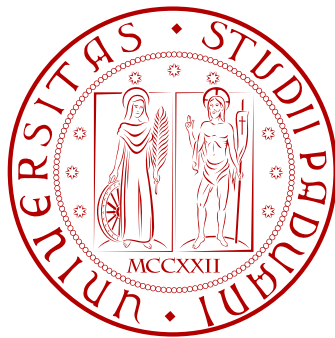


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E  
NATURALI  
DIPARTIMENTO DI FISICA “Galileo Galilei”



LAUREA TRIENNALE IN FISICA

**Configurazioni centrali ad  
anello nel problema  
degli  $N$  corpi**

Relatore: Prof. Francesco Fassò

Laureando: Massimiliano Ronzani

ANNO ACCADEMICO 2009/2010



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Formulazione Lagrangiana del problema</b>	<b>5</b>
2.1	Riscaldamento della Lagrangiana . . . . .	5
2.2	Invarianza delle soluzioni per omotetie . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Moti stazionari</b>	<b>9</b>
3.1	Scelta del sistema di coordinate . . . . .	9
3.2	Ricerca degli equilibri . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Studio della stabilità</b>	<b>14</b>
4.1	Linearizzazione del sistema . . . . .	14
4.2	Autovalori per $N = 2$ . . . . .	15
4.3	Ricerca numerica degli autovalori ( $N > 2$ ) . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Appendice</b>	<b>20</b>
6.1	Matrice della linearizzazione . . . . .	20
6.2	Notebook di Mathematica . . . . .	21
6.3	Grafici degli autovalori . . . . .	22



# 1 Introduzione

Il problema degli  $N$  corpi consiste nello studio del moto di un sistema in cui  $N$  punti materiali sono soggetti all'interazione gravitazionale reciproca. È di grande interesse poichè costituisce uno dei problemi fondamentali della Meccanica. Inoltre è un problema non integrabile per cui è utile la ricerca di soluzioni particolari.

Maxwell nel 1890 per descrivere il comportamento degli anelli di Saturno studiò un modello semplificato di  $N$  corpi della stessa massa  $m$  orbitanti attorno un corpo centrale di massa  $M > m$ . Questo caso particolare è chiamato problema degli  $N + 1$  corpi. Maxwell trovò che per questo sistema esiste una soluzione particolare in cui gli  $N$  corpi, equidisposti su una circonferenza, ruotano tutti attorno al corpo centrale con la stessa velocità angolare  $\omega$ . Tale moto stazionario è detto configurazione centrale ad anello. Maxwell inoltre iniziò lo studio della stabilità spettrale, cioè la stabilità del sistema linearizzato.

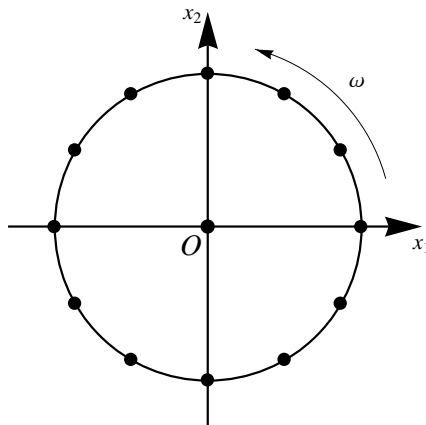


Figura 1: Configurazione centrale ad anello.

La ricerca di configurazioni centrali e di moti stazionari per il problema degli  $N + 1$  corpi, e lo studio della stabilità per questi moti, è quindi un argomento molto studiato, si veda Saari [1] e se ne sono ricavati importanti risultati. In particolare:

- Elmabsout [2] come Maxwell trova che le configurazioni centrali ad anello sono soluzioni particolari per il problema degli  $N + 1$  corpi.
- Moeckel [3] dimostra che la configurazione centrale ad anello nel problema degli  $N + 1$  corpi è spettralmente stabile per valori sufficientemente

elevati del rapporto fra le masse  $M/m$  se  $N \geq 7$ . Mentre è instabile per tutti i valori del rapporto fra le masse se  $N < 7$ .

- Lo stesso risultato è stato indipendentemente ottenuto da Elmabsout [4], il quale ha inoltre dimostrato che il rapporto tra le masse deve essere maggiore di una quantità che dipende da  $N$  e per  $N$  grande cresce come  $2N^3/5$ .

In questa tesi tratteremo una semplificazione del problema degli  $N+1$  corpi in cui il corpo centrale di massa  $M$  è considerato fisso. Ossia il corpo centrale non fa propriamente parte del sistema ma genera solamente un campo gravitazionale di cui risentono gli altri corpi. Inoltre tutti i corpi appartengono ad un piano.

Tale problema è stato già studiato in una tesi di laurea da F. Diana [5] limitatamente ai casi  $N = 2, 3$ .

Per questo problema determineremo tutte le configurazioni centrali ad anello che sono moti stazionari del sistema. In seguito ci concentreremo sullo studio della stabilità di questi moti. In particolare, per  $N = 2, \dots, 10$  e  $N = 25, 50, 75, 100$ , studieremo la stabilità spettrale del sistema che equivale allo studio degli autovalori della matrice Jacobiana  $J$  del sistema linearizzato attorno a tali equilibri.

$$\dot{z} = Jz$$

Il calcolo degli autovalori della matrice  $J$  per il problema degli  $N+1$  corpi è stato svolto da Elmabsout [4] in modo analitico per  $N$  fissato, tuttavia per il problema semplificato abbiamo scelto di procedere con metodi parzialmente numerici.

Vedremo così che per tutti i vari valori di  $N$  considerati, per il problema semplificato, la stabilità spettrale si presenta per valori del rapporto fra le masse  $\mu = M/m$  maggiori di un certo valore di soglia che cresce con  $N$ . In particolare, per  $N$  grandi, vedremo che questo valore di soglia cresce, a meno di una costante moltiplicativa, allo stesso modo di quello stimato da Elmabsout per il problema degli  $N+1$  corpi non semplificato.

