatrix} \quad \tilde{U} = \begin{bmatrix} \mu_r & \dots & \mu_{r+k} \end{bmatrix}$$

Allora dalla (3.2.12) segue che

$$\mathcal{W}\tilde{V} = \tilde{U}\sigma_{r+1} \quad Q\tilde{U} = \tilde{V}\sigma_{r+1} \quad (3.2.14)$$

Si può verificare che l'approssimazione ottima in norma di Hankel nella forma (3.2.7) implica la seguente relazione:

$$\left[\mathbf{A}(z) - \hat{\mathbf{A}}(z) \right] \tilde{\mathbf{X}}(z) = \sigma_{r+1} \tilde{\mathbf{Y}}(z) \quad (3.2.15)$$

dove $\tilde{\mathbf{X}}(z) = G^T(zI_n - F^T)^{-1}\tilde{V}$ e $\tilde{\mathbf{Y}}(z) = z^{-1}H(z^{-1}I_n - F)^{-1}\tilde{U}$.

L'equazione duale della (3.2.15) è rispettivamente

$$\left[\mathbf{A}^T(z^{-1}) - \hat{\mathbf{A}}^T(z^{-1}) \right] \tilde{\mathbf{Y}}(z) = \sigma_{r+1} \tilde{\mathbf{X}}(z) \quad (3.2.16)$$

Lemma 3.2.1 (Esistenza di $\hat{\mathbf{A}}(z)$).

Sia $\mathbf{A}(z) = H(z^{-1}I_n - F)^{-1}G$ una funzione di trasferimento anticausale e stabile di dimensione $p \times m$ con $p \geq m$. Allora si ha che

i) $\hat{\mathbf{A}}(z)$ è la funzione di trasferimento approssimante di ordine r -esimo di $\mathbf{A}(z)$, se e solo se

$$\hat{\mathbf{A}}(z)G^T(zI_n - F^T)^{-1}\tilde{V} = H\mathcal{W}F^T(zI_n - F^T)^{-1}\tilde{V} \quad (3.2.17)$$

ii) Se l' $r+1$ -esimo valore singolare di Hankel ha molteplicità $k \geq m$ allora la funzione di trasferimento dell'errore $\Delta(z) = \hat{\mathbf{A}}(z) - \mathbf{A}(z)$ è di tipo passatutto, ovvero $\Delta(z) = \Delta^T(z^{-1})\Delta(z) = \sigma_{r+1}^2 I_m \forall(z)$.

Dimostrazione.

i) (\rightarrow) Dalla (3.2.15) segue che

$$\hat{\mathbf{A}}(z)G^T(zI_n - F^T)^{-1}\tilde{V} = \mathbf{A}(z)G^T(zI_n - F^T)^{-1}\tilde{V} - \sigma_{r+1}z^{-1}H(z^{-1}I_n - F)^{-1}\tilde{U} \quad (3.2.18)$$

Riscrivendo la (3.2.9) come

$$(z^{-1}I_n - F)\mathcal{W}(zI_n - F^T) = GG^T - F\mathcal{W}(zI_n - F^T) - (z^{-1}I_n - F)\mathcal{W}F^T \quad (3.2.19)$$

premultiplicando, inoltre, quest'ultima per $H(z^{-1}I_n - F)^{-1}$ e postmultiplicandola per $(zI_n - F^T)^{-1}\tilde{V}$, si ottiene la seguente espressione per $\mathbf{A}(z)$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(z)G^T(zI_n - F^T)^{-1}\tilde{V} &= H(z^{-1}I_n - F)^{-1}GG^T(zI_n - F^T)^{-1}\tilde{V} \\ &= H(I_n + (z^{-1}I_n - F)^{-1}F)\mathcal{W}\tilde{V} + H\mathcal{W}F^T(zI_n - F^T)^{-1}\tilde{V} \\ &= \sigma_{r+1}z^{-1}H(z^{-1}I_n - F)^{-1}\tilde{U} + H\mathcal{W}F^T(zI_n - F^T)^{-1}\tilde{V} \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso della (3.2.14). Sostituendo la (3.2.20) nella (3.2.18), si perviene alla (3.2.17), ovvero alla relazione cercata.

i) (\leftarrow) Viceversa se sussiste la (3.2.17) allora, in virtù della (3.2.18) e della (3.2.20), vale anche la (3.2.15).

ii) Si consideri

$$\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{X}}}(z) = \tilde{\mathbf{X}}^T(z^{-1})\tilde{\mathbf{X}}(z) = \tilde{V}^T(z^{-1}I_n - F)^{-1}GG^T(zI_n - F^T)^{-1}\tilde{V}.$$

Sempre dalla (3.2.9) si ottiene

$$\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{X}}}(z) = \tilde{V}^T\mathcal{W}\tilde{V} + \tilde{V}^TF(z^{-1}I_n - F)^{-1}\mathcal{W}\tilde{V} + \tilde{V}^T\mathcal{W}(zI_n - F^T)^{-1}F^T\tilde{V} \quad (3.2.21)$$

che può essere verificata sostituendo \tilde{V}^T al posto di H nella (3.2.20).

Analogamente si consideri

$$\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{Y}}}(z) = \tilde{\mathbf{Y}}^T(z^{-1})\tilde{\mathbf{Y}}(z) = \tilde{U}^T(zI_n - F^T)^{-1}H^TH(z^{-1}I_n - F)^{-1}\tilde{U}$$

Dalla (3.2.10) si ottiene allora l'espressione duale della (3.2.21), ovvero

$$\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{Y}}}(z) = \tilde{U}^TQ\tilde{U} + \tilde{U}^TF^T(zI_n - F^T)^{-1}Q\tilde{U} + \tilde{U}^TQ(z^{-1}I_n - F)^{-1}F\tilde{U} \quad (3.2.22)$$

In virtù della (3.2.14), si ha che

$$\begin{aligned}\tilde{V}^T \mathcal{W} \tilde{V} &= \sigma_{r+1} \tilde{V}^T \tilde{U} \\ \tilde{U}^T Q \tilde{U} &= \sigma_{r+1} \tilde{U}^T \tilde{V}\end{aligned}\tag{3.2.23}$$

da cui si evince che le matrici $\tilde{U}^T \tilde{V}$ e $\tilde{V}^T \tilde{U}$ sono entrambe simmetriche. Di conseguenza

$$\tilde{V}^T \mathcal{W} \tilde{V} = \sigma_{r+1} \tilde{V}^T \tilde{U} = (\sigma_{r+1} \tilde{V}^T \tilde{U})^T = \sigma_{r+1} \tilde{U}^T \tilde{V} = \tilde{U}^T Q \tilde{U}$$

quindi i termini costanti della (3.2.21) e della (3.2.22) coincidono. Inoltre, ricorrendo nuovamente alla (3.2.14), il termine anticausale della (3.2.21) diventa

$$\tilde{V}^T F(z^{-1} I_n - F)^{-1} \mathcal{W} \tilde{V} = \sigma_{r+1} \tilde{V}^T F(z^{-1} I_n - F)^{-1} \tilde{U} = \tilde{U}^T Q(z^{-1} I_n - F)^{-1} F \tilde{U}$$

e risulta essere uguale a quello anticausale della (3.2.22). Appare dunque chiaro che i termini costanti e anticausali della (3.2.21) e della (3.2.22) coincidono. Si ha perciò che $\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{X}}}(z) = \mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{Y}}}(z)$ per ogni z .

La (3.2.15), inoltre, implica che

$$\tilde{\mathbf{X}}^T(z^{-1}) \mathbf{S}_{\Delta}(z) \tilde{\mathbf{X}}(z) = \sigma_{r+1}^2 \tilde{\mathbf{Y}}^T(z^{-1}) \tilde{\mathbf{Y}}(z) = \sigma_{r+1}^2 \tilde{\mathbf{X}}(z^{-1}) \tilde{\mathbf{X}}(z)$$

con $\mathbf{S}_{\Delta}(z) = \Delta^T(z^{-1}) \Delta(z)$ dove $\Delta(z) = \hat{\mathbf{A}}(z) - \mathbf{A}(z)$. Sfruttando il fatto che $\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{X}}}(z) = \mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{Y}}}(z)$ si ha allora

$$\tilde{\mathbf{X}}^T(z^{-1}) [\sigma_{r+1}^2 I_m - \mathbf{S}_{\Delta}(z)] \tilde{\mathbf{X}}(z) = 0$$

Nel caso in cui $k \geq m$, si può concludere che $\mathbf{S}_{\Delta}(z) = \sigma_{r+1}^2 I_m$ □

3.3 Calcolo della soluzione ottima

Anche nel caso discreto il calcolo della soluzione ottima $\hat{\mathbf{A}}(z)$ sfrutta un procedimento di allpass embedding. L'obiettivo consiste dunque nel trovare una funzione di trasferimento $\hat{\mathbf{A}}(z)$ tale che la funzione di trasferimento dell'errore sia di tipo passatutto.

