Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
"TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Magistrale in Mathematics

I giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé nella Logica del Primo Ordine

Relatore:
Prof. Francesco Ciraulo

Laureanda:
Annalisa Maricchio
Matricola: 2072750

Anno Accademico 2023/2024
19 aprile 2024

Indice

Introduzione

Lo scopo del seguente elaborato è mostrare l'utilità di un argomento di Teoria dei Giochi nell'ambito della Logica Matematica, in particolare in Teoria dei Modelli.

Durante la seconda metà dello scorso secolo, il matematico algerino Roland Fraïssé applicò alla teoria dei modelli il metodo *back and forth* utile a verificare quando due strutture logiche di uno stesso linguaggio risultano elementarmente equivalenti, ovvero verificano gli stessi enunciati nella Logica del Primo Ordine. Qualche anno più tardi, grazie al matematico Andrzej Ehrenfeucht, nacquero i giochi che oggi chiamiamo di Ehrenfeucht-Fraïssé (EF) che consistono nella riformulazione del metodo sviluppato da Fraïssé utilizzando i concetti intuitivi della Teoria dei Giochi.

Nel seguente elaborato vogliamo mostrare l'utilità dell'argomento per indagare non solo l'elementare equivalenza di strutture logiche ma anche l'inesprimibilità, attraverso formule della logica del primo ordine, di proprietà attribuibili alle strutture stesse.

Il primo capitolo consiste in una collezione di definizioni e risultati fondamentali di Teoria dei Modelli e Teoria dei Giochi. Nella prima sezione introduciamo le nozioni base di logica matematica, come i concetti di strutture, formule del primo ordine, modelli, isomorfismi parziali e queries (Definizione 1.8 a pagina 6). Quest'ultima nozione rappresenta la definizione matematica e rigorosa del concetto di proprietà verificate o meno da strutture logiche. Oltre ad elencare le varie definizioni ed alcuni risultati base, proponiamo vari esempi utili a comprendere i concetti espressi. Nella seconda sezione, invece, introduciamo le nozioni tipiche della teoria dei giochi, analizzando, in particolare, il caso dei giochi *two-person zero-sum* in quanto tipologia di cui fa parte l'argomento della tesi. Inoltre, presentiamo il concetto di strategia vincente per un giocatore, nozione di fondamentale importanza in Teoria dei Giochi.

Il Capitolo 2 contiene un paio di esempi in cui viene mostrata l'inefficacia dei risultati classici della logica matematica, come il Teorema di Compattezza o quello di Löwenheim–Skolem, per dimostrare che una proprietà (o meglio query) non risulta esprimibile con una formula del primo ordine nel caso dei modelli finiti. In particolare, mostriamo che non è possibile stabilire se la proprietà di connettività risulta esprimibile al primo ordine nel caso in cui si considerino grafi finiti. Allo stesso modo non è possibile trarre conclusioni sulla definibilità della proprietà di cardinalità pari nel caso di ordini lineari finiti.

Il terzo capitolo è costituito da una presentazione dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé. Dopo un'introduzione storica sulla nascita e sullo sviluppo dell'argomento, definiamo in modo rigoroso le regole caratterizzanti i giochi EF (Definizione 3.1 a pagina 19). In poche parole, si tratta di giochi logici tra due giocatori, Spoiler e Duplicatore, con due obiettivi diversi: il primo vuole mostrare che due strutture dello stesso linguaggio presentano delle differenze, mentre secondo il Duplicatore tra le due strutture è possibile trovare un isomorfismo parziale.
Inoltre, nel capitolo presentiamo vari esempi in cui viene mostrato il funzionamento dei giochi EF nel caso di strutture differenti come gli insiemi, le stringhe, i grafi e gli ordini lineari di lunghezza finita.

Nel Capitolo 4 presentiamo il risultato raggiunto da Fraïssé, ovvero il collegamento tra i giochi EF e l'elementare equivalenza tra due strutture.

Durante la trattazione consideriamo solamente il caso di giochi di lunghezza finita; di conseguenza l'equivalenza tra le strutture non vale per tutte le formule del primo ordine, ma solo per quelle fino ad un certo rango di quantificatori, concetto introdotto nella Definizione 4.1 a pagina 28.
In realtà nel capitolo presentiamo due Teoremi di Ehrenfeucht-Fraïssé: il primo enuncia la corrispondenza tra l'esistenza di una strategia vincente per il Duplicatore e l'equivalenza elementare fino ad un certo rango di quantificatori (Teorema 4.1 a pagina 29); il secondo risultato, invece, risulta più generale (Teorema 4.4 a pagina 39).

Presentiamo la dimostrazione solamente del secondo risultato, che permette comunque di provare anche quanto afferma il primo teorema presentato.

Infine, nell'ultimo capitolo introduciamo l'applicazione dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé all'esprimibilità al primo ordine nel caso di modelli finiti (Proposizione 5.1.1 a pagina 43). Esponiamo, infatti, il metodo basato sulla teoria fino a quel punto presentata ed illustriamo come sia possibile concludere i risultati rimasti in sospeso nel Capitolo 2. In particolare, mostriamo come il metodo dei giochi EF permetta di dimostrare che non risultano esprimibili al primo ordine né la proprietà di connettività nel caso di grafi finiti, né quella di cardinalità pari per gli ordini lineari di lunghezza finita.

Nella sezione successiva introduciamo il concetto di *intorno* nel grafo di Gaifman di una struttura e di conseguenza definiamo la d-equivalenza tra strutture logiche (Definzione 5.5 a pagina 52). Attraverso quest'ultimo concetto esibiamo una versione del metodo dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé più facilmente applicabile. Tramite vari esempi, infatti, mostriamo che alcune proprietà accennate nella trattazione non risultano esprimibili al primo ordine nel caso dei grafi finiti. Applichiamo il metodo basato sulla d-equivalenza al caso di query che indicano rispettivamente se un grafo risulta connesso (Proposizione 5.2.3 a pagina 55), 2-colorabile (Proposizione 5.2.4 a pagina 57) o aciclico (Proposizione 5.2.5 a pagina 58).

Capitolo 1

Preliminari e notazioni

In questo primo capitolo introduciamo i concetti e i risultati base di Teoria dei Modelli e le definizioni standard di Teoria dei Giochi che verranno utilizzati nella trattazione dell'argomento.

1.1 Teoria dei Modelli

Un *linguaggio* L è una collezione di simboli delle seguenti tipologie: costanti (indicati con $c_1, \ldots, c_n, \ldots$), relazioni ($R_1, \ldots, R_n, \ldots$) e funzioni ($f_1, \ldots, f_n, \ldots$). Ogni simbolo di relazione e funzione ha associata un'arietà.

Definizione 1.1. Una *L-struttuta*

$$\mathscr{A} = \left(A, \{c_i^{\mathscr{A}}\}, \{R_i^{\mathscr{A}}\}, \{f_i^{\mathscr{A}}\}\right)$$

consiste in un insieme non vuoto A (chiamato *dominio*) e una funzione di interpretazione che:

- ad ogni simbolo di costante c_i di L associa un elemento $c_i^{\mathscr{A}} \in A$;

- ad ogni simbolo di relazione R_i n-ario di L associa un sottoinsieme $R_i^{\mathscr{A}} \subset A^n$;

- ad ogni simbolo di funzione f_i n-ario di L associa una funzione $f_i^{\mathscr{A}} : A^n \to A$.

Una struttura $\mathscr{A}$ si dice *finita* se il suo dominio A è un insieme finito.

Nella trattazione considereremo solamente strutture finite su linguaggi relazionali ovvero contenenti soltanto i simboli di costanti e relazioni; le indicheremo, quindi, con la tupla $\mathscr{A} = (A, c_1^{\mathscr{A}}, \ldots, c_s^{\mathscr{A}}, R_1^{\mathscr{A}}, \ldots, R_m^{\mathscr{A}})$.

Si noti che questa restrizione non risulta troppo severa in quanto ad ogni funzione k-aria f possiamo associare il suo grafico che rappresenta una relazione $(k+1)$-aria $\{(\vec{x}, f(\vec{x})) \mid \vec{x} \in A^k\}$ con la proprietà che per ogni $\vec{x} \in A^k$ esiste al più un elemento $f(\vec{x}) \in A$ per cui $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ appartiene alla relazione.

Esempio 1.1.1. I gruppi sono L-strutture per $L = \{\circ\}$, in cui il simbolo $\circ$ che rappresenta l'operazione del gruppo è un simbolo di funzione binaria. Allora anziché considerare il simbolo di operazione $\circ$ e scrivere $x \circ y = z$, possiamo utilizzare un simbolo di relazione ternaria R con la proprietà che per ogni coppia di elementi x, y esiste un solo elemento z tale che $(x, y, z) \in R$ e sostituire la scrittura $x \circ y = z$ con $R(x, y, z)$. In questo modo abbiamo trasformato $L = \{\circ\}$ in un linguaggio relazionale $L = \{R\}$.

Esempio 1.1.2. Un ulteriore esempio di struttura, che utilizzeremo spesso nella trattazione, è l'ordine lineare su un insieme. Consideriamo, infatti, il linguaggio $L = \{\leq\}$ composto da una relazione binaria che costituisca una relazione d'ordine totale; allora un ordine lineare su un insieme A rappresenta una L-struttura con dominio l'insieme A. In seguito indicheremo con $\mathbf{L}_n$ l'ordine lineare standard sui primi n naturali.

Indichiamo ora le definizioni di formule del primo ordine (FO), variabili libere e legate e la semantica delle formule FO.

Definizione 1.2. Consideriamo un insieme numerabile di variabili $(x, y, z, \dots)$. Definiamo induttivamente *termini e formule della logica predicativa del primo ordine* nel linguaggio relazionale L come segue:

- ogni variabile x è un termine
- ogni simbolo di costante c è un termine
- se t_1, t_2 sono termini, $t_1 = t_2$ è una formula (atomica)
- se $t_1, \dots, t_k$ sono termini e R un simbolo di relazione k-aria, $R(t_1, \dots, t_k)$ è una formula (atomica)
- se φ_1, φ_2 sono formule, allora $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\neg\varphi_1$ sono formule
- Se φ è una formula, allora $\exists x \varphi$ e $\forall x \varphi$ sono formule.

Definizione 1.3. Le *variabili libere* di una formula o di un termine sono definite come segue:

- l'unica variabile libera di un termine x è x; un termine costante c non ha variabili libere

- le variabili libere di $t_1 = t_2$ sono le variabili libere di t_1 e di t_2; le variabili libere di $R(t_1, \ldots, t_k)$ sono le variabili libere di $t_1, \ldots, t_k$

- la negazione ($\neg$) non cambia la lista di variabili libere; le variabili libere di $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ (e $\varphi_1 \vee \varphi_2$) sono quelle di φ_1 e φ_2

- le variabili libere di $\exists x \varphi$ e $\forall x \varphi$ sono le variabili libere di φ eccetto x.

Le variabili che non sono libere vengono chiamate *legate*.
Un *enunciato* è una formula priva di variabili libere.
Data una L-struttura $\mathscr{A}$, definiamo induttivamente per ogni termine t con variabili libere $(x_1, \ldots, x_n)$ l'elemento del dominio $t^{\mathscr{A}}(\vec{a})$, con $\vec{a} \in A^n$ e per ogni formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ la notazione $\mathscr{A} \models \varphi(\vec{a})$ (i.e. $\varphi(\vec{a})$ è vera in $\mathscr{A}$):

- Se t è un simbolo di costante c, il valore di t in $\mathscr{A}$ è $t^{\mathscr{A}}$
- Se t è una variabile x_i, il valore di $t^{\mathscr{A}}(\vec{a})$ è a_i
- Se $\varphi \equiv (t_1 = t_2)$, allora $\mathscr{A} \models \varphi(\vec{a})$ sse $t_1^{\mathscr{A}}(\vec{a}) = t_2^{\mathscr{A}}(\vec{a})$
- Se $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_k)$, allora $\mathscr{A} \models \varphi(\vec{a})$ sse $(t_1^{\mathscr{A}}(\vec{a}), \ldots, t_k^{\mathscr{A}}(\vec{a})) \in R^{\mathscr{A}}$
- $\mathscr{A} \models \neg\varphi(\vec{a})$ sse $\mathscr{A} \models \varphi(\vec{a})$ non vale
- $\mathscr{A} \models \varphi_1(\vec{a}) \wedge \varphi_2(\vec{a})$ sse $\mathscr{A} \models \varphi_1(\vec{a})$ e $\mathscr{A} \models \varphi_2(\vec{a})$
- $\mathscr{A} \models \varphi_1(\vec{a}) \vee \varphi_2(\vec{a})$ sse $\mathscr{A} \models \varphi_1(\vec{a})$ o $\mathscr{A} \models \varphi_2(\vec{a})$
- Se $\psi(\vec{x}) \equiv \exists y \varphi(y, \vec{x})$, allora $\mathscr{A} \models \psi(\vec{a})$ sse $\mathscr{A} \models \varphi(a', \vec{a})$ per qualche $a' \in A$
- Se $\psi(\vec{x}) \equiv \forall y \varphi(y, \vec{x})$, allora $\mathscr{A} \models \psi(\vec{a})$ sse $\mathscr{A} \models \varphi(a', \vec{a})$ per ogni $a' \in A$.

In seguito utilizzeremo due teoremi fondamentali di teoria dei modelli, il Teorema di Compattezza e il Teorema di Löwenheim–Skolem; per enunciarli ci servono le seguenti definizioni.

Definizione 1.4. Una *teoria* (nel linguaggio L) è un insieme di enunciati. Una L-struttura $\mathscr{A}$ è un *modello* di una teoria T se e solo se per ogni enunciato Φ di T, la struttura $\mathscr{A}$ è un modello di Φ, ovvero $\mathscr{A} \models \Phi$. Una teoria T si dice *consistente* se ammette un modello.

Esempio 1.1.3. Consideriamo l'Esempio 1.1.1 in cui abbiamo presentato i gruppi come L-strutture nel linguaggio relazionale $L = \{R\}$; allora essi costituiscono dei modelli della teoria T formata dagli assiomi soddisfatti dai gruppi:

- *associatività*

  $\forall x \forall y \forall z \forall v \forall w \forall a \forall b \big(R(x,y,v) \wedge R(v,z,a) \wedge R(y,z,w) \wedge R(x,w,b) \big) \rightarrow a = b$

- *esistenza dell'elemento neutro e dell'inverso*

  $\exists u \Big(\forall x \big(R(u,x,x) \wedge R(x,u,x) \big) \wedge \forall x \exists y \big(R(x,y,u) \wedge R(y,x,u) \big) \Big).$

Esempio 1.1.4. Come sappiamo, gli ordini lineari rappresentano delle L-strutture nel linguaggio relazionale $L = \{\leq\}$. Se consideriamo come teoria T l'insieme degli enunciati che caratterizzano la relazione d'ordine totale $\leq$, possiamo affermare che gli ordini lineari rappresentano un modello per T. Le proprietà soddisfatte dagli ordini lineari sono, infatti, le seguenti:

- *riflessività*

  $\forall x (x \leq x)$

- *antisimmetria*

  $\forall x \forall y (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$

- *transitività*

  $\forall x \forall y \forall z (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$

- *totalità*

  $\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x).$

A questo punto possiamo enunciare i due risultati fondamentali di Teoria dei Modelli, senza proporne le dimostrazioni; per esse rimanderemo ai testi utilizzati.

Teorema 1.1 (Teorema di Compattezza). *Una teoria T è consistente se e solo se ogni sottoinsieme finito di T è consistente*[1]*.*

Teorema 1.2 (Teorema di Löwenheim–Skolem). *Sia L un linguaggio numerabile e T una teoria in L. Se T ha un modello infinito, allora T ammette un modello numerabile*[2]*.*

---

[1]Per la dimostrazione di questo teorema si consulti [11] p.69-70.

[2]Per la dimostrazione di questo teorema si consulti [11] p.78-79.

Stiamo trattando concetti di Teoria dei Modelli, quella branca della Logica Matematica che si occupa di classificare e comparare strutture con la proprietà comune di essere modelli della stessa teoria.

Diamo ora le definizioni di sottostruttura, isomorfismo e isomorfismo parziale, concetti fondamentali nella trattazione dell'argomento.

Definizione 1.5. Date due L-strutture $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, $\mathscr{B} = (B, c_1^{\mathscr{B}}, \ldots, c_s^{\mathscr{B}}, R_1^{\mathscr{B}}, \ldots, R_m^{\mathscr{B}})$ è una *sottostruttura* di $\mathscr{A}$ se $B \subset A$, ogni $R_i^{\mathscr{B}}$ è la restrizione di $R_i^{\mathscr{A}}$ a B (ovvero $R_i^{\mathscr{B}} = R_i^{\mathscr{A}} \cap B^t$, dove t è l'arietà di R_i), $1 \leq i \leq m$, e $c_j^{\mathscr{B}} = c_j^{\mathscr{A}}$, $1 \leq j \leq s$.

Se $\mathscr{A}$ è una L-struttura e D è sottoinsieme del dominio A, allora la *sottostruttura di* $\mathscr{A}$ *generata da* D è la sottostruttura $\mathscr{A} \restriction D$ avente l'insieme $D \cup \{c_1^{\mathscr{A}}, \ldots, c_s^{\mathscr{A}}\}$ come dominio e avente come relazioni le restrizioni di $R_i^{\mathscr{A}}$ a $D \cup \{c_1^{\mathscr{A}}, \ldots, c_s^{\mathscr{A}}\}$.

Definizione 1.6. Assumiamo che $\mathscr{A} = (A, c_1^{\mathscr{A}}, \ldots, c_s^{\mathscr{A}}, R_1^{\mathscr{A}}, \ldots, R_m^{\mathscr{A}})$ e $\mathscr{B} = (B, c_1^{\mathscr{B}}, \ldots, c_s^{\mathscr{B}}, R_1^{\mathscr{B}}, \ldots, R_m^{\mathscr{B}})$ siano due L-strutture. Un *isomorfismo* tra $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ è una mappa $h : A \to B$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- h è una funzione iniettiva e suriettiva,
- per ogni simbolo di costante c_j, $1 \leq j \leq s$, abbiamo che $h(c_j^{\mathscr{A}}) = c_j^{\mathscr{B}}$,
- per ogni simbolo di relazione R_i, $1 \leq i \leq m$, di arietà t e per ogni t-tupla $(a_1, \ldots, a_t)$ di A, abbiamo $R_i^{\mathscr{A}}(a_1, \ldots, a_t)$ se e solo se $R_i^{\mathscr{B}}\big(h(a_1), \ldots, h(a_t)\big)$.

Se esiste un isomorfismo tra $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, diciamo che le due strutture sono isomorfe e utilizziamo la notazione $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$.

Definizione 1.7. Un *isomorfismo parziale da* $\mathscr{A}$ *a* $\mathscr{B}$ è un isomorfismo da una sottostruttura di $\mathscr{A}$ ad una sottostruttura di $\mathscr{B}$.

Osservazione 1.1. Dalle definizioni precedenti segue che ogni isomorfismo parziale da $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ deve mappare ogni costante $c_j^{\mathscr{A}}$ di $\mathscr{A}$ nella costante $c_j^{\mathscr{B}}$, per $1 \leq j \leq s$.

Diamo ora qualche esempio relativo alla teoria dei grafi che permette di illustrare alcuni dei precedenti concetti in modo semplice.

Esempio 1.1.5. Un *grafo orientato* è una struttura $\mathbf{G} = (V, E)$ in cui E è una relazione binaria su V, l'insieme dei vertici.

Un grafo non orientato, o semplicemente *grafo*, è una struttura $\mathbf{G} = (V, E)$ tale che E rappresenta una relazione binaria e simmetrica su V, senza loop ovvero ogni grafo $\mathbf{G}$ risulta modello per l'enunciato $\neg \exists x E(x, x)$.

Il sottografo di $\mathbf{G}$ indotto da un insieme D di nodi è esattamente $\mathbf{G} \upharpoonright D$ ovvero la sottostruttura di $\mathbf{G}$ generata da D.

Un *grafo k-colorabile* è una struttura $\mathbf{G} = (V, E, R_1, \ldots, R_k)$ in cui E è una relazione binaria su V e ogni R_i è una relazione unaria su V che caratterizza tutti i nodi di colore i, per $1 \leq i \leq k$.

Il concetto di *query*, originario della teoria dei database, è una nozione fondamentale in teoria dei modelli finiti. Diamone ora una definizione precisa e presentiamone alcuni esempi.

Definizione 1.8. Siano L un linguaggio e k un intero positivo.

- Una *classe* di L-strutture è una collezione $\mathcal{C}$ chiusa tramite isomorfismo, i.e. se $\mathscr{A} \in \mathcal{C}$ e $\mathscr{B}$ è una struttura isomorfa ad $\mathscr{A}$, allora $\mathscr{B} \in \mathcal{C}$.

- Una *query k-aria* su una classe $\mathcal{C}$ è una mappa Q definita su $\mathcal{C}$ e tale che

  – $Q(\mathscr{A})$ è una relazione k-aria in $\mathscr{A}$, per $\mathscr{A} \in \mathcal{C}$;
  – Q è preservata tramite isomorfismo, ovvero se $h : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ è un isomorfismo allora $Q(\mathscr{B}) = h(Q(\mathscr{A}))$.