## 2 Formulazione Lagrangiana del problema

Consideriamo il sistema composto da  $N$  corpi di massa  $m$  soggetti all'interazione gravitazionale reciproca e al campo gravitazionale generato da un ulteriore corpo di massa  $M$  considerato fisso nell'origine. Questo sistema ha Lagrangiana

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m \sum_j |\dot{x}_j|^2 + \sum_j \frac{GMm}{|x_j|} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{Gm^2}{|x_j - x_k|} \quad (1)$$

Vogliamo vedere se esistono dei moti stazionari per gli  $N$  corpi in cui questi ruotano tutti con moto circolare uniforme attorno all'origine, e inoltre vogliamo provare a studiarne la stabilità spettrale che è condizione necessaria per la stabilità.

Cominciamo col mostrare alcuni semplici fatti che ci torneranno utili nella trattazione successiva.

### 2.1 Riscaldamento della Lagrangiana

In primo luogo cerchiamo di trasformare la Lagrangiana (1) che dipende dai parametri  $G$ ,  $m$  e  $M$  in una che dipenda dal solo rapporto  $M/m =: \mu$ .

**Proposizione 1** *La Lagrangiana (1) e la Lagrangiana*

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) &= \frac{1}{2} \sum_j |\dot{\tilde{x}}_j|^2 - V(\tilde{x}) \\ V(\tilde{x}) &= - \sum_j \frac{M}{m} \frac{1}{|\tilde{x}_j|} - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{1}{|\tilde{x}_j - \tilde{x}_k|} \end{aligned} \quad (2)$$

*danno luogo alle stesse equazioni del moto a meno del cambiamento di coordinate*

$$x \mapsto \tilde{x}_j := \frac{x_j}{mG} \quad (3)$$

*e del riscaldamento del tempo*

$$t \mapsto \tilde{t} := \frac{t}{\sqrt{mG}} \quad (4)$$

#### Dimostrazione

La Lagrangiana  $L$  è equivalente alla Lagrangiana  $L/m$ , che sotto il cambio di coordinate (3) diventa

$$\hat{L}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = \frac{1}{m} L(mG\tilde{x}, mG\dot{\tilde{x}}) = \frac{1}{2} \sum_j |\dot{\tilde{x}}_j|^2 (m^2 G^2) - V(\tilde{x})$$

con

$$V(\tilde{x}) = - \sum_j \frac{M}{m} \frac{1}{|\tilde{x}_j|} - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{1}{|\tilde{x}_j - \tilde{x}_k|}$$

Le equazioni di Lagrange per questa Lagrangiana sono, con abuso di notazione

$$(mG)^2 \frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} + V'(\tilde{x}) = 0$$

Con il riscalamento del tempo (4) queste equazioni diventano

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{d\tilde{t}^2} + V'(\tilde{x}) = 0$$

che sono le equazioni di Lagrange per la Lagrangiana (2).  $\square$

## 2.2 Invarianza delle soluzioni per omotetie

Un'altra osservazione che ci tornerà utile in seguito riguarda il fatto che soluzioni relative a configurazioni e velocità iniziali che differiscono per un riscalamento evolvono allo stesso modo a meno di un riscalamento del tempo. Si ha cioè un'invarianza per omotetie delle soluzioni delle equazioni di Lagrange.

**Proposizione 2** *Se  $t \mapsto x(t)$  è soluzione delle equazioni di Lagrange di Lagrangiana (2), allora anche*

$$t \mapsto \alpha x(\alpha^{-3/2}t)$$

*è soluzione  $\forall \alpha > 0$ .*

### Dimostrazione

La Lagrangiana (2) ha l'energia potenziale  $V$  funzione omogenea<sup>1</sup> di grado  $-1$ . Allora dimostreremo la proposizione in generale per la Lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} |\dot{q}|^2 - V(q) \quad q \in \mathbb{R}^n$$

dove  $V(q)$  è omogenea di grado  $-1$ .

---

<sup>1</sup>Una funzione  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice omogenea di grado  $p$  se  $f(\lambda x) = \lambda^p V(x)$ ,  $\forall \lambda > 0, x \neq 0$ .



Sia  $t \mapsto q(t)$  soluzione delle equazioni di Lagrange di  $L(q, \dot{q})$ , cioè

$$\ddot{q}(t) = -V'(q(t)) \quad \forall t \quad (5)$$

Fissato  $\alpha$ , vogliamo vedere se esiste  $S \in \mathbb{R}$ ,  $S \neq 0$ , tale che anche

$$t \mapsto \tilde{q}(t) = \alpha q(St)$$

sia soluzione delle equazioni di Lagrange di  $L$ . Derivando si ottiene

$$\dot{\tilde{q}}(t) = \alpha S \dot{q}(St), \quad \ddot{\tilde{q}}(t) = \alpha S^2 \ddot{q}(St)$$

Dunque dato che  $q(t)$  è soluzione delle equazioni di Lagrange,  $\tilde{q}(t)$  soddisfa

$$\ddot{\tilde{q}}(t) = \alpha S^2 \ddot{q}(St) = -\alpha S^2 V'(q(St))$$

Siccome  $V$  è omogenea di grado  $-1$ ,  $V'$  è omogenea di grado  $-2$  e si ha

$$\ddot{\tilde{q}}(t) = -\alpha^3 S^2 V'(\alpha q(St)) = -\alpha^3 S^2 V'(\tilde{q}(St))$$

Dunque se e solo se

$$\alpha^3 S^2 = 1, \quad \text{cioè} \quad S = \alpha^{-3/2}$$

allora  $\tilde{q}(t)$  è soluzione delle equazioni di Lagrange (5).  $\square$

Alla luce di questo fatto ci chiediamo se le soluzioni che differiscono per un'omotetia abbiano le stesse proprietà di stabilità. Per verificarlo ricordiamo innanzitutto la definizione di soluzione stabile di un'equazione differenziale  $\dot{z} = F(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ . Denotiamo con  $\phi(t; y_0, t_0)$  la soluzione di questa equazione, con dato iniziale  $y_0$  al tempo  $t_0$ .

