



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE DEI SISTEMI INDUSTRIALI
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCATRONICA

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Un modello semplificato per la valutazione delle prestazioni di robot a cavi

Relatore: prof. Giovanni Boschetti

Laureando: Marco Bianconi
1068376-IMC

ANNO ACCADEMICO: 2015-16

SOMMARIO

In questo lavoro di tesi sui robot a cavi si propone un indice di prestazione massima garantita direzionale che considera organo terminale, cavi, rocchetti e motori. La prestazione valutata è l'accelerazione massima che l'organo terminale può effettuare in un range di velocità. Questo indice è molto utile per verificare a priori la possibilità di eseguire una legge di moto. Il calcolo dell'accelerazione massima garantita viene effettuato massimizzando l'equazione che descrive la dinamica del robot a velocità nulla. Per calcolare la velocità massima si cerca il massimo dell'equazione della dinamica sostituendo il termine di accelerazione appena trovato. Il tutto avviene nel rispetto dei vincoli di coppie e tensione. Dato che l'indice prestazionale è direzionale per un organo terminale che non ruota, si fornisce il modello semplificato del robot grazie all'equazione di Lagrange ed al concetto di inerzia ridotta. Per calcolare questo indice si forniscono due procedure di calcolo, una per il modello completo ed una per il modello semplificato e se ne verifica l'uguaglianza. Si propone anche un nuovo metodo di soluzione del problema di dinamica inversa che calcoli le tensioni usando la soluzione particolare della *wrench equation* ed una soluzione omogenea che porti al rispetto dei vincoli di tensioni e di coppia. Infine si calcola questo indice per un robot piano a quattro motori, due gradi di libertà, con organo terminale puntiforme. Si verifica tramite simulazione che una legge di moto che richieda la massima prestazione sia effettivamente producibile dal robot senza uscire dai vincoli di tensione e coppia.

Superare gli altri
è avere la forza,
superare sè stessi
è essere forti

RINGRAZIAMENTI

Il primo ringraziamento va a mamma e papà per essermi sempre stati accanto, per avermi sostenuto e dato la possibilità di studiare. Ringrazio anche i miei fratelli, Lorenzo e Mattia, per essermi sempre stati vicino, per l'incoraggiamento ed i preziosi consigli.

Un ringraziamento particolare è per il Prof.re Giovanni Boschetti per la sua continua presenza ed il sostegno fornitomi in questo lavoro di tesi.

Un ringraziamento va anche ai dottorandi del laboratorio di Robotica, in particolare a Roberto per la disponibilità e la pazienza nel rispondere a tutti i quesiti matematici che gli ponevo ed a Chiara per la disponibilità a rispondere alle mie domande e per la gioia e la simpatia contagiosa che la caratterizzano.

Un grandissimo ringraziamento va a tutti gli amici perché mi hanno sempre sostenuto in questi anni.

Un sentito e speciale ringraziamento va a Ludovico e Gabriele che, durante questo percorso di laurea magistrale, mi hanno supportato ma soprattutto sopportato e anche per quella bella e sana amicizia che è nata che continuerà a crescere.

Per ultimo, ma non per importanza, ringrazio Fabio, "Il Righe", che fin da quando ci siamo conosciuti, all'inizio del primo anno, non ha mai fatto mancare una bella idea nella quale buttarsi e soprattutto un sorriso, un sostegno, una battuta, un consiglio ed un aiuto grazie ai quali i ricordi di questi anni al DTG saranno sicuramente più gioiosi.

INDICE

1	INTRODUZIONE	1
2	CARATTERISTICHE DEI ROBOT A CAVI	5
2.1	Vantaggi	5
2.2	Svantaggi	5
2.3	Usi principali	6
2.4	Workspace	6
2.5	Indici di prestazione	7
2.6	Actuated e Constrained	8
3	NUOVI INDICI DI PRESTAZIONE	9
3.1	Introduzione	9
3.2	Precedenti indici di prestazione	11
3.3	Modello semplificato	14
3.3.1	Richiami di dinamica	14
3.3.2	Calcolo del modello semplificato	16
3.4	Nuovi indici di prestazione	18
3.5	Calcolo delle tensioni	25
4	CASO STUDIO: CINEMATICA E DINAMICA	29
4.1	Cinematica	29
4.2	Dinamica	32
4.3	Modello semplificato	34
4.4	Calcolo nuovi indici	35
4.5	Verifica Indice	45
	Conclusioni	55
	BIBLIOGRAFIA	57

ELENCO DELLE FIGURE

Figura 1	Esempio applicativo di un RoboCrane e schema di un Charlotte	1
Figura 2	Esempi applicativi dei robot a cavi Ipanema e Marionet	2
Figura 3	Esempio di un Meribot ed Fast in fase di costruzione	2
Figura 4	Schema generico di un robot a cavi con m motori e n gradi di libertà	9
Figura 5	Schema delle forze generalizzate applicate al motore i del robot a cavi	11
Figura 6	Schema generale di un robot a cavi con m motori ad 1 gdl	16
Figura 7	Schema semplificato di un robot a cavi in moto rettilineo ricavabile dall'equazione di Lagrange	17
Figura 8	Schema utilizzato per ricavarsi la cinematica di un robot a cavi	30
Figura 9	Schema utilizzato per ricavarsi la dinamica di un robot a cavi	33
Figura 10	Schema delle forze generalizzate applicate al motore di un robot a cavi	34
Figura 11	Schema semplificato di robot a cavi valido per spostamenti rettilinei	35
Figura 12	Traiettoria seguita dal robot a cavi nello spazio di lavoro	36
Figura 13	Accelerazione massima garantita calcolata sul modello completo di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea	37
Figura 14	Tensioni che forniscono l'accelerazione massima garantita per il modello completo	37
Figura 15	Range di velocità nel quale si garantisce l'accelerazione massima calcolata sul modello completo di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea	38
Figura 16	Decelerazione massima garantita calcolata sul modello completo di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea	38
Figura 17	Tensioni che forniscono la decelerazione massima garantita per il modello completo	39

Figura 18	Range di velocità nel quale si garantisce la decelerazione calcolata sul modello completo di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea 39
Figura 19	Accelerazione massima garantita calcolata sul modello semplificato di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea 40
Figura 20	Tensioni che forniscono l'accelerazione massima garantita basandosi sul modello semplificato 40
Figura 21	Range di velocità nel quale si garantisce l'accelerazione massima calcolata sul modello semplificato di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea 41
Figura 22	Decelerazione massima garantita calcolata sul modello semplificato di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea 41
Figura 23	Tensioni che forniscono la decelerazione massima garantita basandosi sul modello semplificato 42
Figura 24	Range di velocità nel quale si garantisce la decelerazione calcolata sul modello semplificato di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea 42
Figura 25	Differenza tra le accelerazioni massime garantite in un range di velocità calcolate sul modello completo e sul modello semplificato di un robot a cavi in moto lungo una traiettoria rettilinea 43
Figura 26	Differenza tra le velocità massime del modello completo e del modello semplificato tali da garantire il valore di accelerazione massima garantita calcolato 44
Figura 27	Differenza tra le decelerazioni massime garantite in un range di velocità calcolate sul modello completo e sul modello semplificato di un robot a cavi in moto lungo una traiettoria rettilinea 44
Figura 28	Differenza tra le velocità massime del modello completo e del modello semplificato tali da garantire il valore di decelerazione massima garantita calcolato 45
Figura 29	Legge di moto richiesta al robot a cavi 46

- Figura 30 Confronto tra l'accelerazione massima, la decelerazione massima e l'accelerazione desiderata all'organo terminale di un robot a cavi in moto rettilineo 46
- Figura 31 Confronto tra la velocità massima che l'organo terminale e la velocità desiderata all'organo terminale in un moto rettilineo 47
- Figura 32 Coppie da applicare al robot a cavi per ottenere la legge di moto rettilinea desiderata 47
- Figura 33 Schema a blocchi per risolvere la dinamica diretta del robot a cavi 48
- Figura 34 Confronto tra l'accelerazione desiderata e l'accelerazione ottenuta dal robot a cavi in moto rettilineo, il confronto viene fatto sia nel tempo che sul percorso seguito 48
- Figura 35 Differenza tra l'accelerazione desiderata ed ottenuta sulla traiettoria rettilinea in un robot a cavi 49
- Figura 36 Confronto tra la velocità desiderata e la velocità ottenuta dal robot a cavi in moto rettilineo, il confronto viene fatto sia nel tempo che sul percorso seguito 49
- Figura 37 Differenza tra la velocità desiderata e la velocità ottenuta 50
- Figura 38 Confronto tra la posizione desiderata e la posizione ottenuta dal robot a cavi in moto rettilineo, il confronto viene fatto sia nel tempo che sul percorso seguito 50
- Figura 39 Differenza tra la posizione desiderata ed la posizione ottenuta per una traiettoria rettilinea in un robot a cavi 51
- Figura 40 Percorso ottenuto nello spazio di lavoro dove la freccia indica il verso di percorrenza 51
- Figura 41 Tensioni desiderate ed ottenute all'organo terminale del robot a cavi nel tempo e nel percorso effettuato con 1, 2, 3, 4 la tensione del cavo corrispondente 52
- Figura 42 Differenza tra le tensioni desiderate ed le tensioni ottenute per una traiettoria rettilinea in un robot a cavi 53

INTRODUZIONE

I primi robot a cavi sono stati sviluppati agli inizi degli anni '90 dello scorso secolo. Tra i primi robot prodotti si può ricordare il "RoboCrane" sviluppato da NIST (National Institute of Standard and Technology) nel 1993 per usi portuali di scarico e carico merci, un esempio è rappresentato in fig. 1a. È simile ad una piattaforma di Stewart a 6 gradi di libertà (gdl) dove sono presenti dei cavi al posto dei bracci meccanici-idraulici. I cavi sono mantenuti in tensione dalla gravità. Un altro robot a cavi è "Charlotte", sviluppato da McDONNELL DOUGLAS nel 1995 per la stazione spaziale internazionale (ISS). È simile

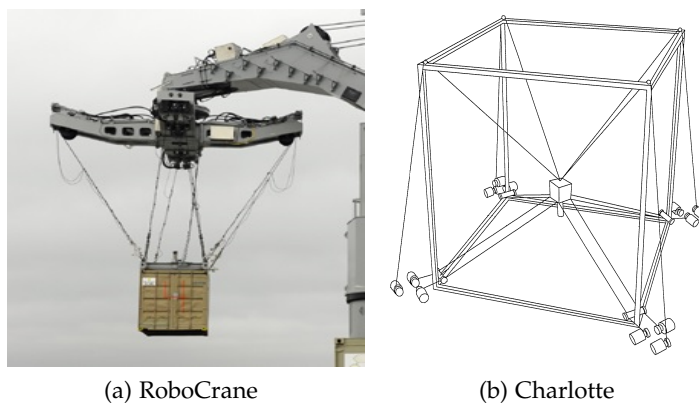


Figura 1: Esempi di robot a cavi dove in fig. 1a si trova un applicazione portuale di un RoboCrane ed un fig. 1b si trova lo schema di un Charlotte

ad una scatola rettangolare dove l'organo terminale viene mosso da 8 cavi azionati da altrettanti motori, lo schema è rappresentato in fig. 1b. Da ricordare è "IPAnema" di Fraunhofer IPA presente in fig. 2a. La sua peculiarità nasce dall'utilizzo di componenti, algoritmi e procedure che lo rendono robusto e affidabile per applicazioni industriali. Si può anche citare la famiglia "Marionet" di INRIA. In questa famiglia sono presenti dei piccoli prototipi per applicazioni ad alta velocità e grù portatili per salvataggi o riabilitazione fisica, ed un esempio del suo utilizzo è in fig. 2b. Altri robot a cavi usati per la riabilitazione sono "NeReBot" e "MariBot". Il primo è un ibrido tra robot a cavi e robot classico ed il secondo, sviluppato presso l'Università degli Studi di Padova, serve per la riabilitazione degli arti superiori, una sua immagine è in fig. 3a. Un altro robot a cavi, sempre usato per la riabilitazione, è un esoscheletro chiamato "CAREX", acronimo di Cable-driven ARm EXoskeleton. Un ultimo robot da ricordare, ancora in costruzione come si può notare da fig. 3b, è il "FAST", acronimo

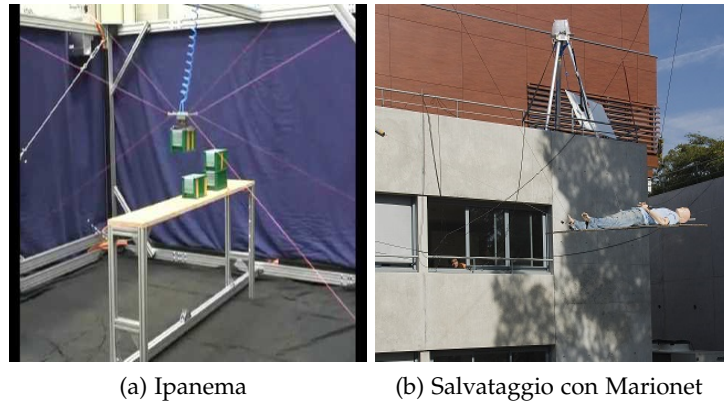


Figura 2: Esempi di robot a cavi dove in fig. 2a si trova un esempio applicativo si un IPanema ed in fig. 2b si trova la prova di un salvataggio di una persona tramite un Marionet

di Five hundred meter Aperture Spherical Telescope, dove l'antenna che capta le onde viene mossa grazie a dei cavi. Nella tipologia dei ro-

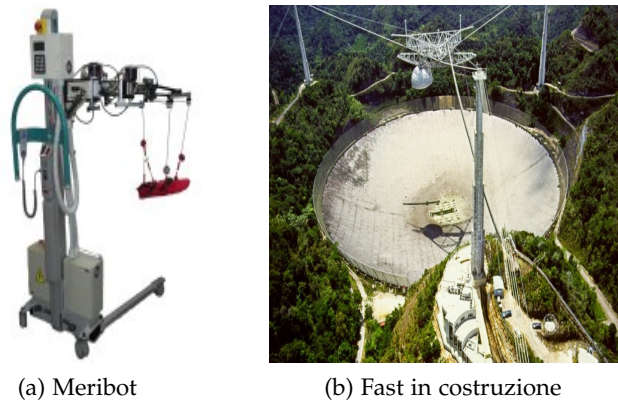


Figura 3: Esempi di robot a cavi dove in fig. 3a è presente il robot Meribot costruito ed in fig. 3b è presente la costruzione del FAST dove si può notare che l'antenna che capta i segnali viene mossa tramite dei cavi

bot a cavi aptici si può ricordare "Texas 9-string" di Lindemann and Tesar del 1989, "SPIDAR" di Walairacht del 1999, "7-cable master" di Kawamura and Ito del 1993 e "8-cable haptic interface" di Williams del 1998.

Molti autori si sono dedicati allo studio delle cinematica dei robot a cavi. Si può ricordare Roberts et al. (1998) in [4] dove è stata presentata la cinematica inversa, l'ottimizzazione delle tensioni dei cavi e il "fault tolerance" dei robot a cavi della famiglia Charlotte.

In conseguenza della non semplicità della cinematica dei robot a cavi, che rientrano sostanzialmente nella categoria dei robot paralleli, per valutarne la posa (posizione e rotazione) molti studiosi si sono prodigati con varie tipologie di sensori (infrarossi, GPS, ultrasuoni,

visione con telecamere, accelerometri, encoder, ecc). Ogni sensore ha dei limiti intrinseci, in [2] si trova che:

- gli encoder non possono misurare le vibrazioni, la deflessione dei cavi e piccole variazioni di posa dovute a forze esterne non prevedibili (ad esempio il vento);
- il GPS fornisce una misura con un errore di qualche centimetro, quindi troppo elevato per applicazioni di precisione, ed è abbastanza costoso;
- gli ultrasuoni (US) hanno il problema degli echi, delle riflessioni sugli oggetti e della difficile rilevabilità dei fasci deboli e stretti usati in questo ambito;
- l'uso di 2 telecamere porta alla presenza di angoli ciechi nella visione dei marker, angoli ciechi che sono dovuti anche ai cavi stessi;
- l'uso di accelerometri prevede la doppia integrazione del segnale per ricavare la posizione e ciò porta ad avere errori non trascurabili;
- nel caso degli infrarossi non si rivela bene l'angolo di rotazione dell'organo terminale.

È possibile, per ovviare i problemi intrinseci di ogni sensore, farne un uso combinato, ottenendo buoni risultati. Ad esempio nell'IcasBot hanno usato tre laser e una telecamera per valutare tutti i gradi di libertà di traslazione e rotazione.

In letteratura si trovano molti lavori che riguardano gli indici di prestazione dei manipolatori classici. Per i robot cavi, sui quali non sono applicabili gli indici dei manipolatori classici, sono presenti i primi lavori in letteratura e si può ricordare [3] che fa un'analisi dello spazio di lavoro e presenta il Tension Factor e [5] che fornisce la massimizzazione di alcuni indici di prestazione variando la configurazione dei cavi.

Focalizzandosi sulla pianificazione del moto ciò che si vuole solitamente conoscere è la prestazione massima che l'organo terminale può raggiungere, ovvero si vuole sapere qual è l'accelerazione massima. In letteratura sono presenti lavori che vanno a massimizzare l'accelerazione tenendo conto solamente dei vincoli di tensione dei cavi, in particolare si ricorda [1].

In questo lavoro di tesi si va a calcolare la massima accelerazione che l'organo terminale può raggiungere tenendo conto, oltre ai vincoli di tensione dovuti ai cavi, anche ai vincoli introdotti dal motore, ovvero la coppia massima erogabile. Per ottenere ciò si va a massimizzare la funzione che fornisce il valore dell'accelerazione dell'organo terminale. Si va anche a formalizzare il calcolo delle tensioni dei cavi. Prendendo spunto da [8] si calcolano le tensioni dalla soluzione particolare dell'equazione di struttura, nota anche come *wrench equation*, e si trova successivamente la soluzione omogenea che fa rispettare i vincoli di coppia e tensione presenti.

Nel cap. 2 sono presenti le caratteristiche generali dei robot a cavi. Nel cap. 3 si presentano gli indici di prestazione presenti, il modello semplificato del robot a cavi, il nuovo indice di prestazione ed un nuovo metodo di calcolo delle tensioni. Nel cap. 4 è presente l'analisi cinematica e dinamica del robot preso in esame, il suo modello semplificato, il calcolo degli indici di prestazione proposti, la verifica degli indici calcolati e del metodo di calcolo delle tensioni con una legge di moto applicata al robot e la simulazione della dinamica diretta tramite un modello Simulink.

CARATTERISTICHE DEI ROBOT A CAVI

I robot a cavi sono dei manipolatori robotici relativamente semplici da costruire. Sono sostanzialmente dei robot paralleli costituiti da motori, un organo terminale e da cavi che collegano questi due elementi.