- Una *query booleana* su una classe $\mathcal{C}$ è una mappa $Q : \mathcal{C} \to \{0, 1\}$ che è preservata tramite isomorfismo, i.e. se $\mathscr{A}$ è isomorfa a $\mathscr{B}$ allora $Q(\mathscr{A}) = Q(\mathscr{B})$. Di conseguenza, Q può essere identificata con la sottoclasse $\mathcal{C}' = \{\mathscr{A} \in \mathcal{C} : Q(\mathscr{A}) = 1\}$ di $\mathcal{C}$.

Esempio 1.1.6. Consideriamo le seguenti queries sulla classe dei grafi $\mathbf{G} = (V, E)$.

- La query *EVEN* per la cardinalità pari è una query booleana tale che

$$EVEN(\mathbf{G}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{G} \text{ ha un numero pari di nodi} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- La query *CN* per la connettività è una query booleana tale che

$$CN(\mathbf{G}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{G} \text{ è connesso} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Le queries booleane *EULERIAN*, *ACYCLICITY* e *k-COLORABILITY* sono definite in modo analogo e indagano, rispettivamente, quando un grafo è euleriano[3], aciclico[4] o k-colorabile.

[3]Con *grafo euleriano* s'intende un grafo che ammette un cammino chiuso che tocca tutti gli archi una e una sola volta.

[4]Con *grafo aciclico* s'intende un grafo che non ammette cicli, ovvero comunque scegliamo un vertice non possiamo tornare ad esso percorrendo gli archi del grafo.

Le *queries* sono oggetti matematici che formalizzano il concetto di "proprietà" di una struttura o di elementi di essa. Questo permette di definire e studiare cosa vuol dire per una "proprietà" essere esprimibile in qualche logica[5].

Definizione 1.9. Sia L un linguaggio e $\mathcal{C}$ una classe di L-strutture.

- Una query k-aria Q è *FO-definibile* se esiste una formula del primo ordine $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ con $x_1, \ldots, x_k$ variabili libere e tale che per ogni $\mathscr{A} \in \mathcal{C}$

$$Q(\mathscr{A}) = \{(a_1, \ldots, a_k) \in A^k : \mathscr{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)\}.$$

- Una query booleana Q su $\mathcal{C}$ è *FO-definibile* se esiste un enunciato Ψ del primo ordine tale che per ogni $\mathscr{A} \in \mathcal{C}$

$$Q(\mathscr{A}) = 1 \iff \mathscr{A} \models \Psi.$$

- FO($\mathcal{C}$) rappresenta l'insieme di tutte le queries su $\mathcal{C}$ FO-definibili.

Esempio 1.1.7. Riportiamo alcuni esempi di queries FO-definibili nella classe di tutti i grafi (finiti o infiniti):

1. La query booleana "il grafo **G** ha un nodo isolato" è esprimibile con una formula del primo ordine

$$(\exists x)(\forall y)\big(\neg E(x, y)\big).$$

2. La query unaria "il nodo x ha almeno due nodi vicini distinti" è definibile dalla formula del primo ordine

$$(\exists y)(\exists z)\big(\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z)\big).$$

   In modo analogo, per ogni k fissato, la query booleana "**G** è un grafo k-regolare" (i.e., ogni nodo ha esattamente k nodi vicini) è definibile nella logica del primo ordine.

3. La query binaria "vi è un cammino di lunghezza 2 da x a y" è esprimibile con la formula del primo ordine

$$(\exists z)\big(\neg(x = z) \wedge \neg(y = z) \wedge E(x, z) \wedge E(z, y)\big).$$

[5]Noi ci limiteremo al caso della logica del primo ordine (FO).

1.2 Teoria dei Giochi

In questa sezione esponiamo i dettagli matematici dei giochi "two-person zero-sum" ad informazione perfetta, al fine di introdurre i concetti di teoria dei giochi che verranno utilizzati nei capitoli successivi. I giochi risultano utili come guide intuitive nelle dimostrazioni e nelle costruzioni delle strutture, ma è anche importante sapere come rendere matematicamente corrette queste idee intuitive.

Un gioco *two-person zero-sum* è costituito da due soli giocatori e caratterizzato dalla proprietà che la vittoria di uno consiste nella sconfitta dell'altro. I giochi zero-sum modellano, quindi, tutte quelle situazioni conflittuali in cui la contrapposizione dei due giocatori è totale: la somma delle vincite dei due contendenti è sempre zero. Non esiste ad esempio il caso in cui vincono entrambi o perdono entrambi.

Un gioco è ad *informazione perfetta* se entrambi i giocatori conoscono in ogni momento la mossa precedentemente compiuta dall'avversario.

In generale, la formulazione più semplice di un gioco con queste caratteristiche è la seguente (si veda Figura 1.1): vi sono due giocatori **I** e **II**[6], un insieme A chiamato *dominio* del gioco e un numero naturale n che rappresenta la lunghezza della partita.
Il giocatore **I** inizia scegliendo un elemento $x_0 \in A$; l'avversario **II** risponde scegliendo $y_0 \in A$. Dopo che x_i e y_i sono stati pescati, e $i+1 < n$, il giocatore **I** sceglierà x_{i+1} e l'avversario **II** risponderà con y_{i+1}. Il gioco si concluderà dopo n round.
Al termine del gioco si formeranno tre sequenze: $\bar{x} = (x_0, \dots, x_{n-1})$ che rappresenta il gioco di **I**, $\bar{y} = (y_0, \dots, y_{n-1})$ relativo a **II** e la sequenza $(\bar{x}; \bar{y}) = (x_0, y_0, \dots, x_{n-1}, y_{n-1})$ che indica il gioco tra i due partecipanti.

Per stabilire chi vince è necessario fissare precedentemente un insieme $W \subset A^{2n}$ di sequenze

$$(\bar{x}; \bar{y}) = (x_0, y_0, \dots, x_{n-1}, y_{n-1})$$

e dichiarare che il giocatore **II** vince se la sequenza $(\bar{x}; \bar{y})$ formatasi durante il gioco appartiene a W, altrimenti vince **I**. Denotiamo questo gioco con $\mathcal{G}_n(A, W)$.

Ad esempio, se $W = \emptyset$, **II** non ha possibilità di vincere mentre se $W = A^{2n}$, è il giocatore **I** a perdere in ogni caso.
Se W è l'insieme delle sequenze $(x_0, y_0, \dots, x_{n-1}, y_{n-1})$ tali che $x_0 = x_1$ e il dominio A ha almeno due elementi, allora **II** non ha possibilità di vincere in

[6] In letteratura esistono vari nomi per i giocatori **I** e **II**, come Spoiler e Duplicatore o Aberald $\forall$ ed Eloise $\exists$.

I	**II**
x_0	
	y_0
x_1	
	y_1
$\vdots$	
	$\vdots$
x_{n-1}	
	y_{n-1}

Figura 1.1: Gioco two-person 0-sum

quanto non può impedire al giocatore **I** di scegliere x_1 diverso da x_0.
D'altra parte, W potrebbe essere l'insieme di tutte le sequenze in cui $y_0 = y_1$; in questo caso **II** può sempre vincere in quanto basta che scelga come y_0 e y_1 lo stesso elemento.

Diciamo che il giocatore **II** ha una strategia vincente se possiede una serie di mosse che gli assicurano la vittoria, ovvero se **I** perde il gioco qualsiasi sia la sua sequenza $\bar{x}$ di passi. In modo analogo possiamo indicare una strategia vincente per il giocatore **I**. Matematicamente definiamo questo concetto nel modo seguente:

Definizione 1.10. Una *strategia* per il partecipante **I** al gioco $\mathcal{G}_n(A, W)$ è una sequenza
$$\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1})$$
di funzioni $\sigma_i : A^i \to A$. Diciamo che **I** ha usato la strategia σ nel gioco $(\bar{x}; \bar{y})$ se per ogni $0 < i < n$:
$$x_i = \sigma_i(y_0, \dots, y_{i-1}) \quad \text{e} \quad x_0 = \sigma_0.$$
La strategia σ del giocatore **I** è una *strategia vincente* se **I** vince in ogni gioco in cui utilizza σ, qualsiasi siano le mosse giocate dall'avversario.
Una *strategia* per il giocatore **II** in $\mathcal{G}_n(A, W)$ è una sequenza
$$\tau = (\tau_0, \dots, \tau_{n-1})$$
di funzioni $\tau_i : A^{i+1} \to A$ e diciamo che **II** ha usato la strategia τ nel gioco $(\bar{x}; \bar{y})$ se per ogni $i < n$:
$$y_i = \tau_i(x_0, \dots, x_i).$$

La strategia τ del giocatore **II** è una *strategia vincente* se **II** vince in ogni gioco in cui utilizza τ.

Si noti che una strategia dipende unicamente dalle mosse del giocatore avversario, non dalle azioni precedentemente svolte da colui che applica la strategia.

Una definizione più generale di strategia coinvolge il concetto di *posizione* del gioco $\mathcal{G}_n(A, W)$ ovvero qualunque segmento iniziale

$$p = (x_0, y_0, \dots, x_{i-1}, y_{i-1})$$

della sequenza $(\bar{x}, \bar{y})$, con $i \leq n$.
Le posizioni possiedono un ordine naturale: p' estende p se p è un segmento iniziale di p'. Naturalmente questa relazione di estensione costituisce un ordine parziale nell'insieme di tutte le posizioni: infatti se p' estende p e p'' estende p', allora p'' estende p; inoltre se p estende p' e viceversa, allora $p = p'$. La sequenza vuota $\emptyset$ è l'elemento più piccolo mentre i giochi $(\bar{x}, \bar{y})$ costituiscono gli elementi massimali dell'ordine parziale.

Diamo ora la definizione di strategia per i giocatori in posizione p:

Definizione 1.11. Una *strategia per* ***I*** *in posizione* $p = (x_0, y_0, \dots, x_{i-1}, y_{i-1})$ del gioco $\mathcal{G}_n(A, W)$ è una sequenza

$$\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1-i})$$

di funzioni $\sigma_j : A^j \to A$. Diciamo che **I** ha usato la strategia σ dopo la posizione p nel gioco $(\bar{x}; \bar{y})$ se $(\bar{x}; \bar{y})$ estende p e per ogni j con $i < j < n$:

$$x_j = \sigma_{j-i}(y_i, \dots, y_{j-1}) \quad \text{e} \quad x_i = \sigma_0.$$

La strategia σ del giocatore **I** in posizione p è una *strategia vincente in posizione* p se, utilizzando σ dopo la posizione p **I** vince in ogni gioco che estende p.
Una *strategia per* ***II*** *in posizione* $p = (x_0, y_0, \dots, x_{i-1}, y_{i-1})$ in $\mathcal{G}_n(A, W)$ è una sequenza

$$\tau = (\tau_0, \dots, \tau_{n-1-i})$$

di funzioni $\tau_j : A^{j+1} \to A$ e diciamo che **II** ha usato la strategia τ dalla posizione p nel gioco $(\bar{x}; \bar{y})$ se $(\bar{x}; \bar{y})$ estende p e per ogni j con $i \leq j < n$:

$$y_j = \tau_{j-i}(x_i, \dots, x_j).$$

La strategia τ del giocatore **II** in p è una *strategia vincente in posizione* p se, utilizzando τ dopo la posizione p **I** vince in ogni gioco che estende p.

Il lemma seguente dimostra che se **II** ha una possibilità di vincere all'inizio del gioco (ovvero **I** non ha ancora una strategia vincente) allora ce l'ha durante tutta la partita, nel senso che qualunque sia la scelta di **I**, l'avversario riuscirà sempre a rispondere con un elemento che non avvantaggi il primo giocatore.

Lemma 1. *Consideriamo il gioco $\mathcal{G}_n(A, W)$ e una sua posizione $p = (x_0, y_0, \ldots, x_{i-1}, y_{i-1})$, con $i < n$. Supponiamo che il giocatore **I** non abbia una strategia vincente in posizione p. Allora per ogni $x_i \in A$ esiste $y_i \in A$ tale che **I** non ha una strategia vincente nella posizione $p' = (x_0, y_0, \ldots, x_i, y_i)$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è per assurdo: supponiamo che esista un $x_i \in A$ tale che per ogni $y_i \in A$ il giocatore **I** abbia una strategia vincente σ^{y_i} in posizione $p' = (x_0, y_0, \ldots, x_i, y_i)$. Definiamo la strategia $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1-i})$ di **I** in posizione p nel modo seguente:

$$\sigma_0 = x_i \quad \text{e}$$

$$\sigma_{j-i}(y_i, \ldots, y_{j-1}) = \sigma^{y_i}(y_{i+1}, \ldots, y_{j-1}).$$

In questo modo, la prima mossa di **I** dopo la posizione p consiste nel scegliere l'elemento x_i che gli assicura una strategia vincente e, a seconda della scelta y_i di **II**, per le mosse successive al giocatore **I** basterà applicare la strategia σ^{y_i} che gli assicura la vittoria. Abbiamo quindi costruito una strategia vincente per **I** in posizione p, in contraddizione con l'ipotesi che non ve ne fosse alcuna. □

Si noti che da questo lemma segue che se il giocatore **I** non possiede una strategia vincente all'inizio del gioco (ovvero in posizione $p = \emptyset$), allora non ne avrà alcuna durante tutta la partita in quanto, se per assurdo in qualche posizione $\bar{p} = (x_0, y_0, \ldots, x_j, y_j)$ ce l'avesse, si riuscirebbe a definire una strategia vincente per **I** in posizione $p = \emptyset$ utilizzando a ritroso $j + 1$ volte il metodo presente nella dimostrazione.

Il concetto seguente è di fondamentale importante in teoria dei giochi e in particolare nelle applicazioni alla logica.

Definizione 1.12. Un gioco two-person si dice *determinato* se uno dei due giocatori possiede una strategia vincente; in caso contrario sarà *non determinato.*

Nel 1913 il tedesco Ernst Zermelo dimostrò il seguente teorema che afferma che ogni gioco di lunghezza finita è determinato. Da questo fatto segue che tutti i giochi che si incontrano in logica possiedono questa proprietà.

Teorema 1.3. *Sia A un insieme, n un numero naturale e $W \subset A^{2n}$. Allora il gioco $\mathcal{G}_n(A, W)$ è determinato.*

Dimostrazione. Chiaramente se il giocatore **I** possiede una strategia vincente, allora il gioco $\mathcal{G}_n(A, W)$ è determinato. Dobbiamo quindi dimostrare che nel caso in cui **I** non abbia una strategia vincente, l'avversario **II** riuscirà a costruirsene una. Infatti utilizzando ripetutamente il Lemma 1 si può comporre una strategia vincente per **II** che consiste nell'evitare che **I** abbia una strategia vincente per tutta la partita così da concludere il gioco con la vittoria di **II**. Rendiamo questa idea più precisa definendo la strategia

$$\tau = (\tau_0, \dots, \tau_{n-1})$$

del giocatore **II** in $\mathcal{G}_n(A, W)$. Avendo supposto che **I** non abbia una strategia vincente, dal Lemma 1 segue che in ogni posizione $p = (x_0, y_0, \dots, x_{i-1}, y_{i-1})$ **I** non avrà una strategia vincente e quindi per ogni $x_i \in A$ esisterà qualche $y_i \in A$ tale che **I** non avrà una strategia vincente neanche in $p' = (x_0, y_0, \dots, x_i, y_i)$. Denotiamo questo elemento y_i con

$$y_i = f(p, x_i)$$

così da costruire una funzione definita sulle posizioni p e sugli elementi $x_i \in A$. La strategia di **II** si baserà nel scegliere proprio elementi y_i di questo tipo: sia infatti

$$\tau_0(x_0) = f(\emptyset, x_0) \quad \text{e}$$
$$\tau_i(x_0, \dots, x_i) = f(p, x_i),$$

dove

$$p = (x_0, y_0, \dots, x_{i-1}, y_{i-1})$$

e

$$y_0 = \tau_0(x_0)$$
$$y_{i-1} = \tau_{i-1}(x_0, \dots, x_{i-1}).$$

E' facile vedere che in ogni gioco in cui **II** utilizza questa strategia, ogni posizione p è tale che **I** non possiede una strategia vincente in p. Inoltre è facile vedere che τ così definita è una strategia vincente per il giocatore **II**. $\square$

Grazie al Teorema 1.3, nei capitoli successivi potremo affermare che in ogni gioco considerato[7] uno dei due giocatori possiede una strategia vincente, quindi se il giocatore **II** non ne ha una, ne sarà dotato l'avversario, e viceversa.

[7] Come indicato nelle prossime pagine, considereremo solamente giochi con un numero finito di mosse.

Capitolo 2

Inesprimibilità nei modelli finiti

Per introdurre la nozione di Giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé, possiamo partire da una loro importante applicazione nell'ambito della definibilità di certe proprietà nella Logica del Primo Ordine.
In questo capitolo mostreremo che gli strumenti standard di teoria dei modelli utili a dimostrare l'inesprimibilità di queries in FO non risultano efficaci nel caso di modelli finiti. Questa considerazione permette di introdurre per il caso finito una tecnica differente, basata sui giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé. Si tratta di uno strumento flessibile ed estendibile, in quanto possono essere formulate varianti che permettano di studiare il potere esprimibile di logiche più forti di quella del Primo Ordine.

Il potere esprimibile della logica FO in una classe $\mathcal{C}$ di strutture è misurabile tramite la collezione FO($\mathcal{C}$) di queries FO-definibili su $\mathcal{C}$[1]. La questione centrale è quindi determinare quali "proprietà" sono esprimibili con formule del primo ordine sulla classe di strutture $\mathcal{C}$ e quali no. Chiaramente, per dimostrare che una query Q è FO-definibile su $\mathcal{C}$ è sufficiente trovare una FO-formula che la definisce in ogni struttura di $\mathcal{C}$. Al contrario, dimostrare che Q non è definibile risulta in principio più complicato in quanto si tratta di dimostrare che nessuna formula in FO definisce quella proprietà.

2.1 La connettività

Consideriamo come esempio la proprietà di connettività di un grafo, identificata con la query booleana CN definita nell'Esempio 1.1.6. Ricordiamo che un grafo con una relazione E risulta connesso se per ogni coppia di nodi a, b è possibile trovare un numero n e i nodi $c_1, \ldots, c_n \in V$ tali che $(a, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_n, b)$ sono tutti archi del grafo.

[1]Le definizioni dei seguenti concetti sono state espresse nella Definizione 1.9 a pagina 7.

La proposizione seguente dimostra, utilizzando il Teorema di Compattezza[2], l'inesprimibilità in Logica del Primo Ordine della proprietà di connettività di grafi.

Proposizione 2.1.1. *La connettività di grafi arbitrari non è FO-definibile.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che la query boolena CN sia definibile da un enunciato Φ sul linguaggio $L = \{E\}$ relativo a tutte le strutture di grafi. Sia poi L_2 il linguaggio dato dall'espansione di L con due simboli di costanti c_1 e c_2. Per ogni n, sia Ψ_n l'enunciato

$$\neg\Big(\exists x_1 \ldots \exists x_n \big(E(c_1, x_1) \wedge E(x_1, x_2) \wedge \cdots \wedge E(x_{n-1}, x_n) \wedge E(x_n, c_2)\big)\Big)$$

che afferma che non esiste un cammino di lunghezza $n + 1$ da c_1 a c_2.
Consideriamo la seguente teoria

$$T = \{\Psi_n \mid n > 0\} \cup \{\neg(c_1 = c_2), \neg E(c_1, c_2)\} \cup \{\Phi\}$$

che considera la connettività e afferma anche che i nodi distinti c_1 e c_2 non sono collegati da nessun cammino, qualsiasi lunghezza si consideri. Vogliamo dimostrare che T è consistente, ovvero che esiste un grafo in cui ogni enunciato di T risulta vero. Per il Teorema di Compattezza, è sufficiente dimostrare che ogni sottoinsieme finito $T' \subset T$ è consistente.
Sia N un naturale tale che se $\Psi_n \in T'$, allora $n < N$; per trovarlo basta considerare

$$N > \max\{n \mid \Psi_n \in T'\}.$$

Allora un grafo connesso in cui il cammino più breve tra c_1 e c_2 ha lunghezza $N + 1$ è un modello per T': infatti, essendo connesso, verifica Φ e poiché la minima distanza tra c_1 e c_2 è di lunghezza $N + 1$ sicuramente sono verificati gli enunciati $\{\neg(c_1 = c_2), \neg E(c_1, c_2)\}$ e $\{\Psi_n \mid \Psi_n \in T'\}$. Per il Teorema di Compattezza possiamo concludere che anche T è consistente. Sia $\mathcal{B}$ un suo modello. Allora $\mathcal{B}$ è un grafo connesso, in quanto verifica Φ, ma in cui non esiste alcun cammino da c_1 a c_2 di lunghezza n, per ogni n.
Questa contraddizione dimostra che la connettività non è FO-definibile. $\square$

La dimostrazione sopra stabilisce che la query CN non è esprimibile al primo ordine nella classe di tutti i grafi, ma lascia aperta la possibilità che lo sia solo nella classe dei grafi finiti. Per dimostrare l'inesprimibilità nel caso finito, però, non è possibile ripetere la stessa dimostrazione in quanto il Teorema di Compattezza non è applicabile alle strutture finite.