Prima di passare alla descrizione dell'algoritmo di embedding è necessario fare alcune ipotesi:

1. La realizzazione (F, G, H) di $\mathbf{A}(z)$ viene scelta minima e bilanciata. Quest'ultima ipotesi implica che i grammiani di controllabilità e di osservabilità rappresentino le uniche soluzioni delle equazioni di Lyapunov con \mathcal{W} e Q nella forma

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_{r+1}I_k \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_{r+1}I_k \end{bmatrix} \quad (3.3.24)$$

dove Σ_1 e Σ_2 sono diagonali e positive. Le (3.2.9) e (3.2.10) possono perciò essere riscritte nel seguente modo:

$$\Sigma_1 - F_{11}\Sigma_1F_{11}^T - \sigma_{r+1}F_{12}F_{12}^T = G_1G_1^T \quad (3.3.25)$$

$$-F_{11}\Sigma_1F_{21}^T - \sigma_{r+1}F_{12}F_{22}^T = G_1G_2^T \quad (3.3.26)$$

$$\sigma_{r+1}I_k - F_{21}\Sigma_1F_{21}^T - \sigma_{r+1}F_{22}F_{22}^T = G_2G_2^T \quad (3.3.27)$$

$$\Sigma_2 - F_{11}^T\Sigma_2F_{11} - \sigma_{r+1}F_{21}^TF_{21} = H_1^TH_1 \quad (3.3.28)$$

$$\sigma_{r+1}I_k - F_{12}^T\Sigma_2F_{12} - \sigma_{r+1}F_{22}^TF_{22} = H_2^TH_2 \quad (3.3.29)$$

$$-F_{11}^T\Sigma_2F_{12} - \sigma_{r+1}F_{21}^TF_{22} = H_1^TH_2 \quad (3.3.30)$$

dove le matrici F_{ij} , G_i e H_i sono i blocchi di F , G , H compatibili con il partizionamento di \mathcal{W} e Q .

2. la matrice di stato F è non singolare e G ha rango m con $m \leq p$
3. l'equazione matriciale $F_{21}^T = \Omega G_2^T$ ammette almeno una soluzione Ω avente dimensioni $(n-k) \times m$

L'ultima ipotesi è fondamentale per enunciare il prossimo lemma:

Lemma 3.3.1 (Realizzazione di $\hat{\mathbf{A}}(z)$).

Sia $\mathbf{W}(z) = H(zI_n - F)^{-1}G$ causale e stabile e sia $\hat{\mathbf{A}}(z) = \hat{H}(zI_{n-k} - \hat{F})^{-1}\hat{G} + \hat{D}$ la miglior approssimazione di $\mathbf{A}(z) = \mathbf{W}(z^{-1})$ in norma di Hankel con grado di McMillan minore o uguale ad r . Allora le ipotesi 1-3 implicano che

$$\hat{F} = F_{11}^T - \Omega G_1^T \quad \hat{H} = \gamma_1 - \hat{D}G_1^T \quad (3.3.31)$$

$$\hat{G} = \Omega \quad \hat{D} = H_1\Sigma_1\Omega + \sigma_{r+1}\Psi \quad (3.3.32)$$

per qualche coppia di matrici Ω , Ψ soddisfacenti

$$(i)F_{21}^T = \Omega G_2^T, \quad (ii)H_2F_{22}^T = \Psi G_2^T \quad (3.3.33)$$

dove $[\gamma_1 \quad \gamma_2] = H\mathcal{W}F^T$ con

$$\gamma_1 = H_1\Sigma_1F_{11}^T + \sigma_{r+1}H_2F_{12}^T, \quad \gamma_2 = H_1\Sigma_1F_{21}^T + \sigma_{r+1}H_2F_{22}^T \quad (3.3.34)$$

Dimostrazione. In entrambi i membri della (3.2.17) è presente il termine $(zI_n - F^T)^{-1}\tilde{V}$. Data la forma dei grammiani \mathcal{W} e Q in (3.3.24), si ha che $\tilde{U} = \tilde{V} = [0 \quad I_k]^T$. Per cui

$$\begin{aligned} (zI_n - F^T)^{-1}\tilde{V} &= \begin{bmatrix} zI_{n-k} - F_{11}^T & -F_{21}^T \\ -F_{12}^T & zI_k - F_{22}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (zI_{n-k} - F_{11}^T)^{-1}F_{21}^T \\ I_k \end{bmatrix} \mathbf{M}(z) \end{aligned}$$

dove $\mathbf{M}(z) = [(zI_k - F_{22}^T) - F_{12}^T(zI_{n-k} - F_{11}^T)^{-1}F_{21}^T]^{-1}$. La (3.2.17) ammette dunque la seguente forma equivalente

$$\hat{\mathbf{A}}(z) [G_2^T + G_1^T(zI_{n-k} - F_{11}^T)^{-1}F_{21}^T] = \gamma_2 + \gamma_1(zI_{n-k} - F_{11}^T)^{-1}F_{21}^T \quad (3.3.35)$$

Si ipotizzi che la funzione approssimante $\hat{\mathbf{A}}(z)$ sia propria con realizzazione $(\hat{F}, \hat{G}, \hat{H}, \hat{D})$. Considerando il limite per $z \rightarrow \infty$ della (3.3.35), si ottiene

$$\gamma_2 = \hat{D}G_2^T = H\mathcal{W}F^T [0 \quad I_k]^T \quad (3.3.36)$$

Dall'ipotesi (3) segue che

$$H_2F_{22}^T = \sigma_{r+1}^{-1}(\hat{D}G_2^T - H_1\Sigma_1F_{21}^T) = \Psi G_2^T$$

per qualche Ψ di dimensioni $p \times k$.

D'altro canto, la realizzazione associata alle matrici in (3.3.31), (3.3.32) implica che

$$\hat{\mathbf{A}}(z) = \left[\hat{D} + \gamma_1(zI_{n-k} - F_{11}^T)^{-1}\hat{G} \right] \left[I_m + G_1^T(zI_{n-k} - F_{11}^T)^{-1}\hat{G} \right]^{-1} \quad (3.3.37)$$

Postmoltiplicando per $\left[I_m + G_1^T(zI_{n-k} - F_{11}^T)^{-1}\hat{G} \right] G_2^T$

$$\hat{\mathbf{A}}(z) \left[I_m + G_1^T(zI_{n-k} - F_{11}^T)^{-1}\hat{G} \right] G_2^T = \left[\hat{D} + \gamma_1(zI_{n-k} - F_{11}^T)^{-1}\hat{G} \right] G_2^T \quad (3.3.38)$$

che, tenendo conto dell'ipotesi (3) e dell'equazione (3.3.36) risulta essere identica alla (3.3.35). \square

Si presti attenzione al fatto che, in generale, esiste più di una coppia di soluzioni (Ω, Ψ) . Tali coppie si possono ottenere mediante le inverse generalizzate di G_2 .

Il prossimo teorema identifica una particolare coppia (Ω, Ψ) che consente di ottenere un'approssimazione ottima in norma di Hankel attraverso un procedimento di embedding.

Sistemi passatutto

Lemma 3.3.2. *Si consideri la funzione di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ avente realizzazione minima (F, G, H, D) con F non singolare. Se si verifica che $\mathbf{H}^T(z^{-1})\mathbf{H}(z) = I$, allora esistono una matrice X e una matrice Y tali che*

$$\begin{aligned}
(i) \quad & Y - F^T Y F = H^T H \\
(ii) \quad & X - F X F^T = G G^T \\
(iii) \quad & X Y = I \\
(iv) \quad & G D^T + F X H^T = 0 \\
(v) \quad & D^T H + G^T Y F = 0 \\
(vi) \quad & D^T D + G^T Y G = D D^T + H X H^T = I
\end{aligned} \tag{3.3.39}$$

Lemma 3.3.3. *Si consideri la funzione di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ di dimensione $p \times m$ con $p \geq m$, avente realizzazione minima (F, G, H, D) . Sia inoltre Y una soluzione dell'equazione $Y - F^T Y F = H^T H$.*

Allora $\mathbf{H}^T(z^{-1})\mathbf{H}(z) = I_m$ se

$$(i) \quad D^T H + G^T Y F = 0 \tag{3.3.40}$$

$$(ii) \quad D^T D + G^T Y G = I_m \tag{3.3.41}$$

Teorema 3.3.4.