**Definizione 1** *Ipotizziamo che ogni soluzione del sistema differenziale considerato sia definita per tutti i tempi. Allora una soluzione  $z(t)$  è detta stabile se  $\forall \epsilon > 0$  e  $\forall t_0 \geq 0$  esiste  $\delta > 0$ , che dipende da  $\epsilon$  e da  $t_0$ , tale che*

$$\|z(t_0) - y_0\| < \delta \implies \|z(t) - \phi(t; y_0, t_0)\| < \epsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Proposizione 3**  *$x(t)$  è soluzione stabile del sistema di Lagrangiana (2) se e solo se,  $\forall \alpha > 0$ , la soluzione  $\tilde{x}(t) := \alpha x(\alpha^{-3/2}t)$  è stabile.*

## Dimostrazione

La Proposizione 2 assicura che, per  $\alpha$  fissato,  $\tilde{x}(t)$  è soluzione. Verifichiamone la stabilità.

Fissati  $\tilde{\varepsilon} > 0$  e  $\tilde{t}_0 \geq 0$ , dimostriamo che esiste  $\tilde{\delta}$  tale che

$$\|\tilde{x}(\tilde{t}_0) - \tilde{y}_0\| < \tilde{\delta} \implies |\tilde{x}(\tilde{t}) - \phi(\tilde{t}; \tilde{y}_0, \tilde{t}_0)| < \tilde{\varepsilon} \quad \forall \tilde{t} \in \mathbb{R}$$

definisco

$$\varepsilon := \frac{\tilde{\varepsilon}}{\alpha}, \quad t_0 := \alpha^{-3/2}\tilde{t}_0, \quad y_0 := \alpha^{-1}\tilde{y}_0.$$

Per la stabilità di  $x(t)$  si ha allora che esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\|x(t_0) - y_0\| < \delta \implies |x(t) - \phi(t; y_0, t_0)| < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

L'invarianza per omotetie implica  $\alpha\phi(\alpha^{-3/2}t; y_0, \alpha^{-3/2}t_0) = \phi(t; \alpha y_0, t_0)$ . Ora si noti che

$$\|\tilde{x}(\tilde{t}_0) - \tilde{y}_0\| = \|\alpha x(\alpha^{-3/2}\tilde{t}_0) - \alpha y_0\| = \alpha \|x(t_0) - y_0\| < \alpha\delta$$

Dunque, se prendo  $\tilde{\delta} = \alpha\delta$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(\tilde{t}) - \phi(\tilde{t}; \tilde{y}_0, \tilde{t}_0)\| &= \alpha \|x(\alpha^{-3/2}\tilde{t}) - \phi(\alpha^{-3/2}\tilde{t}; y_0, \alpha^{-3/2}\tilde{t}_0)\| \\ &= \alpha \|x(t) - \phi(t; y_0, t_0)\| < \alpha\varepsilon = \tilde{\varepsilon} \end{aligned}$$

che è la condizione per la stabilità.  $\square$

Questa proprietà ci permetterà di poter studiare la stabilità di una sola configurazione ad anello invece di quella di un'intera famiglia a un parametro di soluzioni tutte omotetiche tra loro.

### 3 Moti stazionari

In questo capitolo dimostreremo l'esistenza di moti stazionari del sistema in cui gli  $N$  corpi di massa  $m$  ruotano tutti con la stessa velocità angolare  $\omega$  attorno al corpo di massa  $M$  fisso. Cioè gli  $N$  corpi si muovono di moto circolare uniforme lungo una circonferenza di raggio  $R$  (Figura 1).

La Proposizione 1 ci permette di studiare il sistema di Lagrangiana (2)

$$\tilde{L} = T - V$$

dove  $T$  e  $V$  sono rispettivamente il termine cinetico e il potenziale gravitazionale. Introducendo la notazione

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}), \quad j = 1, \dots, N$$

riscriviamo i termini della Lagrangiana in questo modo

$$T = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} (\dot{x}_{1j}^2 + \dot{x}_{2j}^2)$$

$$V = - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\mu}{(x_{1j}^2 + x_{2j}^2)^{1/2}} + \sum_{k=j+1}^N \frac{1}{((x_{1j} - x_{1k})^2 + (x_{2j} - x_{2k})^2)^{1/2}} \right)$$

#### 3.1 Scelta del sistema di coordinate

Per semplificare il problema eseguiamo un passaggio in coordinate dipendenti dal tempo, passiamo ad un sistema di coordinate rotanti con velocità angolare  $\omega$ . Con questa scelta, infatti, il problema di trovare un moto stazionario in cui tutti i corpi ruotano con velocità angolare  $\omega$  si riduce al problema ben più semplice di ricerca di un equilibrio. Nelle nuove coordinate la Lagrangiana avrà la forma

$$L_\omega = T - V - V_{cen} - V_{cor} \quad (6)$$

in cui sono comparsi rispettivamente i potenziali centrifugo e di Coriolis

$$V_{cen} = - \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{j=1}^N (x_{1j}^2 + x_{2j}^2)$$

$$V_{cor} = \omega \sum_{j=1}^N (x_{2j} \dot{x}_{1j} - x_{1j} \dot{x}_{2j})$$

Notiamo che, anche se le nuove coordinate sono dipendenti dal tempo, la Lagrangiana ottenuta è indipendente dal tempo.

Passiamo ora alle coordinate polari  $(r_j, \varphi_j)$

$$x_{1j} = r_j \cos \varphi_j, \quad x_{2j} = r_j \sin \varphi_j, \quad j = 1, \dots, N$$

Ricalcolati nelle nuove coordinate i termini della Lagrangiana sono

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} (\dot{r}_j^2 + r_j^2 \dot{\varphi}_j^2) \\ V &= - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\mu}{r_j} + \sum_{k=j+1}^N \frac{1}{\sqrt{r_j^2 + r_k^2 - 2r_j r_k \cos(\varphi_k - \varphi_j)}} \right) \\ V_{cen} &= - \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{j=1}^N r_j^2 \\ V_{cor} &= - \omega \sum_{j=1}^N r_j^2 \dot{\varphi}_j \end{aligned}$$

### 3.2 Ricerca degli equilibri

La configurazione di equilibrio che cerchiamo, in coordinate polari si scrive

$$(r^*, \varphi^*) = \left( r_i^* = R, \varphi_i^* = \frac{2\pi}{N}(i-1) \right) \quad i = 1, \dots, N$$

dove si è operata la scelta  $\varphi_1^* = 0$ , possibile vista l'invarianza per rotazioni del sistema <sup>2</sup>.