2.1 VANTAGGI

Rispetto ai robot tradizionali i robot a cavi presentano diversi vantaggi, cercando in letteratura si possono trovare questi aspetti positivi:

- grande spazio di lavoro;
- alta capacità di carico;
- alta velocità nei movimenti dato che le inerzie del robot sono piccole;
- costo non elevato;
- modularità;
- trasportabilità;
- semplice riconfigurabilità;
- efficienza energetica;
- buona interazione con l'uomo per le dimensioni del robot;
- rigidità;
- sicurezza;
- bassi costi di manutenzione.

2.2 SVANTAGGI

Come si può intuire il problema principale di questa tipologia di robot sono i cavi. "Un cavo può tirare ma non spingere", bisogna garantire che la sua tensione sia superiore ad una soglia positiva minima τ_{min} tale da evitare che sia allentato ed inferiore ad una soglia positiva massima τ_{max} tale da non portarlo a rottura. Un secondo problema si ha nella non esatta conoscenza della posizione dell'organo terminale a causa della curvatura dei cavi dovuta al loro stesso peso, all'allungamento elastico dovuto alle forze in gioco ed ai limiti di forza applicabile in tutto lo spazio di lavoro per vincere forze esterne. Un altro aspetto svantaggioso è quello di coordinare la ridondanza ed evitare l'interferenza tra i fili, ciò può portare ad una limitazione della posa dell'organo terminale.

2.3 USI PRINCIPALI

Data la semplicità ed i molti vantaggi presenti esistono svariati usi dei robot a cavi. I principali sono:

- carico e scarico merci;
- riprese aeree;
- riabilitazione;
- pittura tramite spray;
- pulizia finestre di palazzi;
- esami visivi;
- test di velivoli;
- accesso a zone remote, contaminate, pericolose.

2.4 WORKSPACE

Data la particolarità dei robot a cavi sono presenti diverse definizioni dello spazio di lavoro, noto anche come workspace. In particolare da [7] si trovano le seguenti definizioni:

1. SEW: Static Equilibrium Workspace o Static Workspace è l'insieme delle pose dell'organo terminale per le quali l'equilibrio statico può essere ottenuto mantenendo tutti i cavi in tensione. Si assume che i cavi possano resistere a valori di tensione infinita, abbiano lunghezza infinita, e solitamente non si trascura la gravità;
2. WCW: Wrench-Closure Workspace è l'insieme delle pose dell'organo terminale nelle quali si può generare qualsiasi *wrench*, o forza generalizzata, all'organo terminale mantenendo in tensione tutti i cavi. I valori di tensione nei cavi e del *wrench* sono illimitati;
3. WFW: Wrench Feasible Workspace è l'insieme delle pose dell'organo terminale nelle quali si può generare un *wrench* in un range limitato con tensioni nei cavi limitate;
4. FCW: Force-Closure Workspace, è un caso speciale di WFW dove il *wrench* non ha limiti e le tensioni nei cavi sono non negative;
5. SFW: Statically Feasible Workspace è l'insieme delle pose dell'organo terminale per le quali l'equilibrio statico contro la gravità può essere ottenuto usando un range limitato di tensioni nei cavi. È quindi WFW se si considera solo la gravità come azione esterna;
6. DF: Dynamic Workspace è l'insieme delle configurazioni dell'organo terminale per le quali l'equilibrio dinamico è possibile,

e lo si può definire anche come l'insieme delle pose che l'organo terminale può cercare di raggiungere con almeno uno stato cinematico (posizione, velocità e accelerazione).

2.5 INDICI DI PRESTAZIONE

I principali indici prestazionali dei robot classici sono:

- Manipolabilità: questo indice fornisce una misura su quanto "il robot non sia singolare". Dipende dalla matrice Jacobiana J dato che nei punti di singolarità il determinante di J è nullo con J quadrata. Dato che spesso J è rettangolare la manipolabilità si definisce come

$$\mu = \sqrt{\det(JJ^T)} \quad (1)$$

- Isotropia: si misura con il Condition Number, CN, che è il rapporto tra i moduli della massima velocità massima e della minima velocità massima applicabile in un punto.

$$1 \leq \text{CN} = \frac{\|\mathbf{v}_{\max}\|}{\|\mathbf{v}_{\min}\|} \leq \infty \quad (2)$$

Per comodità al posto del CN si usa il Reverse Condition Number, RCN, dato che assume valori tra 0 e 1.

$$0 \leq \text{RCN} = \frac{\|\mathbf{v}_{\min}\|}{\|\mathbf{v}_{\max}\|} \leq 1 \quad (3)$$

- MSU: Minimum Singular Value, è un indice che fornisce la velocità minima tra le massime applicabili in un punto dello spazio di lavoro;
- DSI: Directive Selective Performance Indexes, è un'estensione della manipolabilità. Si trova tramite un'elaborazione della matrice Jacobiana. Oltre al modulo si valuta anche la direzione della velocità e va quindi a tenere conto della vicinanza alle singolarità;
- TPI: Task-dependent Performance Index, è una valutazione del DSI lungo tutti i punti di un task.

Questi indici, valutabili sui robot classici, non possono essere applicati ai robot a cavi in quanto non tengono in considerazione l'incapacità dei cavi di spingere [1]. Per i robot a cavi l'unico indice che tiene conto delle tensioni dei cavi è il Tension Factor, TF. È il rapporto tra la tensione minima e la tensione massima dei fili con l'organo terminale in equilibrio statico. Sostanzialmente si lavora solo nello spazio dei giunti in quanto non valuta la forza, dato che è nulla, applicata all'organo terminale.

2.6 ACTUATED E CONSTRAINED

Per suddividere le varie tipologie di robot a cavi sono state proposte varie metodologie. Quella qui descritta è maggiormente riconosciuta e presa da [7]. In ogni robot a cavi, in base alla relazione tra i gradi di libertà presenti all'organo terminale n ed il numero di motori m , si può capire quale sia "la capacità" di "actuated" e di "constrained". Guardando il livello di "actuated" si dice che il robot a cavi è:

- fully-actuated: se ha un numero di cavi attuati, e quindi di motori, pari al numero di gdl dell'organo terminale, quindi $m = n$;
- over-actuated o redundant o redundantly actuated: se ha un numero di cavi attuati maggiore del numero di gdl, quindi $m > n$;
- under-actuated: se il numero di gdl dell'organo terminale è maggiore dei cavi attuati, quindi $m < n$, o se dei cavi non sono mantenuti in tensione durante il funzionamento.

Se ci si focalizza sulla capacità dei cavi di "constrained" ovvero di vincolare l'organo terminale nella posa cercata si può fare la seguente distinzione:

- fully-constrained: se, assumendo di poter raggiungere tensioni illimitate nei cavi, si può mantenere l'organo terminale nella posa cercata contro qualsiasi *wrench* esterno. In pratica ciò avviene se si soddisfa la condizione $m = n + 1$. Questa, però, è una condizione necessaria ma non sufficiente, ovvero il robot a cavi può essere under-constrained, vedi sotto, per particolari disposizioni dei cavi e rispettare comunque la condizione $m = n + 1$;
- over-constrained: se $m > n + 1$;
- under-constrained: se esiste un *wrench* esterno tale per cui l'equilibrio non viene mantenuto. Avviene se $m < n + 1$. Questa tipologia viene chiamata, a volte, cable-suspended.

3.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo si presenta inizialmente il modello di un robot a cavi generico, poi un metodo di calcolo per la loro prestazione massima considerando solamente i cavi e l'organo terminale. Successivamente si introduce il modello semplificato per questa classe di manipolatori utile nel caso in cui l'organo terminale si sposti con moto rettilineo e senza ruotare. Per questa tipologia di movimentazione si fornisce un nuovo indice per valutare le prestazioni massime garantite di questi robot considerando anche i motori e le inerzie dei rocchetti. In fine si presentano dei metodi di calcolo delle tensioni trovati in letteratura ed il nuovo metodo introdotto in questa tesi.

In fig. 4 si trova lo schema generico di un robot a cavi con m motori e n gradi di libertà¹.

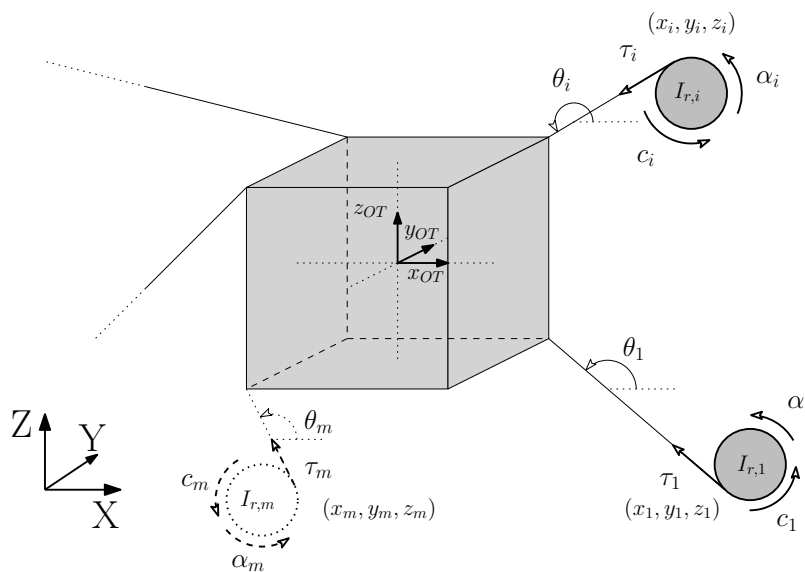


Figura 4: Schema generico di un robot a cavi con m motori e n gradi di libertà

In figura si ha:

- τ_i con $i = 1, \dots, m$ è la tensione del cavo i -esimo;

¹ Nel testo viene usata la seguente notazione: gli scalari sono indicati con la lettera minuscola x , i vettori con la lettera minuscola in grassetto \mathbf{x} e le matrici con la lettera maiuscola in grassetto \mathbf{X} .

- θ_i con $i = 1, \dots, m$ è l'angolo del vettore associato alla tensione del cavo i -esimo;
- (X, Y, Z) è il sistema di riferimento assoluto;
- (x_{OT}, y_{OT}, z_{OT}) è il sistema di riferimento posizionato sull'organo terminale;
- c_i con $i = 1, \dots, m$ è la coppia motrice del motore i -esimo applicata al rocchetto;
- (x_i, y_i, z_i) con $i = 1, \dots, m$ è la posizione del rocchetto i -esimo, dove viene applicata la tensione τ_i ;
- $I_{r,i}$ è l'inerzia del rocchetto i -esimo;
- α_i è l'accelerazione angolare del rocchetto i -esimo.

La matrice struttura S , o *wrench matrix*, del robot a cavi si definisce tramite la relazione tra la forza generalizzata w , o *wrench*, esercitata dai cavi sulla piattaforma mobile, o organo terminale, e la tensione τ dei cavi. Si trova quindi:

$$w = S\tau \quad (4)$$

$$\text{con } S = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_i & \dots & \mathbf{u}_m \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1 & \mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_i & \dots & \mathbf{r}_m \times \mathbf{u}_m \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{e } \tau = \left\{ \tau_1 \quad \tau_2 \quad \dots \quad \tau_i \quad \dots \quad \tau_m \right\}^T \quad (6)$$

dove:

- \mathbf{u}_i con $i = 1, \dots, m$ è il vettore orientato dall'attacco del cavo i sull'organo terminale al punto di tangenza del filo con il rocchetto (solitamente è presente un passacavo prima del rocchetto dove si considera la fine del vettore);
- \mathbf{r}_i con $i = 1, \dots, m$ è il vettore tra il centro di massa dell'organo terminale e l'attacco del cavo sull'organo terminale.

In generale si può quindi scrivere, rispetto al sistema di riferimento fisso (X, Y, Z) :

$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{r}_i = \begin{Bmatrix} r_{ix} \\ r_{iy} \\ r_{iz} \end{Bmatrix}$$

Dati m , numero dei motori, e $n \leq 6$, numero dei gradi di libertà dell'OT, si ha che $S \in \mathbb{R}^{n,m}$.

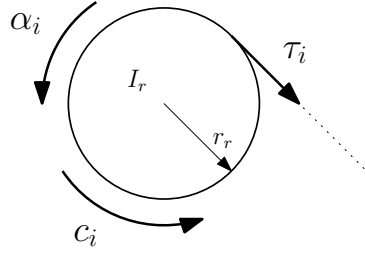


Figura 5: Schema delle forze generalizzate applicate al motore i del robot a cavi

Si ricava qui di seguito l'effetto introdotto dai rocchetti e dai motori. La dinamica del singolo componente, motore e rocchetto, si può ricavare dalla fig. 5:

$$c_i = r_r \tau_i + I_r \alpha_i \quad (7)$$

che, considerando tutti i motori, diventa:

$$\mathbf{c} = r_r \boldsymbol{\tau} + I_r \boldsymbol{\alpha} \quad (8)$$

dove r_r e I_r sono rispettivamente il raggio e l'inerzia del rocchetto, uguali per tutti i rocchetti e:

$$\mathbf{c} = \{c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_i \quad \dots \quad c_m\}^T$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_i \quad \dots \quad \alpha_m\}^T$$

È bene ricordare che $\boldsymbol{\alpha}$, vettore rappresentante l'accelerazione angolare dei rocchetti, è pari a, con le convenzioni usate in fig. 4 e in fig. 5:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{r_r} \mathbf{J} \mathbf{a}_{OT} + \mathbf{b} \quad (9)$$

dove \mathbf{J} è la Jacobiana del robot a cavi, \mathbf{a}_{OT} è il vettore accelerazione dell'organo terminale e \mathbf{b} rappresenta il termine contenente l'accelerazione centripeta del robot a cavi che dipende da \mathbf{v}_{OT} il vettore velocità dell'organo terminale.

3.2 PRECEDENTI INDICI DI PRESTAZIONE

Valutare le prestazioni dei robot a cavi è un'operazione fondamentale dato che permette la possibilità di sapere a priori quali sono i limiti di accelerazione e velocità che può raggiungere l'OT. Se si vuole trovare la prestazione massima del robot si possono trovare diversi lavori in letteratura. Tra i più interessanti si ha [1] il quale fornisce il massimo *wrench* che i cavi possono applicare all'organo terminale.

Nel documento appena citato, per trovare una soluzione più agevole al problema, il *wrench* \mathbf{w} viene scritto in modo da esplicitare le singole componenti della forza e dei momenti applicati lungo gli assi del sistema di riferimento fisso:

$$\mathbf{w} = \left\{ w_{fx} \quad w_{fy} \quad w_{fz} \quad w_{tx} \quad w_{ty} \quad w_{tz} \right\}^T$$

Per l'analisi è anche conveniente dividere la matrice struttura \mathbf{S} in due parti, una legata alle traslazioni \mathbf{S}_f ed una legata alle rotazioni \mathbf{S}_t . Quindi si ottiene $\mathbf{S} = \left[\mathbf{S}_f^T \quad \mathbf{S}_t^T \right]^T$. Da (5) si trova che:

$$\mathbf{S}_f = \left[\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_i \quad \dots \quad \mathbf{u}_m \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{fx} \\ \mathbf{s}_{fy} \\ \mathbf{s}_{fz} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{S}_t = \left[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_i \quad \dots \quad \mathbf{r}_m \times \mathbf{u}_m \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{tx} \\ \mathbf{s}_{ty} \\ \mathbf{s}_{tz} \end{bmatrix}$$

Una necessità pratica quando si progetta un robot è fornire la massima forza esercitabile dai cavi sulla piattaforma mobile. Per questo motivo da qui ci si focalizza sulla forza esercitabile lungo una direzione d annullando le forze applicate lungo le altre direzioni, $o1$ e $o2$, ortogonali a d , ed i momenti applicabili sui tre assi. Per raggiungere questo obiettivo è utile creare un nuovo sistema di riferimento $(d, o1, o2)$ con d posizionato sulla direzione lungo la quale si vuole calcolare la forza. Per ottenere ciò basta premoltiplicare il tutto per la matrice di rotazione² \mathbf{R} che porta dal precedente sistema di riferimento al nuovo sistema di riferimento. Così facendo si trova la nuova matrice struttura:

$$\mathbf{S}_{f,new} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{fd} \\ \mathbf{s}_{fo1} \\ \mathbf{s}_{fo2} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{fx} \\ \mathbf{s}_{fy} \\ \mathbf{s}_{fz} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{S}_f \quad (10)$$

La forza scritta nel nuovo sistema di riferimento è:

$$\begin{Bmatrix} w_{td} \\ w_{to1} \\ w_{to2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{fd} \\ \mathbf{s}_{fo1} \\ \mathbf{s}_{fo2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \quad (11)$$

con $\boldsymbol{\tau}$ il vettore contenente le m tensioni dei cavi dovute ai motori. Come già anticipato le tensioni applicabili sono limitate, dunque si ha

² \mathbf{R} è la matrice di rotazione funzione, nel caso specifico, di 2 angoli, γ e δ , $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\gamma, \delta)$.

che $\tau_{\min} \leq \tau_i \leq \tau_{\max}$ dove τ_{\max} dipende dai limiti di resistenza dei cavi e $\tau_{\min} > 0$ serve per mantenere i cavi in tensione e per ragioni di sicurezza. Si definiscono quindi i vettori di tensione massima $\boldsymbol{\tau}_{\max}$ e di tensione minima $\boldsymbol{\tau}_{\min}$:

$$\boldsymbol{\tau}_{\max} = \left\{ \tau_{\max} \quad \dots \quad \tau_{\max} \right\}^T$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\min} = \left\{ \tau_{\min} \quad \dots \quad \tau_{\min} \right\}^T$$

Per trovare la massima forza esercitabile lungo l'asse d si può risolvere il seguente problema grazie alla programmazione lineare. La formulazione del problema è³:

$$\begin{aligned} \max \quad & f = w_{fd} = \mathbf{s}_{fd} \boldsymbol{\tau} \\ \text{t.c.} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \mathbf{s}_{fo_1} \\ \mathbf{s}_{fo_2} \\ \mathbf{s}_{tx} \\ \mathbf{s}_{ty} \\ \mathbf{s}_{tz} \end{array} \right] \boldsymbol{\tau} = \mathbf{A} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau}_{\min} \preceq \boldsymbol{\tau} \preceq \boldsymbol{\tau}_{\max} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (12)$$

La soluzione di questo problema dipende dalle proprietà della matrice \mathbf{S} . Si ipotizzi che il robot a cavi sia fully-actuated o redundant, ovvero che $m \geq n$. Escludendo i punti di singolarità cinematiche si ha che $\text{rank}(\mathbf{S}) = n$, ovvero $\text{rank}(\mathbf{A}) = n - 1 \leq m$. Ciò implica che il problema $\mathbf{A} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ ha infinite soluzioni e quindi esiste una soluzione che soddisfa il problema nel range di tensioni richiesto. Questo metodo non può essere applicato ai robot under-actuated.