Si supponga che $\mathbf{A}(z)$ soddisfi le ipotesi 1-3 e si definisca la matrice $\Gamma_1 = \sigma_{r+1}^2 I_{n-k} - \Sigma_1 \Sigma_2$. Allora alla funzione di trasferimento approssimante ottima $\hat{\mathbf{A}}(z)$ avente come realizzazione le (3.3.31) (3.3.32), è associata la funzione d'errore di tipo passatutto $\Delta(z) = \hat{\mathbf{A}}(z) - \mathbf{A}(z)$, se e solo se le soluzioni Ω, Ψ delle equazioni (3.3.33)

$$(i) F_{21}^T = \Omega G_2^T, \quad (ii) H_2 F_{22}^T = \Psi G_2^T$$

sono tali che le equazioni nelle incognite Y_{21}, Y_{22}

$$(a) Y_{21}F - \hat{F}^T Y_{21} = \hat{H}^T H \quad (b) Y_{22} - \hat{F}^T Y_{22} \hat{F} = \hat{H}^T \hat{H} \quad (3.3.42)$$

ammettano a loro volta le soluzioni $Y_{21} = [\Gamma_1 \quad 0]$ e $Y_{22} = \Sigma_1 \Gamma_1$ e

$$\begin{bmatrix} \Omega^T & \Psi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{22} + \Sigma_1 H_1^T H_1 \Sigma_1 & \sigma_{r+1} \Sigma_1 H_1^T \\ \sigma_{r+1} H_1 \Sigma_1 & \sigma_{r+1}^2 I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ \Psi \end{bmatrix} = \sigma_{r+1}^2 I_m - G^T Q G \quad (3.3.43)$$

Dimostrazione. La prima parte della dimostrazione è finalizzata alla prova della (3.3.43). Si supponga che la funzione di trasferimento dell'errore $\Delta(z) = \hat{\mathbf{A}}(z) - \mathbf{A}(z) = H_\Delta(zI_{2n-k} - F_\Delta)^{-1}G_\Delta + D_\Delta$ sia di tipo passatutto con

$$\begin{aligned} F_\Delta &= \begin{bmatrix} F^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{F} \end{bmatrix} & G_\Delta &= \begin{bmatrix} F^{-1}G \\ \hat{G} \end{bmatrix} \\ H_\Delta &= \begin{bmatrix} HF^{-1} & \hat{H} \end{bmatrix} & D_\Delta &= \hat{D} + HF^{-1}G \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della seguente relazione (F è invertibile per l'ipotesi 2))

$$\mathbf{A}(z) = H(z^{-1}I_n - F)^{-1}G = -[HF^{-1}G + HF^{-1}(zI_n - F^{-1})^{-1}F^{-1}G]$$

Sia inoltre Y soluzione dell'equazione di Lyapunov $Y - F_\Delta^T Y F_\Delta = H_\Delta^T H_\Delta$ e si consideri il suo blocco in posizione (1, 1). Quest'ultimo deve soddisfare a sua volta l'equazione

$$F^T Y_{11} F - Y_{11} = H^T H \longrightarrow Y_{11} = -Q \quad (3.3.44)$$

mentre i blocchi (2, 1) e (2, 2) devono soddisfare la 3.3.42.

Inoltre, poiché $\Delta(z)$ dev'essere un passatutto, devono valere le seguenti equazioni ottenute da (3.3.40) e (3.3.41):

$$D_\Delta^T H_\Delta + G_\Delta^T Y F_\Delta = 0 \quad (3.3.45)$$

$$D_\Delta^T D_\Delta + G_\Delta^T Y G_\Delta = \sigma_{r+1}^2 I_m \quad (3.3.46)$$

Sostituendo le espressioni relative a F_Δ , G_Δ , H_Δ e D_Δ in (3.3.45) si ottiene:

$$\begin{aligned} D_\Delta^T H_\Delta + G_\Delta^T Y F_\Delta &= \begin{bmatrix} \hat{D}^T HF^{-1} + G^T F^{-T} H^T HF^{-1} \\ \hat{D}^T \hat{H} + G^T F^{-T} H^T \hat{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{G}^T Y_{21} F^{-1} - G^T F^{-T} Q F^{-1} \\ G^T F^{-T} Y_{12} \hat{F} + \hat{G}^T Y_{22} \hat{F} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{D}^T H + \hat{G}^T Y_{21} - G^T Q F \\ \hat{D}^T \hat{H} + G^T Y_{12} + \hat{G}^T Y_{22} \hat{F} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (3.3.47)$$

Quindi la (3.3.45) risulta essere equivalente ad entrambe le seguenti equazioni

$$\hat{D}^T H + \hat{G}^T Y_{21} - G^T Q F = 0 \quad (3.3.48)$$

$$\hat{D}^T \hat{H} + G^T Y_{12} + \hat{G}^T Y_{22} \hat{F} = 0 \quad (3.3.49)$$

Per quanto riguarda invece la (3.3.46), dopo qualche passaggio algebrico diventa

$$\sigma_{r+1}^2 I_m = D_{\Delta}^T D_{\Delta} + G_{\Delta}^T G_{\Delta} = \hat{D}^T \hat{D} + \hat{G}^T Y_{22} \hat{G} + G^T Q G$$

che può essere riscritta nella seguente forma

$$\begin{bmatrix} \hat{G}^T & \hat{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{22} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{G} \\ \hat{D} \end{bmatrix} = \sigma_{r+1}^2 I_m - G^T Q G \quad (3.3.50)$$

tenendo inoltre conto della (3.3.32) si ottiene

$$\begin{bmatrix} \hat{G} \\ \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-k} & 0 \\ H_1 \Sigma_1 & \sigma_{r+1} I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ \Psi \end{bmatrix} \quad (3.3.51)$$

per qualche coppia di soluzioni (Ω, Ψ) che soddisfa la (3.3.33). Si può dunque concludere che (3.3.46) e (3.3.43) sono equivalenti. Prima di procedere con la seconda parte della dimostrazione, si fa notare che la condizione in base alla quale $Y_{21} = [\Gamma_1 \ 0]$ è soluzione della (3.3.42(a)) equivale all'esistenza delle seguenti uguaglianze

$$i) F_{12}^T \Gamma_1 = H_2^T \hat{H} \quad ii) F_{11}^T \Gamma_1 - \Gamma_1 \hat{F} = H_1^T \hat{H} \quad (3.3.52)$$

Si andrà ora a dimostrare che la (3.3.48) è equivalente al fatto che $Y_{21} = Y_{12}^T = [\Gamma_1 \ 0]$ sia soluzione di (3.3.42(a)), mentre la (3.3.49) equivale al fatto che $Y_{22} = \Sigma_1 \Gamma_1$ risolva la (3.3.42(b)).

Innanzitutto la matrice \hat{H} in (3.3.31) può essere riscritta come

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \gamma_1 - \hat{D} G_1^T \\ &= H_1 \Sigma_1 F_{11}^T + \sigma_{r+1} H_2 F_{12}^T - \hat{D} G_1^T - H_1 \Sigma_1 \Omega G_1^T - \sigma_{r+1} \Psi G_1^T \\ &= H_1 \Sigma_1 \hat{F} + \sigma_{r+1} (H_2 F_{12}^T - \Psi G_1^T) \end{aligned} \quad (3.3.53)$$

A partire dalla (3.3.36), inoltre, si ha che

$$G \hat{D}^T + X_{12} \hat{H}^T = F W H^T \quad \text{con } X_{12}^T = [I_{n-k} \ 0] \quad (3.3.54)$$

In aggiunta da $F_{21}^T = \Omega G_2^T = \hat{G} G_2^T$ e $\hat{F} = F_{11}^T - G G_1^T$ si ricava

$$F X_{12} - X_{12} \hat{F}^T = G \hat{G}^T \text{ con } X_{12}^T = [I_{n-k} \quad 0] \quad (3.3.55)$$

Postmoltiplicando la (3.3.55) per $[\Gamma_1 \quad 0]$ si ottiene

$$F \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (X_{12} \hat{F}^T + G \hat{G}^T) \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \end{bmatrix}$$

che, utilizzando l'ipotesi $\Gamma_1 = \sigma_{r+1}^2 I_{n-k} - \Sigma_1 \Sigma_2$ risulta diventa

$$F(\sigma_{r+1}^2 I_n - \mathcal{W}Q) = (X_{12} \hat{F}^T + G \hat{G}^T) [\Gamma_1 \quad 0]$$

Riordinandola si ha

$$\sigma_{r+1}^2 F - X_{12} \hat{F}^T [\Gamma_1 \quad 0] = F \mathcal{W}Q + G \hat{G}^T [\Gamma_1 \quad 0]$$

Poiché

$$\sigma_{r+1}^2 F = \mathcal{W}QF + \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} F = \mathcal{W}QF + X_{12} [\Gamma_1 \quad 0] F$$

vale la seguente espressione

$$\mathcal{W}QF + X_{12} \left([\Gamma_1 \quad 0] F - \hat{F}^T [\Gamma_1 \quad 0] \right) = F \mathcal{W}Q + G \hat{G}^T [\Gamma_1 \quad 0] \quad (3.3.56)$$