**Proposizione 4** *Per il sistema di Lagrangiana  $L_\omega$  data da (6) esiste una configurazione di equilibrio nella quale gli  $N$  corpi sono distribuiti uniformemente su una circonferenza di raggio  $R$  centrata nell'origine se e solo se*

$$\omega^2 = \frac{f(N) + \mu}{R^3} \quad \text{dove} \quad f(N) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{4 \sin\left(\frac{\pi}{N}i\right)} \quad (7)$$

#### Dimostrazione

La Lagrangiana  $L_\omega$  è della forma:

$$L_\omega(q, \dot{q}) = T_2(q, \dot{q}) - V_1(q, \dot{q}) - V_0(q)$$

---

<sup>2</sup>In realtà c'è una famiglia ad un parametro di equilibri ottenuti dalla rotazione di quello cercato:  $(r^*, \varphi^*) = (r_i^* = R, \varphi_i^* = \frac{2\pi}{N}(i-1) + \alpha)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi]$ .

dove i termini  $V_0 = V + V_{cent}$  e  $V_1 = V_{cor}$  sono rispettivamente omogenei di ordine zero e ordine uno nelle velocità. Sappiamo che  $(r^*, \varphi^*)$  è configurazione di equilibrio per le equazioni di Lagrange di Lagrangiana  $L_\omega$  se e solo se è punto critico di  $V_0$ , cioè

$$\frac{\partial V_0}{\partial r_j}(r^*, \varphi^*) = 0, \quad \frac{\partial V_0}{\partial \varphi_j}(r^*, \varphi^*) = 0, \quad j = 1, \dots, N$$

Le derivate di  $V_0$  sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial r_j}(r, \varphi) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{1}{2} \frac{2r_j - 2r_k \cos(\varphi_k - \varphi_j)}{(r_j^2 + r_k^2 - 2r_j r_k \cos(\varphi_k - \varphi_j))^{3/2}} + \frac{\mu}{r_j^2} - \omega^2 r_j \\ \frac{\partial V_0}{\partial \varphi_j}(r, \varphi) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{1}{2} \frac{2r_j r_k \sin(\varphi_k - \varphi_j)}{(r_j^2 + r_k^2 - 2r_j r_k \cos(\varphi_k - \varphi_j))^{3/2}} \end{aligned}$$

La prima di queste calcolata sull'equilibrio diventa

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial r_j}(r^*, \varphi^*) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{1}{2} \frac{2R - 2R \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k-j)\right)}{(2R^2 - 2R^2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k-j)\right))^{3/2}} + \frac{\mu}{R^2} - \omega^2 R \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{1}{\sqrt{2^3} R^2 (1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k-j)\right))^{1/2}} + \frac{\mu}{R^2} - \omega^2 R \\ &= \frac{f_j(N)}{R^2} + \frac{\mu}{R^2} - \omega^2 R \end{aligned}$$

dove, vista la ovvia identità trigonometrica  $1 - \cos(2\theta) = 2 \sin^2 \theta$ , si ha

$$f_j(N) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{1}{4 \left| \sin\left(\frac{\pi}{N}(k-j)\right) \right|}, \quad j = 1, \dots, N$$

Vediamo adesso che  $f_j(N)$  è uguale al termine  $f(N)$  della (7). Infatti definendo il nuovo indice  $l := k - j$  abbiamo

$$f_j(N) = \sum_{\substack{l=-j+1 \\ l \neq 0}}^{N-j} \frac{1}{4 \left| \sin\left(\frac{\pi}{N}l\right) \right|} = \sum_{l=-j+1}^{-1} \frac{1}{4 \left| \sin\left(\frac{\pi}{N}l\right) \right|} + \sum_{l=1}^{N-j} \frac{1}{4 \left| \sin\left(\frac{\pi}{N}l\right) \right|}$$

Definendo ora  $l' := N + l$  si vede che i termini a denominatore nelle sommatorie soddisfano

$$\left| \sin \left( \frac{\pi}{N} l \right) \right| = \left| \sin \left( \frac{\pi}{N} l + \pi \right) \right| = \left| \sin \left( \frac{\pi}{N} (l + N) \right) \right| = \left| \sin \left( \frac{\pi}{N} l' \right) \right|$$

Quindi

$$f_j(N) = \sum_{l'=N-j+1}^{N-1} \frac{1}{4 \left| \sin \left( \frac{\pi}{N} l' \right) \right|} + \sum_{l=1}^{N-j} \frac{1}{4 \left| \sin \left( \frac{\pi}{N} l \right) \right|} = \sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{4 \left| \sin \left( \frac{\pi}{N} l \right) \right|} = f(N)$$

A questo punto otteniamo che  $\frac{\partial V_0}{\partial r_j}(r^*, \varphi^*)$  è nullo se e solo se

$$\frac{f(N)}{R^2} + \frac{\mu}{R^2} - \omega^2 R = 0$$

cioè

$$\omega^2 = \frac{f(N) + \mu}{R^3}$$

Abbiamo dunque ottenuto la condizione (7) cercata.

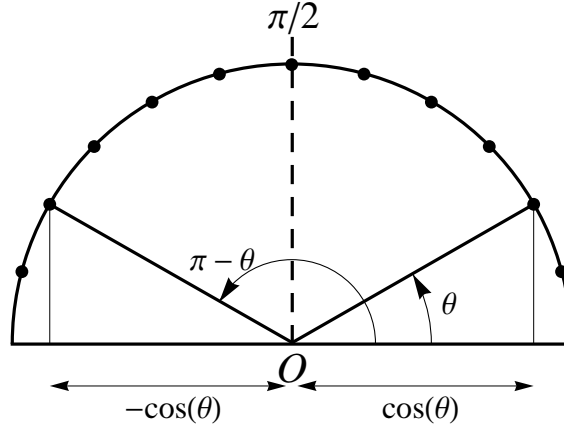


Figura 2: Coseni di angoli supplementari.