[2]Si veda Teorema 1.1 a pagina 4.

Proposizione 2.1.2. *La compattezza fallisce nel caso di modelli finiti: esiste una teoria T tale che*

i) T non ha modelli finiti, e

ii) ogni sottoinsieme finito di T ha un modello finito.

Dimostrazione. Consideriamo il linguaggio $L = \emptyset$ e chiamiamo λ_n l'enunciato che afferma che il dominio ha almeno n elementi distinti:

$$\lambda_n \quad \equiv \quad \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i = x_j). \tag{2.1}$$

Sia ora $T = \{\lambda_n \mid n \geq 0\}$. Chiaramente T non ha alcun modello finito in quanto la cardinalità del dominio è almeno numerabile, ma ogni sottoinsieme finito $\{\lambda_{n_1}, \ldots, \lambda_{n_k}\}$ di T ha un modello: basta considerare considerare un insieme di cardinalità maggiore di n_i, per ogni $1 \leq i \leq k$. □

2.2 La cardinalità pari

Nell'esempio precedente abbiamo potuto notare che nel caso finito il Teorema di Compattezza fallisce quindi non si è in grado di stabilire quando una query è FO-definibile. A volte, però, un'argomentazione sulla compattezza può funzionare bene anche nel contesto finito.
Consideriamo la query booleana *EVEN* per la cardinalità pari, introdotta nell'Esempio 1.1.6 a pagina 6 nel caso di grafi finiti. Chiaramente, si può estendere la definizione a qualsiasi struttura $\mathscr{A}$, nel modo seguente:

$$EVEN(\mathscr{A}) = 1 \quad \text{se e solo se} \quad |A| \equiv 0 \bmod 2.$$

Si noti però che la proprietà assume significato solo per modelli finiti; nel caso di strutture infinite, il valore di $EVEN(\mathscr{A})$ può essere arbitrario.

Proposizione 2.2.1. *Consideriamo un linguaggio $L = \emptyset$. Allora la query EVEN non è FO-definibile.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che *EVEN* sia definibile da un enunciato Φ. Consideriamo gli enunciati λ_n (2.1) introdotti nella dimostrazione della Proposizione 2.1.1 ed esaminiamo le due teorie

$$T_1 = \{\Phi\} \cup \{\lambda_k \mid k > 0\}, \quad T_2 = \{\neg\Phi\} \cup \{\lambda_k \mid k > 0\}.$$

Per il Teorema di Compattezza, entrambe le teorie sono consistenti; di conseguenza, per il Teorema di Löwenheim–Skolem[3], ammettono modelli numerabili $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$. Poiché il linguaggio L è vuoto, le strutture $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$ consistono solamente in due insiemi numerabili, e quindi isomorfi. Questo porta ad una contraddizione, in quanto abbiamo trovato due modelli isomorfi $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$ tali che $\mathscr{A}_1 \models \Phi$ e $\mathscr{A}_2 \models \neg\Phi$. $\square$

Questo risultato, però, vale solo nel caso di un linguaggio vuoto. Cosa succede, invece, se consideriamo ad esempio $L = \{\leq\}$ e vogliamo provare che la query booleana *EVEN* non è FO-definibile per ordini lineari? In questo caso dovremmo espandere le teorie T_1 e T_2 con gli assiomi degli insiemi ordinati; otterremmo, quindi, due ordini lineari numerabili $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$, il primo modello di Φ e il secondo di $\neg\Phi$. A questo punto, però, non riusciamo ad ottenere una contraddizione, in quanto due ordini lineari numerabili arbitrari non risultano necessariamente isomorfi (infatti, per alcuni basta un enunciato del primo ordine a distinguerli; si pensi, ad esempio, ad un ordine lineare discreto $(\mathbb{N}, \leq)$ e a uno denso $(\mathbb{Q}, \leq)$[4]).

Dalle considerazioni fatte possiamo concludere che gli strumenti tradizionali di teoria dei modelli (come ad esempio il Teorema di Compattezza e il Teorema di Löwenheim–Skolem) possono non essere sufficienti a provare risultati di inesprimibilità nel caso di modelli finiti. Nei capitoli successivi, dopo aver introdotto i giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé, esamineremo il metodo basato su di essi, utile per studiare la logica del primo ordine nel caso di teoria dei modelli finiti.

[3]Si veda Teorema 1.2 a pagina 4.

[4]Si noti che la proprietà di densità di un insieme ordinato è esprimibile tramite la formula del primo ordine $\forall x \forall y \Big(\big((x < y) \wedge \exists z(x < z < y)\big) \vee \big((y < x) \wedge \exists z(y < z < x)\big)\Big)$ in cui con la notazione $x < y$ intendiamo la formula $(x \leq y) \wedge (x \neq y)$.

Capitolo 3

I giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé

In questo capitolo presenteremo i giochi EF partendo da una breve introduzione sul rapporto tra logica e giochi nel corso dei secoli ed esponendo gli avvenimenti che hanno portato alla nascita dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé. Nella seconda sezione spiegheremo le regole che costituiscono questa tipologia di giochi e definiremo il concetto di strategia vincente in questo contesto. Nell'ultima sezione, invece, proporremo alcuni semplici esempi di giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé applicati a diverse tipologie di strutture, dagli insiemi alle stringhe, dai grafi agli ordini lineari. In questo modo mostreremo il funzionamento di questa categoria di giochi e le condizioni che permettono ai giocatori di costruirsi una strategia vincente.

3.1 Introduzione storica

Un certo collegamento tra logica e gioco risale a moltissimo tempo fa; si pensi ad Aristotele che immaginò il dibattito come una specie di gioco o al periodo medievale in cui la logica veniva chiamata "dialettica" proprio in riferimento al pensiero aristotelico.

La teoria dei giochi matematici venne fondata all'inizio del Ventesimo secolo. Sebbene i primi collegamenti con la logica emersero negli anni '50, si possono citare molti nomi di pionieri di teoria dei giochi conosciuti anche per i loro contribuiti in logica come John von Neumann, Ernst Zermelo ed altri. Dall'inizio degli anni 2000 si è ampiamente diffusa l'idea che logica e giochi vadano insieme; ne è seguita una proliferazione di nuove combinazioni delle due materie, in particolare nelle aree in cui veniva applicata solamente la logica. Molti di questi sviluppi nacquero da lavori in logica pura come ad esempio teoria delle argomentazioni in cui i giochi forniscono uno strumento per analizzare la struttura dei dibattiti. Generalmente per indicare la tipologia di giochi adatta all'applicazione nell'ambito della logica si utilizza il termine *giochi logici* che identifica i giochi two-person zero-sum ad informazione perfetta introdotti nel primo capitolo.

I giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé sono dei giochi logici applicati alla teoria dei modelli in quanto utili per indagare quando due strutture risultano elementarmente equivalenti. Questa nozione fu formulata nel 1930 da Alfred Tarski il quale definì l'elementare equivalenza tra due strutture come la proprietà per cui esattamente gli stessi enunciati del primo ordire risultano veri in entrambe. Questa, però, è una definizione solo apparentemente semplice: infatti, è abbastanza difficile dare un esempio non banale di due strutture che siano elementarmente equivalenti. Se consideriamo, ad esempio, come struttura l'anello degli interi $\mathbb{Z}$, per affermare che una certa struttura $\mathscr{A}$ risulta elementarmente equivalente a $\mathbb{Z}$ è necessario conoscere tutta la teoria di $\mathbb{Z}$, cioè tutti gli enunciati in $\mathbb{Z}$, quelli già noti e dimostrati e tutti quelli ancora ignoti e da dimostrare. Si rivela dunque necessario trovare dei modi equivalenti e allo stesso tempo più semplici e utili per maneggiare questa potente nozione di equivalenza elementare.
Nel 1946, in una conferenza tenuta a Princeton, illustrando questa nuova definizione, Alfred Tarski espresse l'auspicio che fosse possibile creare e sviluppare una teoria di "una profondità pari ai moderni concetti di isomorfismo, [...], ora in uso"[1]. Ebbene, una simile teoria doveva contenere al suo interno delle condizioni necessarie e sufficienti per l'equivalenza elementare di due strutture date. Il primo a trovare una caratterizzazione utile fu il logico franco-algerino Roland Fraïssé che negli Anni '50 espose i suoi risultati nella sua tesi di dottorato[2]. Qualche anno più tardi, A. D. Taimanov, un logico russo, fece le stesse scoperte ma fu solo il polacco Andrzej Ehrenfeucht, nel 1961, a riformulare il tutto in termini di gioco[3].

I giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé si sono rivelati una delle idee più versatili nella logica del Ventesimo secolo; essi, infatti, si adattano ad un'ampia gamma di logiche e strutture, producendo ottimi risultati.

3.2 Regole del gioco

Essendo dei giochi logici, i giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé riguardano due soli giocatori, chiamati Spoiler e Duplicatore. Il tabellone di gioco è costituito da due strutture $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ dello stesso linguaggio. Per coerenza, continuia-

[1] Per maggiori dettagli, si consulti [12].
[2] Si consulti [3] e [4].
[3] Si veda [1].

mo a considerare solamente strutture finite su un linguaggio relazionale e numerabile.

Lo scopo dello Spoiler è mostrare che le due strutture sono differenti, mentre l'obiettivo del Duplicatore è mostrare che $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ sono la stessa struttura, a meno di isomorfismo.
Con la seguente definizione presentiamo con rigore le regole del gioco.

Definizione 3.1. Siano n un intero positivo, L un linguaggio e $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ due L-strutture. Il *gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a n mosse su $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$* interessa due giocatori, chiamati Spoiler e Duplicatore[4], ed è costituito dalle seguenti regole.
La partita è formata da n round; in ciascuno di essi gioca per primo lo Spoiler scegliendo un elemento dal dominio A di $\mathscr{A}$ o dal dominio B di $\mathscr{B}$. Il Duplicatore allora risponde scegliendo un elemento dal dominio della struttura non selezionata dall'avversario (i.e., se lo Spoiler ha scelto un elemento di A allora il Duplicatore è costretto a selezionare un elemento dell'insieme B e viceversa).
Siano $a_i \in A$ e $b_i \in B$ i due elementi scelti dai giocatori nel round i, con $1 \leq i \leq n$.

- Il Duplicatore vince la partita (a_1, b_1),. . . ,(a_n, b_n) se la mappa

$$a_i \to b_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{e} \quad c_j^{\mathscr{A}} \to c_j^{\mathscr{B}}, \quad 1 \leq j \leq s$$

  è un isomorfismo parziale[5] da $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ (ovvero è un isomorfismo tra la sottostruttura $\mathscr{A} \restriction \{a_1, \ldots, a_n\}$ e la sottostruttura $\mathscr{B} \restriction \{b_1, \ldots, b_n\}$). In caso contrario è lo Spoiler il vincitore della partita (a_1, b_1),. . . ,(a_n, b_n).

- Il Duplicatore vince il gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a n mosse su $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ se può vincere ogni serie del gioco, ovvero se lei/lui possiede una strategia vincente. Se invece lo Spoiler ha la possibilità di vincere una partita, allora diciamo che egli vince il gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a n mosse su $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$.

- Scriviamo $\mathscr{A} \equiv_n \mathscr{B}$ per indicare che il Duplicatore vince il gioco a n mosse su $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ e $\mathscr{A} \not\equiv_n \mathscr{B}$ se è lo Spoiler il vincitore.

Una tipica partita del gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a n mosse su $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ è rappresentata nella Figura 3.1: nel primo round lo Spoiler sceglie un elemento della struttura $\mathscr{A}$ e di conseguenza il Duplicatore è costretto a pescare un

[4]Secondo la notazione del primo capitolo, lo Spoiler rappresenta il giocatore **I**, mentre il Duplicatore costituisce il giocatore **II**.

[5]Si veda Definizione 1.7 a pagina 5.

Spoiler	$a_1 \in A$	$b_2 \in B$	$b_3 \in B$	$\dots$	$a_n \in A$
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\dots$	$\updownarrow$
Duplicatore	$b_1 \in B$	$a_2 \in A$	$a_3 \in A$	$\dots$	$b_n \in B$

Figura 3.1: Tipica partita di un gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a n mosse

elemento dal dominio B; al turno successivo lo Spoiler cambia struttura e sceglie $b_2 \in B$, allora il Duplicatore deve selezionare un elemento del dominio A e così funziona per tutti gli n round.

Per comprendere meglio la definizione generale di strategia vincente (Definizione 1.10 a pagina 9) nel caso dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé, si può fare riferimento alla definizione seguente che rende preciso il concetto di strategia vincente per il Duplicatore, in termini di famiglie di isomorfismi parziali.

Definizione 3.2. Sia n un intero positivo. Una *strategia vincente per il Duplicatore* nel gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a n mosse su $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ è una sequenza $I_0, I_1, \dots, I_n$ di insiemi non vuoti di isomorfismi parziali da $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ tale che:

- la sequenza $I_0, I_1, \dots, I_n$ ha la proprietà "avanti": per ogni $j < n$, ogni $f \in I_j$ ed ogni $a \in A$ esiste un isomorfismo parziale $g \in I_{j+1}$ tale che $a \in \mathrm{Dom}(g)$ e $f \subseteq g$;

- la sequenza $I_0, I_1, \dots, I_n$ ha la proprietà "indietro": per ogni $j < n$, ogni $f \in I_j$ ed ogni $b \in B$ esiste un isomorfismo parziale $g \in I_{j+1}$ tale che $b \in \mathrm{Im}(g)$ e $f \subseteq g$.

In effetti, la proprietà "avanti" garantisce al Duplicatore l'esistenza di una mossa a suo favore quando lo Spoiler sceglie un elemento della struttura $\mathscr{A}$, mentre la proprietà "indietro" garantisce al giocatore **II** una risposta che gli permette di continuare a giocare qualora l'avversario scegliesse un elemento della struttura $\mathscr{B}$.

3.3 Esempi

Proponiamo ora vari esempi di giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé applicati a diverse tipologie di strutture al fine di comprenderne il funzionamento e le regole che decretano il vincitore.

3.3.1 Giochi sugli insiemi

In questo esempio il linguaggio L è vuoto; in questo modo le L-strutture $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ sono costituite solamente da un insieme, ovvero i rispettivi domini A e B.

Proposizione 3.3.1. *Siano* $|A| \geq n$ *e* $|B| \geq n$*, allora* $\mathscr{A} \equiv_n \mathscr{B}$*.*

Dimostrazione. Per dimostrare la tesi dobbiamo trovare una strategia vincente per il Duplicatore. Supponiamo che siano già stati giocati i primi i round e che la posizione del gioco sia $(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)$. Assumiamo che al turno successivo lo Spoiler scelga un elemento $a_{i+1} \in A$. Se $a_{i+1} = a_j$ per qualche $j \leq i$, allora il Duplicatore risponderà scegliendo $b_{i+1} = b_j$, altrimenti selezionerà qualunque $b_{i+1} \in B - \{b_1, \ldots, b_i\}$ e un elemento b_{i+1} di questo tipo esiste visto che $|B| \geq n$.
Lo stesso principio può essere applicato nel caso in cui lo Spoiler, nel suo turno, scelta un elemento b_{i+1} dalla struttura $\mathscr{B}$. $\square$

3.3.2 Giochi sulle stringhe

Un altro ambito in cui è possibile costruire un gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé riguarda le stringhe, pensate come L-strutture sul linguaggio L dotato di una relazione d'ordine che identifica i numeri maggiori di un certo elemento della stringa con quelli alla sua destra, mentre i minori con quelli a sinistra.

Consideriamo in questo esempio $w_1 = 1101$ e $w_2 = 1011$; allora lo Spoiler può vincere il gioco a 2 mosse su queste due stringhe.

Dimostrazione. Lo Spoiler può iniziare scegliendo il secondo 1 della stringa w_1; l'avversario, quindi, è costretto a scegliere un 1 da w_2. Se il Duplicatore sceglie il primo elemento della seconda stringa, al turno successivo il giocatore **I** può scegliere il primo 1 in w_1 e in questo modo il Duplicatore non avrebbe modo di rispondere per conservare l'isomorfismo parziale in quanto nella stringa w_2 non è presente alcun numero 1 a sinistra di quello già scelto dal giocatore **II**. Indicando in grassetto le mosse dello Spoiler e in sottolineato quelle del Duplicatore, le mosse appena descritte sarebbero le seguenti:

$$
\begin{array}{rll}
\text{primo turno:} & w_1 = 1\mathbf{1}01 & w_2 = \underline{\mathbf{1}}011 \\
\text{secondo turno:} & w_1 = \mathbf{11}01 & \ldots
\end{array}
$$

Se invece il Duplicatore decide di scegliere nel primo turno il secondo o il terzo numero 1 della stringa w_2, al passo successivo lo Spoiler può scegliere lo 0 di w_1 e anche in questo caso il Duplicatore perderebbe in quanto nella stringa w_2 non vi è alcuno 0 a destra del numero 1 scelto dal giocatore nel turno precedente:

$$\begin{array}{rll} \text{primo turno:} & w_1 = 1\mathbf{1}01 & w_2 = 10\underline{\mathbf{1}}1 \\ \text{secondo turno:} & w_1 = 1\mathbf{10}1 & \quad \dots \end{array}$$

e analogamente

$$\begin{array}{rll} \text{primo turno:} & w_1 = 1\mathbf{1}01 & w_2 = 101\underline{\mathbf{1}} \\ \text{secondo turno:} & w_1 = 1\mathbf{10}1 & \quad \dots \end{array}$$

In questo modo abbiamo trovato una strategia vincente per lo Spoiler, quindi possiamo concludere che $w_1 \not\equiv_2 w_2$. $\square$

3.3.3 Giochi sui grafi

Siano **A** e **B** i due grafi illustrati nella Figura 3.2. Allora:

- $\mathbf{A} \equiv_2 \mathbf{B}$, i.e. il Duplicatore vince il gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a due mosse su **A** e **B**;
- $\mathbf{A} \not\equiv_3 \mathbf{B}$, i.e. lo Spoiler vince il gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a tre mosse su **A** e **B**.

Dimostrazione. Il Duplicatore può vincere il gioco a a due mosse se la sua strategia è far sì che vi sia un arco tra a_1 e a_2 se e solo se vi è un arco tra b_1 e b_2. Supponiamo infatti che il primo turno sia già stato giocato, ovvero siano già stati scelti due nodi, uno dal grafo **A** e uno dal grafo **B**. Supponiamo che nel secondo turno lo Spoiler scelga un elemento b_2 nel dominio B della struttura **B**. Se b_2 è un nodo collegato da un arco a quello precedentemente scelto (ovvero b_1), al Duplicatore basterà scegliere un nodo adiacente ad a_1 per vincere; se al contrario il nodo scelto dallo Spoiler al secondo turno non è unito a b_1 da un arco, il Duplicatore sceglierà un nodo in **A** non adiacente ad a_1. Chiaramente questa strategia è applicabile in modo simmetrico anche nel caso in cui al secondo turno il giocatore **I** scelga un elemento della struttura $\mathscr{A}$.

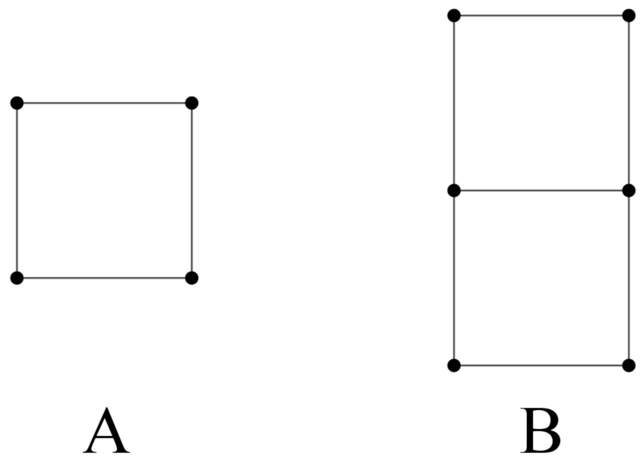

Figura 3.2: Gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a 2 e a 3 mosse

Per dimostrare la seconda affermazione, dobbiamo trovare una strategia vincente per il giocatore **I** nella partita a tre mosse. Essendo lo Spoiler ad iniziare ogni turno e quindi a decidere da quale struttura pescare gli elementi, il Duplicatore non può impedirgli di scegliere per tutti e tre i turni nodi dal grafo **B**. La strategia del giocatore **I** è, quindi, quella di selezionare una terna di nodi di **B** per i quali non vi sia alcun arco tra due qualsiasi dei tre (ad esempio il primo in alto a sinistra, quello ad altezza centrale a destra ed infine quello in basso a sinistra). In questo modo il Duplicatore non ha modo di vincere la partita in quanto sarebbe sempre obbligato a scegliere elementi della struttura **A** ed in essa, qualunque sia la scelta dei tre nodi, sicuramente ve ne sarà uno di essi collegato da un arco agli altri due.
Possiamo quindi concludere che $\mathbf{A} \not\equiv_3 \mathbf{B}$. □

3.3.4 Giochi sugli ordini lineari

Per ogni $n \geq 1$, indichiamo con $\mathbf{L}_n = (\{1, 2, \ldots, n\}, \leq)$ l'ordine lineare standard sull'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$; per quanto affermato nell'Esempio 1.1.2 a pagina 2, sappiamo che $\mathbf{L}_n$ rappresenta una L-struttura.
Le seguenti affermazioni sono vere per il gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé applicato agli ordini lineari (Figura 3.3):

- lo Spoiler vince il gioco a tre mosse su $\mathbf{L}_6$ e $\mathbf{L}_7$, ovvero $\mathbf{L}_6 \not\equiv_3 \mathbf{L}_7$;

$$\mathbf{L}_6: \quad 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq 6$$

$$\mathbf{L}_7: \quad 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq 6 \leq 7$$

$$\mathbf{L}_8: \quad 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq 6 \leq 7 \leq 8$$

Figura 3.3: Giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé a tre mosse su ordini lineari

- il Duplicatore ha una strategia vincente per il gioco a tre mosse su $\mathbf{L}_7$ e $\mathbf{L}_8$, ovvero $\mathbf{L}_7 \equiv_3 \mathbf{L}_8$.