Sia Y_{21} soluzione della (3.3.42(a)) allora, posto $\Pi_1 = [\Gamma_1 \quad 0] - Y_{21}$ e $\Pi_2 = \Pi_1 F - \hat{F}^T \Pi_1$, la (3.3.56) diventa

$$\mathcal{W}QF + X_{12} \hat{H}^T H = F \mathcal{W}Q + G \hat{G}^T Y_{21} + G \hat{G}^T \Pi_1 - X_{12} \Pi_2$$

ricorrendo alla (3.3.54)

$$\mathcal{W}QF + (F \mathcal{W}H^T - G \hat{D}^T) H = F \mathcal{W}Q + G \hat{G}^T Y_{21} + G \hat{G}^T \Pi_1 - X_{12} \Pi_2$$

Dall'ultima equazione discende che

$$\begin{aligned} \mathcal{W}QF - F \mathcal{W}(Q - H^T H) &= G(\hat{G}^T Y_{21} + \hat{D}^T H) + G \hat{G}^T \Pi_1 - X_{12} \Pi_2 \\ &\longleftrightarrow (\mathcal{W} - F \mathcal{W}F^T) QF \\ &= G(\hat{G}^T Y_{21} + \hat{D}^T H) + G \hat{G}^T \Pi_1 - X_{12} \Pi_2 \\ &\longleftrightarrow (\mathcal{W} - F \mathcal{W}F^T - G G^T) QF \\ &= G(\hat{G}^T Y_{21} + \hat{D}^T H - G^T QF) + G \hat{G}^T \Pi_1 - X_{12} \Pi_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

E poiché G ha rango pieno, si ha che $Y_{21} = [\Gamma_1 \ 0]$ se e solo se vale la (3.3.48).

Si riscriva ora la (3.3.49) come segue

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} (\hat{D}^T \hat{H} + G_1^T \Gamma_1 + \hat{G}^T Y_{22} \hat{F}) = 0$$

Postmoltiplicando la (3.3.25) per Γ_1 e, con un'opportuno riordinamento dei termini, risulta

$$\begin{aligned} \Sigma_1 \Gamma_1 &= F_{11} \Sigma_1 F_{11}^T \Gamma_1 + \sigma_{r+1} F_{12} F_{12}^T \Gamma_1 + G_1 G_1^T \Gamma_1 \\ &\text{per la (3.3.52)} \\ &= F_{11} \Sigma_1 (H_1^T \hat{H} + \Gamma_1 \hat{F}) + \sigma_{r+1} F_{12} H_2^T \hat{H} + G_1 G_1^T \Gamma_1 \\ &= F_{11} \Sigma_1 \Gamma_1 \hat{F} + (F_{11} \Sigma H_1^T + \sigma_{r+1} F_{12} H_2^T) \hat{H} + G_1 G_1^T \Gamma_1 \\ &\text{posto } F_{11} = \hat{F}^T + G_1 \hat{G}^T \\ &= \hat{F}^T \Sigma_1 \Gamma_1 \hat{F} + \gamma_1^T \hat{H} + G_1 (\hat{G}^T \Sigma_1 \Gamma_1 \hat{F} + G_1^T \Gamma_1) \\ &\text{per la (3.3.53)} \\ &= \hat{F}^T \Sigma_1 \Gamma_1 \hat{F} + (\hat{H}^T + G_1 \hat{D}^T) \hat{H} + G_1 (\hat{G}^T \Sigma_1 \Gamma_1 \hat{F} + G_1^T \Gamma_1) \\ &= \hat{F}^T \Sigma_1 \Gamma_1 \hat{F} + \hat{H}^T \hat{H} + G_1 (\hat{D}^T \hat{H} + \hat{G}^T \Sigma_1 \Gamma_1 \hat{F} + G_1^T \Gamma_1) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \Sigma_1 \Gamma_1 - \hat{F}^T \Sigma_1 \Gamma_1 \hat{F} - \hat{H}^T \hat{H} + G_1 \hat{G}^T (Y_{22} - \Sigma_1 \Gamma_1) \hat{F} \\ &= (\Sigma_1 \Gamma_1 - Y_{22}) - F_{11} (\Sigma_1 \Gamma_1 - Y_{22}) \hat{F} \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= G_2 \hat{D}^T \hat{H} + G_2 G_1^T \Gamma_1 + G_2 \hat{G}^T Y_{22} \hat{F} \\
&\text{servendosi della (3.3.36)} \\
&= \gamma_2^T \hat{H} + G_2 G_1^T \Gamma_1 + F_{21} Y_{22} \hat{F} \\
&= (F_{21} \Sigma_1 H_1^T + \sigma_{r+1} F_{22} H_2^T) \hat{H} + G_2 G_1^T \Gamma_1 + F_{21} Y_{22} \hat{F} \\
&= F_{21} \Sigma_1 (H_1^T \hat{H} + \Gamma_1 \hat{F}) + \sigma_{r+1} F_{22} H_2^T \hat{H} + G_2 G_2^T \Gamma_1 + F_{21} (Y_{22} - \Sigma_1 \Gamma_1) \hat{F} \\
&\text{usando la (3.3.52)} \\
&= (F_{21} \Sigma_1 F_{11}^T + G_2 G_1^T) \Gamma_1 + \sigma_{r+1} F_{22} F_{12}^T \Gamma_1 + F_{21} (Y_{22} - \Sigma_1 \Gamma_1) \hat{F} \\
&= (F_{21} \Sigma_1 F_{11}^T + G_2 G_1^T \sigma_{r+1} F_{22} F_{12}^T) \Gamma_1 + F_{21} (Y_{22} - \Sigma_1 \Gamma_1) \hat{F} \\
&\text{servendosi della (3.3.26)} \\
&= F_{21} (Y_{22} - \Sigma_1 \Gamma_1) \hat{F} \\
&= -F_{21} (\Sigma_1 \Gamma_1 - Y_{22}) \hat{F}
\end{aligned}$$

Si conclude quindi che la (3.3.49) risulta essere vera se e solo se $Y_{22} = \Sigma_1 \Gamma_1$ è soluzione della (3.3.42(b)) \square

Dall'analisi del teorema (3.3.4) si nota che, per $k \geq m$ e se il rango di G è uguale ad m , la (3.3.33) ammette un'unica coppia di soluzioni (Ω, Ψ) . La funzione di trasferimento approssimante che soddisfa la (3.2.17) ammette a sua volta un'unica soluzione data dalla (3.3.37) che, in virtù del lemma (3.2.1) fornisce una funzione di trasferimento dell'errore di tipo passatutto. Nel caso in cui $k < m$, la (3.3.33) ammette più soluzioni, la maggior parte delle quali non porta ad una funzione di trasferimento dell'errore di tipo passatutto.

Si studia dunque l'algoritmo nell'eventualità che G_2 abbia rango $k < m$ e G_1 abbia rango m .

Tutte le soluzioni della (3.3.33) vengono parametrizzate nel seguente modo

$$\begin{bmatrix} \hat{G} \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{21}^T \\ H_2 F_{22}^T \end{bmatrix} G_2^+ + \begin{bmatrix} \omega \\ \psi \end{bmatrix} G_{2\perp} \quad (3.3.57)$$

dove $G_2^+ = (G_2 G_2^T)^{-1} G_2$ e la matrice $G_{2\perp}$, di dimensioni $(m - k) \times m$, ha rango pari a $(m - k)$ in modo tale che si verifichi $G_{2\perp} = 0$. Si ha allora che ω e ψ hanno

rispettivamente dimensioni $(n-k) \times (m-k)$ e $p \times (m-k)$. Si riscrive la (3.3.52) come

$$\begin{aligned} Y_{pm} &= -F^T Y_{12} + Y_{21} F_{11}^T + H^T \gamma_1 - \begin{bmatrix} H^T H_1 \Sigma_1 + Y_{12} & \sigma_{r+1} H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{21}^T \\ H_2 F_{22}^T \end{bmatrix} G_2^+ G_1^T \\ &= \begin{bmatrix} \Gamma_1 & H_1^T \\ 0 & H_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-k} & 0 \\ H_1 \Sigma_1 & \sigma_{r+1} I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \psi \end{bmatrix} G_{2\perp} G_1^T \end{aligned} \quad (3.3.58)$$

Dalla (3.3.49) e tenendo conto delle relazioni $G^T Y_{12} = G_1^T \Gamma_1$ e $Y_{22} = \Sigma_1 \Gamma_1$, si ricava quanto segue