Ora per terminare la dimostrazione bisogna verificare che anche  $\frac{\partial V_0}{\partial \varphi_j}(r^*, \varphi^*)$  sia identicamente nulla per tale valore di  $\omega$ . Adottiamo anche qui un cambio

di indice  $l = k - j$  come prima

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial \varphi_j}(r^*, \varphi^*) &= \sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{2} \frac{2R^2 \sin\left(\frac{2\pi l}{N}\right)}{\left[2R^2 - 2R^2 \cos\left(\frac{2\pi l}{N}\right)\right]^{3/2}} \\
&= \sum_{l=1}^{N-1} \frac{2 \sin\left(\frac{\pi l}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi l}{N}\right)}{R \left[2 - 2\left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi l}{N}\right)\right)\right]^{3/2}} \\
&= \sum_{l=1}^{N-1} \frac{\cos\left(\frac{\pi l}{N}\right)}{4R \sin^2\left(\frac{\pi l}{N}\right)} = 0
\end{aligned}$$

poichè notiamo che nella sommatoria appaiono termini che si elidono due a due, infatti come si vede in Figura 2 si sommano i coseni di angoli supplementari.  $\square$

## 4 Studio della stabilità

Ci limiteremo allo studio della stabilità del sistema linearizzato. Dovremo linearizzare il sistema di equazioni di Lagrange di Lagrangiana  $L_\omega$  data da (6) attorno alla configurazione di equilibrio  $(r^*, \varphi^*)$  usando per  $\omega$  l'espressione trovata (7).

Osserviamo che la configurazione di equilibrio trovata della quale indaghiamo la stabilità

$$(r^*, \varphi^*) = \left( r_i^* = R, \varphi_i^* = \frac{2\pi}{N}(i-1) \right) \quad i = 1, \dots, N$$

è in realtà una famiglia di equilibri che dipendono dal parametro  $R$ . Sfruttando la Proposizione 3, che ci dice che moti omotetici tra loro hanno le stesse proprietà di stabilità, ci limiteremo a studiare il caso in cui  $R = 1$ . Quindi studieremo la linearizzazione del sistema attorno alla sola configurazione di equilibrio

$$(r^*, \varphi^*) = \left( r_i^* = 1, \varphi_i^* = \frac{2\pi}{N}(i-1) \right) \quad i = 1, \dots, N.$$

### 4.1 Linearizzazione del sistema

Riscriviamo innanzitutto le equazioni di Lagrange per  $L_\omega$  come sistema del primo ordine con  $z = (r_1, \varphi_1, \dot{r}_1, \dot{\varphi}_1, \dots, r_N, \varphi_N, \dot{r}_N, \dot{\varphi}_N)$ .

$$\dot{z} = X(z), \quad z \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2)^N$$

Scrivendo le equazioni di Lagrange in forma normale si trova  $X = (X_1, \dots, X_N)$  con

$$X_j(z) = \begin{pmatrix} \dot{r}_j \\ \dot{\varphi}_j \\ X_{j3}(z) \\ X_{j4}(z) \end{pmatrix} \quad j = 1, \dots, N$$

dove

$$\begin{aligned} X_{j3}(z) &= r_j \dot{\varphi}_j^2 + \omega^2 r_j + 2\omega r_j \varphi_j - \frac{\mu}{r_j^2} \\ &\quad - \sum_{k \neq j} \frac{1}{2} \frac{2r_j - 2r_k \cos(\varphi_j - \varphi_k)}{(r_j^2 + r_k^2 - 2r_j r_k \cos(\varphi_j - \varphi_k))^{3/2}} \\ X_{j4}(z) &= -2 \frac{\dot{r}_j}{r_j} (\varphi_j + \omega) \\ &\quad - \sum_{k \neq j} \frac{r_k \sin(\varphi_j - \varphi_k)}{r_j (r_j^2 + r_k^2 - 2r_j r_k \cos(\varphi_j - \varphi_k))^{3/2}} \end{aligned}$$



Il sistema linearizzato attorno all'equilibrio  $z^* = (r^*, \varphi^*, 0, 0)$  è

$$\dot{z} = J(z - z^*)$$

dove  $J$  è la matrice Jacobiana di  $X(z)$  calcolata sul punto di equilibrio considerato  $z^*$ :

$$J_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial z_j}(z^*).$$

Nel nostro caso  $J$  è una matrice  $4N \times 4N$  e si trova con un lungo calcolo che ha la seguente forma a blocchi

$$J = \begin{pmatrix} O_N & O_N & I_N & O_N \\ O_N & O_N & O_N & I_N \\ A & B & O_N & \alpha I_N \\ -B & C & -\alpha I_N & O_N \end{pmatrix}$$

Le espressioni per i blocchi  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e per il parametro reale  $\alpha$  sono riportate in Appendice.

## 4.2 Autovalori per $N = 2$

Nel caso  $N = 2$ , cioè con due soli corpi che girano attorno a quello fisso, i blocchi  $B$  e  $C$  diventano nulli ed il calcolo analitico degli autovalori è semplice. Il polinomio caratteristico della matrice  $J$  è

$$\frac{1}{64}\lambda^2 (1 + 4\lambda^2 + 4\mu) \left( (1 + 4\lambda^2)^2 + 4(3 + 4\lambda^2)\mu \right)$$

e le sue radici, ovvero gli autovalori della matrice  $J$  sono

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 0 \\ \lambda_{3,4} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{-1 - 4\mu} \\ \lambda_{5,6} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{-1 - 2\mu - 2\sqrt{-2\mu + \mu^2}} \\ \lambda_{7,8} &= \pm \sqrt{-\frac{1}{4} - \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-2\mu + \mu^2}} \end{aligned}$$

La condizione affinché questi abbiano tutti parte reale nulla o negativa è

$$-2\mu + \mu^2 \geq 0$$

cioè

$$\mu \leq 0 \quad \text{o} \quad \mu \geq 2$$

Visto che  $\mu = M/m$  rappresenta il rapporto fra le masse la prima condizione è da scartare. Otteniamo quindi che per  $N = 2$  c'è stabilità spettrale se e solo se  $\mu \geq 2$ .