Si definiscono i vettori di coppia massima \mathbf{c}_{\max} e di coppia minima $\mathbf{c}_{\min} = -\mathbf{c}_{\max}$.

$$\mathbf{c}_{\max} = \left\{ c_{\max} \quad \dots \quad c_{\max} \right\}^T$$

$$\mathbf{c}_{\min} = \left\{ -c_{\max} \quad \dots \quad -c_{\max} \right\}^T$$

³ Il simbolo \preceq corrisponde a \leq inteso come confronto delle singole componenti dei due vettori confrontati

Se si considerano anche i vincoli di coppia introdotti dal motore basta cambiare la programmazione lineare scritta sopra con la seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & f = w_{fd} = s_{fd} \tau \\ \text{t.c.} \quad & \begin{cases} \begin{bmatrix} s_{fo_1} \\ s_{fo_2} \\ s_{tx} \\ s_{ty} \\ s_{tz} \end{bmatrix} \tau = \mathbf{A} \tau = 0 \\ \tau_{\min} \preceq \tau \preceq \min(\tau_{\max}, \frac{c_{\max}}{r_r}) \end{cases} \end{aligned}$$

Finora si è calcolata la forza applicabile lungo una direzione. Se si vuole ricavare l'accelerazione massima alla quale può essere sottoposto l'organo terminale basta dividere la forza f appena trovata per la massa dell'organo terminale m_{OT} .

3.3 MODELLO SEMPLIFICATO

Molto utile per la movimentazione di un robot a cavi è sapere quale sia la prestazione che da esso si può ottenere lungo una traiettoria rettilinea. Quando un robot a cavi, che ha in generale $n \leq 6$ gradi di libertà, si muove su una traiettoria rettilinea si comporta come se avesse 1 grado di libertà. Questo aspetto può essere sfruttato per semplificare il modello del manipolatore grazie al concetto di "Inerzia ridotta alla coordinata libera" ed all' "Equazione di Lagrange". Qui di seguito si riportano brevemente i concetti del Principio dei Lavori Virtuali (PLV) e del Principio di d'Alambert utili alla comprensione dei concetti dell'Equazione di Lagrange e dell'Inerzia ridotta.

3.3.1 Richiami di dinamica

Questa parte di richiami di dinamica non vuole essere esaustiva ma fornire soltanto i concetti di base utili al lavoro di tesi.

Principio dei Lavori Virtuali

Il principio dei lavori virtuali è spesso chiamato anche teorema dei lavori virtuali. Esso permette la formulazione di equazioni che esprimono le condizioni di equilibrio di un sistema. Si usa in sistemi olonomi con vincoli indipendenti dal tempo. Per questo tipo di sistemi si può definire $\mathbf{p} = \mathbf{p}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ dove q_i la coordinata Lagrangiana o generalizzata o indipendente. Uno spostamento virtuale è

definito come infinitesimo, arbitrario e compatibile con i vincoli, e viene scritto con δ per distinguerlo da uno spostamento infinitesimo reale descritto con d . L'aspetto fondamentale è che le variazioni infinitesime δq_i si possono scegliere in modo arbitrario. Si può definire il lavoro virtuale come il lavoro fatto da una forza realmente agente per effetto di uno spostamento virtuale, ovvero $\delta l = \mathbf{f} \delta \mathbf{s}$. Il principio dei lavori virtuali asserisce che condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo è che la somma dei lavori virtuali di tutte le forze agenti sia nulla. Se si hanno vincoli privi di attrito significa che il lavoro di tutte le forze attive è nullo per ogni spostamento virtuale dato che le reazioni prive di attrito non possono produrre lavoro. Per il PLV non esiste una dimostrazione del caso generale ma solo di alcuni casi particolari.

Principio di d'Alambert

Il principio di d'Alambert afferma che durante il moto di un sistema materiale sussiste sempre equilibrio tra le forze esterne (attive e reazioni) e forze d'inerzia. Dato il punto materiale i di un sistema si ha che $\mathbf{f}_i + \mathbf{r}_i = m_i \mathbf{a}_i$ che può essere scritta come $\mathbf{f}_i + \mathbf{r}_i + \mathbf{f}_i^{in} = \mathbf{0}$ dove $\mathbf{f}_i^{in} = -m_i \mathbf{a}_i$ è definita forza d'inerzia, \mathbf{f}_i la forza esterna attiva e \mathbf{r}_i è la forza esterna di reazione. Questo principio è molto utile in quanto permette di applicare il PLV indifferentemente a forze realmente agenti ed a forze d'inerzia. Applicando insieme questi due principi si trova che il lavoro delle forze attive sommato al lavoro delle forze d'inerzia deve essere nullo, cioè $\delta l + \delta \omega = 0$.

Equazione di Lagrange

L'equazione di Lagrange è un'evoluzione del PLV in quanto esprime il lavoro delle forze d'inerzia in termini dell'energia cinetica T del sistema. L'equazione di Lagrange è:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_i Q_{ih}$$

dove Q_{ih} sono le forze ridotte alla coordinata h -esima.

Inerzia Ridotta

L'inerzia ridotta alla coordinata libera $\mathbf{a} = f(\theta)$ è un' "inerzia" variabile con la posizione del meccanismo θ dato che i rapporti di velocità che vi compaiono sono funzione di θ . L'inerzia ridotta permette di scrivere l'energia cinetica in modo compatto come segue

$T = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\theta) \dot{\theta}^2$. Questo modo di scrivere l'energia cinetica permette la seguente formulazione dell'equazione di Lagrange:

$$[\mathbf{a}(\theta)] \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \left[\frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta} \right] \dot{\theta}^2 = \sum_i (k_i f_i)$$

dove f_i è la forza i -esima applicata al sistema ridotta tramite il rapporto di riduzione k_i .

3.3.2 Calcolo del modello semplificato

In fig. 6 è presente lo schema di un robot a cavi con indicate la direzione della velocità e dell'accelerazione dell'organo terminale, rispettivamente v_d e a_d . Il vettore z_i indica la lunghezza del cavo i tra il generico rocchetto ed il punto di attacco sull'organo terminale. L'inerzia ridotta di un robot a cavi con l'organo terminale che si muove di moto rettilineo e senza rotazioni è:

$$m_{rid} = m_{OT} + \sum_{i=1}^m I_{r,i} k_i^2 \quad (13)$$

dove:

- m_{OT} è la massa dell'organo terminale;
- $I_{r,i}$ è l'inerzia dell' i -esimo rocchetto;
- $k_i = \frac{\beta_i}{v_d} = f(x_d)$ è il rapporto di velocità tra l' i -esimo rocchetto e l'organo terminale, che è una funzione della posizione dell'organo terminale.

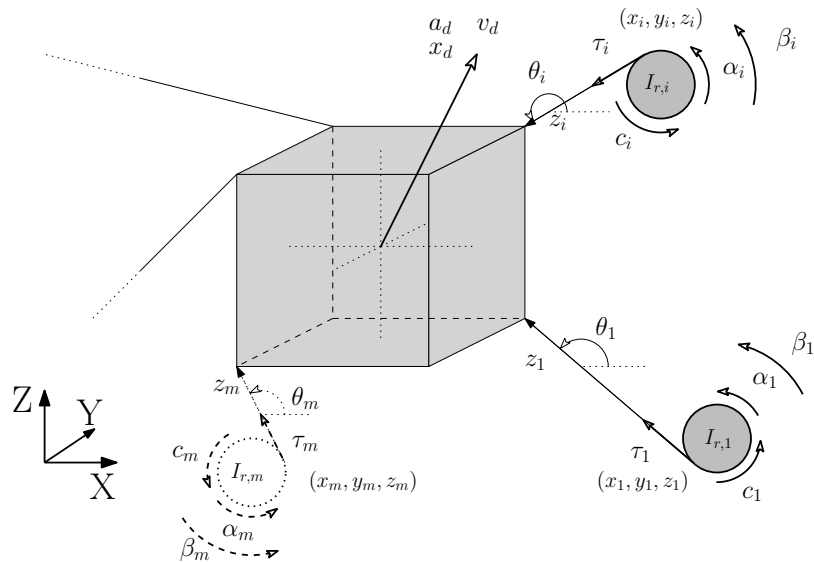


Figura 6: Schema generale di un robot a cavi con m motori ad 1 gdl

Questa equazione mostra come l'inerzia ridotta m_{rid} è una funzione della coordinata libera del sistema. È quindi un problema ad inerzia variabile.

L'equazione di Lagrange è:

$$m_{rid} a_d + \frac{1}{2} \frac{dm_{rid}}{dx_d} v_d^2 = \sum_{i=1}^m k_i c_i \quad (14)$$

dove:

$$\frac{dm_{rid}}{dx_d} = \sum_{i=1}^m \left(I_{r,i} \frac{dk_i^2}{dx_d} \right) = 2 \sum_{i=1}^m \left(I_{r,i} k_i \frac{dk_i}{dx_d} \right) \quad (15)$$

L'equazione (14) lega il moto dell'organo terminale con le coppie fornite dai motori, ovvero fornisce la dinamica del modello semplificato del robot. In essa si trovano i termini di velocità ed accelerazione dell'organo terminale, la massa ridotta, la derivata della massa ridotta e i rapporti di velocità $\mathbf{k} = \{k_1 \ k_2 \ \dots \ k_m\}^T$. Questi ultimi tre termini sono funzione della posizione dell'organo terminale $x_d \in \mathbb{R}$. Come si può notare anche dalla fig. 7, che fornisce lo schema del mo-

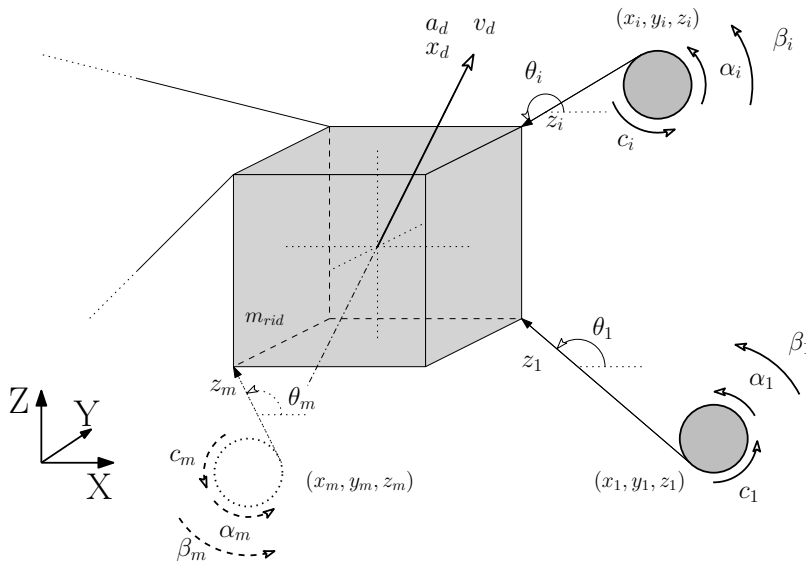


Figura 7: Schema semplificato di un robot a cavi in moto rettilineo ricavabile dall'equazione di Lagrange

dello semplificato del robot a cavi, non si può usare direttamente la (14) per il calcolo dell'indice di prestazione dato che si incorrerebbe in alcuni problemi. Il primo è la non conoscenza del valore della tensione dei cavi. Il controllo delle tensioni è basilare nei robot a cavi in quanto bisogna evitare che il loro valore superi la soglia massa imposta, in modo da non rompere il filo. Inoltre si deve garantire che la tensione minima non scenda sotto una soglia predeterminata, in modo da non avere un filo allentato o inutilizzabile o d'intralcio nel percorso previsto. Per ovviare a questo problema si possono sfruttare

le relazioni che legano coppia, tensione ed inerzia del singolo rocchetto. Dalla fig. 5, rappresentate le forze e le coppie applicate al motore, si possono trovare le relazioni (7) e (8) qui riportate per comodità:

$$\mathbf{c}_i = r_r \boldsymbol{\tau}_i + I_r \boldsymbol{\alpha}_i \quad (16)$$

$$\mathbf{c} = r_r \boldsymbol{\tau} + I_r \boldsymbol{\alpha} \quad (17)$$

È bene ricordare che $\boldsymbol{\alpha}$, vettore rappresentante l'accelerazione angolare dei rocchetti, è pari a, con le convenzioni usate in fig. 5 e in fig. 6:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{k} \mathbf{a}_{OT} + \mathbf{a}\mathbf{c} \quad (18)$$

dove \mathbf{k} è il vettore contenete i rapporti di velocità, \mathbf{a}_d è l'accelerazione dell'organo terminale e $\mathbf{a}\mathbf{c}$ è il termine contenente l'accelerazione centripeta che è proporzionale al quadrato della velocità dell'organo terminale v_d . Un altro problema, che nasce dalla (14), è che non si ha accesso ai valori di accelerazione nel piano ortogonale alla direzione di movimento ed ai valori di accelerazione angolare dell'organo terminale. L'equazione da aggiungere per garantire un moto nullo nel piano ortogonale alla direzione di movimento è:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_{OT}} \mathbf{R} \mathbf{S}_f \boldsymbol{\tau} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{m_{rid}} \left(\mathbf{k}^T \mathbf{c} - \frac{1}{2} \frac{dm_{rid}}{dx_d} v_d^2 \right) = \\ &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{a}_d \end{aligned} \quad (19)$$

dove \mathbf{R} è la matrice di rotazione tra il sistema di riferimento fisso e quello ruotato lungo la direzione di moto già presentata nella sezione 3.2. Per annullare le accelerazioni angolari dell'organo terminale basta imporre che:

$$\mathbf{R} \mathbf{S}_t \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad (20)$$

Dopo aver spiegato queste accortezze necessarie si può passare alla descrizione degli indici di prestazione proposti in questa tesi.

3.4 NUOVI INDICI DI PRESTAZIONE

Nella sezione 3.2 si riporta un indice di prestazione per i robot a cavi. Esso trascura la dinamica dovuta all'inerzia dei rocchetti. Qui di seguito si considerano le prestazioni del sistema complessivo, ovvero

si aggiunge il termine legato all'inerzia dei rocchetti ai già presenti vincoli di tensione e di coppia.

Si ipotizzano i cavi privi di massa ed infinitamente rigidi. Si trascurano tutti gli attriti e la gravità.

Si può subito notare che se i vincoli di coppia introdotti dai motori sono molto elevati, rispetto alle forze generalizzate in gioco, la valutazione delle prestazioni può essere effettuata come descritto precedentemente nella sezione 3.2. Questo si può fare perché il termine inerziale introdotto dal rocchetto non introduce alcuna restrizione ai vincoli di coppia o di tensione. È come se i vincoli non fossero connessi tra di loro. Il fattore che limita le prestazioni è il limite sulle tensioni, e questo riporta al caso già presentato.

Si descrive ora la notazione che viene usata in seguito, anticipata precedentemente per il wrench \mathbf{w} e la matrice struttura \mathbf{S} . La matrice Jacobiana \mathbf{J} si suddivide in due parti \mathbf{J}_f e \mathbf{J}_t . \mathbf{J}_f è la prima parte della Jacobiana legata alle traslazioni. \mathbf{J}_t è la seconda parte della Jacobiana legata alle rotazioni. Si ha dunque:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_f & \mathbf{J}_t \end{bmatrix} \quad (21)$$

Il vettore rappresentante l'accelerazione dell'organo terminale è \mathbf{a}_{OT} e può essere suddiviso nella sua parte \mathbf{a}_f legato alle accelerazioni lineari e \mathbf{a}_t legato alle accelerazioni angolari, quindi:

$$\mathbf{a}_{OT} = \left\{ \mathbf{a}_f^T \quad \mathbf{a}_t^T \right\}^T$$

$$\mathbf{a}_f = \begin{Bmatrix} a_{x,f} \\ a_{y,f} \\ a_{z,f} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a}_t = \begin{Bmatrix} a_{x,t} \\ a_{y,t} \\ a_{z,t} \end{Bmatrix}^T \quad (22)$$

In maniera analoga a quanto fatto prima si può definire il vettore \mathbf{v}_{OT} rappresentante la velocità dell'organo terminale che può essere anch'esso suddiviso nelle sue parti \mathbf{v}_f , legata alle velocità lineari, e \mathbf{v}_t , legata alle velocità angolari, quindi:

$$\mathbf{v}_{OT} = \left\{ \mathbf{v}_f^T \quad \mathbf{v}_t^T \right\}^T$$

$$\mathbf{v}_f = \begin{Bmatrix} v_{x,f} \\ v_{y,f} \\ v_{z,f} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v}_t = \begin{Bmatrix} v_{x,t} \\ v_{y,t} \\ v_{z,t} \end{Bmatrix}^T \quad (23)$$

Anche il termine di accelerazione centripeta \mathbf{b} può essere suddiviso in due parti. \mathbf{b}_f è la parte legata alle velocità lineari dell'organo termi-

nale e \mathbf{b}_t è la parte legata alle velocità angolari dell'organo terminale, quindi:

$$\mathbf{b} = \left\{ \mathbf{b}_f^T \quad \mathbf{b}_t^T \right\}^T$$

$$\mathbf{b}_f = \begin{Bmatrix} b_{x,f} \\ b_{y,f} \\ b_{z,f} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{b}_t = \begin{Bmatrix} b_{x,t} \\ b_{y,t} \\ b_{z,t} \end{Bmatrix}^T \quad (24)$$

La matrice di massa \mathbf{M} si può suddividere come segue:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{OT} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{OT} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{M}_{OT} = \begin{bmatrix} m_{OT} & 0 & 0 \\ 0 & m_{OT} & 0 \\ 0 & 0 & m_{OT} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{OT} = \begin{bmatrix} I_{OT,x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{OT,y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{OT,z} \end{bmatrix}$$

L'inserimento dell'inerzia dei rocchetti nel calcolo della prestazione dal robot porta ad un cambiamento nell'impostazione del problema di massimizzazione dell'indice di prestazione. Si trova che il termine di velocità dell'organo terminale, oltre a quello di accelerazione dell'OT, compare nelle equazioni da considerare a causa dell'accelerazione centripeta dei cavi come si può notare da (9) per il modello completo e da (18) per il modello semplificato. Ciò porta a proporre il nuovo indice di prestazione:

- accelerazione massima garantita in un range di velocità.

La prestazione massima tramite questo indice è valida per una direzione di moto rettilinea e senza rotazioni dell'organo terminale. Questo indice viene proposto perché fornisce il valore massimo di accelerazione al quale l'organo terminale può essere sottoposto in un range di velocità e risulta molto utile se si volesse verificare a priori la fattibilità di una legge di moto.

Si forniscono due procedure di calcolo di tale indice, una per il modello completo ed una per il modello semplificato, dato che le impostazioni del problema sono diverse.

Modello completo

È utile riscrivere le equazioni del modello dinamico del robot a cavi in una forma che metta in evidenza gli elementi che servono al calcolo dell'indice di prestazione. Da (4) si può ricavare:

$$\mathbf{w} = \mathbf{M} \mathbf{a}_{OT} = \mathbf{S} \boldsymbol{\tau} \quad (26)$$

dalla quale si trova l'accelerazione dell'organo terminale \mathbf{a}_{OT} invertendo la matrice di massa \mathbf{M} :

$$\mathbf{a}_{OT} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \boldsymbol{\tau} \quad (27)$$

Sostituendo la (9) nella (8) si trova:

$$\mathbf{c} = r_r \boldsymbol{\tau} + \frac{I_r}{r_r} \mathbf{J} \mathbf{a}_{OT} + \frac{I_r}{r_r} \mathbf{b} \quad (28)$$

e usando la (27) nella (28) si trova:

$$\mathbf{c} = \frac{I_r}{r_r} \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \boldsymbol{\tau} + r_r \boldsymbol{\tau} + \frac{I_r}{r_r} \mathbf{b} \quad (29)$$

$$\mathbf{c} = \left(r_r \mathbf{I}_{4 \times 4} + \frac{I_r}{r_r} \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \right) \boldsymbol{\tau} + \frac{I_r}{r_r} \mathbf{b} \quad (30)$$

Quest'ultima equazione esprime la formulazione delle coppie in funzione delle tensioni e della velocità. Ora, per massimizzare l'accelerazione basta usare le conoscenze presenti nella sezione 3.2 e le accortezze necessarie al caso.