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{D}^T \hat{H} + G^T Y_{12} + \hat{G}^T Y_{22} \hat{F} \\ &= \hat{D}^T (\gamma_1 - \hat{D} G_1^T) + G_1^T \Gamma_1 + \hat{G}^T Y_{22} F_{11}^T - \hat{G}^T Y_{22} \hat{G} G_1^T \\ &= \hat{D}^T \gamma_1 + G_1^T \Gamma_1 + \hat{G}^T Y_{22} F_{11}^T - (\hat{D}^T \hat{D} + \hat{G}^T Y_{22} \hat{G}) G_1^T \\ &= \hat{D}^T \gamma_1 + G_1^T \Gamma_1 + \hat{G}^T Y_{22} F_{11}^T - (\sigma_{r+1}^2 I_m - G^T \mathcal{W} G) G_1^T \end{aligned}$$

e trasponendo quanto ottenuto risulta

$$\begin{aligned} G_1 (\sigma_{r+1}^2 I_m - G^T \mathcal{W} G) - \Gamma_1 G_1 &= F_{11} Y_{22} \hat{G} + \gamma_1^T H_1 \Sigma_1 \hat{G} + \sigma_{r+1} \gamma_1^T \Psi \\ &= \begin{bmatrix} F_{11} Y_{22} + \gamma_1^T H_1 \Sigma_1 & \sigma_{r+1} \gamma_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{G} \\ \Psi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sostituendo la (3.3.57) nell'equazione appena ricavata e postmultiplicando per G_1^T si ottiene

$$\begin{aligned} Z_{pm} &= \left(G_1 (\sigma_{r+1}^2 I_m - G^T \mathcal{W} G) - \Gamma_1 G_1 - \begin{bmatrix} F_{11} Y_{22} + \gamma_1^T H_1 \Sigma_1 & \sigma_{r+1} \gamma_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{21}^T \\ H_2 F_{22}^T \end{bmatrix} G_2^+ \right) G_1^T \\ &= \begin{bmatrix} F_{11} Y_{22} & \gamma_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-k} & 0 \\ H_1 \Sigma_1 & \sigma_{r+1} I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \psi \end{bmatrix} G_{2\perp} G_1^T \end{aligned}$$

Combinando le due espressioni trovate per Y_{pm} e Z_{pm} , si ricava la seguente significativa equazione

$$\begin{bmatrix} Y_{pm} \\ Z_{pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{12} & H^T \\ F_{11} Y_{22} & \gamma_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-k} & 0 \\ H_1 \Sigma_1 & \sigma_{r+1} I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \psi \end{bmatrix} G_{2\perp} G_1^T \quad (3.3.59)$$

Si noti che la prima matrice all'inizio del secondo membro della (3.3.59) non ha rango di colonna pieno, infatti

$$\begin{bmatrix} Y_{12} & H^T \\ F_{11}Y_{22} & \gamma_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \lambda \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} \mu = -\Gamma_1^{-1}H_1^T\lambda \\ H_2^T\lambda = 0 \end{cases}$$

Dunque se la coppia (ω_0, ψ_0) soddisfa la (3.3.59) tutte le soluzioni di quest'ultima hanno la seguente parametrizzazione

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega \\ \psi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{n-k} & 0 \\ H_1\Sigma_1 & \sigma_{r+1}I_p \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\Gamma_1^{-1}H_1^T \\ I_p \end{bmatrix} H_{2_\perp} \Phi \\ &= \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{n-k} & 0 \\ -\sigma_{r+1}^{-1}H_1\Sigma_1 & \sigma_{r+1}^{-1}I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Gamma_1^{-1}H_1^T \\ I_p \end{bmatrix} H_{2_\perp} \Phi \\ &= \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Gamma_1^{-1}H_1^T \\ \sigma_{r+1}^{-1}(I_p + H_1\Sigma_1\Gamma_1^{-1}H_1^T) \end{bmatrix} H_{2_T} \Phi \\ &:= M_0 + M_1\Phi \end{aligned} \quad (3.3.60)$$

dove $H_2^T H_{2_\perp} = 0$, $[H_2 \ H_{2_\perp}]$ è non singolare e quadrata e Φ è una matrice avente dimensioni $(p-k) \times (m-k)$. Affinché la funzione di trasferimento dell'errore sia effettivamente di tipo passatutto, occorre soddisfare un ultimo vincolo del teorema (3.3.4) che è dato da

$$\begin{bmatrix} \Omega^T & \Psi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{22} + \Sigma_1 H_1^T H_1 \Sigma_1 & \sigma_{r+1} \Sigma_1 H_1^T \\ \sigma_{r+1} H_1 \Sigma_1 & \sigma_{r+1}^2 I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ \Psi \end{bmatrix} = \sigma_{r+1}^2 I_m - G^T Q G \quad (3.3.61)$$

Si definiscano

$$N_0 = G_{2_\perp} (\sigma_{r+1}^2 - G_1^T \Sigma_1 G_1) G_{2_\perp}^T \quad N_1 = \begin{bmatrix} Y_{22} + \Sigma_1 H_1^T H_1 \Sigma_1 & \sigma_{r+1} \Sigma_1 H_1^T \\ \sigma_{r+1} H_1 \Sigma_1 & \sigma_{r+1}^2 I_p \end{bmatrix}$$

Avvalendosi delle (3.3.57) e (3.3.60), si ottiene l'espressione relativa all'ultimo vincolo

$$N_0 = (M_0 + M_1\Phi)^T N_1 (M_0 + M_1\Phi)$$

che essendo una forma quadratica di Φ può essere riscritta nel modo seguente

$$\begin{bmatrix} -\Phi^T & I_{m-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_1^T N_1 M_0 & -M_1^T N_1 M_1 \\ M_0^T N_1 M_0 - N_0 & M_0^T N_1 M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m-k} \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (3.3.62)$$

con

$$H_{\Phi} = \begin{bmatrix} -M_1^T N_1 M_0 & -M_1^T N_1 M_1 \\ M_0^T N_1 M_0 - N_0 & M_0^T N_1 M_1 \end{bmatrix}$$

Hamiltoniana. Quindi la (3.3.62) è una equazione algebrica di Riccati non standard nel continuo. Dal momento che l'esistenza della soluzione Φ è legata a quella della funzione di trasferimento approssimante ottima in norma di Hankel, essa esiste se e solo se $\hat{\mathbf{A}}(z)$ risulta essere propria.

3.4 Calcolo delle soluzioni ottime

Al fine di determinare tutte le soluzioni ottime del problema di approssimazione in norma di Hankel, è necessario supporre che G_2 abbia rango strettamente minore di m . Poiché solitamente si ha $k = 1$ e $G_2 \neq 0$, la situazione più comune si verifica per $m > k = 1$. In questa sede verrà considerato il caso più generale in cui $m > k \geq 1$. Data una funzione di trasferimento $\mathbf{A}(z) = H(z^{-1}I_n - F)^{-1}G$, si definisce una funzione di trasferimento aumentata

$$\mathbf{A}_h(z) = H_h(z^{-1}I_n - F)^{-1}G \quad H_h = [H^T \quad 0]^T \quad (3.4.63)$$

Ovviamente se $\mathbf{A}(z)$ soddisfa le ipotesi 1-3, esse rimangono valide anche per $\mathbf{A}_h(z)$. Inoltre tutti i valori singolari di Hankel rimangono invariati. È dunque possibile sfruttare il procedimento di embedding illustrato nel precedente paragrafo, per ottenere una funzione di trasferimento approssimante $\hat{\mathbf{A}}(z)$ tale che l'errore ad essa associato $\Delta_h(z) = \hat{\mathbf{A}}_h(z) - \mathbf{A}_h(z)$ sia di tipo passatutto. A partire da una funzione di trasferimento $\mathbf{A}_a(z)$ quadrata, avente dimensioni maggiori di $\mathbf{A}(z)$, l'obiettivo consiste nell'ottenere una funzione di trasferimento approssimante ottima $\hat{\mathbf{A}}_a(z)$ tale che la funzione di trasferimento dell'errore $\Delta_a(z) = \hat{\mathbf{A}}_a(z) - \mathbf{A}_a(z)$ sia quadrata e di tipo passatutto. Formalizzando quanto detto, sia

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_a(z) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= H_a(z^{-1}I_n - F)^{-1}G_a = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} (z^{-1}I_n - F)^{-1} \begin{bmatrix} G & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

la funzione di trasferimento aumentata le cui dimensioni verranno fissate in seguito e sia

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}_a(z) &= \hat{H}_a(zI_{n-k} - \hat{F})^{-1}\hat{G}_a + \hat{D}_a \\ &= \begin{bmatrix} \hat{H} \\ \hat{H}_\alpha \end{bmatrix} (zI_{n-k} - \hat{F})^{-1} \begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{G}_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{D} & \hat{D}_{12} \\ \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

un'approssimazione ottima in norma di Hankel di $\mathbf{A}_a(z)$. Allora la funzione di trasferimento dell'errore

$$\Delta_a(z) = \hat{\mathbf{A}}_a(z) - \mathbf{A}_a(z) = H_{\Delta_a}(zI_{n-k} - F_{\Delta_a})^{-1}G_{\Delta_a}$$

risulta essere quadrata e le matrici della realizzazione ad essa associata sono rispettivamente

$$\begin{aligned}F_{\Delta_a} &= \begin{bmatrix} F^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{F} \end{bmatrix} & G_{\Delta_a} &= \begin{bmatrix} F^{-1}G_a \\ \hat{G}_a \end{bmatrix} \\ H_{\Delta_a} &= \begin{bmatrix} H_aF^{-1} & \hat{H}_a \end{bmatrix} & D_{\Delta_a} &= H_aF^{-1}G_a + \hat{D}_a\end{aligned}$$