### 4.3 Ricerca numerica degli autovalori ( $N > 2$ )

Il calcolo degli autovalori per  $N > 2$  diventa più complicato ed è stato svolto con metodi combinati simbolico-numeriche al variare del parametro  $\mu = M/m$ .

Abbiamo innanzitutto sviluppato un programma usando Mathematica (riportato in Appendice), che scrive simbolicamente le equazioni di Lagrange e la loro linearizzazione sull'equilibrio. In questo modo si è calcolata la linearizzazione del sistema per i seguenti valori di  $N$

$$N = 3, \dots, 10 \quad \text{e} \quad N = 25, 50, 75, 100.$$

$N = 100$  si può considerare il valore limite, ottenibile con un comune personal computer, per cui effettuare il calcolo della linearizzazione. In questo caso infatti è stata generata una matrice  $400 \times 400$ , e il tempo di calcolo è stato superiore alle dodici ore.

Il calcolo degli autovalori della linearizzazione è poi stato fatto numericamente ed è molto più rapido. Troviamo che, per tutti i valori di  $N$  considerati, gli autovalori della linearizzazione hanno tutti parte reale  $\leq 0$  se il parametro  $\mu$  è maggiore di un certo valore di soglia  $\mu_0$  che dipende da  $N$  (Tabella 1).

$N$	3	4	5	6	7	8
$\mu_0$	8.8	23.8	48.4	86.8	139.9	212.3
$N$	9	10	25	50	75	100
$\mu_0$	304	421	6750	54275	183355	434798

Tabella 1: Condizione sul rapporto delle masse.

In Appendice sono riportati i grafici che mostrano l'andamento del massimo delle parti reali degli autovalori di  $J$ , calcolata per i vari valori di  $N$ , in funzione del parametro  $\mu$ .

Possiamo ora confrontare i risultati ottenuti numericamente con la stima trovata da Elmabsout per il problema non semplificato ( $\mu \geq 2N^3/5$ ). In Figura 3 vediamo che per  $N = 3, \dots, 10$  il valore di soglia  $\mu_0$  trovato è paragonabile alla condizione di Elmabsout.

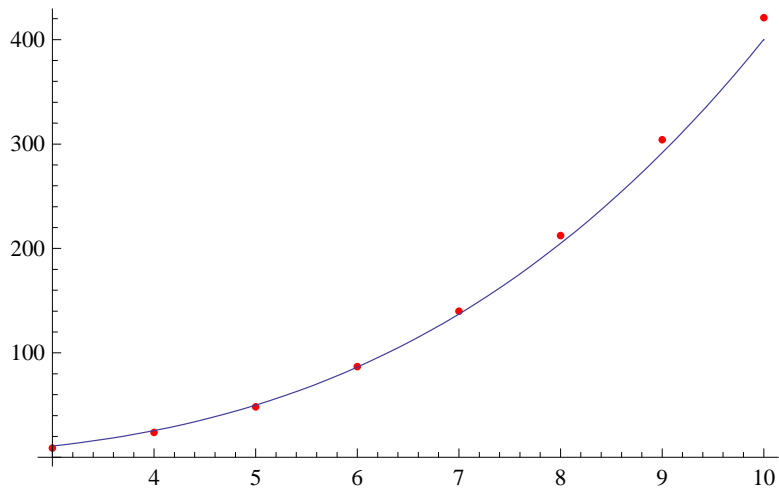


Figura 3: Valore di soglia  $\mu_0$  confrontato con la stima di Elmabsout.

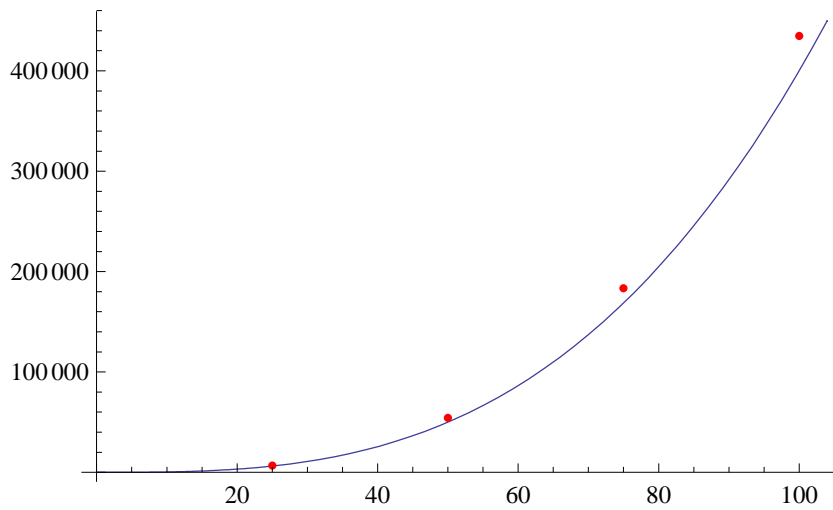


Figura 4: Confronto con la stima di Elmabsout ( $\mu \geq 2N^3/5$ ) per  $N$  grandi.

In Figura 4 invece sono riportati i risultati per i valori di  $N$  più grandi:  $N = 25, 50, 75, 100$ . In questo caso vediamo però che il valore  $\mu_0$  trovato per il problema semplificato è sempre maggiore della stima ricavata da Elmabsout per il problema degli  $N + 1$  corpi non semplificato.