La procedura di calcolo dell'accelerazione massima garantita in un range di velocità nel caso del modello completo data la posizione dell'organo terminale è la seguente:

1. si decida la direzione ed il verso di d , cioè l'asse lungo il quale si calcola l'indice, ovvero l'asse di moto dell'OT, e si decidano anche direzione e verso dei due assi $o1$ e $o2$ ortogonali tra loro e ortogonali a d , tali da fornire una terna destrorsa;
2. si crei \mathbf{R} matrice di rotazione tra il vecchio sistema di riferimento (x, y, z) ed il nuovo sistema di riferimento $(d, o1, o2)$;
3. si annulli la velocità dell'organo terminale, $\mathbf{v}_{OT} = \mathbf{0}$;
4. si calcoli l'accelerazione nel nuovo sistema di riferimento:

$$\mathbf{a}_{f, new} = \mathbf{R} \mathbf{a}_f$$

$$\begin{Bmatrix} a_d \\ a_{o1} \\ a_{o2} \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}$$

5. si definisca la relazione tra le tensioni e l'accelerazione nel nuovo sistema di riferimento:

$$\begin{Bmatrix} a_d \\ a_{o1} \\ a_{o2} \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}_f \boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} p_d \\ p_{o1} \\ p_{o2} \end{Bmatrix} \boldsymbol{\tau}$$

6. da (30) si definisca la relazione $\mathbf{Q}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}$ che vincola coppie e tensioni a velocità nulla, dove \mathbf{Q} è:

$$\mathbf{Q} = \left(r_r \mathbf{I}_{4 \times 4} + \frac{I_r}{r_r} \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \right)$$

7. si risolva il problema qui sotto descritto per trovare l'accelerazione massima nella direzione prescelta

$$\begin{array}{l} \max \quad a_d = p_d \boldsymbol{\tau} \\ \text{t.c.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{Bmatrix} p_{o1} \\ p_{o2} \\ \mathbf{S}_t \end{Bmatrix} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \boldsymbol{\tau} \preceq \mathbf{c}_{\max} \\ \mathbf{Q} \boldsymbol{\tau} \succeq -\mathbf{c}_{\max} \\ \boldsymbol{\tau}_{\min} \preceq \boldsymbol{\tau} \preceq \boldsymbol{\tau}_{\max} \end{array} \right. \end{array}$$

8. si definisca il nuovo vettore di velocità nel nuovo sistema di riferimento \mathbf{v}_{new} tramite la matrice di rotazione \mathbf{R} ed il vettore velocità dell'organo terminale \mathbf{v}_{OT} :

$$\mathbf{v}_{new} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{f,new} \\ \mathbf{v}_{t,new} \end{Bmatrix}$$

con:

$$\mathbf{v}_{t,new} = \mathbf{R} \mathbf{v}_t$$

$$\mathbf{v}_{f,new} = \mathbf{R} \mathbf{v}_f$$

dove:

$$\mathbf{v}_{f,new} = \begin{Bmatrix} v_d \\ v_{o1} \\ v_{o2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_d \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}$$

9. si calcoli il termine di accelerazione centripeta \mathbf{b}_{new} che è funzione dell'unica velocità ammessa v_d ;

10. si risolva il seguente problema per trovare la velocità massima che garantisca il valore di accelerazione a_d appena calcolato

$$\max v_d^2 = \left\{ 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\} \begin{Bmatrix} v_d^2 \\ \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{c} \end{Bmatrix}$$

$$\text{t.c.} \begin{cases} -\frac{I_r}{r_r} \mathbf{b}_{\text{new}} + \mathbf{c} - r_r \boldsymbol{\tau} = \frac{I_r}{r_r} \mathbf{J} \mathbf{R}^T \begin{Bmatrix} a_d \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{o1} \\ \mathbf{p}_{o2} \\ \mathbf{S}_t \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau}_{\min} \preceq \boldsymbol{\tau} \preceq \boldsymbol{\tau}_{\max} \\ -\mathbf{c}_{\max} \preceq \mathbf{c} \preceq \mathbf{c}_{\max} \\ v_d^2 \geq 0 \end{cases}$$

11. si trova quindi v_d , il valore massimo del range di velocità ($0 - v_d$) nel quale si garantisce l'accelerazione calcolata a_d .

Ripetendo la procedura lungo una serie di punti sufficientemente vicini e appartenenti alla traiettoria del moto rettilineo desiderato, si può verificare se la legge di moto richiesta rispetta i valori massimi garantiti di accelerazione e velocità.

Per trovare la massima decelerazione applicabile all'organo terminale basta che al punto 7 si cerchi il minimo della funzione. Tutti gli altri punti della procedura sopra scritta restano identici.

Modello semplificato

Usando la descrizione del modello semplificata di sezione 3.3.2 e tenendo in considerazione le accortezze già presentate si può descrivere la procedura di calcolo dell'accelerazione massima garantita in un range di velocità. La procedura, data la posizione dell'organo terminale, prevede i seguenti passaggi:

1. si decida la direzione del moto d ;
2. si calcolino i rapporti di velocità k ;
3. si ponga il valore di velocità dell'organo terminale pari a 0, ovvero $v_d = 0$;

4. si definiscano le equazioni di vincolo (18) e (19), descritte nella sezione 3.3.2 e qui riportate sostituendo (17) in (18) e valutate per $v_d = 0$:

$$-I_r \mathbf{k} \mathbf{a}_d + \mathbf{c} - r_r \boldsymbol{\tau} = 0$$

$$\frac{1}{m_{OT}} \mathbf{R} \mathbf{S}_f \boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{a}_d$$

5. si risolva il seguente problema:

$$\max \mathbf{a}_d = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_d \\ \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{c} \end{Bmatrix}$$

$$\text{t.c.} \begin{cases} -I_r \mathbf{k} \mathbf{a}_d + \mathbf{c} - r_r \boldsymbol{\tau} = 0 \\ \frac{1}{m_{OT}} \mathbf{R} \mathbf{S}_f \boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{a}_d \\ \mathbf{S}_t \boldsymbol{\tau} = 0 \\ \boldsymbol{\tau}_{\min} \preceq \boldsymbol{\tau} \preceq \boldsymbol{\tau}_{\max} \\ -\mathbf{c}_{\max} \preceq \mathbf{c} \preceq \mathbf{c}_{\max} \end{cases}$$

6. il valore \mathbf{a}_d trovato è l'accelerazione massima garantita, sostituendolo nelle (14), (17), (18) e (19) si trovano le seguenti equazioni di vincolo per la velocità:

$$\mathbf{a}_d = \frac{1}{m_{rid}} \left(\mathbf{k}^T \mathbf{c} - \frac{1}{2} \frac{dm_{rid}}{dx_d} v_d^2 \right)$$

$$\frac{I_r}{r_r} \mathbf{a} \mathbf{c} + \mathbf{c} - r_r \boldsymbol{\tau} = I_r \mathbf{k} \mathbf{a}_d$$

$$\frac{1}{m_{OT}} \mathbf{R} \mathbf{S}_f \boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{a}_d$$

dove $\mathbf{a} \mathbf{c}$ è il termine di accelerazione centripeta proporzionale a v_d^2 ;

7. si risolva il seguente problema:

$$\max v_d^2 = \left\{ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \right\} \begin{Bmatrix} v_d^2 \\ \tau \\ c \end{Bmatrix}$$

$$\text{t.c.} \begin{cases} \frac{I_r}{r_r} \mathbf{a} \mathbf{c} + \mathbf{c} - r_r \tau = I_r \mathbf{k} a_d \\ \frac{1}{m_{OT}} \mathbf{R} \mathbf{S}_f \tau = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} a_d \\ \mathbf{S}_t \tau = 0 \\ \tau_{\min} \preceq \tau \preceq \tau_{\max} \\ -\mathbf{c}_{\max} \preceq \mathbf{c} \preceq \mathbf{c}_{\max} \\ v_d^2 \geq 0 \end{cases}$$

8. trovato il valore di velocità massima v_d si ha il range $(0 - v_d)$ all'interno del quale si garantisce il valore di accelerazione massima a_d .

Ripetendo la procedura lungo una serie di punti sufficientemente vicini e appartenenti alla traiettoria del moto rettilineo desiderato, si può verificare se la legge di moto richiesta rispetta i valori massimi garantiti di accelerazione e velocità.

Per trovare la massima decelerazione applicabile all'organo terminale basta che al punto 5 si cerchi il minimo della funzione. Tutti gli altri punti della procedura sopra scritta restano identici.

3.5 CALCOLO DELLE TENSIONI

In questa sezione si espongono i metodi di calcolo delle tensioni presenti in letteratura ed la nuova metodica sviluppata durante questa tesi.

Il procedimento solitamente usato per calcolare le tensioni τ che mi forniscono una certa accelerazione prevede di risolvere il seguente problema di programmazione lineare. Fornita l'accelerazione richiesta all'organo terminale \mathbf{a}_{ric} si trova:

$$\max \text{ o } \min \quad \{1 \dots 1\} \tau$$

$$\text{t.c. } \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \tau = \mathbf{a}_{ric}$$

$$\text{con } \mathbf{t}_{\min} \preceq \tau \preceq \mathbf{t}_{\max}$$

dove si chiede di minimizzare o massimizzare la somma delle tensioni in base alle specifiche del caso studiato. Questa metodologia di

calcolo porta ad una soluzione solamente se l'accelerazione richiesta è inferiore alla massima producibile dal robot.

Un altro procedimento di calcolo, presente in [8], usa la pseudoinversa e il nucleo della matrice struttura \mathbf{S} . La presenza della matrice pseudoinversa, e non dell'inversa solitamente usata, è necessaria poiché spesso la matrice $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,m}$ non è quadrata. Si riportano ora alcuni concetti, da [6], legati all'uso della pseudoinversa utili alla comprensione delle metodologie descritte dopo.

Concetti sulla matrice pseudoinversa

Data una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$ con $n, m \in \mathbb{N}$ la sua inversa \mathbf{A}^{-1} si definisce solo quando la matrice è quadrata e non singolare. Nel caso in cui la matrice \mathbf{A} è rettangolare al posto della matrice inversa si utilizza la matrice pseudoinversa \mathbf{A}^\dagger . Bisogna distinguere due tipi di matrice pseudoinversa:

1. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$ con $n < m$ e $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$, ovvero \mathbf{A} è a rango pieno e rettangolare bassa;
2. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$ con $n > m$ e $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$, ovvero \mathbf{A} è a rango pieno e rettangolare alta.

Nel caso 1, che corrisponde ad avere un robot under-actuated, una pseudoinversa di \mathbf{A} è l'inversa di sinistra $\mathbf{A}_l^\dagger = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top$ e la soluzione al problema generico $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ è $\mathbf{x} = \mathbf{A}_l^\dagger \mathbf{y}$. Questa soluzione è esatta solamente se $\mathbf{y} \in \text{Im}(\mathbf{A})$ altrimenti si trova la soluzione \mathbf{x} che minimizza $\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|$. Nel caso 2, che corrisponde ad avere un robot over-actuated, una pseudoinversa di \mathbf{A} è l'inversa di destra, o pseudoinversa di Moore-Penrose, $\mathbf{A}_r^\dagger = \mathbf{A}^\top (\mathbf{A} \mathbf{A}^\top)^{-1}$. La soluzione al problema generico $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ è $\mathbf{x} = \mathbf{A}_r^\dagger \mathbf{y} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_r^\dagger \mathbf{A}) \mathbf{k}$ dove \mathbf{k} è un vettore arbitrario di dimensione m . Ciò che si trova è una soluzione \mathbf{x} somma di due parti, la soluzione particolare $\mathbf{x}_p = \mathbf{A}_r^\dagger \mathbf{y}$ e la soluzione omogenea $\mathbf{x}_o = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_r^\dagger \mathbf{A}) \mathbf{k} = [\ker(\mathbf{A})] \mathbf{h}$ con \mathbf{h} , generalmente, un vettore di dimensione $(m - n)$.

Dopo aver riportato questi concetti sull'inversione di matrici rettangolari si riporta brevemente un altro metodo di calcolo delle tensioni nel caso di robot over-actuated che usa la soluzione particolare $\boldsymbol{\tau}_p$ ed omogenea $\boldsymbol{\tau}_o$. Questo metodo è presentato, come già anticipato, in [8]. In questo documento la soluzione particolare $\boldsymbol{\tau}_p$ viene trovata tramite la pseudoinversa di destra mentre la soluzione omogenea $\boldsymbol{\tau}_o$ viene calcolata in modo diverso in base alla posizione occupata dall'organo terminale nello spazio di lavoro. Per il calcolo della soluzione omogenea $\boldsymbol{\tau}_o$ ciò che viene proposto è una suddivisione dello spazio di lavoro in modo tale che la matrice $[\ker(\mathbf{S})]$, associata a tale zona, sia formata da componenti positive. Infine si aggiunge alla soluzione particolare $\boldsymbol{\tau}_p$ "una quantità sufficiente" di soluzione omogenea $\boldsymbol{\tau}_o$

in modo tale da avere una soluzione complessiva, ovvero una tensione applicata all'OT, $\tau = \tau_p + \tau_o$ positiva in tutte le sue componenti. Il documento citato fornisce questa soluzione solo per robot a cavi piani a 2 gradi di libertà e con 3 o 4 motori nel caso di assenza di gravità.

Il metodo sviluppato in questa tesi unisce queste due tecniche appena descritte che sfruttano, rispettivamente, la programmazione lineare e la somma di una soluzione omogenea τ_o tale da produrre una soluzione complessiva τ nei limiti richiesti. Questo procedimento si applica a robot over-actuated per la necessità di avere la matrice pseudoinversa di destra di \mathbf{S} , \mathbf{S}_r^\dagger , e del nucleo di \mathbf{S} , $[\ker(\mathbf{S})]$. Si va inoltre a considerare, in un secondo momento, anche l'effetto introdotto dall'inerzia dei rocchetti per calcolare le coppie e le tensioni, ovvero per risolvere il problema di dinamica inversa. Si passa qui di seguito alla descrizione più formale di questa nuova tecnica.

Si consideri un robot a cavi over-actuated con n gradi di libertà e m motori descrivibile dalla matrice struttura $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,m}$. Sia nota l'accelerazione dell'organo terminale \mathbf{a}_{OT} , la velocità dell'organo terminale \mathbf{v}_{OT} e la posizione nello spazio di lavoro \mathbf{x}_{OT} . Grazie alla conoscenza della posizione dell'organo terminale è possibile ricavarsi la matrice struttura \mathbf{S} . In un primo momento non si considera l'effetto dell'inerzia del rocchetto ed i vincoli dovuti ai motori. Tali valori vengono integrati successivamente. Nota la matrice struttura \mathbf{S} e l'accelerazione \mathbf{a}_{OT} bisogna trovare quale valore delle tensioni τ risolva l'equazione:

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{OT} = \mathbf{S} \tau \quad (31)$$

con \mathbf{M} la matrice di massa. Si calcola $\mathbf{S}_r^\dagger = \mathbf{S}^T (\mathbf{S} \mathbf{S}^T)^{-1}$ e $[\ker(\mathbf{S})]$. Grazie alla matrice \mathbf{S}_r^\dagger si può trovare la soluzione particolare τ_p tramite la seguente equazione:

$$\tau_p = \mathbf{S}_r^\dagger \mathbf{M} \mathbf{a}_{OT} \quad (32)$$

Sapendo che la soluzione complessiva τ , pari alla somma della soluzione particolare τ_p e della soluzione omogenea $\tau_o = [\ker(\mathbf{S})] \gamma$, deve essere compresa tra τ_{min} e τ_{max} si ha che:

$$\tau_{min} - \tau_p \preceq [\ker(\mathbf{S})] \gamma \preceq \tau_{max} - \tau_p \quad (33)$$

e si definiscono i limiti della soluzione omogenea:

$$\tau_{min} - \tau_p = \tau_{o,min} \quad \tau_{max} - \tau_p = \tau_{o,max} \quad (34)$$

Ora che sono noti i limiti della soluzione omogenea si può risolvere il seguente problema di programmazione lineare che fornisce il valore della soluzione omogenea:

$$\begin{aligned} & \max \text{ o } \min \quad \{1 \dots 1\} \gamma \\ & \text{t.c.} \quad \begin{cases} [\ker(\mathbf{S})] \gamma \succeq \tau_{o,min} \\ [\ker(\mathbf{S})] \gamma \preceq \tau_{o,max} \end{cases} \end{aligned}$$

Il valore delle tensioni che mi danno l'accelerazione richiesta è quindi:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\tau}_o$$

Si consideri ora anche l'inerzia dei rocchetti, I_r , e i limiti di coppia, c_{\max} e $-c_{\max}$, introdotti dai motori. I passaggi descritti precedentemente per il calcolo della soluzione particolare della tensione $\boldsymbol{\tau}_p$ e dei limiti della soluzione omogenea della tensione restano identici. Prima della programmazione lineare si rende necessario calcolare anche il secondo limite della soluzione omogenea $\boldsymbol{\tau}_o$ dovuto alla presenza delle coppie e dell'inerzia dei rocchetti. Dalla (8) si trova:

$$\boldsymbol{\tau}_o + \boldsymbol{\tau}_p + \frac{I_r}{r_r} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{c} \quad (35)$$

e quindi, dato che:

$$-c_{\max} \preceq \mathbf{c} \preceq c_{\max}$$

si ha:

$$\boldsymbol{\tau}_o \preceq \frac{c_{\max}}{r_r} - \frac{I_r}{r_r^2} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\tau}_p = \boldsymbol{\tau}_{o,\max,c} \quad (36)$$

$$\boldsymbol{\tau}_o \succeq -\frac{c_{\max}}{r_r} - \frac{I_r}{r_r^2} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\tau}_p = \boldsymbol{\tau}_{o,\min,c} \quad (37)$$

dove $\boldsymbol{\alpha}$ dipende solo dai valori di posizione, velocità ed accelerazione dell'organo terminale come si vede da (9). Ora che sono noti i limiti della soluzione omogenea si può risolvere il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} & \max \text{ o } \min \quad \{1 \quad \dots \quad 1\} \boldsymbol{\gamma} \\ & \text{t.c.} \quad \begin{cases} [\ker(\mathbf{S})] \boldsymbol{\gamma} \succeq \boldsymbol{\tau}_{o,\min} \\ [\ker(\mathbf{S})] \boldsymbol{\gamma} \preceq \boldsymbol{\tau}_{o,\max} \\ [\ker(\mathbf{S})] \boldsymbol{\gamma} \preceq \boldsymbol{\tau}_{o,\max,c} \\ [\ker(\mathbf{S})] \boldsymbol{\gamma} \succeq \boldsymbol{\tau}_{o,\min,c} \end{cases} \end{aligned}$$

Per trovare il valore delle coppie da applicare ai motori tali da fornire accelerazione e velocità richiesta è sufficiente la (35). Per trovare il valore delle coppie tali da ottenere la legge di moto richiesta basta ripetere la procedura su tutto il percorso.