Dimostrazione. Lo Spoiler può vincere il gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a tre mosse su $\mathbf{L}_6$ e $\mathbf{L}_7$ applicando la strategia seguente (per comodità consideriamo $\mathbf{L}_6$ come la struttura $\mathscr{A}$ e $\mathbf{L}_7$ come $\mathscr{B}$). Al primo turno lo Spoiler sceglie l'elemento 4 di $\mathbf{L}_7$. Poiché si sta giocando una sfida a tre mosse e poiché l'elemento in $\mathbf{L}_7$ scelto dal giocatore **I** possiede la proprietà di avere tre elementi minori e tre maggiori di lui, al Duplicatore conviene scegliere l'elemento 4 oppure l'elemento 3 nella struttura $\mathbf{L}_6$, in quanto entrambi possiedono almeno due elementi minori e due maggiori e quindi il giocatore **II** può sperare di conservare l'isomorfismo fino al termine della partita. Se il Duplicatore seleziona l'elemento 4 in $\mathbf{L}_6$, al turno successivo lo Spoiler sceglie l'elemento 6 in $\mathbf{L}_7$. A questo punto il Duplicatore deve rispondere con un elemento in $\mathbf{L}_6$ maggiore di quello precedentemente scelto, ovvero selezionerà il 5 o il 6 della struttura $\mathscr{A}$. In entrambi i casi lo Spoiler, al turno successivo, riuscirebbe ad evitare che l'isomorfismo si conservi. Infatti:

- nel primo caso la strategia dello Spoiler sarebbe la seguente

$$\begin{array}{llll} \text{Spoiler} & 4 \in \mathbf{L}_7 & 6 \in \mathbf{L}_7 & 5 \in \mathbf{L}_7 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \text{Duplicatore} & 4 \in \mathbf{L}_6 & 5 \in \mathbf{L}_6 & \dots \end{array}$$

  in questo modo il Duplicatore non ha possibilità di vincere la partita in quanto nella struttura $\mathbf{L}_6$ non vi è alcun elemento compreso tra i due precedentemente scelti dal giocatore stesso;

- qualora al secondo turno il giocatore **II** scegliesse $6 \in \mathbf{L}_6$, lo Spoiler potrebbe vincere la partita con le seguenti mosse

$$\begin{array}{llll} \text{Spoiler} & 4 \in \mathbf{L}_7 & 6 \in \mathbf{L}_7 & 7 \in \mathbf{L}_7 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \text{Duplicatore} & 4 \in \mathbf{L}_6 & 6 \in \mathbf{L}_6 & \dots \end{array}$$

ed anche in questo caso il Duplicatore non potrebbe conservare l'isomorfismo in quanto nella struttura $\mathbf{L}_6$ non vi è alcun elemento maggiore dei due precedentemente scelti.

Un'argomentazione essenzialmente simmetrica mostra che lo Spoiler possiede una strategia vincente anche nel caso in cui l'avversario scelga come primo elemento $3 \in \mathbf{L}_6$.

Nel caso, invece, della partita su $\mathbf{L}_7$ ed $\mathbf{L}_8$ è il Duplicatore a possedere una strategia vincente. Supponiamo che l'avversario inizi scegliendo l'elemento $4 \in \mathbf{L}_8$; allora il giocatore **II** può rispondere selezionando anche lui $4 \in \mathbf{L}_7$. Se lo Spoiler gioca $6 \in \mathbf{L}_8$, il Duplicatore può rispondere prendendo $6 \in \mathbf{L}_7$ e in questo modo **II** è in grado di conservare l'isomorfismo in quanto manca un solo turno e nella struttura $\mathbf{L}_7$ rimangono da scegliere sia elementi minori di 4 e 6 (ovvero 1, 2 e 3), sia compresi (ovvero 5), sia maggiori di entrambi (ovvero 7). Al Duplicatore, quindi, basterà copiare la mossa dell'avversario. In modo analogo funzionerebbe anche se al secondo turno lo Spoiler scegliesse $7 \in \mathbf{L}_8$, in quanto all'avversario basterebbe rispondere con $6 \in \mathbf{L}_7$ e applicare nell'ultimo turno la stessa strategia del caso precedente.
Infine, è facile verificare che il Duplicatore può vincere in qualsiasi altra partita a tre mosse su $\mathbf{L}_7$ e $\mathbf{L}_8$, qualunque sia la scelta iniziale dell'avversario; si troverà, infatti, nelle condizioni che gli permetteranno di copiare semplicemente le mosse del giocatore **I**.

$\square$

Da questo esempio si può notare che la differenza tra gli esiti dei due giochi dipende dalla relazione tra il numero di mosse n e le lunghezze degli ordini parziali su cui viene giocata la partita. Vale, infatti, il seguente teorema, di cui l'esempio precedente è un'applicazione.

Teorema 3.1. *Siano n, r ed s degli interi positivi. Allora $\mathbf{L}_r \equiv_n \mathbf{L}_s$ se e solo se vale una delle seguenti condizioni:*

- $r = s$ *oppure*
- $r \geq 2^n - 1$ *e* $s \geq 2^n - 1$.

Dimostrazione. E' facile dimostrare che se $r = s$, il Duplicatore è in grado di vincere il gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a n mosse tra $\mathbf{L}_r$ e $\mathbf{L}_s$: gli basterà, infatti, copiare le mosse dell'avversario scegliendo ad ogni turno l'elemento nella stessa posizione di quello selezionato dallo Spoiler nell'altra struttura.

Ci resta da dimostrare, allora, che l'unico altro caso in cui il Duplicatore possiede una strategia vincente per la partita a n mosse tra $\mathbf{L}_r$ e $\mathbf{L}_s$ è quando

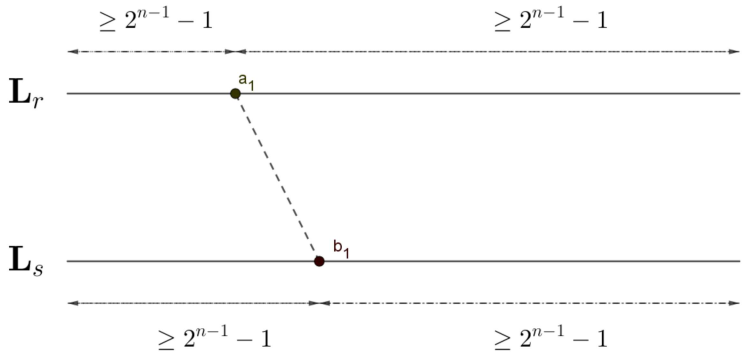

Figura 3.4: Illustrazione della dimostrazione del Teorema 3.1

le lunghezze degli ordini parziali sono almeno $2^n - 1$. Procediamo per induzione sul numero di mosse n del gioco.
Per $n = 1$ è banale: sicuramente entrambi gli ordini sono costituiti da almeno un elemento (ovvero $r \geq 2^1 - 1$ e lo stesso vale per s), per cui al Duplicatore basta scegliere qualsiasi elemento della struttura obbligata per far sì che vi sia un isomorfismo parziale tra i numeri a_1 e b_1.
Dato un elemento c della struttura $\mathbf{L}_r$, denotiamo con $\mathbf{L}_r^{>c}$ l'ordine lineare con dominio $\{d \mid c < d \leq r\}$ e analogamente $\mathbf{L}_r^{<c}$ indicherà l'ordine dotato del dominio $\{d \mid 1 \leq d < c\}$. Notiamo, intanto, che il Duplicatore possiede una strategia vincente nel gioco a n mosse su $\mathbf{L}_r$ e $\mathbf{L}_s$ se e solo se al primo turno, qualsiasi sia la scelta a_1 dello Spoiler, egli riesce a rispondere con un elemento b_1 tale che vi sia una strategia vincente per **II** nelle restanti mosse sia nel caso in cui l'avversario nei turni successivi scelga elementi maggiori di a_1 o b_1 che nel caso in cui selezioni elementi minori. Tradotto in termini di gioco, abbiamo capito che $\mathbf{L}_r \equiv_n \mathbf{L}_s$ se e solo se valgono le due condizioni seguenti:

- $\forall a \in \mathbf{L}_r\ \exists b \in \mathbf{L}_s$ tale che $\mathbf{L}_r^{>a} \equiv_{n-1} \mathbf{L}_s^{>b}$ e $\mathbf{L}_r^{<a} \equiv_{n-1} \mathbf{L}_s^{<b}$
- $\forall b \in \mathbf{L}_s\ \exists a \in \mathbf{L}_r$ tale che $\mathbf{L}_r^{>a} \equiv_{n-1} \mathbf{L}_s^{>b}$ e $\mathbf{L}_r^{<a} \equiv_{n-1} \mathbf{L}_s^{<b}$.

Di conseguenza il passo induttivo è dimostrato poiché $\mathbf{L}_r \equiv_n \mathbf{L}_s$ se e solo se i due ordini parziali possono essere divisi in due parti $\mathbf{L}_r^{>a}$ e $\mathbf{L}_r^{<a}$, $\mathbf{L}_s^{>b}$ e $\mathbf{L}_s^{<b}$ che per ipotesi induttiva hanno lunghezza almeno $2^{n-1} - 1$. Nella Figura 3.4 viene illustrato il caso in cui lo Spoiler scelga il primo elemento dalla struttura $\mathbf{L}_r$ e di conseguenza il Duplicatore seleziona $b_1 \in \mathbf{L}_s$ con la proprietà sopra

indicata[6]. La lunghezza della prima struttura sarà almeno $2(2^{n-1}-1)+1$ in quanto costituita dagli ordini $\mathbf{L}_r^{>a_1}$ e $\mathbf{L}_r^{<a_1}$ a cui si aggiunge l'elemento a_1. Lo stesso ragionamento vale per la struttura $\mathbf{L}_s$, la cui lunghezza dovrà tenere conto delle due parti in cui viene divisa e dell'elemento b_1. Il passo induttivo è quindi dimostrato in quanto vale

$$\min(r,s) \geq 2(2^{n-1}-1)+1 = 2^n - 1$$

da cui la tesi.

□

[6]Chiaramente il ragionamento è analogo nel caso in cui la struttura scelta dal giocatore **I** sia $\mathbf{L}_s$.

Capitolo 4

Teoremi di Ehrenfeucht-Fraïssé

Come precedentemente anticipato, in questo capitolo vogliamo illustrare il collegamento tra i giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé ed il concetto di elementare equivalenza tra strutture, introdotto da Tarski.
Già nel primo risultato viene mostrata la relazione tra l'argomento di Teoria dei Giochi e il concetto di Teoria dei Modelli. Nella seconda sezione, però, riportiamo un risultato più generale che aggiunge a quanto dichiarato nel precedente teorema anche un nuovo tipo di relazione tra due strutture e che ci permetterà di presentare una dimostrazione valida anche per il primo enunciato di Ehrenfeucht-Fraïssé.

Poiché nel Capitolo 3 abbiamo presentato i giochi EF con un numero finito di mosse, ci limiteremo a dimostrare i due teoremi nel caso finito.

4.1 Primo Teorema

Prima di enunciare i risultati, dobbiamo considerare un importante concetto della logica matematica: il rango di quantificatori di una formula.

Definizione 4.1. Sia φ una formula del primo ordine su un linguaggio L. Il *rango di quantificatori* di φ, denotato con $\mathbf{qr}(\varphi)$, rappresenta il massimo numero di quantificatori annidati presenti in φ. Formalmente, $\mathbf{qr}(\varphi)$ è definito dalla seguente induzione sul modo in cui è costruita la formula φ:

- se φ è atomica, allora $\mathbf{qr}(\varphi) = 0$;
- se φ è della forma $\neg\psi$, allora $\mathbf{qr}(\varphi) = \mathbf{qr}(\psi)$;
- se φ è del tipo $\psi_1 \vee \psi_2$ oppure $\psi_1 \wedge \psi_2$, allora $\mathbf{qr}(\varphi) = \max\{\mathbf{qr}(\psi_1), \mathbf{qr}(\psi_2)\}$;
- se φ è della forma $\forall x \psi(x)$ o $\exists x \psi(x)$, allora $\mathbf{qr}(\varphi) = \mathbf{qr}(\psi) + 1$.

Usiamo la notazione FO[k] per indicare l'insieme di tutte le formule del primo ordine con rango di quantificatori al più k.

Esempio 4.1.1. La formula

$$\varphi = \neg\exists x\big(\forall y R(x,y) \vee P(x)\big) \wedge \forall z P(z)$$

ha rango di quantificatori uguale a 2 poiché:

- $\mathbf{qr}\big(\forall y R(x,y) \vee P(x)\big) = \mathbf{qr}\big(\forall y R(x,y)\big) = 1$,
- inoltre $\mathbf{qr}\Big(\neg\exists x\big(\forall y R(x,y) \vee P(x)\big)\Big) = \mathbf{qr}\big(\forall y R(x,y)\big) + 1 = 2$
- ed infine $\mathbf{qr}(\varphi) = \max\{2, \mathbf{qr}\big(\forall z P(z)\big)\} = 2$

quindi in generale il rango di quantificatori di una formula non coincide con il numero totale di quantificatori in essa presenti.

A questo punto possiamo dare una definizione che permette di identificare due strutture dello stesso linguaggio.

Definizione 4.2. Siano n un intero positivo, $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ due L-strutture e S un insieme di formule del primo ordine nello stesso linguaggio L. Allora diciamo che $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ *concordano in* S se soddisfano le stesse formule di S, ovvero se per ogni formula φ in S vale

$$\mathscr{A} \models \varphi \quad \text{se e solo se} \quad \mathscr{B} \models \varphi.$$

La generalizzazione di questa definizione coincide con il concetto di elementare equivalenza tra strutture introdotto da Tarski in cui si estende la definizione a tutte le formule del primo ordine e quindi l'insieme S coincide con FO.

Definizione 4.3. Due strutture $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ nello stesso linguaggio si dicono *elementarmente equivalenti* se in una valgono tutte e sole le formule del primo ordine che valgono nell'altra. Formalmente si intende che per ogni φ in FO vale

$$\mathscr{A} \models \varphi \quad \text{se e solo se} \quad \mathscr{B} \models \varphi.$$

Consideriamo, ora, il primo Teorema di Ehrenfeucht-Fraïssé in cui viene enunciato il legame tra i giochi EF su due strutture $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ e la proprietà puramente logica di due strutture di concordare su un insieme di formule del primo ordine con rango massimo di quantificatori fissato.

Teorema 4.1 (di Ehrenfeucht-Fraïssé)**.** *Sia n un intero positivo e siano $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ due L-strutture. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) $\mathscr{A} \equiv_n \mathscr{B}$*, i.e. il Duplicatore vince il gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a* n *mosse su* $\mathscr{A}$ *e* $\mathscr{B}$*;*

ii) $\mathscr{A}$ *e* $\mathscr{B}$ *concordano in FO[n], i.e. soddisfano esattamente le stesse formule del primo ordine con rango di quantificatori al più* n*.*

Rimandiamo la dimostrazione di questo enunciato che sarà presente all'interno della dimostrazione del prossimo teorema che considera un'ulteriore affermazione equivalente a *i)* e *ii)* sopra indicate.

Come anticipato, l'enunciato del Teorema 4.1 rappresenta la limitazione al caso finito, in quanto viene fissato un intero n che rappresenta la lunghezza della partita e il rango massimo di quantificatori in FO. La generalizzazione del Teorema di Ehrenfeucht-Fraïssé al caso infinito enuncia la relazione tra i giochi EF e il concetto di elementare equivalenza tra strutture.
Presentiamo il seguente enunciato che non dimostreremo.

Teorema 4.2. *Sia L un linguaggio e siano* $\mathscr{A}$ *e* $\mathscr{B}$ *due L-strutture. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) $\mathscr{A} \equiv_n \mathscr{B}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, i.e. il Duplicatore possiede una strategia vincente per tutti i giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé su* $\mathscr{A}$ *e* $\mathscr{B}$*, qualsiasi sia il numero* n *di mosse;*

ii) $\mathscr{A}$ *e* $\mathscr{B}$ *risultano elementarmente equivalenti, i.e. soddisfano esattamente le stesse formule in FO.*

Esempio 4.1.2. Riconsideriamo brevemente l'Esempio 3.3.3 sui grafi del capitolo precedente per mostrare l'utilità del Teorema 4.1. Come dimostrato, lo Spoiler vince il gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a 3 mosse su **A** e **B** mostrato in Figura 3.2 a pagina 23. Perciò dal Teorema 4.1 possiamo dedurre che esiste un enunciato del primo ordine con rango di quantificatori pari a 3 che risulta soddisfatto da una delle due strutture e non dall'altra. Infatti, se φ è l'enunciato

$$\exists x \exists y \exists z \big(x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x \wedge \neg E(x,y) \wedge \neg E(y,z) \wedge \neg E(z,x)\big)$$

allora $\mathbf{B} \models \varphi$, ma $\mathbf{A} \not\models \varphi$. Si noti, inoltre, che questo enunciato fornisce una strategia vincente al giocatore **I** nella partita a 3 mosse su **A** e **B**: lo Spoiler, infatti, sceglie tre elementi b_1, b_2 e b_3 da **B** tali che

$$\mathbf{B}, b_1, b_2, b_3 \models \big(x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x \wedge \neg E(x,y) \wedge \neg E(y,z) \wedge \neg E(z,x)\big).$$

Un altro enunciato che testimonia che **A** e **B** non concordano in FO[3] è il seguente:

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)\big(x \neq y \wedge \neg E(x,y) \longrightarrow E(x,z) \wedge E(y,z)\big)$$

che risulta vero in **A** e falso in **B**, in quanto afferma che per ogni coppia di nodi distinti e non collegati da un arco esiste un altro nodo unito da un arco ad entrambi. Anche in questo caso l'enunciato fornisce una strategia vincente per lo Spoiler nel gioco a 3 mosse:

$$\begin{array}{llll} \text{Spoiler} & b_1 \in B & b_2 \in B & a_3 \in A \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \text{Duplicatore} & a_1 \in A & a_2 \in A & b_3 \in B. \end{array}$$

Nei primi due turni lo Spoiler sceglie due elementi b_1 e b_2 in B tali che

$$\mathbf{B}, b_1, b_2 \models \big(x \neq y \wedge \neg E(x,y) \wedge (\forall z)\neg\big(E(x,z) \wedge E(y,z)\big)\big)$$

ovvero due nodi distinti e non collegati da nessun arco e senza alcun nodo vicino in comune. Dopo che il Duplicatore ha scelto due elementi a_1 e a_2 in A, lo Spoiler seleziona un elemento a_3 in A collegato ad entrambi i precedenti, cosicché

$$\mathbf{A}, a_1, a_2, a_3 \models \big(x \neq y \wedge \neg E(x,y) \longrightarrow E(x,z) \wedge E(y,z)\big).$$

L'avversario, allora, non è in grado di rispondere con una mossa che conservi l'isomorfismo parziale, quindi possiamo concludere che la vittoria va allo Spoiler.

4.1.1 Applicazione ai cammini nei grafi

Il Teorema 4.1 precedentemente enunciato fornisce un metodo per determinare in modo preciso il minimo rango di quantificatori necessario per esprimere una certa query[1] con una formula del primo ordine.
Consideriamo come esempio la query booleana $PATH_k(x,y)$ definita per una coppia di nodi (x,y) nelle strutture di grafi $\mathbf{G} = (V,E)$ come segue:

$$PATH_k(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se esiste un cammino di lunghezza al più } 2^k \text{ tra i nodi } x \text{ e } y \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dall'Esempio 1.1.7 a pagina 7 sappiamo che $PATH_k(x,y)$ è FO-definibile in quanto al punto 3 l'abbiamo dimostrato per la query "vi è un cammino di lunghezza 2 da x a y", ovvero nel caso $k = 1$; si può facilmente generalizzare il fatto per un k qualsiasi.
Consideriamo, quindi, la seguente proposizione che utilizza i giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé per determinare il rango di quantificatori da utilizzare nella formula del primo ordine che esprime $PATH_k(x,y)$.