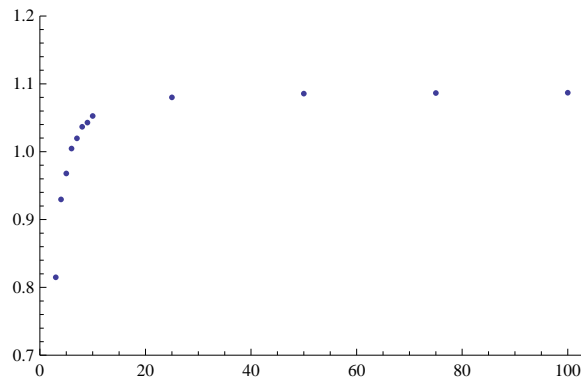


Figura 5: Rapporto fra  $\mu_0$  e stima di Elmabsout in funzione di  $N$ .

Se studiamo il rapporto tra  $\mu_0$  e la stima di Elmabsout vediamo infatti che questo per  $N$  grandi tende a 1.09 (Figura 5). Quindi, per il problema degli  $N + 1$  corpi semplificato che abbiamo studiato, otteniamo l'evidenza numerica di una stima simile a quella trovata da Elmabsout per il problema non semplificato

$$\mu \geq 1.09 \frac{2}{5} N^3.$$

## 5 Conclusioni

La condizione di stabilità spettrale trovata è solamente una condizione necessaria per la stabilità. Lo studio della stabilità (alla Lyapunov) è molto difficile, verosimilmente proibitivo. Una possibilità potrebbe essere quella di studiare le proprietà di stabilità per tempi finiti ma molto lunghi (esponenzialmente lunghi in  $\mu$ ) con le tecniche della teoria Hamiltoniana delle perturbazioni, specificatamente il teorema di Nekhoroshev (1976), come è stato già fatto nel caso di  $L_4$  e  $L_5$  [9].

Quello che si può fare, quindi, è sfruttare le informazioni ottenute sulla stabilità spettrale per capire in quali zone dello spazio dei parametri sia possibile controllare l'applicabilità del teorema di Nekhoroshev.

## 6 Appendice

### 6.1 Matrice della linearizzazione

La matrice  $J$  della linearizzazione trovata in Sezione 4.1 è:

$$J = \begin{pmatrix} O_N & O_N & I_N & O_N \\ O_N & O_N & O_N & I_N \\ A & B & O_N & \alpha I_N \\ -B & C & -\alpha I_N & O_N \end{pmatrix}$$

I blocchi  $N \times N$   $A$ ,  $B$ ,  $C$  hanno la seguente forma

$$A = \frac{\partial X_{i3}}{\partial r_j} \quad i, j = 1, \dots, N$$

$$\frac{\partial X_{i3}}{\partial r_i} = \omega^2 + 2\mu - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - 1}{2 \left(2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial X_{i3}}{\partial r_j} = \frac{3 - \cos\left(\frac{2(i-j)\pi}{n}\right)}{2 \left(2 - 2 \cos\left(\frac{2(i-j)\pi}{n}\right)\right)^{3/2}} \quad i \neq j$$

$$B = \frac{\partial X_{i3}}{\partial \varphi_j} \left( = -\frac{\partial X_{i4}}{\partial r_j} \right) \quad i, j = 1, \dots, N$$

$$\frac{\partial X_{i3}}{\partial \varphi_i} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}{2 \left(2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial X_{i3}}{\partial \varphi_j} = -\frac{\sin\left(\frac{2(i-j)\pi}{n}\right)}{2 \left(2 - 2 \cos\left(\frac{2(i-j)\pi}{n}\right)\right)^{3/2}} \quad i \neq j$$

$$C = \frac{\partial X_{i4}}{\partial \varphi_j} \quad i, j = 1, \dots, N$$

$$\frac{\partial X_{i4}}{\partial \varphi_i} = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{5 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 3}{2 \left(2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial X_{i4}}{\partial \varphi_j} = \frac{5 \cos\left(\frac{2(i-j)\pi}{n}\right) + 3}{2 \left(2 - 2 \cos\left(\frac{2(i-j)\pi}{n}\right)\right)^{3/2}} \quad i \neq j$$

e l'espressione del parametro reale  $\alpha$  è

$$\alpha = 2\omega$$

con  $\omega$  dato dalla (7).

## 6.2 Notebook di Mathematica

Jacobiano di qualsiasi ordine, calcolato rispetto la lista di variabili "var", calcolata in "var"

```
Jacob[f_, {var_, n_}] := Nest[ Flatten[Outer[D, {#}, var], 1] &, f, n]
```

Termini di potenziale

```
Den[X_, n_] := Flatten[
  {Outer[ Plus, Take[X, n], -Take[X, n] ]^2, Outer[ Plus, Drop[X, n], -Drop[X, n] ]^2}, 0]
Pot2[V_, Q_, n_, μ_] := - Apply[Plus, μ Take[Q, n]^-1] -
  Apply[Plus, (1/2) ω[n, μ]^2 Take[Q, n]^2] - ω[n, μ] Apply[Plus, Take[Q, n]^2.Drop[V, n]]
```

Cambio coordinate da cartesiane a polari

```
CambioCoord[X_, Q_, n_] := Flatten[{Thread[Take[X, n] → Take[Q, n] Cos[Drop[Q, n]]],
  Thread[Drop[X, n] → Take[Q, n] Sin[Drop[Q, n]]]}, 1]
```

Condizioni di equilibrio

```
ω[n_, μ_] := (Sum[(4 Sin[k Pi / n])^-1, {k, n - 1}] + μ)^1/2
ValutaInEq[V_, Q_, n_] := Module[ {}, Fi = Table[2 Pi (m - 1) / n, {m, n}]
  Flatten[{Thread[V → ConstantArray[0, 2 n]],
    Thread[Take[Q, n] → ConstantArray[1, n]], Thread[Drop[Q, n] → Fi]}, 1]
```

Equazioni di Lagrange

```
EqL[L_, A_, V_, Q_] := Inverse[A].(-Jacob[Jacob[L, {V, 1}], {Q, 1}].V + Jacob[L, {Q, 1}])
```