Anche con questo metodo di calcolo delle tensioni e delle coppie non risulta essere nota a priori l'esistenza di una soluzione che soddisfa le richieste della legge di moto. Un modo per aver questa certezza è di rispettare il nuovo indice proposto di accelerazione massima garantita in un range di velocità.

In questo capitolo il robot studiato è piano a 2 gdl, con organo terminale puntiforme, in assenza di gravità e attriti, con cavi infinitamente rigidi e privi di massa e con i rocchetti uguali tra loro. Si propone la cinematica e la dinamica del robot a cavi preso in considerazione. Di questo manipolatore si presenta il modello semplificato. Successivamente si calcola l'indice di prestazione proposto per entrambi i modelli, completo e semplificato, e si confrontano i risultati. Infine si progetta una legge di moto che arrivi ai limiti dell'indice calcolato, si risolve il problema di dinamica inversa con il nuovo metodo di calcolo introdotto e si verifica con una simulazione che il robot a cavi possa soddisfare le richieste.

4.1 CINEMATICA

Si va ora ad effettuare lo studio completo della cinematica diretta ed inversa del robot. In fig. 8 è rappresentato uno schema del robot considerato, nella quale si ha che:

- z_i con $i = 1, \dots, 4$ è il vettore coincidente con il cavo che va dall'angolo i dello spazio di lavoro all'organo terminale;
- θ_i con $i = 1, \dots, 4$ è l'angolo del vettore z_i ;
- (X, Y) è il sistema di riferimento usato per tutte le coordinate;
- (x_{OT}, y_{OT}) è il sistema di riferimento posizionato sull'organo terminale;
- L_x e L_y indicano la distanza dei passacavi, e quindi la dimensione massima dello spazio di lavoro.

Cinematica di posizione

Dalla cinematica diretta del robot si può scrivere:

$$\begin{aligned}x_{ot} &= z_1 \cos(\theta_1) + x_1, & y_{ot} &= z_1 \sin(\theta_1) + y_1; \\x_{ot} &= z_2 \cos(\theta_2) + x_2, & y_{ot} &= z_2 \sin(\theta_2) + y_2; \\x_{ot} &= z_3 \cos(\theta_3) + x_3, & y_{ot} &= z_3 \sin(\theta_3) + y_3; \\x_{ot} &= z_4 \cos(\theta_4) + x_4, & y_{ot} &= z_4 \sin(\theta_4) + y_4.\end{aligned}$$

Queste equazioni si possono anche generalizzare nella forma:

$$x_{ot} = z_i \cos(\theta_i) + x_i, \quad y_{ot} = z_i \sin(\theta_i) + y_i; \quad i = 1, \dots, 4 \quad (38)$$

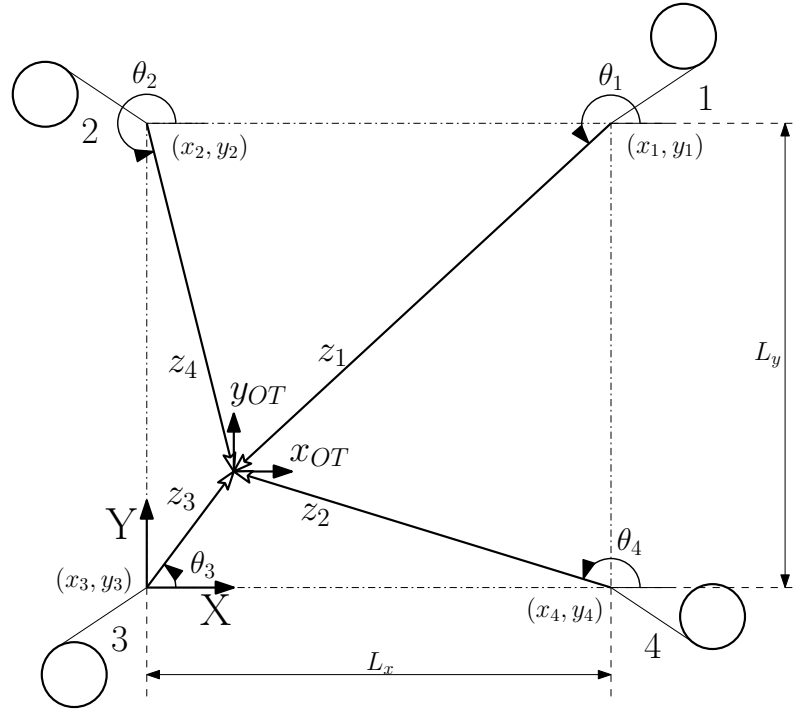


Figura 8: Schema utilizzato per ricavarsi la cinematica di un robot a cavi

Dalla cinematica inversa si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \sqrt{(x_{ot} - x_1)^2 + (y_{ot} - y_1)^2}, \\
 \theta_1 &= \text{atan2}(y_{ot} - y_1, x_{ot} - x_1); \\
 z_2 &= \sqrt{(x_{ot} - x_2)^2 + (y_{ot} - y_2)^2}, \\
 \theta_2 &= \text{atan2}(y_{ot} - y_2, x_{ot} - x_2); \\
 z_3 &= \sqrt{(x_{ot} - x_3)^2 + (y_{ot} - y_3)^2}, \\
 \theta_3 &= \text{atan2}(y_{ot} - y_3, x_{ot} - x_3); \\
 z_4 &= \sqrt{(x_{ot} - x_4)^2 + (y_{ot} - y_4)^2}, \\
 \theta_4 &= \text{atan2}(y_{ot} - y_4, x_{ot} - x_4).
 \end{aligned}$$

Le equazioni appena scritte si possono anche generalizzare nella forma:

$$\begin{aligned}
 z_i &= \sqrt{(x_{ot} - x_i)^2 + (y_{ot} - y_i)^2}, \\
 \theta_i &= \text{atan2}(y_{ot} - y_i, x_{ot} - x_i).
 \end{aligned} \tag{39}$$

Cinematica di velocità

Derivando nel tempo le equazioni della cinematica di posizione si

trovano le equazioni della cinematica di velocità. Se si deriva (38) si trova:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \dot{z}_i \cos(\theta_i) - z_i \sin(\theta_i) \dot{\theta}_i \\ \dot{y}_i &= \dot{z}_i \sin(\theta_i) + z_i \cos(\theta_i) \dot{\theta}_i\end{aligned}\quad (40)$$

che in forma matriciale diventa:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -z_i \sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & z_i \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_i \\ \dot{\theta}_i \end{Bmatrix}\quad (41)$$

invertendo l'equazione si trova:

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_i \\ \dot{\theta}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) \\ -\frac{\sin(\theta_i)}{z_i} & \frac{\cos(\theta_i)}{z_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{Bmatrix}\quad (42)$$

Scrivendo separatamente i contributi di velocità lineare \dot{z}_i e di velocità angolare $\dot{\theta}_i$ si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_4) & \sin(\theta_4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_{ot} \\ \dot{y}_{ot} \end{Bmatrix}\quad (43)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sin(\theta_1)}{z_1} & \frac{\cos(\theta_1)}{z_1} \\ -\frac{\sin(\theta_2)}{z_2} & \frac{\cos(\theta_2)}{z_2} \\ -\frac{\sin(\theta_3)}{z_3} & \frac{\cos(\theta_3)}{z_3} \\ -\frac{\sin(\theta_4)}{z_4} & \frac{\cos(\theta_4)}{z_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_{ot} \\ \dot{y}_{ot} \end{Bmatrix}\quad (44)$$

Cinematica di accelerazione

Derivando le equazioni della cinematica di velocità si trovano le equazioni della cinematica di accelerazione. In particolare se si deriva (40) si trova:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{ot} &= \ddot{z}_i \cos(\theta_i) - 2\dot{z}_i \sin(\theta_i) \dot{\theta}_i - z_i \cos(\theta_i) \dot{\theta}_i^2 - z_i \sin(\theta_i) \ddot{\theta}_i \\ \ddot{y}_{ot} &= \ddot{z}_i \sin(\theta_i) + 2\dot{z}_i \cos(\theta_i) \dot{\theta}_i - z_i \sin(\theta_i) \dot{\theta}_i^2 + z_i \cos(\theta_i) \ddot{\theta}_i\end{aligned}\quad (45)$$

che in forma matriciale diventa:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_{ot} \\ \ddot{y}_{ot} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -z_i \sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & z_i \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_i \\ \ddot{\theta}_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2\dot{z}_i \sin(\theta_i) \dot{\theta}_i - z_i \cos(\theta_i) \dot{\theta}_i^2 \\ +2\dot{z}_i \cos(\theta_i) \dot{\theta}_i - z_i \sin(\theta_i) \dot{\theta}_i^2 \end{Bmatrix}\quad (46)$$

Invertendo l'equazione appena scritta si trova:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{z}_i \\ \ddot{\theta}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) \\ -\frac{\sin(\theta_i)}{z_i} & \frac{\cos(\theta_i)}{z_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -z_i \dot{\theta}_i^2 \\ \frac{2\dot{z}_i \dot{\theta}_i \cos(2\theta_i)}{z_i} \end{Bmatrix} \quad (47)$$

Scrivendo separatamente il contributo di accelerazione lineare \ddot{z}_i e di accelerazione angolare $\ddot{\theta}_i$ dei singoli cavi si trova:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \\ \ddot{z}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_4) & \sin(\theta_4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{ot} \\ \ddot{y}_{ot} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z_1 \dot{\theta}_1^2 \\ z_2 \dot{\theta}_2^2 \\ z_3 \dot{\theta}_3^2 \\ z_4 \dot{\theta}_4^2 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sin(\theta_1)}{z_1} & \frac{\cos(\theta_1)}{z_1} \\ -\frac{\sin(\theta_2)}{z_2} & \frac{\cos(\theta_2)}{z_2} \\ -\frac{\sin(\theta_3)}{z_3} & \frac{\cos(\theta_3)}{z_3} \\ -\frac{\sin(\theta_4)}{z_4} & \frac{\cos(\theta_4)}{z_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{ot} \\ \ddot{y}_{ot} \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} \frac{\dot{z}_1 \dot{\theta}_1 \cos(2\theta_1)}{z_1} \\ \frac{\dot{z}_2 \dot{\theta}_2 \cos(2\theta_2)}{z_2} \\ \frac{\dot{z}_3 \dot{\theta}_3 \cos(2\theta_3)}{z_3} \\ \frac{\dot{z}_4 \dot{\theta}_4 \cos(2\theta_4)}{z_4} \end{Bmatrix} \quad (49)$$

4.2 DINAMICA

Si va ora ad effettuare lo studio della cinetostatica e della dinamica del robot a cavi. In fig. 9 è rappresentato uno schema del robot preso in esame e si trova che:

- τ_i con $i = 1, \dots, 4$ è il termine che rappresenta la tensione del cavo i , quindi la forza che il cavo i applica all'organo terminale;
- α_i con $i = 1, \dots, 4$ è l'accelerazione angolare del motore i calettato sul relativo rocchetto;
- c_i con $i = 1, \dots, 4$ è la coppia erogata dal motore i ;
- f_{OT} è la forza applicata dai cavi all'organo terminale;
- I_r è l'inerzia del rocchetto.

Ora si vuole andare a calcolare la forza applicata dai cavi all'organo terminale. Per far ciò si può fare il bilancio delle forze applicate all'organo terminale e si può scrivere:

$$f_{OT} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$$

ed essendo la massa dell'organo terminale nota e pari a m_{OT} si trova:

$$\sum_{i=1}^4 \tau_i = m_{OT} \mathbf{a}$$

Passando alla scrittura matriciale si ha:

$$\mathbf{S} \boldsymbol{\tau} = m_{OT} \mathbf{a} \quad (50)$$

dove:

- $\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix}$ è l'accelerazione dell'organo terminale;
- \mathbf{S} è la matrice struttura, nota anche come *wrench matrix*;
- m_{OT} è la massa dell'organo terminale.

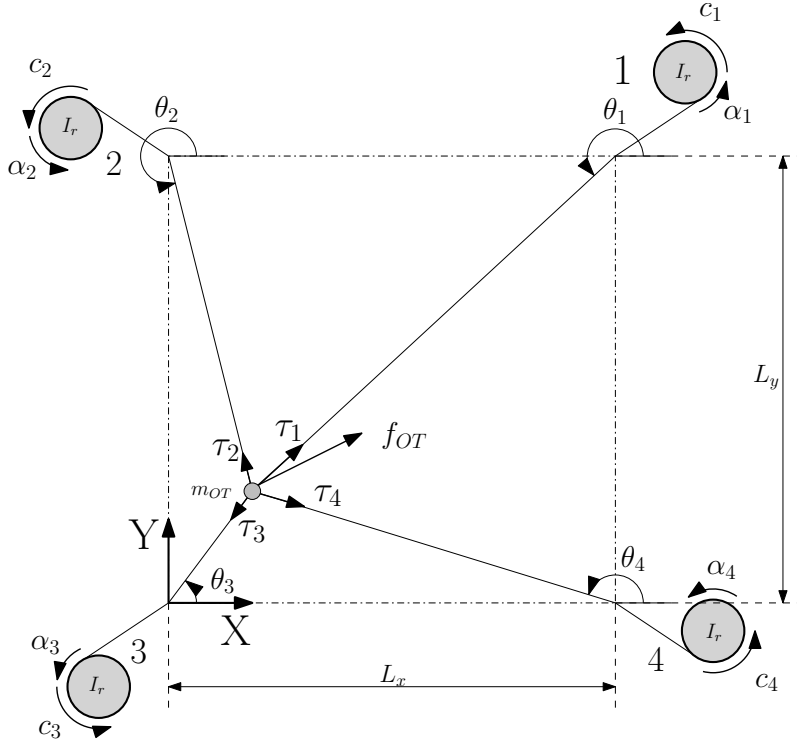


Figura 9: Schema utilizzato per ricavarsi la dinamica di un robot a cavi

Nel caso analizzato si trova che \mathbf{S} è pari a:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1) & -\cos(\theta_2) & -\cos(\theta_3) & -\cos(\theta_4) \\ -\sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_3) & -\sin(\theta_4) \end{bmatrix} \quad (51)$$

e che $\boldsymbol{\tau}$ è pari a:

$$\boldsymbol{\tau} = \{ \tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4 \}^T$$

In fig. 10 è rappresentato lo schema di un motore del robot a cavi. Per semplicità si considerano tutti i rocchetti identici tra loro e di massa costante. Si trascura la variazione di massa e diametro del rocchetto dovuto al cavo. Si ricorda che la massa dei cavi viene trascurata per ipotesi iniziale. Focalizzandoci sul generico motore i e trascurando tutti gli attriti si può scrivere,

$$c_i = I_r \alpha_i + r_r \tau_i \quad \text{con } i = 1, \dots, 4 \quad (52)$$

dove:

- r_r il raggio del rocchetto;
- $I_r = \frac{1}{2}m_r r_r^2$ è l'inerzia del rocchetto con m_r la massa del rocchetto.

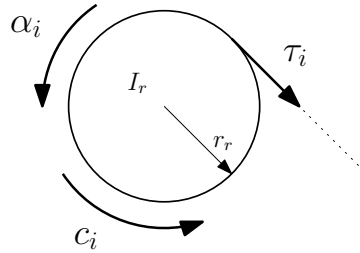


Figura 10: Schema delle forze generalizzate applicate al motore di un robot a cavi

Passando alla scrittura vettoriale valida per tutti i motori si ha:

$$\mathbf{c} = I_r \boldsymbol{\alpha} + r_r \boldsymbol{\tau} \quad (53)$$

con:

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{r_r} \ddot{\mathbf{z}}$$

dove:

$$\ddot{\mathbf{z}} = \left\{ \ddot{z}_1 \quad \ddot{z}_2 \quad \ddot{z}_3 \quad \ddot{z}_4 \right\}^T \quad \text{da (48)}.$$

4.3 MODELLO SEMPLIFICATO

In fig. 11 è presente lo schema del robot a cavi semplificato, utile per scrivere l'equazione di Lagrange. Si ha che:

- β_i con $i = 1, \dots, 4$ la velocità angolare del motore i ;
- α_i con $i = 1, \dots, 4$ l'accelerazione angolare del motore i ;
- $m_{rid} = m_{OT} + I_r \sum_{i=1}^4 k_i^2$ la massa ridotta;
- ϵ l'angolo della traiettoria del moto;
- θ_i con $i = 1, \dots, 4$ l'angolo del cavo i ;
- c_i con $i = 1, \dots, 4$ la coppia motrice del motore i ;
- a_d, v_d, x_d sono il modulo dell'accelerazione, della velocità e la posizione dell'organo terminale lungo la direzione di moto.

I rapporti di velocità k_i sono:

$$k_i = -\frac{1}{r_r} \cos(\theta_i - \epsilon) = \frac{\beta_i}{v_d} \quad (54)$$

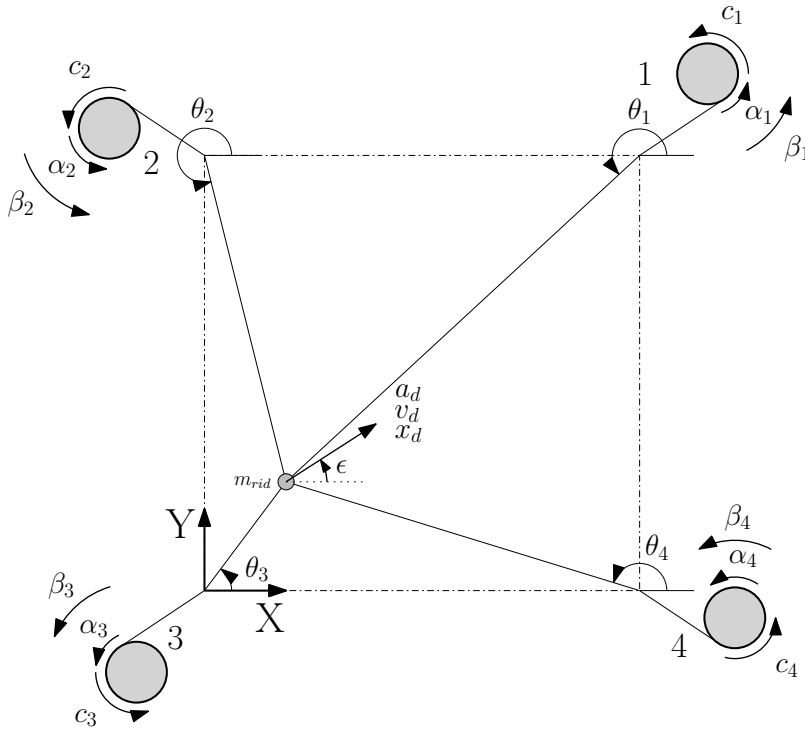


Figura 11: Schema semplificato di robot a cavi valido per spostamenti rettilinei

e si può definire il vettore \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} = \{k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4\}^T$$

Si definisce inoltre:

$$\mathbf{c} = \{c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4\}^T$$

L'equazione di Lagrange è:

$$m_{rid} a_d + \frac{1}{2} \frac{dm_{rid}}{dx_d} v_d^2 = \sum_{i=1}^4 k_i c_i = \mathbf{k}^T \mathbf{c} \quad (55)$$

dove

$$\frac{dm_{rid}}{dx_d} = -2 \frac{I_r}{r_r} \sum_{i=1}^4 \sin^2(\theta_i - \epsilon) k_i^2$$

4.4 CALCOLO NUOVI INDICI

In questa sezione si calcola l'indice di prestazione per il robot precedentemente esaminato su una traiettoria rettilinea. I dati del robot sono:

- $L_x = L_y = 5$ m dimensioni del workspace;

- $c_{\max} = 0.3 \text{ Nm}$, $c_{\min} = -0.3 \text{ Nm}$, $t_{\max} = 0.5 \text{ N}$, $t_{\min} = 0.1 \text{ N}$ limiti di coppia e di tensione;
- $r_r = 0.1 \text{ m}$, $I_r = 5 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$ raggio e inerzia dei rocchetti.