Vale inoltre il seguente risultato

Lemma 3.4.1. *Se $\hat{\mathbf{A}}(z)$ è una funzione di trasferimento approssimante ottima in norma di Hankel di $\mathbf{A}(z)$, allora esistono le matrici \hat{G}_β e \hat{D}_a tali che $\Delta_a = \hat{\mathbf{A}}_a(z) - \mathbf{A}_a(z)$ è quadrata e di tipo passatutto. In aggiunta, si ha che le equazioni di Lyapunov*

$$X - F_{\Delta_a}X F_{\Delta_a}^T = G_{\Delta_a}G_{\Delta_a}^T \quad Y - F_{\Delta_a}^T Y F_{\Delta_a} = H_{\Delta_a}^T H_{\Delta_a} \quad (3.4.64)$$

ammettono le seguenti soluzioni

$$X = \begin{bmatrix} -\Sigma_1 & 0 & I_{n-k} \\ 0 & -\sigma_{r+1}I_k & 0 \\ I_{n-k} & 0 & \Sigma_2\Gamma_1^{-1} \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} -\Sigma_2 & 0 & \Gamma_1 \\ 0 & -\sigma_{r+1}I_k & 0 \\ \Gamma_1 & 0 & \Sigma_1\Gamma_1 \end{bmatrix} \quad (3.4.65)$$

e dunque $XY = \sigma_{r+1}I_{2n-k}$, in cui $\Gamma_1 = \sigma_{r+1}^2 I_{n-k} - \Sigma_1 \Sigma_2$

Dalla (3.3.53) sostituendo \hat{H} con \hat{H}_α , \hat{D} con \hat{D}_a e G_1 con $[G_1 \ 0]$, si ottiene

$$\hat{H}_\alpha + \hat{D}_{21}G_1^T = 0 \quad \text{con} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} \hat{H}_\alpha & \hat{D}_{21} \end{bmatrix} = k_1 \quad (3.4.66)$$

Analogamente dall'equazione relativa al passatutto $D_{\Delta_a}^T H_{\Delta_a} + G_{\Delta_a}^T Y F_{\Delta_a} = 0$ si ricava

$$\hat{D}_{12}^T \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} + \hat{G}_\beta^T \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{con} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} \hat{D}_{12}^T & \hat{G}_\beta^T \end{bmatrix} = k_2 > 0 \quad (3.4.67)$$

Lemma 3.4.2. *Se la matrice $\hat{\mathbf{A}}_a(z)$ avente dimensioni $\ell \times \ell$ con $\ell > \max\{p, m\}$ è una funzione approssimante ottima di $\mathbf{A}_a(z)$, allora*

$$\ell = p + \text{rank} \begin{bmatrix} \hat{H}_\alpha & \hat{D}_{12} \end{bmatrix} = m + \text{rank} \begin{bmatrix} \hat{D}_{12}^T & \hat{G}_\beta^T \end{bmatrix}$$

Dimostrazione. In virtù della (3.4.66) esiste una funzione di trasferimento approssimante ottima

$$\hat{\mathbf{A}}_h(z) = \begin{bmatrix} \hat{D} \\ \hat{D}_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{H} \\ \hat{H}_\alpha \end{bmatrix} (zI_{n-k} - \hat{F})^{-1} \hat{G}$$

di $\mathbf{A}_h(z)$. Si è detto che \hat{H}_α e \hat{D}_{21} hanno esattamente k_1 righe. In caso contrario esse devono avere più di k_1 righe e deve esistere una matrice U tale che

$$U \begin{bmatrix} \hat{H}_\alpha & \hat{D}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_\alpha & \tilde{D}_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in cui le matrici \tilde{H}_α e \tilde{D}_{21} hanno esattamente $p + k_1$ righe. In questo caso il procedimento di square embedding implica che la funzione di trasferimento dell'errore $\Delta_a(z)$ abbia dimensioni maggiori di $(p + k_1) \times (p + k_1)$. Da ciò deriva che

$$U_a \Delta_a(z) = \begin{bmatrix} I_{p+k_1} & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} \quad \Delta_a(z) = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(z) & \Delta_{12}(z) \\ 0 & \Delta_{22}(z) \end{bmatrix}$$

dove il blocco $\Delta_{11}(z)$ ha dimensioni $(p + k_1) \times (p + k_1)$. Poiché $U_a \Delta_a(z)$ risulta ancora essere di tipo allpass, dev'essere $\Delta_{12}(z) = 0$. Si deduce quindi che \hat{H}_α e \hat{D}_{21} possono sempre essere scelte in modo da avere esattamente k_1 righe. Lo stesso ragionamento si può estendere alla (3.4.67), ovvero anche \hat{G}_β e \hat{D}_{12} possono essere scelte in modo da contare esattamente k_2 colonne. Si ha dunque che $\ell = p + k_1 = m + k_2$ \square

Lemma 3.4.3. *Se la realizzazione (F, G_a, H_a) di $\mathbf{A}_a(z)$ è minima, allora anche le realizzazioni associate a $\hat{\mathbf{A}}_a$ e a $\Delta_a(z)$ risultano essere minime*

Proprietà dei blocchi $\hat{\mathbf{A}}_{12}(z)$ e $\hat{\mathbf{A}}_{21}(z)$

Come è già stato puntualizzato, $\hat{\mathbf{A}}_a(z)$ si presenta nella seguente forma

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}_a(z) &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}(z) & \hat{\mathbf{A}}_{12}(z) \\ \hat{\mathbf{A}}_{21}(z) & \hat{\mathbf{A}}_{22}(z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{H} \\ \hat{H}_\alpha \end{bmatrix} (zI_{n-k} - \hat{F})^{-1} \begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{G}_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{D} & \hat{D}_{12} \\ \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Per la (3.4.66) il rango di \hat{D}_{21} è esattamente pari ad k_1 . Considerando la realizzazione data dalle (3.3.31), (3.3.32) e la (3.4.66), si può scrivere la seguente fattorizzazione

$$\begin{bmatrix} \hat{F} - zI_{n-k} & \hat{G} \\ \hat{H}_\alpha & \hat{D}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}^T - zI_{n-k} & \hat{G} \\ 0 & \hat{D}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-k} & 0 \\ -G_1^T & I_m \end{bmatrix}$$

da cui si evince che $\hat{\mathbf{A}}_{21}(z)$ ha rango di riga pieno per ogni z eccetto in corrispondenza degli autovalori appartenenti alla sottomatrice F_{11} .

Analogamente la (3.4.67) implica che il rango di \hat{D}_{12}^T è uguale a k_2 . Dalla combinazione della (3.4.67) e della (ii) di (3.3.52), si può verificare che vale

$$\begin{bmatrix} \hat{F} - zI_{n-k} & \hat{G}_\beta \\ \hat{H} & \hat{D}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-k} & -\Gamma_1^{-1} H_1^T \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1^{-1} F_{11}^T \Gamma_1 - zI_{n-k} & 0 \\ \hat{H} & \hat{D}_{12} \end{bmatrix}$$

Dunque $\hat{\mathbf{A}}_{12}(z)$ ha rango di colonna pieno per ogni z eccetto in corrispondenza degli autovalori appartenenti alla sottomatrice F_{11} .

Il prossimo lemma, riguardante la caratterizzazione delle trasformazioni lineari fratte, è fondamentale per poter ricavare tutte le soluzioni ottime del problema di riduzione del modello.

Lemma 3.4.4.

Sia $\mathbf{H}(z)$ una matrice di trasferimento quadrata e di tipo passatutto e siano \mathbf{H}_{ij} i blocchi in posizione ij di $\mathbf{H}(z)$ per $i, j = 1, 2$. Si definisce funzione di trasferimento lineare fratta

$$\mathbf{Y}(z) = \mathcal{F}(\mathbf{H}(z), \mathbf{X}(z)) = \mathbf{H}_{11}(z) + \mathbf{H}_{12}(z)\mathbf{X}(z)(I - \mathbf{H}_{22}(z)\mathbf{X}(z))^{-1}\mathbf{H}_{21}(z)$$

Si supponga che

- i) le realizzazioni di $\mathbf{H}(z)$ e $\mathbf{X}(z)$ siano entrambe minime
- ii) $\mathbf{H}_{12}(z)$ e $\mathbf{H}_{21}(z)$ non presentino zeri sul cerchio unitario e neppure al di fuori di esso
- iii) $\mathbf{H}_{12}(z)$ e $\mathbf{H}_{21}(z)$ abbiano rispettivamente rango di colonna e di riga pieni
- iv) $\mathbf{H}(z)$ abbia r poli all'esterno del cerchio unitario

Allora

- a) $\|\mathbf{Y}\|_\infty \leq 1$ se e solo se $\|\mathbf{X}\|_\infty \leq 1$
- b) $\mathbf{Y}(z)$ ha r poli all'esterno del cerchio di raggio unitario se e solo se a sua volta $\mathbf{X}(z^{-1})$ non presenta alcun polo al di fuori del cerchio stesso

Teorema 3.4.5.