Linearizzazione

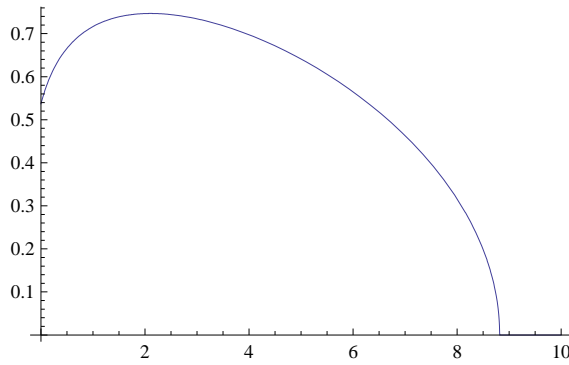
```
LinSotto[L_, A_, V_, Q_, n_] :=
  Jacob[EqL[L, A, V, Q], {Join[Q, V], 1}] /. ValutaInEq[V, Q, n]
LinTot[L_, A_, V_, Q_, n_] := ArrayFlatten[{
  ArrayFlatten[{{ConstantArray[0, {2 n, 2 n}], IdentityMatrix[2 n]}]},
  {LinSotto[L, A, V, Q, n]}
  ]]
```

Funzione per la linearizzazione

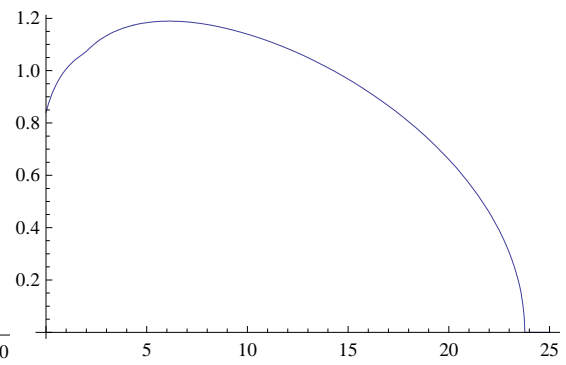
```
Lin[n_, μ_] := Module[ {},
  X = Array[x, 2 n];
  Q = Array[q, 2 n];
  V = Array[v, 2 n];
  PotGr = (-1/2) Apply[Plus, Simplify[
    (DeleteCases[Flatten[Den[X, n][[1]], 1] + Flatten[Den[X, n][[2]], 1], 0])^-1/2 /.
    CambioCoord[X, Q, n]]] // Expand;
  L = 1/2 (Take[V, n].Take[V, n] + Drop[V, n]^2.Take[Q, n]^2) - PotGr - Pot2[V, Q, n, μ];
  A = Jacob[L, {V, 2}];
  LinTot[L, A, V, Q, n] // N
```

### 6.3 Grafici degli autovalori

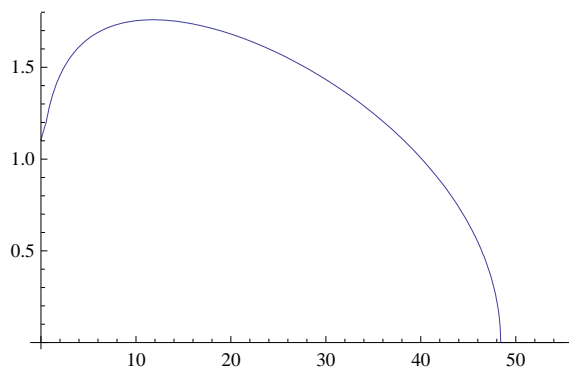
Grafici della massima parte reale degli autovalori in funzione del parametro  $\mu$  per gli  $N$  studiati. In tutti i grafici: in ascissa  $\mu$ , in ordinata  $Max(Re(Autoval(J)))$ .



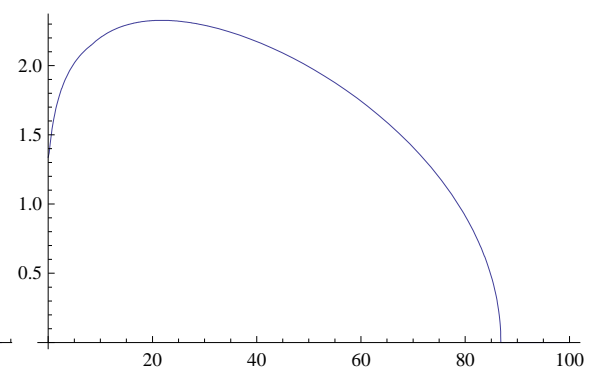
N=3



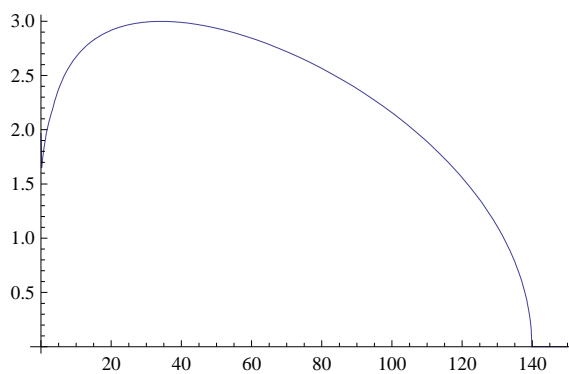
N=4



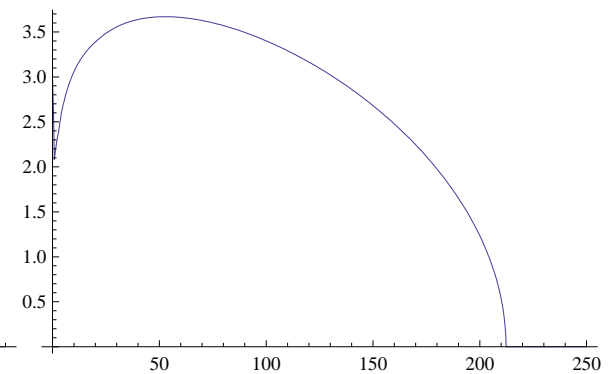
N=5



N=6



N=7



N=8