[1]Si faccia riferimento alla Definizione 1.8 a pagina 6.

Proposizione 4.1.1. *Sia $PATH_k(x, y)$ la query booleana che rappresenta la proprietà di un grafo $\mathbf{G} = (V, E)$ di avere un cammino di lunghezza al più 2^k tra i nodi x e y. Sia nel caso in cui $\mathbf{G}$ sia un grafo orientato che non, un rango di quantificatori pari a k è necessario e sufficiente per esprimere $PATH_k$ con una formula del primo ordine. Inoltre, sono necessarie solamente tre variabili per formulare la query considerata.*

Dimostrazione. Per dimostrare la necessità di un rango di quantificatori pari a k, esprimiamo $PATH_k(x, y)$ in modo induttivo come segue:

$$PATH_0(x, y) \equiv x = y \vee E(x, y)$$

$$PATH_{k+1}(x, y) \equiv (\exists z)\big(PATH_k(x, z) \wedge PATH_k(z, y)\big).$$

Con questa definizione affermiamo che esiste un cammino di lunghezza al più 2^{k+1} tra i nodi x e y di un grafo $\mathbf{G}$ se esiste un nodo z distante da entrambi con un cammino di lunghezza al massimo 2^k: infatti, se esiste z con questa proprietà, allora la lunghezza del cammino tra x e y sarà al più $2^k + 2^k$, ovvero minore o uguale a 2^{k+1} (si veda la Figura 4.1 in cui viene illustrato il ragionamento nel caso di $\mathbf{G}$ grafo lineare). Abbiamo quindi dimostrato che per esprimere $PATH_k(x, y)$ dobbiamo utilizzare almeno k quantificatori $\exists$; inoltre, vista la costruzione della formula, k coincide anche con il rango minimo di quantificatori necessario.

In aggiunta, capiamo che sono sufficienti tre variabili per esprimere la query booleana considerata in quanto è possibile scrivere il membro di destra della definizione induttiva di $PATH_{k+1}(x, y)$ riutilizzando le variabili:

$$PATH_k(x, z) \equiv (\exists y)\big(PATH_{k-1}(x, y) \wedge PATH_{k-1}(y, z)\big)$$

$$PATH_k(z, y) \equiv (\exists x)\big(PATH_{k-1}(z, x) \wedge PATH_{k-1}(x, y)\big).$$

Per dimostrare che un rango di quantificatori pari a k è sufficiente per esprimere $PATH_k$, utilizziamo il seguente lemma.

Lemma 2. *Siano $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ due grafi lineari con almeno $2^{k+1} + 1$ vertici e con costante 0 nel nodo estremo di sinistra e costante max nel nodo più a destra. Allora il Duplicatore vince il gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a k mosse su $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo il Lemma 2 per induzione sull'intero positivo k.
Caso $k = 0$: entrambi i grafi hanno almeno tre nodi e non vi è alcun arco tra 0 e *max* né in $\mathbf{G}$ né in $\mathbf{H}$. Il Duplicatore, quindi, vince il gioco EF a 0 mosse.

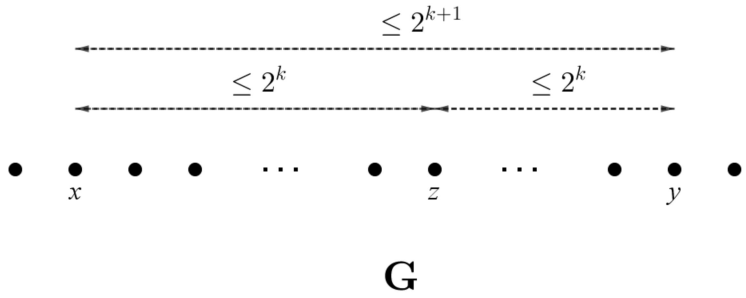

Figura 4.1: Definizione di $PATH_k$ per induzione: caso di **G** grafo lineare

Passo induttivo: assumiamo vero l'enunciato nel caso $k-1$ ed esaminiamo il gioco a k mosse. Consideriamo i grafi **G** e **H** di lunghezza almeno $2^{k+1}+1$ divisi in tre parti: i primi 2^k+1 nodi, la parte centrale e gli ultimi 2^k+1 vertici. La parte centrale comincia dal vertice più a destra della prima parte e finisce con il nodo più a sinistra dell'ultima parte (se la lunghezza di uno dei due grafi è esattamente $2^{k+1}+1$, allora la prima e l'ultima parte s'intersecano in un nodo che costituirà la parte centrale). Nella Figura 4.2 nella pagina seguente viene illustrato il caso in cui la lunghezza di **G** è strettamente maggiore di $2^{k+1}+1$, mentre **H** è costituito da esattamente $2^{k+1}+1$ nodi.

L'idea chiave per costruire una strategia vincente per il Duplicatore nel gioco a k mosse è la seguente: una volta che i due giocatori hanno completato il primo turno, i grafi risulteranno divisi in due parti (i segmenti a destra e a sinistra degli elementi scelti) e il Duplicatore necessita solamente di una strategia vincente per entrambe le suddivisioni di **G** e **H**.

A seconda della mossa dello Spoiler nel primo turno, il giocatore **II** risponderà nel modo seguente:

- Se **I** sceglie un nodo della prima parte di **G**, supponiamo il nodo l da sinistra, il Duplicatore risponde con il vertice l da sinistra nella prima parte del grafo **H**. In questo modo entrambi i grafi risultano divisi in due parti: il segmento fino al vertice l incluso e il grafo lineare da l in poi.
  Le sezioni di **G** e **H** che includono l hanno la stessa lunghezza, quindi il Duplicatore vince in modo triviale; le parti a destra di l, invece, hanno entrambe lunghezza almeno 2^k+1,[2] quindi il Duplicatore vince per

[2]Si ricordi che il vertice l appartiene alla prima parte dei grafi **G** e **H**, quindi il grafo lineare alla destra di l conterrà l'ultima parte in cui sono state divise le strutture e avrà,

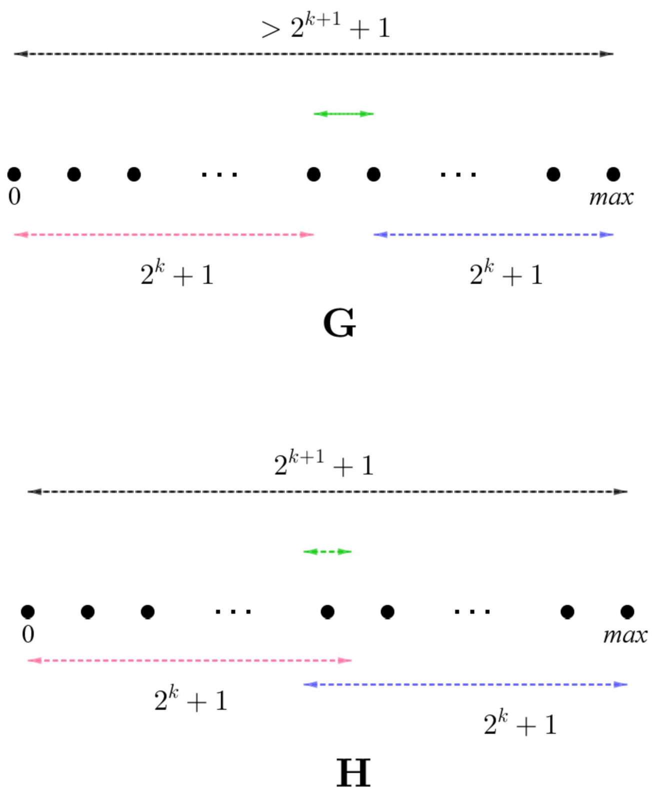

Figura 4.2: Dimostrazione del Lemma 2: divisione dei grafi lineari **G** e **H** in tre parti (il segmento rosa identifica la prima parte, il verde quella centrale mentre il blu l'ultima parte).

ipotesi induttiva.

- Se lo Spoiler nella prima mossa sceglie un nodo nell'ultima parte di **G** oppure nella prima o ultima parte di **H**, la strategia del Duplicatore sarà analoga alla precedente.

- Se **I** gioca nella parte centrale di **G** o **H**, il Duplicatore risponde con un elemento della parte centrale dell'altro grafo. Anche in questo caso le strutture vengono divise in due parti di lunghezza almeno 2^k+1, quindi per ipotesi induttiva possiamo affermare che il Duplicatore possiede una strategia vincente per le restanti mosse.

□

Il Lemma 2 ci permette, quindi, di dimostrare la condizione sufficiente della Proposizione 4.1.1[3]. Infatti, avendo trovato una strategia vincente per il Duplicatore nel gioco EF a k mosse sui grafi **G** e **H**, per il Teorema 4.1 a pagina 29 possiamo dedurre che le due strutture concordano sulle stesse formule fino al rango di quantificatori k. Inoltre, per come sono costruiti i due grafi nell'ipotesi del Lemma 2, entrambi verificano la proprietà espressa dalla query $PATH_k$ per qualche coppia di nodi. Di conseguenza, la formula del primo ordine che esprime $PATH_k$ avrà un rango di quantificatori al massimo pari a k.
Questo ci permette di concludere che il rango necessario e sufficiente per esprimere $PATH_k$ è esattamente k.

□

4.2 Teorema generale

In questa sezione presentiamo, per il caso finito, un risultato più generale che comprende anche quanto enunciato nel primo Teorema di Ehrenfeucht-Fraïssé, così da proporre una dimostrazione valida per entrambe le affermazioni.

quindi, lunghezza almeno $2^k + 1$.

[3]Si noti che la limitazione a grafi lineari nell'ipotesi del Lemma 2 non è restrittiva per concludere la dimostrazione della Proposizione 4.1.1 in quanto il ragionamento nel caso di grafi qualsiasi risulta analogo.

4.2.1 Tipi di rango k

Per enunciare e dimostrare il Teorema generale di Ehrenfeucht-Fraïssé dobbiamo analizzare l'insieme delle formule FO[k] e introdurre il concetto di *tipi* (più precisamente di tipi di rango k).

Per prima cosa esaminiamo FO[0]: per definizione, è l'insieme delle combinazioni Booleane di formule atomiche. Inoltre, se siamo interessati agli enunciati in FO[0], essi costituiscono esattamente gli *enunciati atomici*, ovvero enunciati senza quantificatori. In un linguaggio relazionale, ovvero privo di simboli di funzioni, gli enunciati atomici sono combinazioni Booleane di formule del tipo $c = c'$ e $R(c_1, \ldots, c_k)$, dove $c, c', c_1, \ldots, c_k$ sono simboli di costanti del linguaggio L.

Assumiamo, ora che φ sia una formula dell'insieme FO[$k+1$]. Se $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$, allora per definizione di rango di quantificatori, entrambe le formule φ_1 e φ_2 appartengono a FO[$k+1$] e allo stesso modo vale per $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$; se $\varphi = \neg\varphi_1$, allora φ_1 è ancora una formula con rango di quantificatori al più pari a $k+1$. Tuttavia, se $\varphi = \exists x\psi$ o $\varphi = \forall x\psi$, allora ψ appartiene all'insieme FO[k]. Quindi ogni formula in FO[$k+1$] è logicamente equivalente[4] ad una combinazione booleana di formule del tipo $\exists x\psi$ e $\forall x\psi$, dove ψ è una formula in FO[k].
Usando questo fatto, dimostriamo il seguente lemma:

Lemma 3. *Se L è un linguaggio relazionale finito, allora, a meno di equivalenza logica, l'insieme FO[k] definito su L contiene solo un numero finito di formule con m variabili libere $x_1, \ldots, x_m$, per ogni intero positivo m.*

Dimostrazione. Procediamo con una dimostrazione per induzione su k.

Il caso base è FO[0]: in questo insieme vi è un numero finito di formule atomiche e di conseguenza le combinazione Booleane di queste sono finite, a meno di equivalenza logica.

Per passare dal caso k al caso $k+1$, ricordiamo che ogni formula $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ di FO[$k+1$] con m variabili libere è combinazione booleana di formule del tipo

$$\exists x_{m+1}\psi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) \quad \text{oppure} \quad \forall x_{m+1}\psi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}),$$

con ψ formula di FO[k] con $m+1$ variabili libere. Allora per ipotesi, il numero di formule in FO[k] con $m+1$ variabili libere è finito (a meno di equivalenza logica) e di conseguenza possiamo arrivare alla stessa conclusione per le formule in FO[$k+1$] con m variabili libere. □

[4]In logica, due formule si dicono logicamente equivalenti se hanno lo stesso valore di verità in ogni modello.

In teoria dei modelli, un *tipo* (o m-tipo) di una m-upla $\vec{a}$ su una L-struttura $\mathscr{A}$ è l'insieme di tutte le formule del primo ordine φ con m variabili libere tali che $\mathscr{A} \models \varphi(\vec{a})$.
Questa nozione, però, è troppo generale per il nostro contesto. Come nelle pagine precedenti, ci limitiamo a formule con un rango massimo di quantificatori fissato; consideriamo, quindi, la seguente definizione.

Definizione 4.4. Sia L un linguaggio relazionale fissato. Si consideri una L-struttura $\mathscr{A}$ e una m-upla $\vec{a}$ nel dominio A. Allora l'*m-tipo di rango k di $\vec{a}$ su $\mathscr{A}$* è definito come

$$tp_k(\mathscr{A}, \vec{a}) = \{\varphi(x_1, \ldots, x_m) \in FO[k] \mid \mathscr{A} \models \varphi(\vec{a}), \text{ con } |\vec{a}| = m\}$$

ovvero l'insieme di tutte le formule φ del primo ordine con esattamente m variabili libere e rango di quantificatori al più k tali che $\varphi(\vec{a})$ risulta vero nella struttura $\mathscr{A}$. Inoltre un *m-tipo di rango k* è qualunque insieme di formule della forma $tp_k(\mathscr{A}, \vec{a})$, con $|\vec{a}| = m$.
Quando l'intero positivo m è chiaro dal contesto, parliamo di *tipi di rango k*.

Nel caso particolare in cui $m = 0$, consideriamo $tp_k(\mathscr{A})$ definito come l'insieme degli enunciati di FO[k] che valgono nella struttura $\mathscr{A}$.
Si noti, inoltre, che dalla definizione segue che i tipi di rango k sono gli insiemi di formule, con il corretto numero di variabili libere, consistenti massimali: infatti, ogni tipo S di rango k è consistente[5] e per ogni $\varphi(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{FO}[k]$ vale $\varphi \in S$ oppure $\neg\varphi \in S$.

A questo punto si potrebbe pensare che i tipi di rango k siano oggetti intrinsecamente infiniti, ma non è così per il Lemma 3. Infatti, sappiamo che, a meno di equivalenza logica, l'insieme FO[k] risulta finito una volta fissato un numero m di variabili libere. Siano, allora, $\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_M(\vec{x})$ i rappresentati delle classi di equivalenza in FO[k] con variabili libere $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$. Allora un tipo S di rango k è unicamente determinato da un sottoinsieme K di $\{1, \ldots, M\}$ che identifica quali φ_i appartengono a S. In più, basta una singola formula per esprimere la proprietà per cui $\vec{x}$ soddisfa tutte le φ_i con $i \in K$ e non soddisfa le φ_j tali che $j \notin K$:

$$\alpha_K(\vec{x}) \equiv \bigwedge_{i \in K} \varphi_i(\vec{x}) \wedge \bigwedge_{j \notin K} \neg\varphi_j(\vec{x}). \tag{4.1}$$

Si noti che anche $\alpha_K(\vec{x})$ appartiene a FO[k] in quanto non vengono introdotti nuovi quantificatori a quelli delle formule φ_i, con $i = 1, \ldots, M$.

[5] Si faccia riferimento alla Definizione 1.4 a pagina 3.

In aggiunta, tutte le formule α_K sono mutuamente esclusive: se si considerano due sottoinsiemi $K \neq K'$ di $\{1, \dots, M\}$, vale che

$$\text{se } \mathscr{A} \models \alpha_K(\vec{a}), \text{ allora } \mathscr{A} \models \neg\alpha_{K'}(\vec{a}).$$

Infatti, se la struttura $\mathscr{A}$ è un modello per $\alpha_K(\vec{a})$ vuol dire che tutte e sole le formule $\varphi_i(\vec{a})$ con $i \in K$ risultano vere nella struttura; essendo $K \neq K'$, la formula $\alpha_{K'}(\vec{a})$ afferma che le φ_i soddisfatte dalla m-upla $\vec{a}$ sono differenti, per cui la struttura $\mathscr{A}$ non può essere un modello per $\alpha_{K'}(\vec{a})$.
Inoltre, ogni formula di FO[k] è disgiunzione esclusiva di alcune α_K: infatti, ogni formula in FO[k] risulta equivalente a qualche φ_i per $i \in \{1, \dots, M\}$ e ogni formula φ_i è disgiunzione di tutte le α_K per cui $i \in K$.

Riassumendo tutte le proprietà illustrate, abbiamo il seguente teorema:

Teorema 4.3. *a) Per un linguaggio relazionale finito L, vi è un numero finito di m-tipi di rango k differenti.*
b) Siano $T_1, \dots, T_r$ tutti gli m-tipi di rango k. Allora esistono r formule di FO[k] $\alpha_1(\vec{x}), \dots, \alpha_r(\vec{x})$ tali che:

- *per ogni struttura $\mathscr{A}$ e m-upla $\vec{a} \in A^m$, vale $\mathscr{A} \models \alpha_i(\vec{a})$ se s solo se $tp_k(\mathscr{A}, \vec{a}) = T_i$,*
- *ogni FO[k] formula $\varphi(\vec{x})$ con m variabili libere è equivalente alla disgiunzione di qualche $\alpha_i(\vec{x})$.*

Di conseguenza, d'ora in poi assoceremo i tipi di rango k con le formule che li definiscono $\alpha_i(\vec{x})$ descritte in (4.1). Risulta importante ricordare che queste formule hanno di quantificatori pari al più al rango k dei tipi che descrivono.

Ora che abbiamo introdotto il concetto di tipi di rango k e descritto le proprietà principali, abbiamo gli strumenti per enunciare e dimostrare il risultato che generalizza il Teorema 4.1 di Ehrenfeucht-Fraïssé presentato nella sezione precedente. Infatti, dimostreremo l'equivalenza delle condizioni *i*) e *ii*) del Teorema di Ehrenfeucht-Fraïssé con un'altra importante condizione: l'equivalenza *back-and-forth*, o "avanti e indietro". Prima di esporre questa ulteriore condizione, analizziamo brevemente la relazione $\equiv_0$.

Quando il Duplicatore vince il gioco senza neanche iniziare? Questo succede se, e solo se, $(\emptyset, \emptyset)$ è un isomorfismo parziale tra le due strutture $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$. Per quanto considerato nell'Osservazione 1.1 a pagina 5, sappiamo che un isomorfismo parziale mappa ogni costante $c_i^{\mathscr{A}}$ nella costante $c_i^{\mathscr{B}}$; inoltre l'insieme di definizione nel caso di $(\emptyset, \emptyset)$ non comprende elementi del dominio A e non vengono considerati come immagini elementi $b \in B$. Di conseguenza l'isomorfismo $(\emptyset, \emptyset)$ consiste in una mappa tra costanti delle due strutture. La relazione $\mathscr{A} \equiv_0 \mathscr{B}$ coincide, quindi, con le proprietà:

- se $\vec{c}$ è una tupla di simboli di costanti, allora $c_i^{\mathscr{A}} = c_j^{\mathscr{A}}$ se e solo se $c_i^{\mathscr{B}} = c_j^{\mathscr{B}}$ per ogni i e j,

  e

- per ogni simbolo di relazione R, la tupla $(c_{i_1}^{\mathscr{A}}, \dots, c_{i_k}^{\mathscr{A}})$ appartiene a $R^{\mathscr{A}}$ se e solo se la tupla $(c_{i_1}^{\mathscr{B}}, \dots, c_{i_k}^{\mathscr{B}})$ sta in $R^{\mathscr{B}}$.

In altre parole, $(\emptyset, \emptyset)$ è un isomorfismo parziale tra $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ se, e solo se, $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ soddisfano gli stessi enunciati atomici.

Su questo concetto si basa la definizione induttiva della relazione back-and-forth tra le strutture $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$.

Definizione 4.5. Siano $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ due strutture dello stesso linguaggio L. La *relazione back-and-forth tra $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$* consiste in una famiglia di relazioni $\simeq_k$, definita come segue:

- $\mathscr{A} \simeq_0 \mathscr{B}$ se s solo se $\mathscr{A} \equiv_0 \mathscr{B}$, ovvero le due L-strutture soddisfano gli stessi enunciati atomici;

- $\mathscr{A} \simeq_{k+1} \mathscr{B}$ se s solo se sono soddisfatte le due condizioni:

forth: per ogni $a \in A$ esiste $b \in B$ tale che $(\mathscr{A}, a) \simeq_k (\mathscr{B}, b)$,

back: per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $(\mathscr{A}, a) \simeq_k (\mathscr{B}, b)$.