Si supponga che $\hat{\mathbf{A}}_a(z)$ di dimensioni $(p+m-k) \times (p+m-k)$ sia un'approssimazione ottima in norma di Hankel di $\mathbf{A}_a(z)$. Allora tutte le funzioni approssimanti ottime si ottengono da

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_P(z) &= \mathcal{F}_\ell(\hat{\mathbf{A}}_a(z), \mathbf{P}(z)) \\ &= \hat{\mathbf{A}}(z) + \hat{\mathbf{A}}_{12}(z)\mathbf{P}(z)(I_{k_1} - \hat{\mathbf{A}}_{22}(z)\mathbf{P}(z))^{-1}\hat{\mathbf{A}}_{21}(z) \end{aligned}$$

per una qualche matrice $\mathbf{P}(z^{-1})$ di dimensioni $k_1 \times k_2 = (m-k) \times (p-k)$ stabile e causale con $\|\mathbf{P}\|_\infty \leq \sigma_{r+1}^{-1}$

Dimostrazione. Innanzitutto, sfruttando l'espressione introdotta nel paragrafo (3.2) relativamente a $\tilde{\mathbf{X}}(z)$, si ottiene

$$\hat{\mathbf{A}}_{21}(z)\tilde{\mathbf{X}}(z) = \left[\hat{D}_{21} + \hat{H}_\alpha(zI_{n-k} - \hat{F})^{-1}\hat{G} \right] \left[G_1^T(zI_{n-k} - F_{11}^T)^{-1}F_{21}^T + G_2^T \right] \mathbf{M}(z) = 0$$

e dunque si ha che $\hat{\mathbf{A}}_P(z)$ soddisfa la (3.2.15). Volendolo mostrare servendosi della (3.3.54), con \hat{D}^T sostituita da $\begin{bmatrix} \hat{D}^T & \hat{D}_{21}^T \end{bmatrix}$ e H^T da $\begin{bmatrix} H^T & 0 \end{bmatrix}$, dev'essere $G_2\hat{D}_{21}^T = 0$. Dalla (3.4.66) si ricava

$$\hat{D}_{21}G_1^T(zI_{n-k} - F_{11}^T)^{-1}F_{21}^T = -\hat{H}_\alpha(zI_{n-k} - F_{11}^T)^{-1}F_{21}^T$$

inoltre per la $F_{11}^T - \hat{F} = \hat{G}G_1^T$ vale la seguente uguaglianza

$$\hat{H}_\alpha(zI_{n-k} - \hat{F})^{-1} \hat{G}G_1^T(zI_{n-l} - F_{11}^T)^{-1} F_{21}^T = \hat{H}_\alpha(zI_{n-k} - \hat{F})^{-1} (F_{11}^T - \hat{F})(zI_{n-k} - F_{11}^T)^{-1} F_{21}^T$$

mediante calcolo diretto si ha dunque che

$$\hat{\mathbf{A}}_{21}(z) \tilde{\mathbf{X}}(z) \mathbf{M}^{-1}(z) = 0$$

Appurato inoltre che $\hat{\mathbf{A}}_{21}(z)$ ha dimensioni $(m - k) \times m$ e rango di riga pieno per quasi ogni z , e che $\tilde{\mathbf{X}}(z)$ ha dimensioni $k \times m$ e rango di colonna pieno per quasi ogni z , tutte le funzioni di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ soddisfacenti la relazione $\mathbf{H}_X(z) \tilde{\mathbf{X}}(z) = 0$ devono ammettere la forma $\mathbf{H}_X(z) = \hat{\mathbf{H}}_X(z) \hat{\mathbf{A}}_{21}(z)$ per qualche $\hat{\mathbf{H}}_X(z)$. In modo duale è possibile verificare che

$$\hat{\mathbf{A}}_{12}^T(z^{-1}) \tilde{\mathbf{Y}}(z) = (\hat{D}_{12}^T H_1 + \hat{B}_\beta^T \Gamma_1)(z^{-1} I_{n-k} - F_{11})^{-1} F_{12} \tilde{\mathbf{M}}(z) = 0$$

con $\tilde{\mathbf{M}}(z)$ una qualche funzione di trasferimento in \mathcal{L}_∞ . Dunque $\mathbf{A}_P(z)$ soddisfa anche la (3.2.16). Lo stesso ragionamento effettuato in precedenza porta a concludere che $\mathbf{H}_Y(z) \tilde{\mathbf{Y}}(z) = 0$ comporta $\mathbf{H}_Y(z) = \hat{\mathbf{H}}_Y(z) \hat{\mathbf{A}}_{12}^T(z)$ per qualche $\hat{\mathbf{H}}_Y(z)$. Inoltre il vincolo su $\mathbf{P}(z)$ implica che $\hat{\mathbf{A}}_P(z)$ abbia esattamente $r - 1$ poli al di fuori del cerchio di raggio unitario.

Per dimostrare infine che $\hat{\mathbf{A}}_P(z)$ include tutte le funzioni di trasferimento ottime, si presti attenzione al fatto che ciascuna soluzione ottima si presenta nella forma $\hat{\mathbf{A}}_P(z) = \hat{\mathbf{A}}(z) + \hat{\mathbf{A}}_{12}(z) P_0(z) \hat{\mathbf{A}}_{21}(z)$ per qualche $P_0(z) = \mathbf{P}(z)(I_{k_1} - \hat{\mathbf{A}}_{22}(z) \mathbf{P}(z))^{-1}$. Poiché $\hat{\mathbf{A}}_{12}(z)$ e $\hat{\mathbf{A}}_{21}(z)$ hanno rispettivamente rango di colonna e di riga pieno per ogni z sul cerchio unitario e al di fuori di esso, il lemma(3.4.4) completa la dimostrazione. \square

3.5 Norma \mathcal{L}_∞ dell'errore di approssimazione

Nel calcolo dei margini di errore in \mathcal{L}_∞ , utile ai fini del controllo, interverrà la funzione di trasferimento $\hat{\mathbf{W}}(z^{-1})$ che si ricorda essere la parte anticausale di $\hat{F}(z)$.

Un limite d'errore risulta infatti essere maggiormente significativo in termini di

$$\|\hat{\mathbf{W}} - \hat{\mathbf{W}}\|_\infty$$

Teorema 3.5.1 (Limite inferiore). *Sia $\hat{\mathbf{A}}(z)$ la funzione di trasferimento approssimante ottima di $\mathbf{A}(z) = \mathbf{W}(z^{-1}) = H(z^{-1}I_n - F)G$. Allora esiste una $\hat{\mathbf{W}}(z)$ avente grado di McMillan minore o uguale di $r - 1$ e una funzione di trasferimento propria strettamente causale $\mathbf{J}(z)$ tale che $\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J}\|_\infty \leq \gamma$, se e solo se $\gamma \geq \sigma_{r+1}$*

Dimostrazione. Se $\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J}\|_\infty \leq \gamma$, allora

$$\gamma \geq \|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J}\|_\infty \geq \|\Gamma_{\mathbf{A}} - \Gamma_{\hat{\mathbf{A}}}\| \geq \sigma_{r+1}$$

Viceversa se $\gamma = \sigma_{r+1}$ allora $\hat{\mathbf{A}}(z)$ viene ottenuta tramite il procedimento di embedding di $\mathbf{A}(z)$. La parte anticausale di $\hat{\mathbf{A}}(z)$ non ha più di r poli. Quindi $\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{J}\|_\infty \leq \gamma$ \square

Al fine di stabilire un limite superiore alla norma, si scriva $\hat{\mathbf{A}}(z) = \hat{\mathbf{W}}(z^{-1}) + \mathbf{J}(z^{-1})$ e le si associ la seguente disuguaglianza triangolare

$$\|\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}\|_\infty \leq \|\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}\|_\infty + \|\mathbf{J}\|_\infty$$

L'obiettivo consiste dunque nel determinare $\|\mathbf{J}\|_\infty$ dal momento che $\|\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}\|_\infty$ è di tipo passatutto con modulo pari a σ_{r+1} .