La traiettoria rettilinea seguita dall'organo terminale è rappresentata in fig. 12, dove la freccia rappresenta il verso di percorrenza. Le caratteristiche di questa traiettoria percorsa sono:

- punto iniziale nello spazio di lavoro: $(x_{in}, y_{in}) = (1.5, 4)$;
- punto finale nello spazio di lavoro: $(x_f, y_f) = (4, 1)$;
- lunghezza: $l_t = 3.9051 \text{ m}$;
- angolo: $\epsilon = -0.8761 \text{ rad}$.

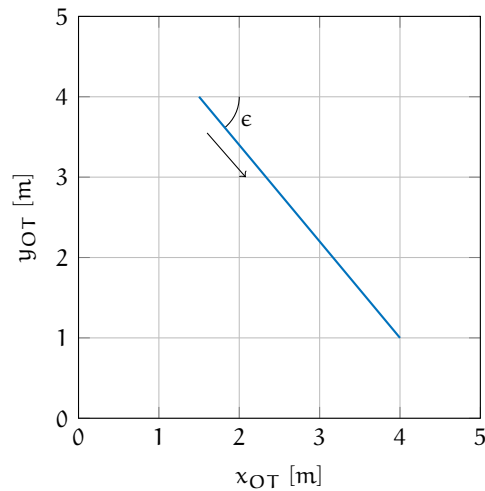


Figura 12: Traiettoria seguita dal robot a cavi nel spazio di lavoro, dove la freccia rappresenta il verso di percorrenza ed ϵ l'angolo di rotazione rispetto a x_{OT}

L'indice definito si può sfruttare per calcolare sia l'accelerazione massima che la decelerazione massima garantiti in un range di velocità. Si mostrano ora i valori di questi indici trovati per il modello completo e per il modello ridotto. Il confronto si effettua successivamente.

Modello completo

L'accelerazione massima garantita calcolata come descritto in sezione 3.4 sul percorso di fig. 12 è rappresentata in fig. 13. Come si può notare è presente un punto angoloso a $x_d = 1.75 \text{ m}$ che è dovuto al cambio di configurazione di un cavo. Con cambio di configurazione di un cavo si intende che la proiezione della tensione del cavo sulla direzione di moto cambia verso, ovvero passa da positiva cioè a favore dell'accelerazione dell'organo terminale, a negativa, e quindi a sfavore dell'accelerazione dell'organo terminale, o viceversa. In questo

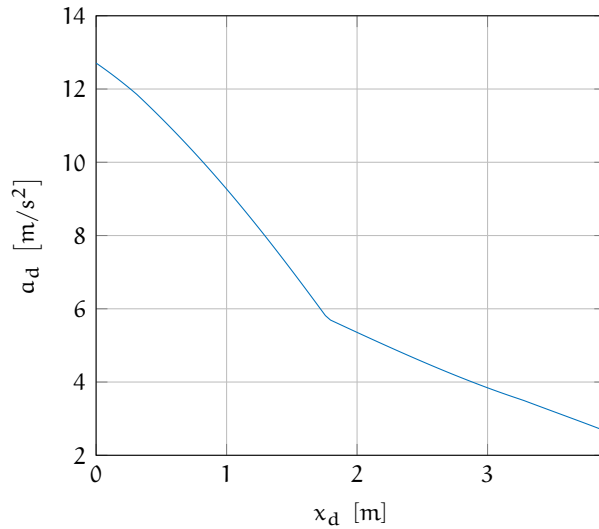


Figura 13: Accelerazione massima garantita calcolata sul modello completo di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea

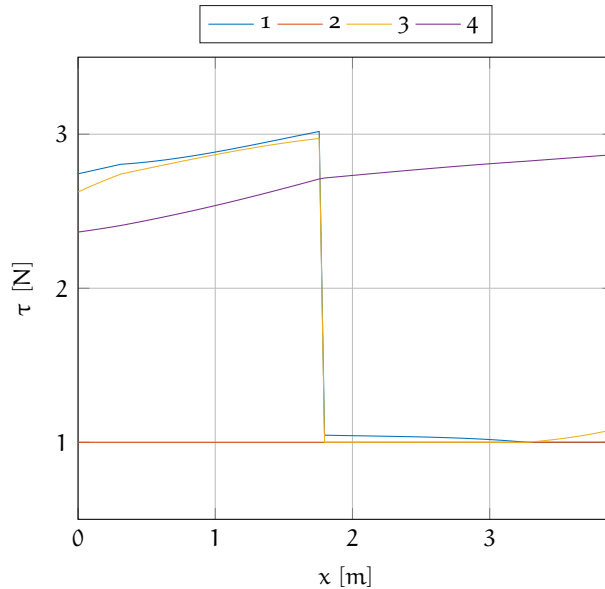


Figura 14: Tensioni che forniscono l'accelerazione massima garantita per il modello completo con 1, 2, 3, 4 i valori di tensione dei rispettivi cavi

punto il cavo che cambia configurazione è il n° 1. Nella zona caratterizzata da un'ascissa minore di 1.75 m, il cavo fornisce un contributo positivo all'accelerazione con un valore di tensione tale da rispettare i vincoli di tensione, di coppie e della direzione del moto. Nella zona caratterizzata da un'ascissa superiore a $x_d = 1.75$ m, ovvero con $x_d > 1.75$ m, il cavo contribuisce negativamente all'accelerazione nel rispetto dei vincoli. Come si può notare da fig. 14 ciò che avviene in questo cambio di configurazione è un'importante variazione di

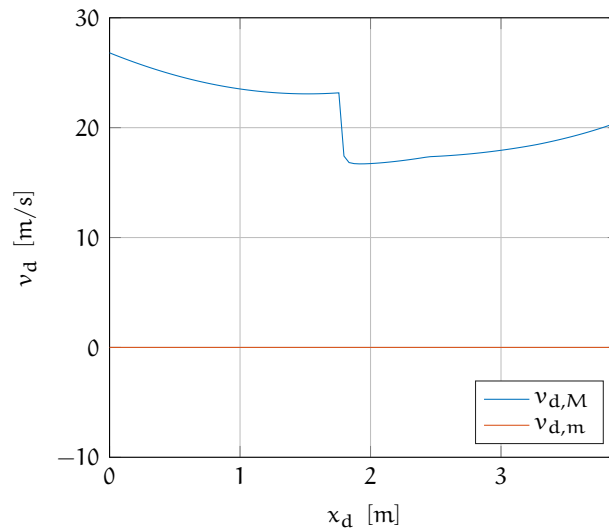


Figura 15: Range di velocità nel quale si garantisce l'accelerazione massima calcolata sul modello completo di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea con $v_{d,m}$ la velocità minima e $v_{d,M}$ la velocità massima del range

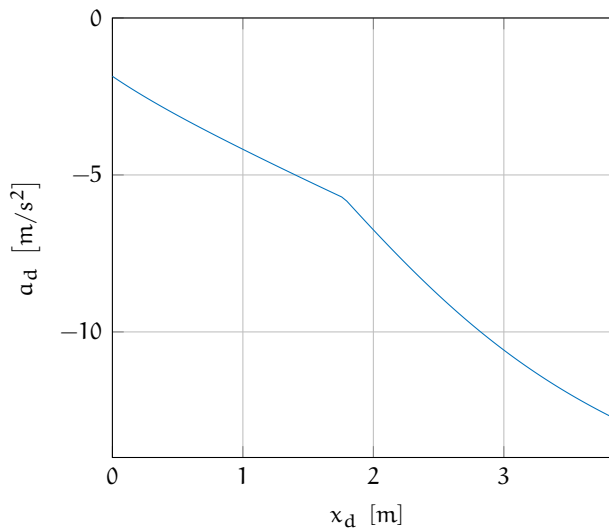


Figura 16: Decelerazione massima garantita calcolata sul modello completo di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea

tensione che fornisce il valore massimo di accelerazione. Questa variazione di tensione avviene anche nel cavo n° 3 che deve mantenere l'equilibrio globale del sistema sulla direzione richiesta. Si va quindi a formare questo punto angoloso. Il cambio di configurazione del cavo n° 3 avviene a $x_d = 2.4$ m con una variazione minima dei valori di tensioni, quindi il punto angoloso diventa impercettibile. In fig. 15 si trova il range di velocità all'interno del quale si garantisce il valore di accelerazione presentato in fig. 13.

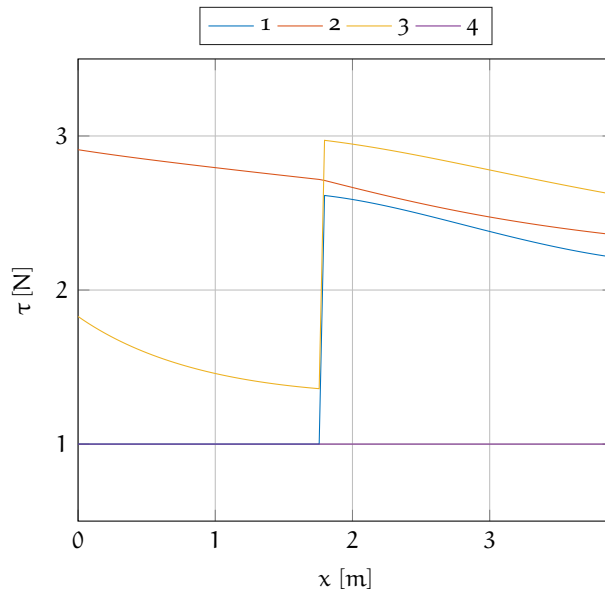


Figura 17: Tensioni che forniscono la decelerazione massima garantita per il modello completo con 1, 2, 3, 4 i valori di tensione dei rispettivi cavi

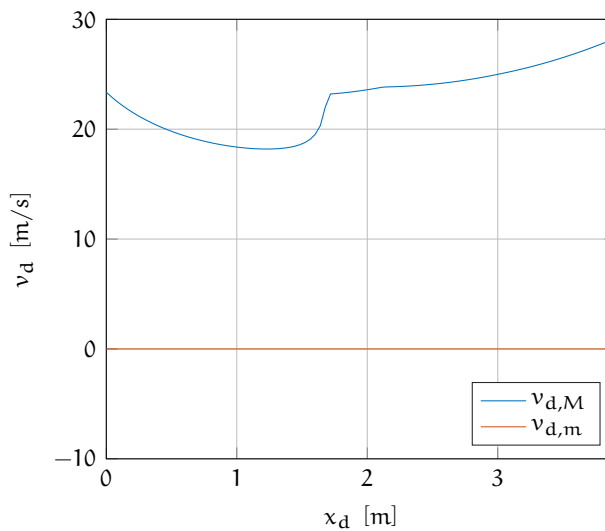


Figura 18: Range di velocità nel quale si garantisce la decelerazione calcolata sul modello completo di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea con $v_{d,m}$ la velocità minima e $v_{d,M}$ la velocità massima del range

La decelerazione massima garantita calcolata come descritto in sezione 3.4 sul percorso di fig. 12 è rappresentata in fig. 16.

Anche nella fig. 16 si può notare la presenza di un punto angoloso abbastanza evidente a $x_d = 1.75$ m dovuto al cambio di configurazione del cavo n° 1 che avviene con una importante variazione di tensione come si può notare in fig. 17 mentre quello del cavo n° 3 che avviene a $x_d = 2.4$ m si trova in una posizione dove la variazione

delle tensioni non è elevata, aspetto che porta alla non percezione del punto angoloso. In fig. 18 si trova il range di velocità all'interno del quale si garantisce il valore di decelerazione presentato in fig. 16.

Modello semplificato

Si presenta ora l'indice di accelerazione massima garantita in un range di velocità calcolato sul modello semplificato di un robot a cavi in moto rettilineo.

L'accelerazione massima garantita calcolata come descritto in sezione

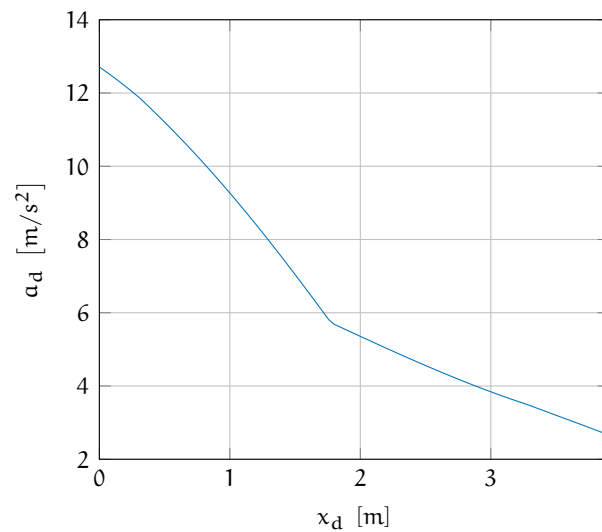


Figura 19: Accelerazione massima garantita calcolata sul modello semplificato di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea

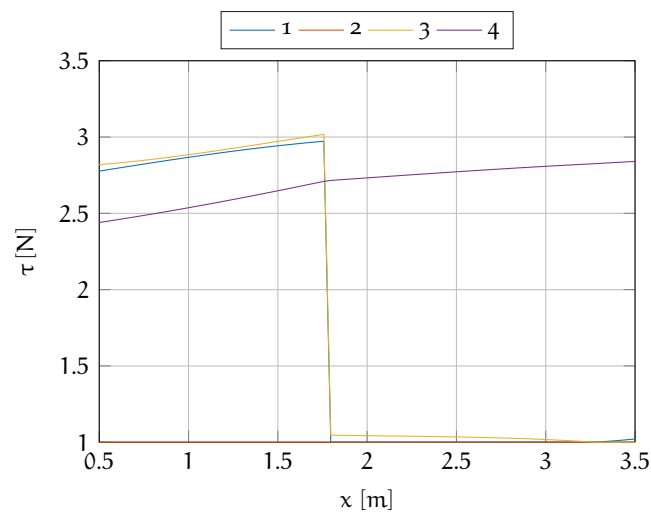


Figura 20: Tensioni che forniscono l'accelerazione massima garantita per il modello semplificato con 1, 2, 3, 4 i valori di tensione dei rispettivi cavi

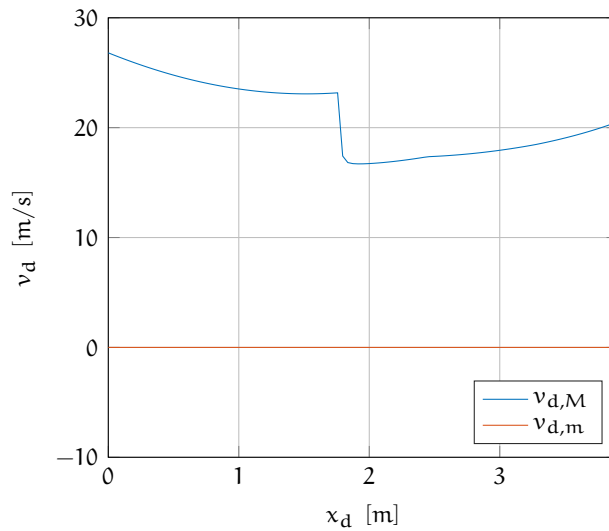


Figura 21: Range di velocità nel quale si garantisce l'accelerazione massima calcolata sul modello semplificato di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea con $v_{d,m}$ la velocità minima e $v_{d,M}$ la velocità massima del range

3.4 sul percorso di fig. 12 è rappresentata in fig. 19. Come nel caso del modello completo si può notare la presenza di un punto angoloso a $x_d = 1.75$ m dovuto al cambio di configurazione del cavo n° 1 che avviene con una variazione di tensione maggiore rispetto al punto angoloso, nemmeno percettibile, presente in $x_d = 2.4$ m dovuto al cambio di configurazione del cavo n° 3 come si può notare dalla fig. 20.

In fig. 21 si trova il range di velocità nel quale si garantisce il valore

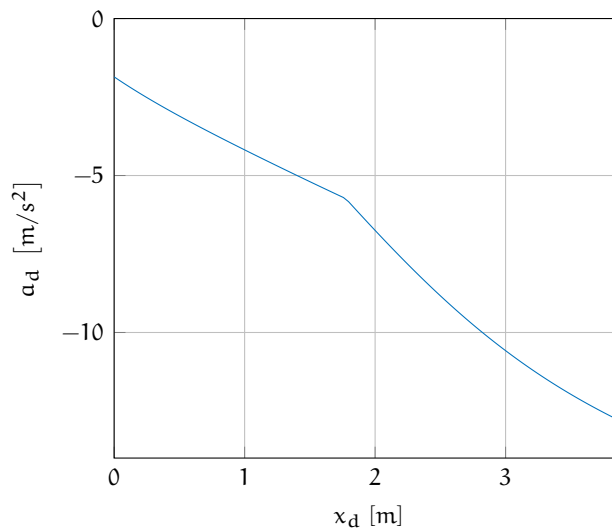


Figura 22: Decelerazione massima garantita calcolata sul modello semplificato di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea

di accelerazione presente in fig. 19.