Osservazione 4.1. Si noti che con la scrittura $(\mathscr{A}, a)$ s'intende la struttura in cui l'elemento del dominio a interpreta il ruolo di costante e la notazione $(\mathscr{A}, a) \models \varphi(x)$ equivale a $\mathscr{A} \models \varphi(a)$, con $\varphi(x)$ formula del primo ordine con una variabile libera. Di conseguenza, nella Definizione 4.5, con $(\mathscr{A}, a) \simeq_k (\mathscr{B}, b)$ s'intende che per ogni formula in cui a fa parte degli elementi di $\mathscr{A}$ che la soddisfano, vale che il corrispondente $b \in B$ soddisfa φ nello stesso ruolo di a, e viceversa.

Dimostriamo, ora, la seguente estensione del Teorema 4.1.

Teorema 4.4 (di Ehrenfeucht-Fraïssé)**.** *Sia n un intero positivo e siano $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ due L-strutture. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) $\mathscr{A} \equiv_n \mathscr{B}$*, i.e. il Duplicatore vince il gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a n mosse su $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$;*

ii) $\mathscr{A}$ *e* $\mathscr{B}$ *concordano in FO[n], i.e. soddisfano esattamente le stesse formule del primo ordine con rango di quantificatori al più n.*

iii) $\mathscr{A} \simeq_n \mathscr{B}$.

4.2.2 Dimostrazione del Teorema di Ehrenfeucht-Fraïssé

Come già anticipato, poiché l'enunciato del teorema generale considera anche quanto afferma il primo teorema presentato, possiamo considerare questa dimostrazione valida per entrambi i risultati.

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione sull'intero positivo n.

Il caso $n = 0$ è banale: l'equivalenza tra le tre affermazioni è garantita dalla Definizione 4.5, in cui viene introdotta la relazione $\simeq_0$.

Procediamo, allora, con il passo induttivo ipotizzando vero l'enunciato nel caso dell'intero n e dimostriamo le equivalenze $i) \leftrightarrow iii)$ e $ii) \leftrightarrow iii)$ nel caso $n + 1$.

$iii) \to i)$: assumiamo $\mathscr{A} \simeq_{n+1} \mathscr{B}$; dobbiamo dimostrare che $\mathscr{A} \equiv_{n+1} \mathscr{B}$ ovvero che il Duplicatore possiede una strategia vincente per il gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a $n + 1$ mosse su $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$. Supponiamo che la prima mossa dello Spoiler sia scegliere un elemento $a \in A$. Poiché, per ipotesi, $\mathscr{A} \simeq_{n+1} \mathscr{B}$, esiste $b \in B$ tale che $(\mathscr{A}, a) \simeq_n (\mathscr{B}, b)$. Di conseguenza, per ipotesi induttiva, $(\mathscr{A}, a) \equiv_n (\mathscr{B}, b)$ ovvero il Duplicatore possiede una strategia vincente per le restanti n mosse, qualora la sua risposta al primo turno sia $b \in B$. Si noti che è possibile concludere $\mathscr{A} \equiv_{n+1} \mathscr{B}$ in quanto il Duplicatore può trovare la giusta risposta alla prima mossa dell'avversario qualsiasi sia l'elemento scelto dal giocatore I: per qualunque $a \in A$ e in modo analogo per qualunque $b \in B$, grazie alla proprietà **back**.

$i) \to iii)$: questa direzione è simile alla precedente. Assumiamo $\mathscr{A} \equiv_{n+1} \mathscr{B}$ e dimostriamo $\mathscr{A} \simeq_{n+1} \mathscr{B}$. Per definizione di strategia vincente per il Duplicatore nel gioco a $n + 1$ mosse tra $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, vale che, qualunque sia la prima mossa dello Spoiler, l'avversario riesce a trovare un elemento nella struttura opposta che gli permetta di continuare a giocare con una strategia vincente per le restanti n mosse. Questo significa che:

$$\forall a \in A \; \exists b \in B \text{ tale che } (\mathscr{A}, a) \equiv_n (\mathscr{B}, b)$$

e similmente

$$\forall b \in B \; \exists a \in A \text{ tale che } (\mathscr{A}, a) \equiv_n (\mathscr{B}, b).$$

Per ipotesi induttiva, però, vale l'equivalenza tra $i)$ e $iii)$ nel caso n, per cui è possibile rimpiazzare la scrittura $(\mathscr{A}, a) \equiv_n (\mathscr{B}, b)$ con $(\mathscr{A}, a) \simeq_n (\mathscr{B}, b)$, ottenendo così le proprietà **back** e **forth** che costituiscono la relazione $\simeq_{n+1}$ tra $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$.

ii) $\to$ *iii*): supponiamo che le strutture $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ concordino in FO$[n+1]$ e proviamo che $\forall a \in A\ \exists b \in B$ tale che $(\mathscr{A}, a) \simeq_n (\mathscr{B}, b)$, ovvero dimostriamo la proprietà **forth**; il caso **back** sarà identico.
Consideriamo un elemento $a \in A$ e sia $\alpha_i(x)$ la formula che definisce l'1-tipo di rango n di a $\big(\alpha_i(x)$ definita come in 4.1$\big)$. Allora, per definizione di tipo di rango n, vale

$$\mathscr{A} \models \exists x \alpha_i(x).$$

Poiché, come abbiamo notato precedentemente, $\mathbf{qr}(\alpha_i) \leq n$, la formula $\exists x \alpha_i(x)$ ha rango di quantificatori pari al più a $n+1$; poiché, per ipotesi, le due strutture concordano in FO$[n+1]$ e la formula $\exists x \alpha_i(\vec{x})$ sta in FO$[n+1]$, allora vale anche

$$\mathscr{B} \models \exists x \alpha_i(x).$$

Sia $b \in B$ l'elemento che verifica $\alpha_i(x)$; allora, poiché la formula α_i che definisce l'1-tipo di rango n risulta vera sia in $(\mathscr{A}, a)$ che in $(\mathscr{B}, b)$, vale

$$tp_n(\mathscr{A}, a) = tp_n(\mathscr{B}, b).$$

Dall'affermazione *b*) del Teorema 4.3 a pagina 38, segue che per ogni formula ψ con $\mathbf{qr}(\psi) \leq n$ abbiamo

$$(\mathscr{A}, a) \models \psi \text{ se e solo se } (\mathscr{B}, b) \models \psi$$

e quindi $(\mathscr{A}, a)$ e $(\mathscr{B}, b)$ concordano in FO$[n]$. Per ipotesi induttiva, segue che $(\mathscr{A}, a) \simeq_n (\mathscr{B}, b)$ per cui possiamo affermare di aver dimostrato la condizione **forth** necessaria a provare l'affermazione *iii*).

iii) $\to$ *ii*): dobbiamo dimostrare che $\mathscr{A} \simeq_{n+1} \mathscr{B}$ implica che le due strutture concordano in FO$[n+1]$. Come precedentemente osservato, ogni enunciato in FO$[n+1]$ è logicamente equivalente ad una combinazione booleana di enunciati del tipo $\exists x \psi(x)$ o $\forall x \psi(x)$, con $\psi \in$ FO$[n]$. E' sufficiente, quindi, dimostrare il risultato per enunciati della forma $\exists x \psi(x)$[6].
Assumiamo che $\mathscr{A} \models \exists x \psi(x)$, quindi $\mathscr{A} \models \psi(a)$ per qualche elemento $a \in A$. Per ipotesi abbiamo $\mathscr{A} \simeq_{n+1} \mathscr{B}$ quindi, grazie alla proprietà **forth**, possiamo trovare $b \in B$ tale che $(\mathscr{A}, a) \simeq_n (\mathscr{B}, b)$. Per ipotesi induttiva, abbiamo che le due strutture soddisfano esattamente le stesse formule in FO$[n]$; quindi $\mathscr{B} \models \psi(b)$ e di conseguenza $\mathscr{B} \models \exists x \psi(x)$. Analogamente, utilizzando la proprietà **back** si dimostra che $\mathscr{B} \models \exists x \psi(x)$ implica $\mathscr{A} \models \exists x \psi(x)$ e questo completa la dimostrazione. $\square$

[6]Una formula con il quantificatore $\forall$ è logicamente equivalente ad un'altra in cui compare il quantificatore $\exists$; infatti: $\neg \forall x \varphi(x) \equiv \exists x \neg \varphi(x)$ e $\forall x \varphi(x) \equiv \neg \exists x \neg \varphi(x)$.

Nel capitolo seguente presenteremo un'importante applicazione dei teoremi di Ehrenfeucht-Fraïssé ovvero caratterizzare la definibilità in logica del primo ordine di queries su una classe arbitraria di strutture. In questo modo riusciremo a concludere i risultati rimasti in sospeso nel Capitolo 2 e potremo applicare il metodo dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé per indagare l'esprimibilità di molte altre queries, tra cui quelle presentate nell'Esempio 1.1.6 a pagina 6.

Capitolo 5

Applicazione all'inesprimibilità in FO

Nel Capitolo 2, attraverso un paio di esempi, abbiamo mostrato la poca efficacia dei risultati classici di logica (come il Teorema di Compattezza o il Teorema di Löwenheim–Skolem) per concludere se una proprietà risulta esprimibile con una formula del primo ordine (FO) nel caso di modelli finiti.

I giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé, ed in particolare il collegamento con le formule FO enunciato nei Teoremi di Ehrenfeucht-Fraïssé, forniscono un metodo semplice ma utile a concludere se una query risulta FO-definibile.

Presentiamo, ora, il metodo caratterizzante e completo dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé che consiste in una diretta applicazione dei teoremi enunciati e dimostrati nel precedente capitolo.

5.1 Metodo dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé per FO

Un'applicazione del Primo Teorema di Ehrenfeucht-Fraïssé è la seguente proposizione che caratterizza la definibilità di una query booleana.

Proposizione 5.1.1. *Sia L un linguaggio relazionale, $\mathcal{C}$ una classe di L-strutture finite e Q una query booleana su $\mathcal{C}$. Allora Q non è esprimibile in FO se per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono due L-strutture $\mathscr{A}_n$ e $\mathscr{B}_n$ in $\mathcal{C}$ tali che:*

- $\mathscr{A}_n \equiv_n \mathscr{B}_n$ *e*
- $Q(\mathscr{A}_n) = 1$ *e* $Q(\mathscr{B}_n) = 0$.

Commento 5.1. Si noti che questo risultato rende il metodo dei giochi EF utile a dimostrare l'inesprimibilità in FO, in quanto enuncia una condizione sufficiente a provare la non definibilità di una proprietà nel caso dei modelli finiti. L'enunciato, infatti, suggerisce di trovare, per ogni n, una coppia di strutture finite tale che il Duplicatore vince il gioco EF a n mosse su $\mathscr{A}_n$ e $\mathscr{B}_n$ ed inoltre una delle due strutture verifica la proprietà espressa dalla query Q e l'altra no.

Dimostrazione. Procediamo con una dimostrazione per assurdo. Ipotizziamo, quindi, che Q sia definibile da un enunciato del primo ordine Φ. Inoltre, sia k il rango di quantificatori dell'enunciato Φ, ovvero $\mathbf{qr}(\Phi) = k$, e siano $\mathscr{A}_k$ e $\mathscr{B}_k$ le due L-strutture in $\mathcal{C}$ con le caratteristiche espresse nell'ipotesi. Allora $\mathscr{A}_k \equiv_k \mathscr{B}_k$, ovvero il Duplicatore possiede una strategia vincente per il gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a k mosse su $\mathscr{A}_k$ e $\mathscr{B}_k$. Per il Teorema 4.1 possiamo affermare che le due strutture concordano sullo stesso insieme di formule del primo ordine con rango di quantificatori pari ad al più k. Poiché l'enunciato Φ appartiene a FO$[k]$, possiamo concludere che $\mathscr{A}_k$ e $\mathscr{B}_k$ concordano su Φ (ovvero entrambe sono modelli di Φ oppure in entrambe l'enunciato non è verificato). In ogni caso, questo porta ad un assurdo in quanto in contraddizione con l'ipotesi che una delle due strutture verifica la proprietà espressa da Φ e l'altra no. $\square$

In modo analogo, è possibile utilizzare il metodo dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé per verificare l'inesprimibilità di una query m-aria su una classe $\mathcal{C}$ di L-strutture finite.

Proposizione 5.1.2. *Sia L un linguaggio relazionale, $\mathcal{C}$ una classe di L-strutture finite e Q una query m-aria su $\mathcal{C}$. Allora Q non è esprimibile in FO se per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono due L-strutture $\mathscr{A}_n$ e $\mathscr{B}_n$ in $\mathcal{C}$ e due m-uple $\vec{a}$ e $\vec{b}$ in esse tali che:*

- $(\mathscr{A}_n, \vec{a}) \equiv_n (\mathscr{B}_n, \vec{b})$ *e*
- $\vec{a} \in Q(\mathscr{A}_n)$ *e* $\vec{b} \notin Q(\mathscr{B}_n)$.

Dimostrazione. La dimostrazione è sostanzialmente analoga a quella della Proposizione 5.1.1. Si procede, infatti, per assurdo ipotizzando che la query Q sia definibile con una formula del primo ordine $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ con $x_1, \dots, x_m$ variabili libere. Supponendo $\mathbf{qr}(\varphi) = k$ e considerando il caso di $n = k$, si trovano, per ipotesi, due L-strutture $\mathscr{A}_k$ e $\mathscr{B}_k$ e due m-uple $\vec{a}$ e $\vec{b}$ in esse tali che

$$(\mathscr{A}_k, \vec{a}) \equiv_k (\mathscr{B}_k, \vec{b}).$$

Essendo k il rango di quantificatori della formula φ, per il Teorema 4.1 di Ehrenfeucht-Fraïssé possiamo affermare che le strutture $(\mathscr{A}_k, \vec{a})$ e $(\mathscr{B}_k, \vec{b})$ concordano su φ. Di conseguenza vi sono due casi possibili: o le due strutture

sono entrambe modelli per φ, oppure la formula non è verificata né in $(\mathscr{A}_k, \vec{a})$ né in $(\mathscr{B}_k, \vec{b})$.
Se si suppone vero il primo caso, allora vale:

$$\mathscr{A}_k \models \varphi(a_1, \dots, a_m)$$

e analogamente

$$\mathscr{B}_k \models \varphi(b_1, \dots, b_m).$$

Inoltre, per definizione di query m-aria, le espressioni precedenti permettono di concludere che $\vec{a} \in Q(\mathscr{A}_k)$ e $\vec{b} \in Q(\mathscr{B}_k)$, in contraddizione con l'ipotesi assunta.
In aggiunta, anche nel caso in cui la formula φ non fosse verificata in entrambe le strutture $(\mathscr{A}_k, \vec{a})$ e $(\mathscr{B}_k, \vec{b})$ si arriverebbe ad un assurdo in quanto, per ipotesi, una delle due struttura rappresenta un modello per φ. □

Grazie a questi risultati siamo in grado di dimostrare, ad esempio, la non definibilità della query booleana *EVEN*, argomento considerato nel Capitolo 2. Precedentemente abbiamo provato l'inesprimibilità della proprietà solo nel caso di un linguaggio vuoto e non siamo stati in grado di concludere alcun risultato nel caso degli ordini lineari.

Gli esempi seguenti mostrano la semplicità del metodo dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé e la grande utilità nel caso di modelli finiti.

Esempio 5.1.1. Consideriamo un linguaggio vuoto $L = \emptyset$. Allora la query *EVEN* non è esprimibile con un enunciato del primo ordine nella classe $\mathcal{C}$ delle L-strutture finite.

Dimostrazione. Per dimostrare quanto affermato, essendo *EVEN* una query booleana, possiamo utilizzare la Proposizione 5.1.1.
Essendo L un linguaggio vuoto, ogni L-struttura che si considera risulta costituita solamente da un insieme, ovvero il dominio.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi, possiamo considerare le strutture $\mathscr{A}_n$ e $\mathscr{B}_n$ composte da insiemi con n e $n+1$ elementi rispettivamente.

Grazie al risultato espresso nella Proposizione 3.3.1 a pagina 21, possiamo affermare che $\mathscr{A}_n \equiv_n \mathscr{B}_n$ e, chiaramente, solo una delle due strutture verifica la proprietà espressa dalla query *EVEN*.

Possiamo quindi concludere che la query per la cardinalità pari non è FO-esprimibile nel caso di un linguaggio vuoto. □

Con l'Esempio 5.1.1 ci si rende conto della maggiore semplicità ed eleganza del metodo basato sui giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé rispetto ai tradizionali risultati di logica matematica, nel caso di modelli finiti (si veda Proposizione 2.2.1 a pagina 15).

Occupiamoci, ora, di dimostrare l'inesprimibilità al primo ordine di $EVEN$ anche nel caso di un linguaggio dotato di una relazione d'ordine.

Esempio 5.1.2. La query booleana $EVEN$ non è FO-definibile nella classe $\mathcal{L}$ di tutti gli ordini lineari finiti.

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, consideriamo gli ordini lineari finiti

$$\mathscr{A}_n = \mathbf{L}_{2^n-1} \quad \text{e} \quad \mathscr{B}_n = \mathbf{L}_{2^n},$$

ovvero gli ordini di lunghezza, rispettivamente, $2^n - 1$ e 2^n.

Per il risultato enunciato nel Teorema 3.1 a pagina 25 possiamo affermare che il Duplicatore vince il gioco a n mosse sulle due strutture considerate, ovvero

$$\mathbf{L}_{2^n-1} \equiv_n \mathbf{L}_{2^n}.$$

Anche in questo caso, però, la proprietà di cardinalità pari risulta verificata da una sola struttura.

Poiché i risultati valgono per ogni $n \in \mathbb{N}$, possiamo utilizzare la Proposizione 5.1.1 per concludere. □

Consideriamo, a questo punto, un ulteriore esempio di applicazione del metodo dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé: indaghiamo la definibilità della query booleana $EULERIAN$ citata nell'Esempio 1.1.6 a pagina 6. Vogliamo, quindi, capire se la proprietà di un grafo di essere euleriano risulta esprimibile con una formula del primo ordine.

Definizione 5.1. Sia $\mathbf{G} = (V, E)$ un grafo non orientato. Un ciclo in $\mathbf{G}$ è detto *ciclo euleriano* se percorre tutti gli archi di $\mathbf{G}$ esattamente una volta. Un grafo $\mathbf{G}$ è detto *euleriano* se ammette un ciclo euleriano.

Utilizziamo la seguente caratterizzazione dei grafi euleriani per analizzare la definibilità della query considerata: perché un grafo $\mathbf{G}$ ammetta un ciclo euleriano è necessario e sufficiente che ogni nodo di $\mathbf{G}$ abbia grado pari, ovvero un numero pari di vertici collegati a lui da un arco.

Esempio 5.1.3. La query $EULERIAN$ non è FO-definibile nella classe $\mathcal{C}$ di tutti i grafi finiti.

Dimostrazione. Per ogni $n \geq 1$, consideriamo il grafo finito $\mathbf{A}_n$ illustrato nella Figura 5.1, composto dai vertici $V = \{a, b, c_1, \ldots, c_n\}$ e da $2n$ archi. Per come è costruito il grafo $\mathbf{A}_n$, il grado dei vertici c_i risulta pari a 2 in quanto gli unici nodi adiacenti sono a e b; il grado dei vertici a e b risulta, invece, pari a n in quanto entrambi collegati da archi ai nodi $c_1, \ldots, c_n$.

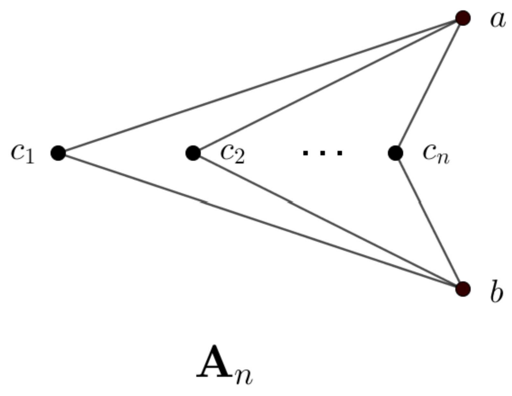

Figura 5.1: Dimostrazione della non definibilità della query *EULERIAN*

Di conseguenza, il grafo $\mathbf{A}_n$ risulta euleriano se, e solo se, n è un numero pari.

Inoltre, per ogni $m \leq n$, il Duplicatore possiede una strategia vincente per il gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a m mosse sulle strutture $\mathbf{A}_n$ e $\mathbf{A}_{n+1}$. Infatti, il grafo $\mathbf{A}_{n+1}$ è costituito da sottografi isomorfi ad $\mathbf{A}_n$: ogni sottoinsieme di vertici di $\mathbf{A}_{n+1}$ che comprenda i nodi a, b e n vertici tra $c_1, \ldots, c_{n+1}$ rappresenta, insieme agli archi congiungenti i vertici considerati, una copia isomorfa al grafo $\mathbf{A}_n$. Poiché stiamo considerando giochi di lunghezza m strettamente minore del numero minimo di vertici delle due strutture (la struttura $\mathbf{A}_n$ è composta da $n+2$ vertici, mentre in $\mathbf{A}_{n+1}$ la cardinalità di V è pari a $n+3$), possiamo concludere che il Duplicatore riuscirà, ad ogni turno, a copiare la mossa del proprio avversario fino al termine della partita.