Lemma 3.5.2. *Sia $\hat{\mathbf{A}}(z) = \hat{\mathbf{W}}(z^{-1}) + \mathbf{J}(z^{-1})$ una funzione di trasferimento approssimante ottima con $\mathbf{J}(z^{-1})$ strettamente propria. Allora $\sigma_i(\mathbf{J}) = \sigma_{i+r+k}$ per $i = 1, \dots, n - k - r$.*

Dimostrazione. Siano X e Y le soluzioni delle equazioni di Lyapunov in (3.4.64). Essendo $XY = YX = \sigma_{r+1}^2 I_{2n-k}$, $X_{11}Y_{11} = \sigma_{r+1}^2 I_n - X_{12}Y_{12}$, $Y_{21}X_{12} = \sigma_{r+1}^2 I_{n-k} - Y_{22}X_{22}$, e poiché

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_n - X_{11}Y_{11}) &= \det(\lambda I_n - (\sigma_{r+1}^2 I_n - X_{12}Y_{12})) - \det((\lambda - \sigma_{r+1}^2)I_n + X_{12}Y_{12}) \\ &= (\lambda - \sigma_{r+1}^2)^k \det(\lambda I_{n-k} - Y_{22}X_{22}) \end{aligned}$$

Da $X_{22}Y_{22} = \Sigma_1 \Sigma_2$, e $X_{11}Y_{11} = \text{diag}(\Sigma_1 \Sigma_2, \sigma_{r+1}^2 I_k)$

$$\lambda_i(X_{11}Y_{11}) = \begin{cases} \lambda_i(X_{22}Y_{22}) & i = 1, \dots, r \\ \sigma_{r+1}^2 & i = r, \dots, r+k \\ \lambda_{i-k}(X_{22}Y_{22}) & i = r+k, \dots, n \end{cases}$$

\square

Visto che i primi r autovalori di X_{22} e Y_{22} sono negativi, $\sqrt{\lambda_i(X_{22})Y_{22}}$ rappresenta l' i -esimo valore singolare di Hankel di $\hat{\mathbf{W}}(z^{-1})$ ovvero la parte anticausale di $\hat{\mathbf{A}}(z)$ per $i = 1, \dots, r$.

In modo analogo, poiché gli ultimi $(n - r - k)$ autovalori dei blocchi X_{22} e Y_{22} sono positivi, l'autovalore

$$\sqrt{\lambda_{i+r-1}(X_{22}Y_{22})} = \sqrt{\lambda_{i+r+k}(X_{11}Y_{11})}$$

costituisce l' i -esimo valore singolare di Hankel di $\mathbf{J}(z)$ per $i = 1, \dots, n - r - k$. Il fatto che $\sqrt{\lambda_i(X_{11}Y_{11})}$ rappresenta l' i -esimo valore singolare di Hankel di $\mathbf{A}(z)$, conclude la dimostrazione.

Corollario 3.5.3. *Sia (F, G, H) una realizzazione minima della matrice di trasferimento quadrata $\mathbf{A}(z)$ con F stabile. Nell'ipotesi che $\mathbf{A}(z)$ abbia $\eta \leq n$ valori singolari singolari di Hankel fra loro distinti σ_{i_j} con $j = 1, \dots, \eta$ allora esiste una matrice costante D_0 tale che*

$$\|\mathbf{A} - D_0\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{\eta} \sigma_{i_j} \quad (3.5.68)$$

Dimostrazione. Scegliendo $\hat{\mathbf{A}}_\eta(z)$ con $r + 1 = n$ come funzione di trasferimento approssimante ottima, si ha che $\hat{\mathbf{A}}_\eta(z)$ dev'essere anticausale. Dai lemmi (3.4.1) e (3.5.2), discende che i primi η valori singolari di $\hat{\mathbf{A}}_\eta(z)$ coincidono con quelli di $\mathbf{A}(z)$ e che $\|\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}_\eta\|_\infty = \sigma_n = \sigma_{i_\eta}$. Applicando l'algoritmo di approssimazione su $\hat{\mathbf{A}}_\eta(z)$, si ottiene la funzione di trasferimento $\hat{\mathbf{A}}_{\eta-1}(z)$ i cui valori singolari risultano questa volta essere coincidenti con i primi $\eta - 1$ di $\mathbf{A}(z)$. Si ha dunque che

$$\|\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}_{\eta-1}\|_\infty \leq \|\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}_\eta\|_\infty + \|\hat{\mathbf{A}}_\eta - \hat{\mathbf{A}}_{\eta-1}\|_\infty = \sigma_{i_\eta} + \sigma_{i_{\eta-1}}$$

Per induzione, la (3.5.68) vale per qualche matrice costante D_0 che rappresenta la somma di tutte le matrici costanti associate ad ogni iterazione dell'algoritmo. \square

Sfruttando il risultato del corollario, si ha che $\mathbf{W}(z)$ ammette la seguente decomposizione

$$\mathbf{W}(z) = D_0 + \sum_{j=1}^{\eta} \sigma_{i_j} S_{i_j}(z)$$

con $S_{i_j}(z)$ di tipo passatutto. Vale allora la seguente disuguaglianza

$$\|\mathbf{A}\|_\infty \leq \bar{\sigma}(D_0) + \|\mathbf{A} - D_0\|_\infty \leq 2 \sum_{j=1}^{\eta} \sigma_{i_j}$$

in virtù del fatto che

$$\bar{\sigma}(D_0) \leq \sup_{|z|>1} \bar{\sigma}(\mathbf{W}(z) - D_0) = \|\mathbf{A} - D_0\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{\eta} \sigma_{i_j}$$

Teorema 3.5.4. *Sia $\hat{\mathbf{A}}(z) = \hat{\mathbf{W}}(z^{-1}) + \mathbf{J}(z^{-1})$ una funzione di trasferimento approssimante ottima di $\mathbf{A}(z) = \mathbf{W}(z^{-1})$, dove entrambe le funzioni $\hat{\mathbf{W}}(z)$ e $\mathbf{J}(z^{-1})$ hanno tutti i poli all'interno del cerchio di raggio unitario e con $\mathbf{J}(z^{-1})$ strettamente propria. Si supponga inoltre che $\mathbf{A}(z)$ abbia η valori singolari di Hankel distinti con $\sigma_{r+1} = \sigma_{i_{r+1}}$ e che $\hat{\mathbf{W}}(z)$ abbia grado di McMillan pari a r . Allora vale la seguente disuguaglianza che definisce un limite superiore per la norma di Hankel dell'errore*

$$\left\| \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} \right\|_\infty \leq \sum_{j=r+1}^{\eta} \sigma_{i_j} \quad (3.5.69)$$

Dimostrazione. Per la disuguaglianza triangolare, $\left\| \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}} \right\|_\infty \leq \left\| \mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}} \right\|_\infty + \left\| \mathbf{J} \right\|_\infty$. Poiché $\mathbf{A}(z) - \hat{\mathbf{A}}(z)$ ha modulo pari a σ_{r+1} e dato che, per il corollario (3.5.3) la norma infinito di \mathbf{J} non supera la somma dei valori singolari di Hankel di $\mathbf{A}(z)$, la disuguaglianza (3.5.69) risulta essere soddisfatta. \square

Bibliografia

- [1] K. Z. J. C. Doyle and K. Glover, *Robust and Optimal Control*. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [2] K. Glover, “All optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their \mathcal{L}_∞ - error bounds,” *International Journal of Control*, vol. 39, no. 6, pp. 1115–1193, 1984.
- [3] M. Green and D. J. N. Limebeer, *Linear Robust Control*. New Jersey: Prentice Hall Information and System Sciences Series, 1995.
- [4] G. Gu, “All optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their \mathcal{L}_∞ error bounds in discrete - time,” *International Journal of Control*, vol. 78, no. 6, pp. 408–423, 2005.
- [5] —, “All optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their \mathcal{L}_∞ error bounds in discrete - time,” *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3742–3747, 2002.
- [6] S.-Y. Kung and D. W. Lin, “Optimal hankel-norm model reductions: Multivariable systems,” *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, vol. AC-26, no. 4, pp. 832–852, 1981.
- [7] C. K. Chui and Chen, *Discrete \mathcal{H}_∞ Optimization*. New Jersey: Springer, 1997.
- [8] V. M. A. D. Z. Arov and M. G. Krein, “Analytic properties of schmidt pairs for a hankel operator and the generalized schurtakagi problem,” *Math. USSR Sbornik*, vol. 16, no. 31, pp. 31–73, 1971.

- [9] J. A. Ball and A. C. M. Ran, “Optimal hankel norm model reductions and wiener-hopf factorization i: the canonical case,” *Siam J. Control and Optimization*, vol. 25, no. 2, pp. 362–382, 1987.
- [10] K. Glover, “A tutorial on model reduction,” *From Data to Model*, pp. 26–48, 1989.