La decelerazione massima garantita calcolata come descritto in sezione 3.4 sul percorso descritto in fig. 12 è rappresentata in fig. 22. Anche

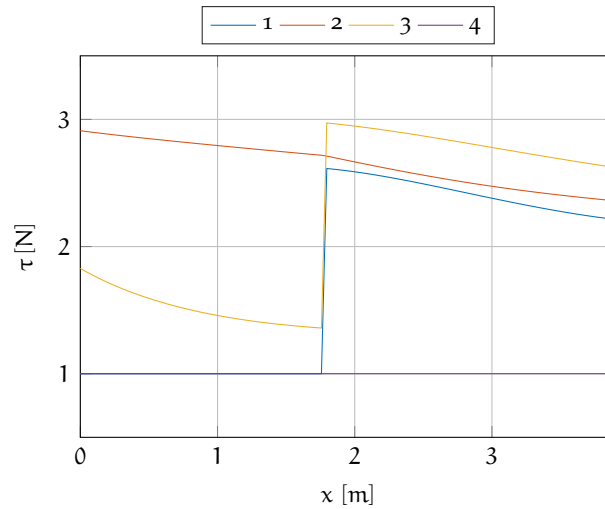


Figura 23: Tensioni che forniscono la decelerazione massima garantita per il modello semplificato con 1, 2, 3, 4 i valori di tensione dei rispettivi cavi

in questa figura si può notare la presenza del punto angoloso più visibile a $x_d = 1.75$ m per il cambio di configurazione del cavo n°1 che avviene con un'importante variazione di forze generalizzate applicate al sistema, mentre l'altro cambio di configurazione presente in questa traiettoria al punto $x_d = 2.4$ m non è percettibile per la piccola variazione di forze generalizzate come si trova in fig. 23.

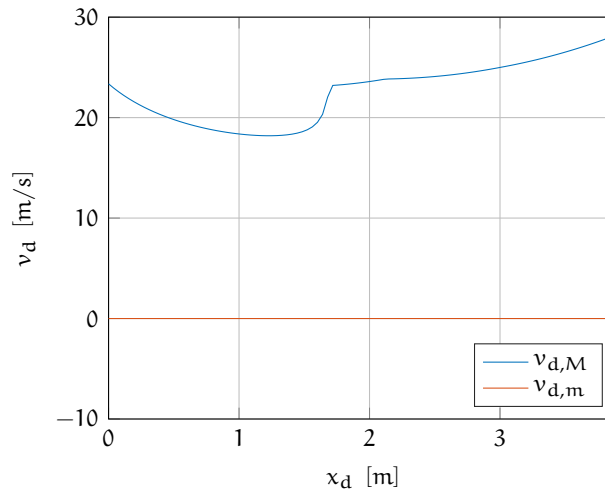


Figura 24: Range di velocità nel quale si garantisce la decelerazione calcolata sul modello semplificato di un robot a cavi lungo una traiettoria rettilinea con $v_{d,m}$ la velocità minima e $v_{d,M}$ la velocità massima del range

In fig. 24 si trova il range di velocità all'interno del quale si garantisce il valore di decelerazione presentato in fig. 17.

Differenze Indici modello completo e semplificato

Si vanno ora a confrontare gli indici di prestazione calcolati sul modello completo e su quello semplificato. Si mostra la differenza tra accelerazione massima, decelerazione massima ed i relativi range di velocità dei due modelli.

In fig. 25 si può notare come la differenza tra l'accelerazione massima garantita calcolata sul modello completo e la corrispondente accelerazione del modello semplificato dello stesso robot a cavi sia nell'ordine di 10^{-8} m/s^2 e quindi sufficientemente piccola tale da affermare che i due valori accelerazione si possano considerare uguali.

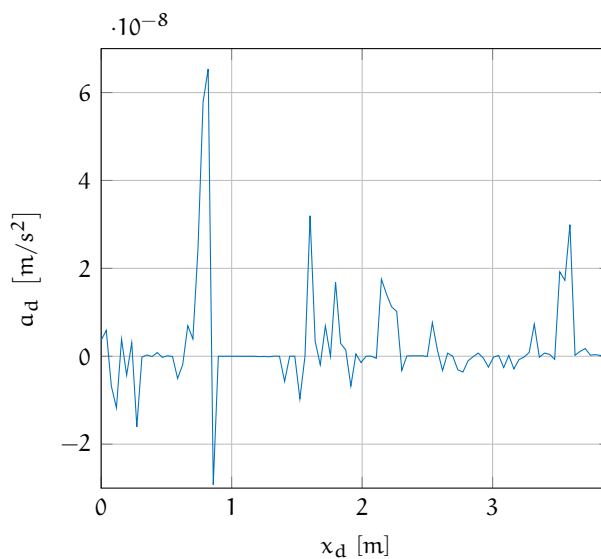


Figura 25: Differenza tra le accelerazioni massime garantite in un range di velocità calcolate sul modello completo e sul modello semplificato di un robot a cavi in moto lungo una traiettoria rettilinea

In fig. 26 si rappresenta la differenza delle velocità massime ottenute dai rispettivi valori di accelerazione massima garantita del modello completo e del modello semplificato. Si mostra solo la differenza di velocità massima e non della velocità minime dei due range dato che le velocità minime associate sono entrambe nulle. Come si può notare la differenza massima dei valori di velocità è nell'ordine di 10^{-6} m/s , aspetto che porta ad affermare che i due range di velocità si possano considerare uguali. In fig. 27 si può notare come la differenza tra la decelerazione massima garantita nel range di velocità del modello completo del robot a cavi in moto rettilineo e la corrispondente decelerazione calcolata sul modello semplificato dello stesso robot sia nell'ordine di 10^{-8} m/s^2 e quindi sufficientemente piccola tale da

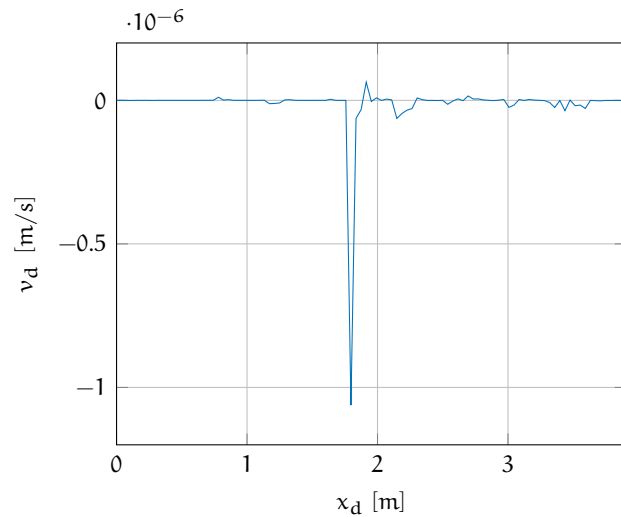


Figura 26: Differenza tra le velocità massime tali da garantire il valore di accelerazione richiesta calcolate sul modello completo e sul modello semplificato di un robot a cavi in moto lungo una traiettoria rettilinea

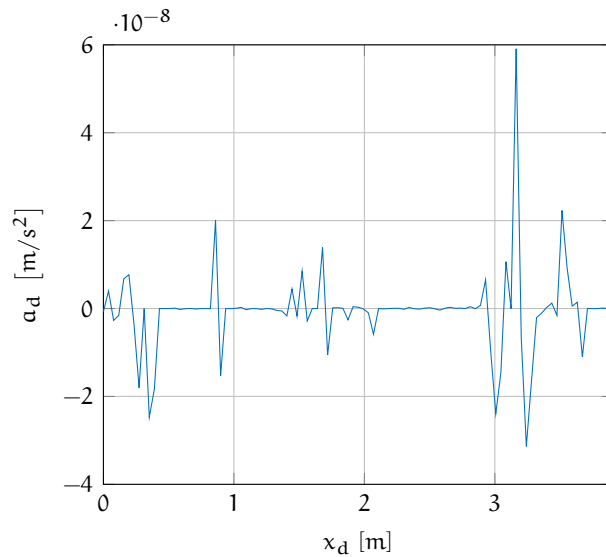


Figura 27: Differenza tra le decelerazioni massime garantite in un range di velocità calcolate sul modello completo e sul modello semplificato di un robot a cavi in moto lungo una traiettoria rettilinea

affermare che i due valori decelerazione siano uguali. In fig. 28 si rappresenta la differenza delle velocità massime ottenute dalle rispettive decelerazioni massime garantite del modello completo e sul modello semplificato. Si mostra solo la differenza di velocità massima e non della velocità minime dei due range dato che le velocità minime sono entrambe nulle. Come si può notare la differenza massima dei valori di velocità è nell'ordine di 10^{-7} m/s, aspetto che porta ad affermare

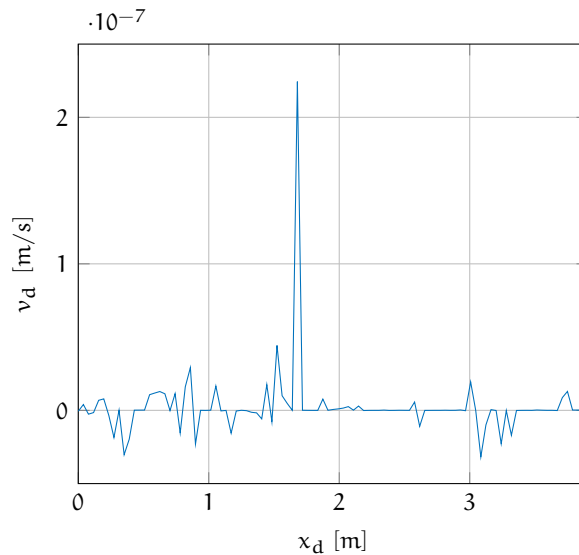


Figura 28: Differenza tra le velocità massime tali da garantire il valore di decelerazione richiesta calcolate sul modello completo e sul modello semplificato di un robot a cavi in moto lungo una traiettoria rettilinea

che i due range di velocità sia uguali.

4.5 VERIFICA INDICE

In questa sezione si verifica la correttezza dell'indice proposto tramite una legge di moto "rest to rest", ovvero che la velocità e l'accelerazione sono nulle all'inizio ed alla fine del percorso previsto. La legge usata è una polinomiale del 5° ordine. La sua formulazione è la seguente:

$$\begin{aligned}x_d(t) &= (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5) l_t; \\v_d(t) &= (a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4) l_t / t_t; \\a_d(t) &= (2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3) l_t / t_t^2;\end{aligned}$$

dove $t_t = 1.54$ s, $l_t = 3.9051$ m

e $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 10$, $a_4 = -15$, $a_5 = 6$

Nell'equazione precedente l_t è la lunghezza della traiettoria percorsa e t_t è il tempo di percorrenza della traiettoria. La fig. 29 rappresenta la legge di moto rappresentata nel tempo e lungo lo spostamento effettuato dall'organo terminale.

Nella fig. 30 si confrontano i limiti di accelerazione forniti nella precedente sezione con l'accelerazione richiesta dalla legge di moto e si può notare che la legge di moto rispetta questo vincolo.

Nella fig. 31 si confronta la velocità limite massima fornita dall'indice di prestazione con la velocità richiesta dalla legge di moto. La

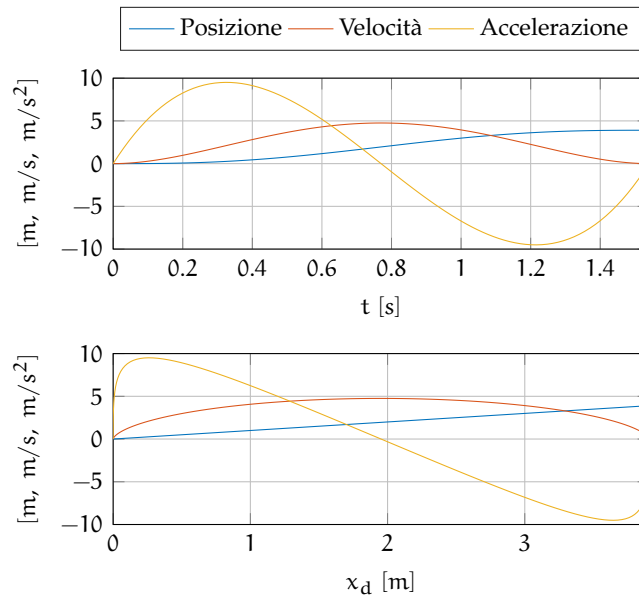


Figura 29: Legge di moto polinomiale del 5° ordine richiesta al robot nel tempo e nello spazio sul percorso rettilineo previsto

velocità massima indicata è composta da due parti. La prima metà, avendo l'organo terminale in fase di accelerazione, è presa dal limite massimo di fig. 15 mentre la seconda metà, avendo l'organo terminale in fase di decelerazione, è presa dal limite massimo di fig. 18. Per come è stata creata la legge di moto la velocità non è mai negativa e perciò si considera il vincolo minimo di velocità, che è nullo, soddisfatto a priori.

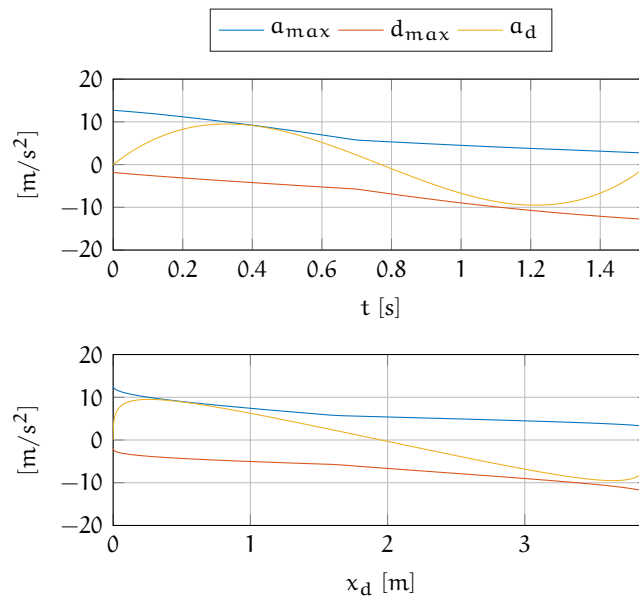


Figura 30: Confronto tra l'accelerazione massima, a_{max} , la decelerazione massima, d_{max} , e l'accelerazione desiderata a_d all'organo terminale di un robot a cavi in moto rettilineo

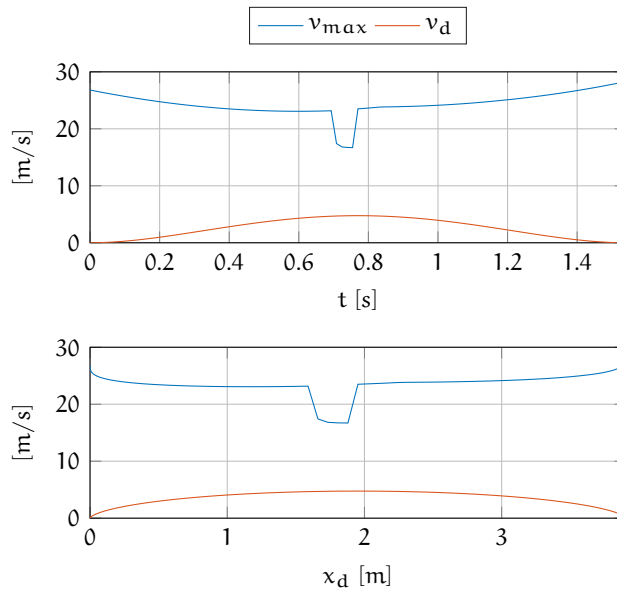


Figura 31: Confronto tra la velocità massima v_{max} che l'organo terminale può raggiungere nel rispetto dell'indice di prestazione e la velocità desiderata v_d all'organo terminale del robot in un moto rettilineo. La velocità massima v_{max} è la composta da due parti: la prima metà è la velocità massima in accelerazione, la seconda metà è la velocità massima in decelerazione

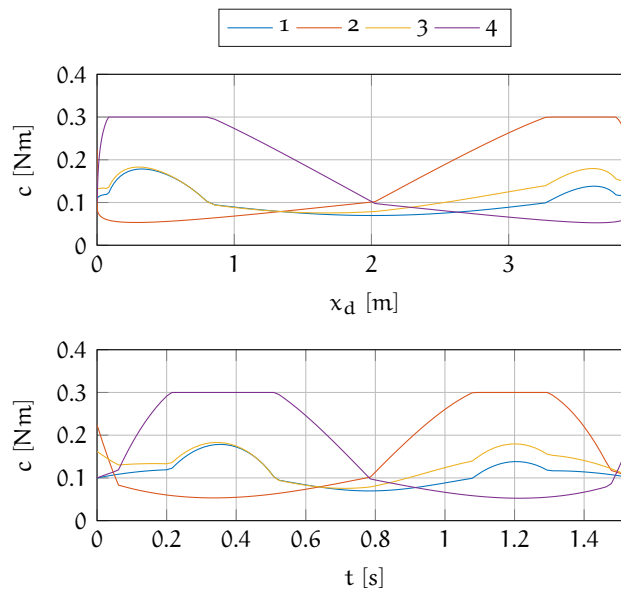


Figura 32: Coppie da applicare al robot a cavi per ottenere la legge di moto polinomiale del 5° ordine rettilinea desiderata con 1, 2, 3, 4 la coppia del motore corrispondente

Dato che i limiti imposti dall'indice di prestazione sono stati rispettati si può effettuare il calcolo delle coppie e tensioni da applicare al robot a cavi. Applicando il nuovo metodo di dinamica inversa di sezione 3.5 si trovano le coppie da applicare al robot mostrate in fig. 32.

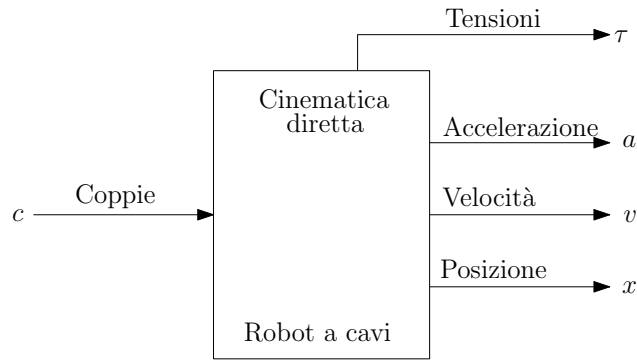


Figura 33: Schema a blocchi per risolvere la dinamica diretta del robot a cavi

Si può notare che 2 tra le coppie desiderate arrivano, in istanti diversi, al limite di coppia c_{max} , poiché la legge di moto chiede praticamente la prestazione massima al robot, ma non superino tale limite. Anche il limite di coppia inferiore, $-c_{max}$, viene rispettato.

Per verificare la correttezza dell'indice di prestazione e del nuovo metodo di soluzione del problema di dinamica inversa si è creato un modello Simulink che simula la dinamica diretta del robot a cavi analizzato in questo capitolo. In fig. 33 si trova lo schema a blocchi della dinamica diretta del robot cavi. Dalla simulazione si sono ricavati i valori di posizione, velocità, accelerazione e tensioni ottenuti del robot a cavi al quale si è applicata la coppia calcolata.