A questo punto, possiamo applicare il metodo dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé espresso nella Proposizione 5.1.1 alle strutture $\mathbf{A}_{2n}$ e $\mathbf{A}_{2n+1}$. Per ogni $m \leq 2n$ risulta

$$\mathbf{A}_{2n} \equiv_m \mathbf{A}_{2n+1},$$

ma il grafo $\mathbf{A}_{2n}$ è costituito da nodi con grado pari e quindi verifica la proprietà espressa dalla query *EULERIAN*, mentre il grafo $\mathbf{A}_{2n+1}$ non risulta euleriano, in quanto i vertici a e b hanno grado dispari pari a $2n+1$.

Possiamo, quindi, concludere che la proprietà di un grafo di essere euleriano non risulta esprimibile tramite una formula della logica del primo ordine. □

Come già osservato, le proposizioni finora presentate offrono un criterio solamente sufficiente a provare l'inesprimibilità al primo ordine, ovvero propongono una strada da seguire per dimostrare quando una proprietà non risulta FO-definibile.

Il metodo dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé, però, risulta anche completo in quanto il "se" presente negli enunciati delle proposizioni diventa un "se e solo se", nel caso in cui nella dimostrazione si utilizzi il concetto di *tipo di rango* k.

Presentiamo, ora, la completezza del metodo nel caso di una query booleana; il risultato sarà analogo anche per query m-arie.

Proposizione 5.1.3. *Sia* L *un linguaggio relazionale,* $\mathcal{C}$ *una classe di* L*-strutture finite e* Q *una query booleana su* $\mathcal{C}$*. Allora* Q *è esprimibile in FO se, e solo se, esiste un intero positivo* k *tale che per ogni coppia di* L*-strutture* $\mathscr{A}$ *e* $\mathscr{B}$ *in* $\mathcal{C}$*: se* $Q(\mathscr{A}) = 1$ *e* $\mathscr{A} \equiv_k \mathscr{B}$*, allora* $Q(\mathscr{B}) = 1$*.*

Commento 5.2. Si noti che dalla Proposizione 5.1.3 segue che una query non è FO-definibile se e solo se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si possono trovare due strutture $\mathscr{A}_n$ e $\mathscr{B}_n$ con $\mathscr{A}_n \equiv_n \mathscr{B}_n$ e tali che solo una delle due verifica la proprietà espressa da Q. Di conseguenza vale l'enunciato della Proposizione 5.1.1 con la doppia implicazione espressa dal "se e solo se" che rimpiazza il "se" indicato nell'asserto.

Dimostrazione. La prima implicazione risulta equivalente all'enunciato della Proposizione 5.1.1, di cui abbiamo già fornito la dimostrazione.

Per dimostrare il verso opposto supponiamo che esista un intero positivo k per cui vale la proprietà descritta nell'enunciato e dimostriamo che Q è esprimibile con un enunciato del primo ordine.
Consideriamo, quindi, due L-strutture $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ tali che $Q(\mathscr{A}) = 1$ e $\mathscr{A} \equiv_k \mathscr{B}$. Per ipotesi, segue che anche $\mathscr{B}$ verifica la proprietà espressa da Q.

Per il Teorema 4.1 di Ehrenfeucht-Fraïssé, dall'ipotesi $\mathscr{A} \equiv_k \mathscr{B}$ segue che le due strutture soddisfano le stesse formule in FO$[k]$, ed in particolare gli stessi enunciati del primo ordine con rango di quantificatori al più pari a k.

Quest'ultima affermazione equivale a dichiarare che le L-strutture $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ possiedono lo stesso 0-tipo di rango k. Per ipotesi, quindi, vale che se due L-strutture possiedono lo stesso tipo di rango k, allora verificano entrambe la proprietà espressa dalla query booleana Q.

Dal punto b) del Teorema 4.3 a pagina 38 possiamo affermare che ogni enunciato in FO$[k]$ risulta equivalente alla disgiunzione esclusiva di qualche α_i definito in (4.1).

Poiché abbiamo dimostrato che tutte le L-strutture di $\mathcal{C}$ che possiedono lo stesso tipo di rango k verificano la proprietà espressa da Q, possiamo dedurre che la query booleana è esprimibile dalla disgiunzione di qualche α_i, ovvero da un enunciato del primo ordine con rango di quantificatori al più pari a k. □

Con gli esempi finora considerati, abbiamo mostrato la semplicità del metodo basato sui giochi EF per concludere risultati di inesprimibilità nel caso di modelli finiti.
In tutti i casi considerati, non risultava complicato trovare strutture che soddisfacessero le due condizioni richieste dalla Proposizione 5.1.1 a pagina 43. Tuttavia, non sempre è così semplice trovare per ogni naturale n due strutture che non soddisfino entrambe la proprietà espressa dalla query e in più che il Duplicatore possieda una strategia vincente per il gioco EF sulle due strutture considerate.

Negli anni, i ricercatori hanno trovato delle condizioni generali sufficienti per il Duplicatore a possedere una strategia vincente nel gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a n-mosse. Questi risultati rendono il metodo basato sui giochi EF ancor più facilmente applicabile.

Nella prossima sezione presentiamo questi risultati e mostriamo la loro utilità nell'applicazione del metodo per esaminare la FO-definibilità delle altre query citate nell'Esempio 1.1.6 a pagina 6.

5.2 d-equivalenza tra strutture ed ulteriori risultati di inesprimibilità

Il concetto di d-equivalenza tra strutture permette di identificare una condizione sufficiente per affermare che il Duplicatore possiede una strategia vincente nel gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé con un certo numero di mosse.

Per introdurre la nozione di d-equivalenza è necessario partire dalla definizione di *intorno*, concetto chiave per arrivare ad una condizione sufficiente all'esistenza di una strategia vincente per il Duplicatore.

Definizione 5.2. Dato un linguaggio relazionale e numerabile L, si consideri una L-struttura finita $\mathscr{A} = (A, c_1^{\mathscr{A}}, \ldots, c_s^{\mathscr{A}}, R_1^{\mathscr{A}}, \ldots, R_m^{\mathscr{A}})$. Siano, inoltre, $a \in A$ un elemento del dominio e d un intero positivo.

- Il *grafo di Gaifman* $\mathbf{G}_{\mathscr{A}} = (A, E_{\mathscr{A}})$ *di* $\mathscr{A}$ è un grafo non orientato in cui l'insieme dei vertici coincide con il dominio della struttura e in cui la relazione $E_{\mathscr{A}}$ che identifica gli archi è definita come segue: vi è un arco $E_{\mathscr{A}}(b, c)$ tra due elementi b e c del dominio A se essi fanno parte di una tupla che soddisfa una relazione della struttura, ovvero per qualche i, con $1 \leq i \leq m$, esiste una tupla $(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ che soddisfa la relazione

$R_i^{\mathscr{A}}$ con arietà s

$$(t_1, t_2, \ldots, t_s) \in R_i^{\mathscr{A}}$$

e tale che $b, c \in \{t_1, t_2, \ldots, t_s\}$.

- L'*intorno* $N(a,d)$ *di* a *di raggio* d è l'insieme costituito da a, dalle costanti $c_1^{\mathscr{A}}, \ldots, c_s^{\mathscr{A}}$ e da tutti i nodi nel grafo di Gaifman $\mathbf{G}_{\mathscr{A}}$ la cui distanza da a o da una costante[1] è minore di d.
  Più formalmente, $N(a,d)$ è definito per induzione su d nel modo seguente:

$$\begin{aligned} N(a,1) &= \{a, c_1^{\mathscr{A}}, \ldots, c_s^{\mathscr{A}}\} \\ N(a,d+1) &= N(a,d) \cup \{c \in A \mid \text{esiste } \ b \in N(a,d) \text{ tale che } E_{\mathscr{A}}(b,c)\}. \end{aligned}$$

Gli esempi seguenti mostrano che l'intorno di un elemento non è sempre intuitivo e può variare notevolmente a seconda della struttura considerata.

Esempio 5.2.1. Siano $n \geq 1$ e $d \geq 2$ degli interi positivi.
Se $\mathbf{L}_n = (L_n, \leq)$ è l'ordine lineare sull'insieme $L_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, allora

$$N(a,d) = L_n$$

per ogni $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Infatti, il grafo di Gaifman $\mathbf{G}_{\mathbf{L}_n}$ dell'ordine lineare $\mathbf{L}_n$ ha come vertici i naturali dell'insieme $L_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ e la relazione $E_{\mathbf{L}_n}$ indica che per ogni coppia i e j di elementi del dominio vi è un arco che li congiunge; infatti, i e j soddisfano la relazione di ordine totale: varrà $i \leq j$ oppure $j \leq i$. Il grafo $\mathbf{G}_{\mathbf{L}_n}$ risulta essere, quindi, un grafo completo; perciò, per $d \geq 2$, l'intorno di raggio d di qualsiasi nodo risulta costituito da tutti gli elementi del dominio.

Esempio 5.2.2. Sia $\mathbf{C}_n = (C_n, E)$ il grafo (orientato o non) costituito da un ciclo di n nodi e sia $d \leq n/2$. Allora il sottografo $\mathbf{G}_{\mathbf{C}_n} \upharpoonright N(a,d)$ del grafo di Gaifman generato dall'intorno $N(a,d)$ è costituito da un cammino lineare non orientato con $2d-1$ nodi, avente a come vertice centrale.

Infatti, un grafo non orientato coincide con il proprio grafo di Gaifman in quanto vi è lo stesso insieme di vertici e le relazioni E della struttura e $E_{\mathbf{G}}$ del grafo di Gaifman corrispondono. Nel caso di un grafo orientato, invece, il grafo di Gaifman corrisponde alla struttura stessa, privata dell'orientazione.

[1]Come si potrebbe intuire, con distanza tra due elementi x, y di un grafo s'intende la lunghezza del cammino più breve tra x e y; nel caso in cui i due nodi siano sconnessi, si definisce la distanza tra x e y pari a ∞.

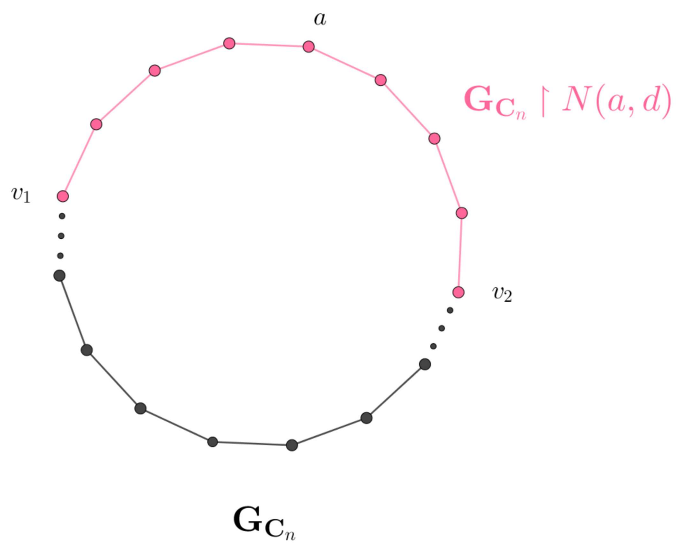

Figura 5.2: Sottografo generato da un intorno di un nodo nel grafo di Gaifman di un ciclo, indicato con la parte colorata

Di conseguenza, nel caso del ciclo $\mathbf{C}_n$, l'intorno di raggio d di un nodo a è dato dall'insieme dei vertici la cui distanza da a risulta minore di d (ovvero il cammino è formato da al più $d-1$ archi). Il sottografo $\mathbf{G}_{\mathbf{C}_n} \upharpoonright N(a,d)$ indotto dall'intorno $N(a,d)$ è, quindi, costituito dal cammino non orientato che ha come estremi i due vertici v_1 e v_2 di $\mathbf{G}_{\mathbf{C}_n}$ distanti da a con un cammino di lunghezza $d-1$. Il numero totale di vertici di $\mathbf{G}_{\mathbf{C}_n} \upharpoonright N(a,d)$ risulta quindi pari a $2d-1$, in quanto vi sono d vertici nel cammino da v_1 all'elemento a ed altrettanti d nel cammino da a al vertice v_2, ma è necessario sottrarre 1 poiché in questo modo l'elemento a viene contato due volte.

In Figura 5.2 è mostrato l'esempio nel caso di un intorno di un vertice con raggio $d = 5$. La parte colorata del grafo di Gaifman rappresenta il sottografo generato dall'intorno $N(a,5)$ e mostra che si tratta esattamente di un cammino lineare non orientato con 9 nodi (ovvero $2d-1$), avente a come vertice centrale.

Diamo ora delle definizioni preliminari che serviranno ad introdurre il concetto di d-equivalenza tra strutture.

Definizione 5.3. Sia L un linguaggio relazionale e numerabile. Con *tipo di isomorfismo* τ di una L-struttura $\mathscr{A}$ s'intende una classe di equivalenza della relazione di isomorfismo $\cong$, ovvero l'insieme che identifica le L-strutture isomorfe ad $\mathscr{A}$[2]:

$$\tau = \{\mathscr{B} \mid \mathscr{B}\ L\text{-struttura e}\ \ \mathscr{B} \cong \mathscr{A}\}$$

Nella trattazione useremo la lettera τ per denotare i tipi di isomorfismo. Inoltre, anziché affermare che una struttura appartiene a τ, diremo che è del tipo di isomorfismo τ.

Definizione 5.4. Dati un linguaggio relazionale e numerabile L ed una L-struttura finita $\mathscr{A} = (A, c_1^{\mathscr{A}}, \dots, c_s^{\mathscr{A}}, R_1^{\mathscr{A}}, \dots, R_m^{\mathscr{A}})$, si consideri un elemento del dominio $a \in A$ ed un intero positivo d.
Il *d-tipo di a* è definito come il tipo di isomorfismo τ della struttura

$$(\mathscr{A}, a) \restriction N(a, d)$$

ovvero la sottostruttura di $(\mathscr{A}, a)$[3] generata dall'intorno $N(a, d)$.

Osservazione 5.1. Si noti che il dominio di $(\mathscr{A}, a) \restriction N(a, d)$ è dato dall'insieme $N(a, d)$ in quanto, per definizione di intorno, $N(a, d)$ contiene gli elementi $a, c_1^{\mathscr{A}}, \dots, c_s^{\mathscr{A}}$, qualunque sia l'intero positivo d.

Inoltre, se $\mathscr{B} = (B, c_1^{\mathscr{B}}, \dots, c_s^{\mathscr{B}}, R_1^{\mathscr{B}}, \dots, R_m^{\mathscr{B}})$ è un'altra L-struttura finita e b è un elemento del dominio B, allora a e b hanno lo stesso d-tipo esattamente nel caso in cui esista un mappa biettiva

$$h : N(a, d) \to N(b, d)$$

tale che

- $h(a) = b$;
- $h(c_j^{\mathscr{A}}) = c_j^{\mathscr{B}}$, per $1 \leq j \leq s$;
- per ogni simbolo di relazione R_i, $1 \leq i \leq m$, di arietà t e per ogni t-tupla $(a_1, \dots, a_t)$ in $N(a, d)$, abbiamo $R_i^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_t)$ se e solo se $R_i^{\mathscr{B}}(h(a_1), \dots, h(a_t))$.

A questo punto possiamo dare la definizione di d-equivalenza tra strutture dello stesso linguaggio.

Definizione 5.5. Sia d un intero positivo, L un linguaggio relazionale e numerabile e $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ due L-strutture finite. Diciamo che $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ sono *d-equivalenti* se in $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ vi è esattamente lo stesso numero di elementi con d-tipo τ.

[2] Si faccia riferimento alla Definizione 1.6 a pagina 5.

[3] Notazione descritta nell'Osservazione 4.1 a pagina 39.

La nozione di d-equivalenza tra strutture si basa sul seguente fatto: fissato un d-tipo τ di un elemento a_1 della struttura $\mathscr{A}$, si supponga che vi siano esattamente l punti $a_1, a_2, \ldots, a_l$ nel dominio A con d-tipo τ, ovvero

$$\{(\mathscr{A}, a_i) \upharpoonright N(a_i, d) \mid 1 \leq i \leq l\} \subset \tau;$$

allora anche nella struttura $\mathscr{B}$ vi saranno esattamente l punti $b_1, b_2, \ldots, b_l$ con d-tipo τ:

$$\{(\mathscr{B}, b_i) \upharpoonright N(b_i, d) \mid 1 \leq i \leq l\} \subset \tau.$$

Si può dimostrare, senza difficoltà, che la d-equivalenza è una relazione di equivalenza nella classe di tutte le L-strutture di un linguaggio fissato.

Il prossimo teorema afferma che, dati due interi positivi d e n con d abbastanza grande rispetto ad n, la d-equivalenza tra due strutture $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ rappresenta una condizione sufficiente per affermare l'esistenza di una strategia vincente per il Duplicatore nel gioco di Ehrenfeucht-Fraïssé a n-mosse sulle due strutture considerate.

Teorema 5.1. *Si consideri un linguaggio relazione e numerabile L e due L-strutture finite $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$. Per ogni coppia di intero positivi n e d con $d \geq 3^{n-1}$, se $\mathscr{A}$ è d-equivalente a $\mathscr{B}$, allora $\mathscr{A} \equiv_n \mathscr{B}$[4].*

Questo risultato fornisce un nuovo metodo per dinomstrare la non definibilità al primo ordine delle proprietà, in quanto basta combinare il metodo dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé espresso dalla Proposizione 5.1.1 a pagina 43 con il Teorema 5.1 appena enunciato.

Proposizione 5.2.1. *Sia L un linguaggio relazionale e numerabile, $\mathcal{C}$ una classe di L-strutture finite e Q una query booleana su $\mathcal{C}$. Per mostrare che Q non è FO-definibile su $\mathcal{C}$ è sufficiente verificare che, per ogni intero positivo n, esistano due strutture $\mathscr{A}_n$ e $\mathscr{B}_n$ in $\mathcal{C}$ tali che:*

- *$\mathscr{A}_n$ è d-equivalente a $\mathscr{B}_n$ per qualche $d \geq 3^{n-1}$ e*
- *$Q(\mathscr{A}_n) = 1$ e $Q(\mathscr{B}_n) = 0$.*

Chiaramente, per analogia, combinando la Proposizione 5.1.2 a pagina 44 con il Teorema 5.1 si ottiene un metodo sufficiente a dimostrare l'inesprimibilità al primo ordine di queries m-arie.

Proposizione 5.2.2. *Sia L un linguaggio relazionale e numerabile, $\mathcal{C}$ una classe di L-strutture finite e Q una query m-aria su $\mathcal{C}$. Per mostrare che Q non è FO-definibile su $\mathcal{C}$ è sufficiente verificare che, per ogni intero positivo n, esistano due strutture $\mathscr{A}_n$ e $\mathscr{B}_n$ in $\mathcal{C}$ e due m-uple $\vec{a}$ e $\vec{b}$ nei rispettivi domini tali che:*

[4] Per la dimostrazione di questo risultato si consulti [2] pp. 83-84, Teorema 4.3.

- $(\mathscr{A}_n, \vec{a})$ *è d-equivalente a* $(\mathscr{B}_n, \vec{b})$ *per qualche* $d \geq 3^{n-1}$ *e*
- $\vec{a} \in Q(\mathscr{A}_n)$ *e* $\vec{b} \notin Q(\mathscr{B}_n)$.

A differenza del metodo dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé introdotto nella sezione precedente, quello basato sul concetto di d-equivalenza non risulta essere un metodo completo, in quanto fornisce un criterio solamente sufficiente a dimostrare l'inesprimibilità al primo ordine di proprietà di strutture. Infatti, le proposizioni appena enunciate consistono in un'applicazione del Teorema 5.1 che enuncia una proprietà sufficiente per affermare l'esistenza di una strategia vincente per il Duplicatore nel gioco EF.

Di conseguenza, il metodo espresso dalle Proposizioni 5.2.1 e 5.2.2 non può essere usato, ad esempio, per indagare la FO-definibilità di proprietà nella classe $\mathcal{L}$ costituita dagli ordini lineari finiti. Infatti, nell'Esempio 5.2.1 a pagina 50 abbiamo dimostrato che l'intorno di un elemento dell'ordine lineare $\mathbf{L}_n$, di raggio $d \geq 2$ arbitrario, coincide con l'intero dominio della struttura, qualunque sia la lunghezza n dell'ordine. Da questo segue che la sottostruttura generata dall'intorno risulta essere esattamente l'intero ordine lineare e chiaramente due ordini lineari sono dello stesso tipo di isomorfismo se e solo se hanno la stessa lunghezza. Di conseguenza, qualunque siano gli interi positivi m, n e $d \geq 2$, l'ordine lineare $\mathbf{L}_m$ è d-equivalente alla struttura $\mathbf{L}_n$ se e solo se $m = n$.
In particolare, il metodo della d-equivalenza non può essere utilizzato per mostrare che la query booleana $EVEN$ per la cardinalità pari non è esprimibile al primo ordine in $\mathcal{L}$.