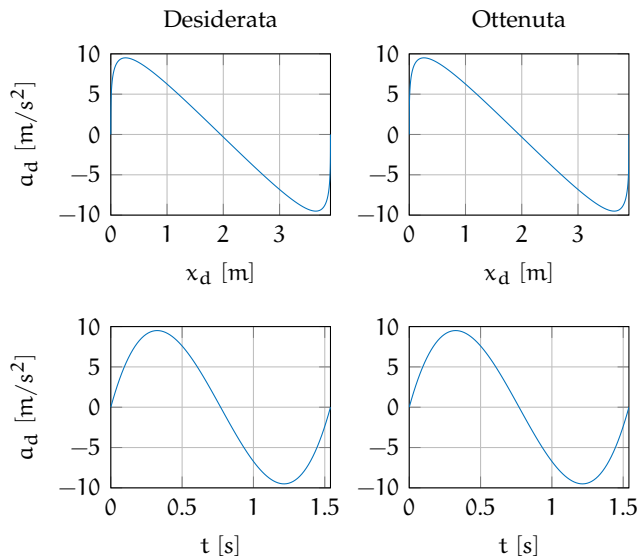


Figura 34: Confronto tra l'accelerazione desiderata e l'accelerazione ottenuta dal robot a cavi in moto rettilineo, il confronto viene fatto sia nel tempo che sul percorso seguito

Si presentano qui di seguito i risultati desiderati e quelli ottenuti dalla simulazione. In fig. 34 si trova il confronto tra l'accelerazione

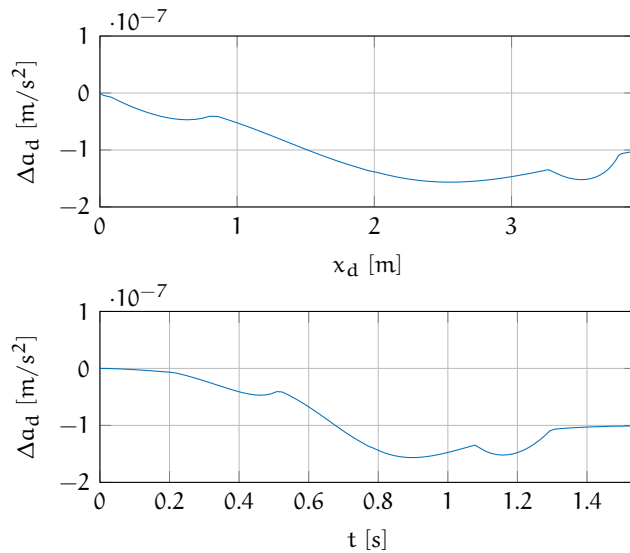


Figura 35: Differenza tra l'accelerazione desiderata ed l'accelerazione ottenuta nel tempo e nello spazio su una traiettoria rettilinea con una legge di moto polinomiale del 5° ordine

desiderata e quella ottenuta dal robot. Si effettua il confronto sia nel tempo che nello spostamento lungo la traiettoria.

In fig. 35 si trova la differenza tra l'accelerazione desiderata e quella ottenuta nel moto rettilineo di un robot a cavi. Si può notare come, essendo la differenza nell'ordine di 10^{-7} m/s^2 , l'accelerazione ottenuta corrisponde a quella desiderata. In fig. 36 si trova il confronto tra la velocità desiderata e quella ottenuta dal robot. Si effettua il confronto

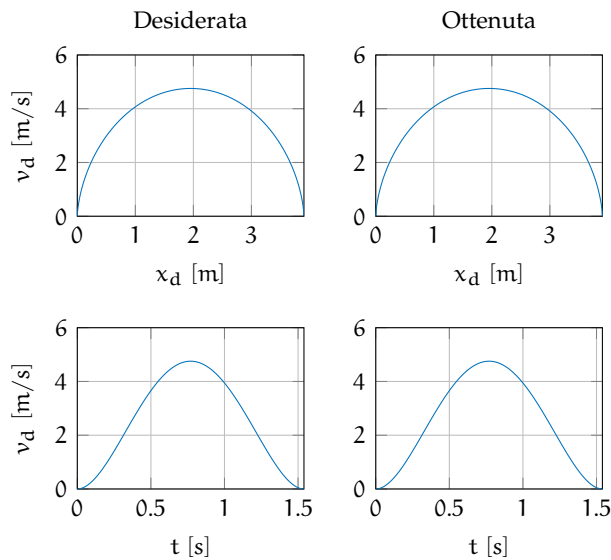


Figura 36: Confronto tra la velocità desiderata e la velocità ottenuta dal robot a cavi in moto rettilineo, il confronto viene fatto sia nel tempo che sul percorso seguito

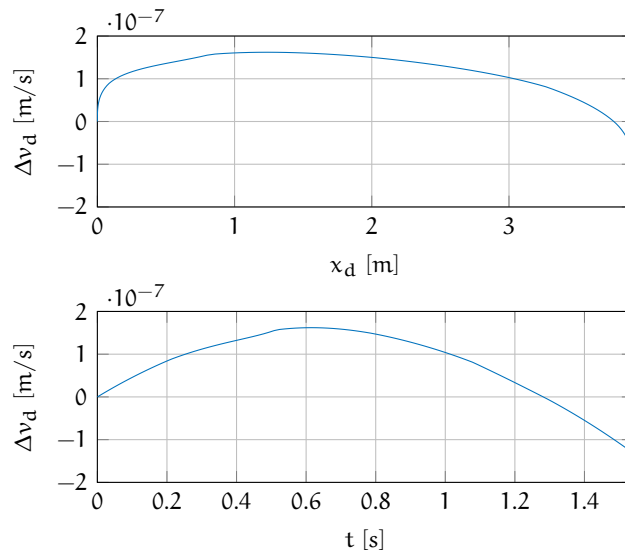


Figura 37: Differenza tra la velocità desiderata ed la velocità ottenuta nel tempo e nello spazio su una traiettoria rettilinea con una legge di moto polinomiale del 5° ordine

sia nel tempo che nello spostamento lungo la traiettoria. Si può notare, come verrà mostrato meglio in fig. 37, l'uguaglianza dei valori desiderati ed ottenuti.

In fig. 37 si trova la differenza tra la velocità desiderata e quella ottenuta in un moto rettilineo di un robot a cavi. Si può notare come, essendo la differenza nell'ordine di 10^{-7} m/s², la velocità ottenuta corrisponde a quella desiderata.

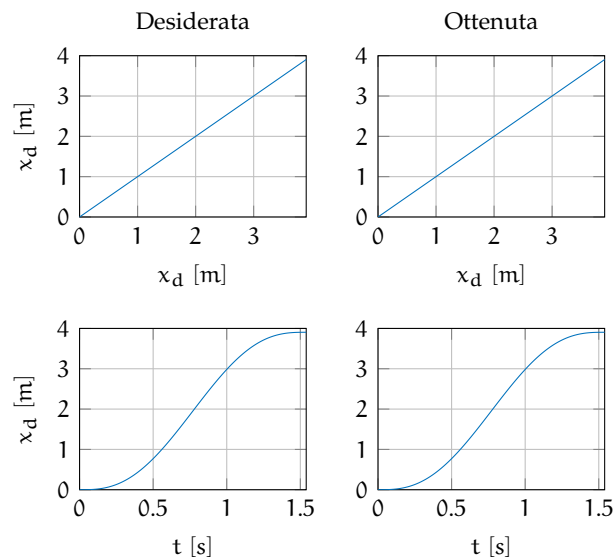


Figura 38: Confronto tra la posizione desiderata e la posizione ottenuta dal robot a cavi in moto rettilineo, il confronto viene fatto sia nel tempo che sul percorso seguito

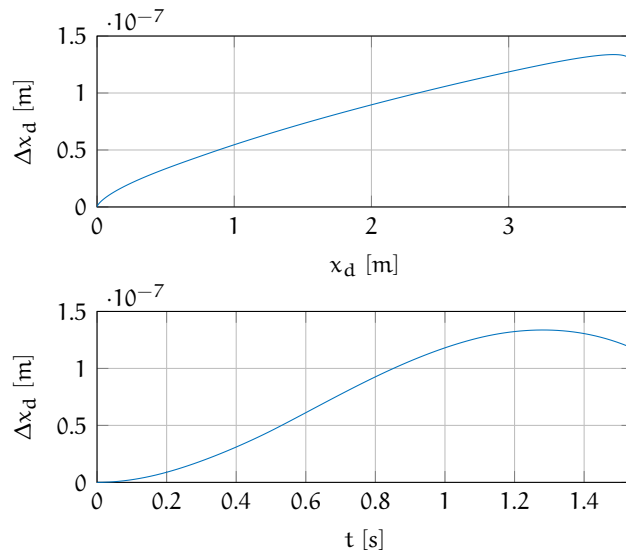


Figura 39: Differenza tra la posizione desiderata ed la posizione ottenuta nel tempo e nello spazio su una traiettoria rettilinea con una legge di moto polinomiale del 5° ordine

In fig. 38 si trova il confronto tra la posizione desiderata e quella ottenuta dal robot. Si effettua il confronto sia nel tempo che nello spostamento lungo la traiettoria. Si può notare, come verrà mostrato meglio in fig. 39, l'uguaglianza dei valori desiderati ed ottenuti.

In fig. 39 si trova la differenza tra la posizione desiderata e quella ottenuta in un moto rettilineo di un robot a cavi. Si può notare come, essendo la differenza nell'ordine di 10^{-7} m/s^2 , la posizione ottenuta corrisponde a quella desiderata.

In fig. 40 si trova il moto effettuato sul piano di lavoro dove la freccia indica il verso di percorrenza. Si può notare come il percorso

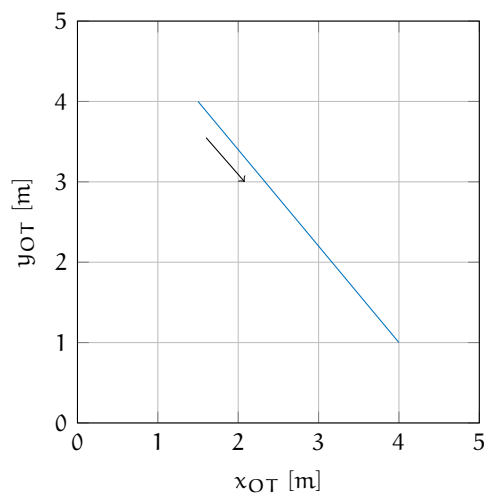


Figura 40: Percorso ottenuto nello spazio di lavoro dove la freccia indica il verso di percorrenza

tracciato sia rettilineo e si concluda nel punto corretto.

In fig. 41 si rappresentano le tensioni dei cavi desiderate, ovvero quelle calcolate precedentemente insieme alle coppie durante i calcoli della dinamica inversa, e quelle ottenute sul robot durante la simulazione. Si presentano i risultati sia nel tempo che nello spazio. Ciò che si può notare è che le tensioni non escono mai dai limiti imposti τ_{\max} e τ_{\min} .

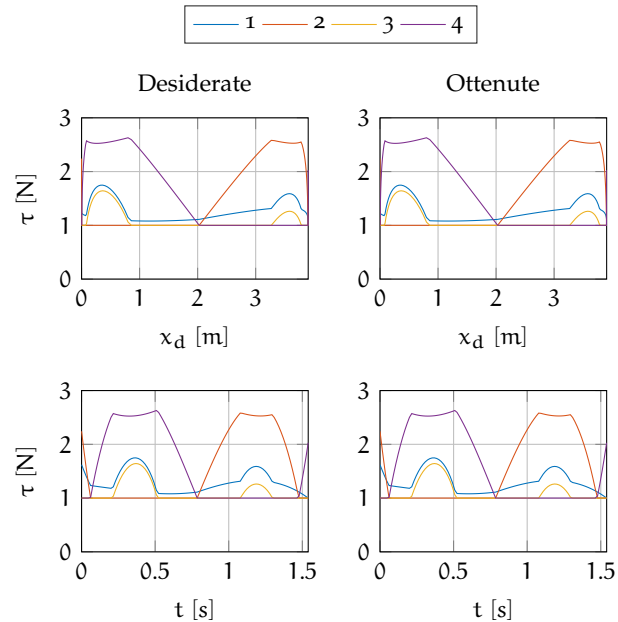


Figura 41: Tensioni desiderate ed ottenute all'organo terminale del robot a cavi nel tempo e nel percorso effettuato con 1, 2, 3, 4 la tensione del cavo corrispondente

In fig. 42 si trova la differenza tra le tensioni desiderate e quelle ottenute dalla simulazione del robot a cavi. Si può notare che, essendo la differenza nell'ordine di 10^{-8} N, le tensioni ottenute corrispondono a quelle desiderate.

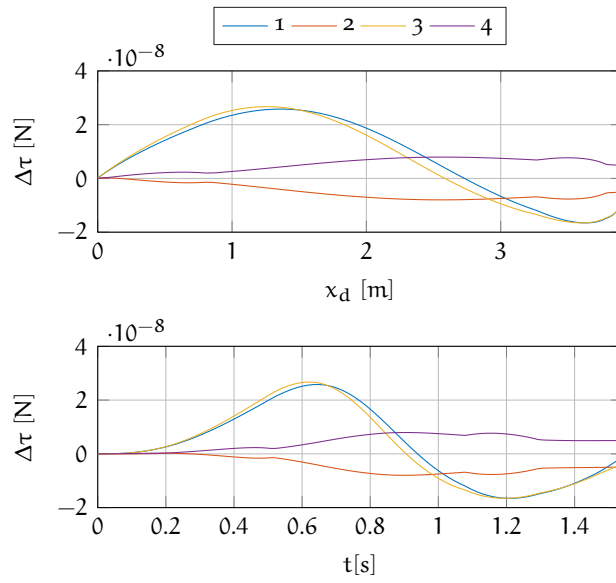


Figura 42: Differenza tra le tensioni desiderate ed le tensioni ottenute nel tempo e nello spazio per una traiettoria rettilinea in un robot a cavi con 1, 2, 3, 4 il valore differenza delle tensioni del cavo corrispondente

CONCLUSIONI

Con questo elaborato si fornisce un nuovo indice direzionale di prestazione massima garantita per i robot a cavi ed un modello semplificato utile nel moto rettilineo. La valutazione dell'indice di prestazione viene effettuata sia con il modello completo che con il modello semplificato del robot.

Il modello semplificato si trova, nel caso di spostamenti rettilinei e senza rotazioni dell'organo terminale, usando il concetto di inerzia ridotta alla coordinata libera e l'equazione di Lagrange. Questo modello risulta utile per movimentazioni ad 1 gdl, infatti la sua descrizione riconduce ad un'equazione scalare al posto di quella matriciale utilizzata per un robot a cavi in moto generico. Nella valutazione dell'indice di prestazione con il modello semplificato è necessario anche valutare le tensioni e le accelerazioni angolari e ortogonali alla direzione di moto dato che tali valori non sono presenti nell'equazione di Lagrange (14).

L'indice di prestazione proposto è stato ideato per poter valutare a priori le prestazioni di un robot a cavi e, in particolare, si può sapere se una legge di moto può essere eseguita dal robot.

Il nuovo metodo di calcolo delle tensioni e delle coppie, ovvero il metodo di soluzione del problema di dinamica inversa, va a unificare le varie proposte trovate in letteratura fornendo una procedura di calcolo completa, formale e applicabile ai robot a cavi over-actuated.

Si è effettuato il calcolo dell'indice di prestazione proposto per un robot a cavi con 4 motori, 2 gradi di libertà nel piano, in assenza di gravità e con organo terminale puntiforme. Confrontando gli indici trovati nel caso del modello semplificato con quello calcolato nel caso del modello completo si trova la loro uguaglianza. Successivamente si è valutata una legge di moto polinomiale del 5° ordine, "rest to rest", che simula uno spostamento rettilineo tra due punti nel piano con un'accelerazione che sia la massima indicata dall'indice precedentemente calcolato e la velocità nei limiti richiesti. Dalla simulazione della dinamica diretta effettuata in Simulink si è trovato che il robot ha seguito la legge di moto richiesta senza mai superare i limiti di coppia e tensione imposti.

Questo lavoro fornisce un indice di prestazione massima garantita che aiuta ad effettuare la programmazione della legge di moto o, in fase di progettazione del robot, il calcolo delle prestazioni garantite. La conoscenza a priori delle prestazioni massime che il robot può raggiungere è molto utile dato che evita la simulazione della dinamica inversa che serve per sapere se le tensioni o le coppie escono dai limiti massimi per eseguire la legge di moto richiesta.

Nel calcolo del range di velocità nel quale si garantisce l'accelerazione massima si è trascurato il limite di velocità dell'organo terminale dovuto alla velocità limite dai motori. Questo limite non è stato considerato per lasciare la procedura di calcolo dell'indice di prestazione più concisa possibile e perché, dalle conoscenze matematiche ricordate in questo elaborato, si può ricavare la velocità massima dell'organo terminale grazie alla cinematica del manipolatore. Tale valore si inserisce come limite massimo di velocità nella procedura di calcolo.

Possibili futuri sviluppi possono essere la definizione di un nuovo workspace basato sull'indice di prestazione che considera la dinamica del sistema, la valutazione della prestazione massima nel caso di moto curvilineo, l'introduzione della gravità, degli attriti, dell'elasticità e della massa dei cavi nell'indice di prestazione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. Boschetti and A. Trevisani. Performance Evaluation for Cable Direct Driven Robot. In *Proceedings of the 12th Biennial Conference on Engineering System Design and Analysis (ASME 2014)*, pages 30–37, Bath, UK, June 2014.
- [2] M.H. Korayem, H. Tourajizadeh, M. Taherifar, S. Khayatzadeh, M. Maddah, A. Imanian, and A. Tajik. A novel method for recording the position and orientation of the end effector of a spatial cable-suspended robot and using for closed-loop control. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 72(5-8): 739–755, 2014. ISSN 0268-3768. doi: 10.1007/s00170-014-5681-2. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00170-014-5681-2>.
- [3] Cong Bang Pham, Song Huat Yeo, Guilin Yang, and I-Ming Chen. Workspace analysis of fully restrained cable-driven manipulators. *Robotics and Autonomous Systems*, 57(9):901 – 912, 2009. ISSN 0921-8890. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.robot.2009.06.004>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921889009000827>.
- [4] Rodney G. Roberts, Todd Graham, and Thomas Lippitt. On the inverse kinematics, statics, and fault tolerance of cable-suspended robots. *Journal of Robotic Systems*, 15(10):581–597, 1998. ISSN 1097-4563. doi: 10.1002/(SICI)1097-4563(199810)15:10<581::AID-ROB4>3.0.CO;2-P. URL [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-4563\(199810\)15:10<581::AID-ROB4>3.0.CO;2-P](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-4563(199810)15:10<581::AID-ROB4>3.0.CO;2-P).
- [5] G. Rosati, D. Zanotto, and S. K. Agrawal. On the design of adaptive cable-driven systems. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 3, 2011.
- [6] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, and G. Oriolo. *Robotica - Modellistica, pianificazione e controllo*. McGraw-Hill, 3rd edition, 2008. ISBN 978-88-386-6322-2. pp. 484–485.
- [7] A. Trevisani. Planning of dynamically feasible trajectories for translational, planar, and underconstrained cable-driven robots. *Journal of Systems Science and Complexity*, 26(5):695–717, 2013. ISSN 1009-6124. doi: 10.1007/s11424-013-3175-1. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11424-013-3175-1>.
- [8] R. L. Williams II and P. Gallina. Planar cable-direct-driven robots, part i: Kinematics and statics. In *Proceedings of the 27th Design Automation Conference (ASME 2001)*, September 2001.