Ciò nonostante, nei casi in cui risulti applicabile, il metodo introdotto in questa sezione risulta tecnicamente più semplice del metodo dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé, in quanto, anziché provare l'esistenza di una strategia vincente per il Duplicatore nel gioco EF a n-mosse, è sufficiente analizzare e contare i d-tipi delle due strutture.
Inoltre, spesso l'analisi dei d-tipi fornisce una traccia per trovare le strutture $\mathscr{A}_n$ e $\mathscr{B}_n$ candidate.

Concludiamo la sezione presentando alcuni esempi di applicazione del metodo basato sulla d-equivalenza nel caso di strutture finite. In particolare, consideriamo nella classe dei grafi finiti le queries booleane *CN*, *2-COLORABILITY* e *ACYCLICITY* introdotte nell'Esempio 1.1.6 a pagina 6.

Partiamo dalla proprietà di connettività di un grafo, espressa dalla query booleana

$$CN(\mathbf{G}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{G} \text{ è connesso} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

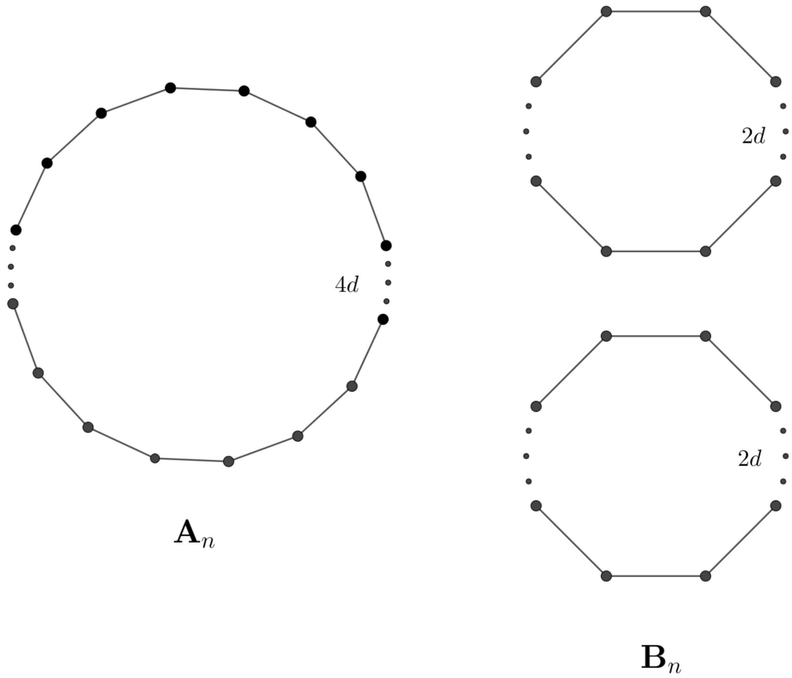

Figura 5.3: Dimostrazione della non definibilità della query *CN*

Nel Capitolo 2, attraverso la Proposizione 2.1.1 a pagina 14, abbiamo dimostrato che la query *CN* non risulta FO-definibile nella classe dei grafi arbitrari (finiti e non). Avevamo lasciato aperta la possibilità che se ristretta alla classe di tutti i grafi finiti la query potesse essere esprimibile con una formula del primo ordine.
Ora che conosciamo il metodo basato sulla d-equivalenza possiamo dimostrare che in realtà la connettività non risulta FO-definibile neanche nella classe dei soli grafi finiti.

Proposizione 5.2.3. *La query booleana CN non è FO-definibile nella classe $\mathcal{C}$ dei grafi finiti.*

Dimostrazione. Poiché stiamo indagando l'esprimibilità di una query booleana, dobbiamo considerare la Proposizione 5.2.1 che espone il metodo della d-equivalenza nel caso di query booleane. Chiaramente la proposizione è applicabile in quanto il linguaggio L dei grafi è costituito da una sola relazione (E che identifica gli archi) per cui risulta certamente relazionale e numerabile e, inoltre, la classe $\mathcal{C}$ in questione è costituita da L-strutture finite.

Per dimostrare l'inesprimibilità di *CN*, dobbiamo trovare, per ogni naturale n, due strutture $\mathscr{A}_n$ e $\mathscr{B}_n$ in $\mathcal{C}$ e un intero positivo $d \geq 3^{n-1}$ tali che $\mathscr{A}_n$ risulti d-equivalente a $\mathscr{B}_n$ e che una struttura risulti connessa mentre l'altra no.

Per ogni n e per ogni $d \geq 3^{n-1}$, consideriamo i due grafi $\mathbf{A}_n$ e $\mathbf{B}_n$ illustrati nella Figura 5.3; $\mathbf{A}_n$ è costituito da un ciclo di $4d$ nodi, mentre $\mathbf{B}_n$ è dato dall'unione di due cicli disgiunti entrambi con $2d$ nodi.
Dall'Esempio 5.2.2, sappiamo che in un ciclo il grafo di Gaifman coincide con il grafo stesso e, inoltre, la sottostruttura generata dall'intorno $N(a, d)$ di un vertice a è costituita da un cammino lineare con $2d - 1$ nodi. Risulta facile mostrare che grafi lineari della stessa lunghezza risultino isomorfi, ovvero abbiano lo stesso tipo di isomorfismo. Di conseguenza, in entrambi i cicli vi è un unico d-tipo, ovvero la classe dei cammini lineari con $2d-1$ nodi[5]. Inoltre, possiamo affermare che le strutture considerate risultano d-equivalenti in quanto ognuna di esse contiene esattamente $4d$ vertici con quest'unico d-tipo.

Chiaramente $CN(\mathbf{A}_n) = 1$, mentre $CN(\mathbf{B}_n) = 0$ in quanto il primo ciclo è un grafo connesso, mentre in $\mathbf{B}_n$ non esiste alcun cammino tra una coppia di nodi appartenenti ai due diversi cicli disgiunti.

Utilizzando la Proposizione 5.1.1 possiamo concludere che la query *CN* non risulta esprimibile con una formula del primo ordine neanche nella classe dei grafi finiti.

□

Consideriamo, ora, la query booleana *2-COLORABILITY* che esprime la proprietà di un grafo di essere 2-colorabile.
In generale, un grafo $\mathbf{G}$ senza loop si dice *k-colorabile* se è possibile assegnare uno dei k colori (rappresentati dalle relazioni unarie $R_1, R_2, \ldots, R_k$[6]) ad ogni nodo in modo che vertici adiacenti abbiano colori diversi.
La query *2-COLORABILITY*, quindi, risulta definita nel modo seguente:

$$\textit{2-COLORABILITY}(\mathbf{G}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{G} \text{ è 2-colorabile} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Utilizzando nuovamente il metodo basato sulla d-equivalenza, dimostriamo che questa proprietà non risulta esprimibile al primo ordine nella classe dei grafi finiti.

[5] Si noti che in $\mathbf{B}_n$ esistono cammini lineari con $2d - 1$ nodi, in quanto i cicli disgiunti sono formati da $2d$ nodi.

[6] Si veda l'Esempio 1.1.5 a pagina 5 in cui abbiamo introdotto la struttura di grafo k-colorabile.

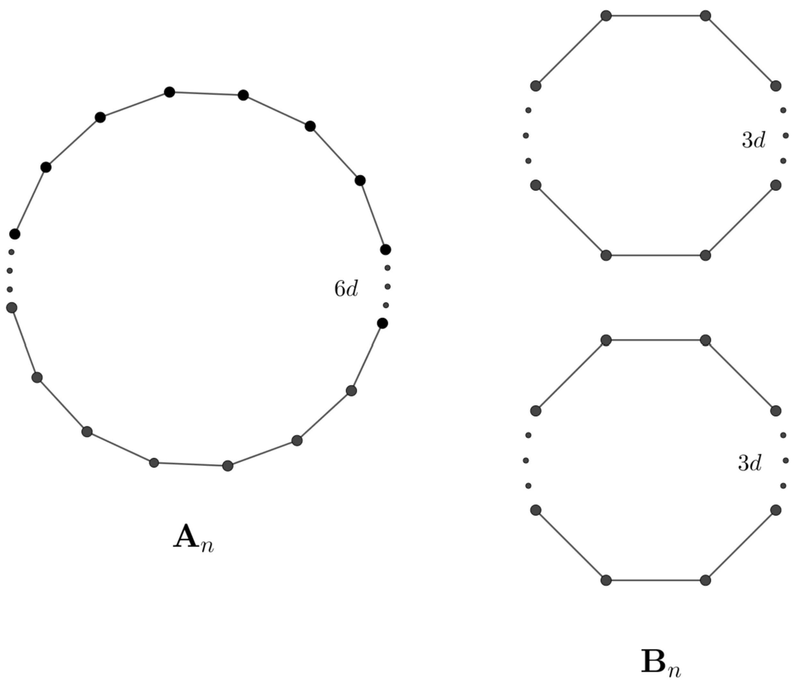

Figura 5.4: Dimostrazione della non definibilità della query *2-COLORABILITY*

Proposizione 5.2.4. *La query booleana 2-COLORABILITY non è FO-definibile nella classe $\mathcal{C}$ dei grafi finiti.*

Dimostrazione. La dimostrazione risulta molto simile a quella della proposizione precedente sull'inesprimibilità della query *CN*. Anche in questo caso è possibile applicare il metodo enunciato nella Proposizione 5.2.1 in quanto il linguaggio considerato $L = \{E, R_1, R_2\}$ è dotato solamente delle relazioni che identificano gli archi e i due colori dei vertici, per cui risulta relazionale e numerabile. Inoltre, considerando solamente grafi finiti, esaminiamo una classe di L-strutture finite, come richiesto dalle ipotesi del metodo.

Per ogni intero positivo n, sia $d = 3^{n-1}$ e siano $\mathbf{A}_n$ e $\mathbf{B}_n$ i due grafi illustrati nella Figura 5.4: il primo è un ciclo composto da $6d$ nodi, mentre $\mathbf{B}_n$ è dato dall'unione di due cicli disgiunti entrambi con $3d$ nodi.

Per quanto discusso nella dimostrazione della Proposizione 5.2.3, in modo analogo possiamo affermare che $\mathbf{A}_n$ è d-equivalente a $\mathbf{B}_n$.

Inoltre risulta verificata la seconda condizione del metodo in quanto

$$\textit{2-COLORABILITY}(\mathbf{A}_n) = 1 \quad \text{e} \quad \textit{2-COLORABILITY}(\mathbf{B}_n) = 0.$$

Infatti, essendo il primo grafo formato da un numero pari di nodi, esso risulta 2-colorabile: assegnando un colore (ad esempio quello espresso da R_1) ad un vertice e procedendo alternando i due colori in tutti gli altri nodi, l'ultimo vertice risulterà di colore diverso rispetto al primo considerato (ovvero l'ultimo nodo da colorare soddisferà la relazione R_2); questo permette di concludere che il ciclo $\mathbf{A}_n$ è 2-colorabile. Il grafo $\mathbf{B}_n$, invece, essendo composto da due cicli con un numero dispari di nodi, non è 2-colorabile: assegnando un colore ad un vertice di uno dei due cicli di $\mathbf{B}_n$ e procedendo in modo analogo a quanto fatto in $\mathbf{A}_n$, risulterà che l'ultimo vertice da colorare soddisferà la stessa relazione del primo da cui si è partiti; si trovano, quindi, due nodi adiacenti dello stesso colore. Possiamo, allora, concludere che il grafo finito $\mathbf{B}_n$ non soddisfala proprietà espressa dalla query considerata.

Grazie al metodo della d-equivalenza possiamo concludere la dimostrazione dell'inesprimibilità della query *2-COLORABILITY*. $\square$

Concludiamo con l'ultimo esempio che riguarda l'inesprimibilità al primo ordine della proprietà di un grafo di essere aciclico.
Un grafo $\mathbf{G}$ si dice *aciclico* se non contiene cicli, ovvero per qualsiasi vertice scelto non vi è la possibilità di tornare in esso percorrendo un cammino del grafo. La query che esprime questa proprietà è quindi di tipo booleano ed è definita nel modo seguente:

$$ACYCLICITY(\mathbf{G}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{G} \text{ è aciclico} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Anche in questo caso possiamo utilizzare il metodo espresso dalla Proposizione 5.2.1 per dimostrare che la query introdotta non risulta definibile con una formula del primo ordine nella classe dei grafi finiti.

Proposizione 5.2.5. *La query booleana ACYCLICITY non è FO-definibile nella classe $\mathcal{C}$ dei grafi finiti.*

Dimostrazione. Come per le dimostrazioni precedenti, è sufficiente trovare, per ogni intero positivo n, due grafi finiti $\mathbf{A}_n$ e $\mathbf{B}_n$ d-equivalenti (per un certo numero naturale d sufficientemente grande) e tali che solo uno tra $\mathbf{A}_n$ e $\mathbf{B}_n$ risulti aciclico.

Per ogni naturale n, consideriamo l'intero $d = 3^{n-1}$ e le due strutture illustrate nella Figura 5.5: $\mathbf{A}_n$ è dato da un grafo lineare con $4d$ vertici, mentre $\mathbf{B}_n$ è formato dall'unione disgiunta di un grafo lineare con $2d$ nodi ed un ciclo con altrettanti vertici.
Considerando strutture di questa tipologia, vale nuovamente la proprietà

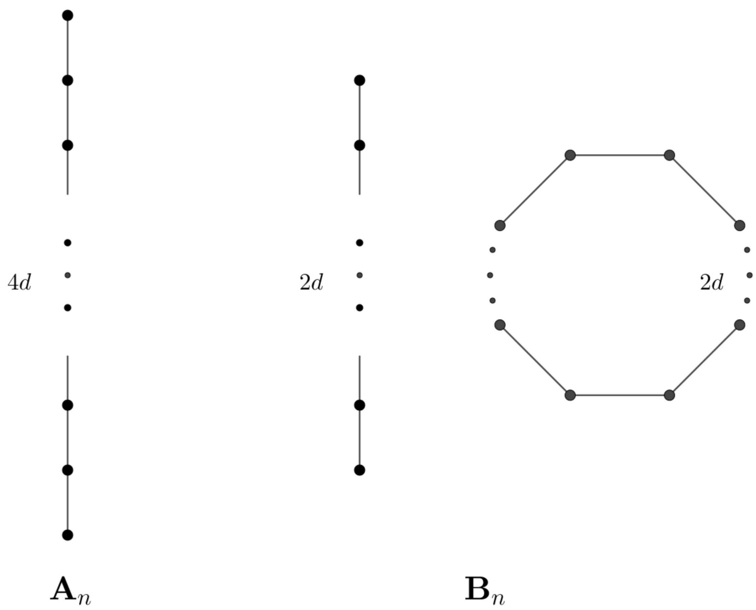

Figura 5.5: Dimostrazione della non definibilità della query *ACYCLICITY*

dimostrata nei precedenti esempi: in entrambe le strutture vi è un unico d-tipo dato dall'insieme dei cammini lineari con $2d-1$ vertici ed inoltre, essendo le strutture composte dallo stesso numero di nodi, possiamo affermare che $\mathbf{A}_n$ è d-equivalente a $\mathbf{B}_n$.

In aggiunta, la struttura $\mathbf{B}_n$ possiede un ciclo, mentre il grafo $\mathbf{A}_n$ soddisfa la query *ACICLICITY* in quanto non presenta alcun ciclo.

Utilizzando la Proposizione 5.2.1 a pagina 53, possiamo concludere che la query considerata non è esprimibile al primo ordine nella classe dei grafi finiti. □

Gli esempi considerati nella sezione mostrano la maggiore facilità di applicazione del metodo basato sulla d-equivalenza rispetto al quello dei giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé, anche se bisogna ricordare che il primo fornisce solo un criterio sufficiente a concludere l'inesprimibilità in FO, mentre il secondo risulta essere anche completo. Si può utilizzare il metodo della d-equivalenza, quindi, solamente quando si vuole dimostrare che una proprietà è inesprimibile al primo ordine, mentre per dimostrare il contrario è necessario utilizzare un metodo che sia completo.

Nei tre esempi sopra riportati abbiamo considerato query definite sulla classe $\mathcal{C}$ dei grafi finiti, in quanto è facile intuire che l'utilità del metodo della d-equivalenza risulta maggiore quando si considerano strutture date da grafi, poiché in questi casi le strutture stesse coincidono con il grafo di Gaifman da cui poter calcolare l'intorno $N(a, d)$ di ogni vertice per considerare i d-tipi delle strutture.

Elenco dei simboli e nomenclatura

La lista sottostante costituisce l'elenco di alcuni simboli utilizzati all'interno del documento.

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ Strutture di un linguaggio L (Definizione 1.1 a pagina 1)

$\mathscr{A} \models \Phi$ La struttura $\mathscr{A}$ è un modello dell'enunciato Φ(Definizione 1.4 a pagina 3)

$(\mathscr{A}, a) \models \varphi(x)$ La struttura $\mathscr{A}$ è un modello per la formula con una variabile libera x, soddisfatta da $a \in A$, i.e. $\mathscr{A} \models \varphi(a)$

$\mathscr{A} \upharpoonright D$ Sottostruttura di $\mathscr{A}$ generata da $D \subset A$ (Definizione 1.5 a pagina 5)

$\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$ Esiste un isomorfismo tra le strutture $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ (Definizione 1.6 a pagina 5)

FO Insieme delle formule del primo ordine

FO($\mathcal{C}$) Insieme delle queries sulla classe di strutture $\mathcal{C}$ FO-definibili (Definizione 1.9 a pagina 7)

$\mathbf{G} = (V, E)$ Grafo con relazione binaria su V, l'insieme dei vertici

$\mathbf{L}_n$ Ordine lineare standard sull'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$

$\mathcal{G}_n(A, W)$ Gioco a n mosse con dominio A e insieme di sequenze vincenti W

$\mathscr{A} \equiv_n \mathscr{B}$ Il Duplicatore possiede una strategia vincente nel gioco EF a n mosse su $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ (Definizione 3.1 a pagina 19)

$\mathscr{A} \not\equiv_n \mathscr{B}$ Lo Spoiler possiede una strategia vincente nel gioco EF a n mosse su $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ (Definizione 3.1 a pagina 19)

$\mathscr{A} \simeq_k \mathscr{B}$ Relazione *back-and-forth* tra le strutture $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ (Definizione 4.5 a pagina 39

$\mathbf{qr}(\varphi)$ Rango di quantificatori della formula φ (Definizione 4.1 a pagina 28)

FO$[k]$ Insieme delle formule del primo ordine con rango di quantificatori al più k

$PATH_k(x, y)$ Query booleana per l'esistenza di un cammino di lunghezza al più 2^k tra i nodi x e y di un grafo $\mathbf{G}$

$tp_k(\mathscr{A}, \vec{a})$ m-tipo di rango k della m-upla $\vec{a}$ su $\mathscr{A}$ (Definizione 4.4 a pagina 37)

$tp_k(\mathscr{A})$ Insieme degli enunciati di FO$[k]$ validi nella struttura $\mathscr{A}$

$\alpha_i(\vec{x})$ Formula di FO$[k]$ che descrive l'i-esimo m-tipo di rango k (Equazione 4.1 a pagina 37)

Bibliografia

[1] Ehrenfeucht A., *An application of games to the completeness problem for formalized theories*, Fundamenta Mathematicae 49, pp. 129-141, 1961.

[2] Fagin R., Stockmeyer L., Vardi M.Y., *On Monadic NP vs. Monadic co-NP*, Information and Computation 120(1), pp. 78-92, 1995.

[3] Fraïssé R., *Sur une nouvelle classification des systèmes de relations*, Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences 230, pp.1022-1024, 1950.

[4] Fraïssé R., *Sur quelques classifications des systémes de relations*, Publications Scientifiques de l'Université d'Alger, serie A 1, pp. 35-182, 1954.

[5] Grädel E., Kolaitis P. G., Libkin L., Marx M., Spencer J., Vardi M. Y., Venema Y., Weinstein S., *Finite Model Theory and Its Applications*, Springer, Berlino, 2007.

[6] Hodges W., Väänänen J., *"Logic and Games", The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2022 Edition), Zalta E. N. & Nodelman U. (eds.), URL = <https://plato.stanford.edu/Archives/fall2022/entries/logic-games/>.

[7] Immerman N., *Descriptive Complexity*, Springer, New York, 1999.

[8] Libkin L., *Elements of Finite Model Theory*, Springer, Berlino, 2004.

[9] Poizat B., *A Course in Model Theory. An Introduction to Contemporary Mathematical Logic*, Springer, New York, 2000.

[10] Rosenstein J. G., *Linear Ordering*, Academic Press, Londra, 1982.

[11] Shoenfield J. R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley Publishing Company, 1967.

[12] Tarski A., *Address at the Princeton University bicentennial conference on problems of Mathematics (17-19 dicembre 1946)*, in Hourya Sinaceur, Bulletin of Symbolic Logic, pp. 1-44, 2000.

[13] Väänänen J., *Models and games*, Cambridge University Press, 2011.